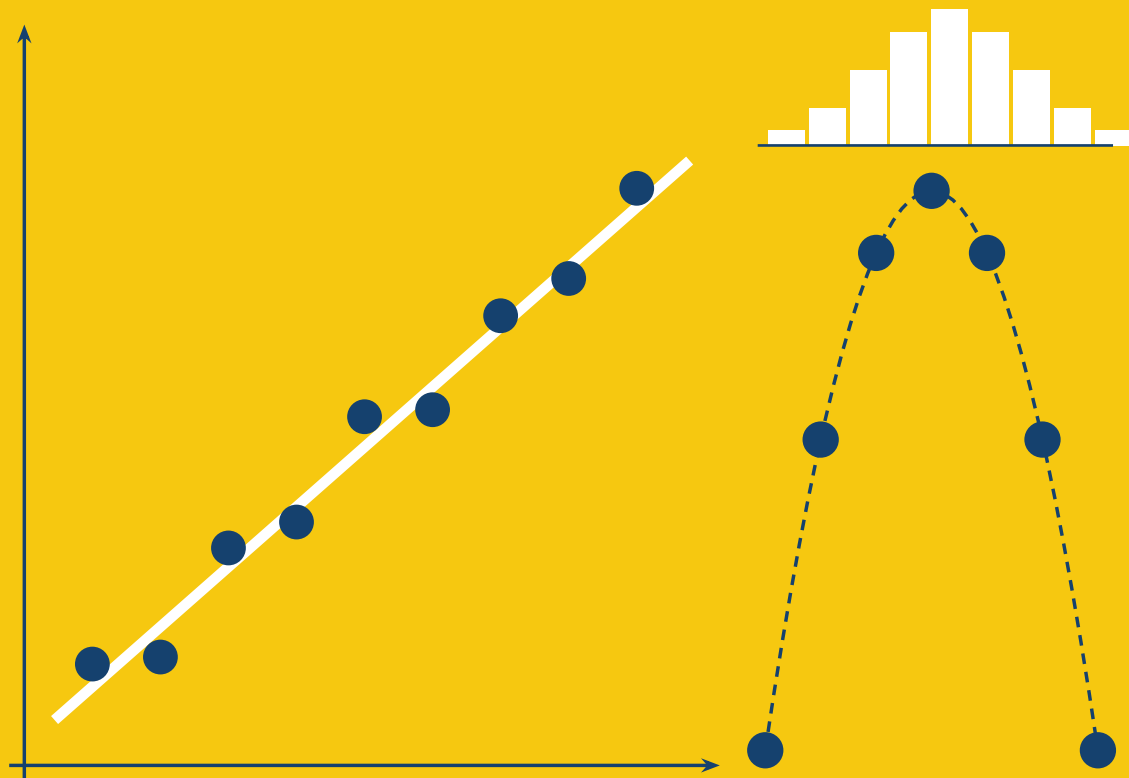


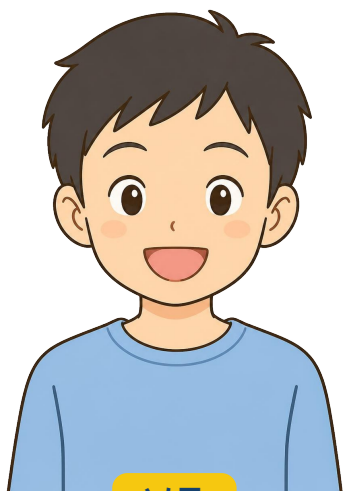
かんすう 関数とデータ

きまりを見つめる

ひょう 表・グラフ・式で、しき 変化のきまりをつかもう



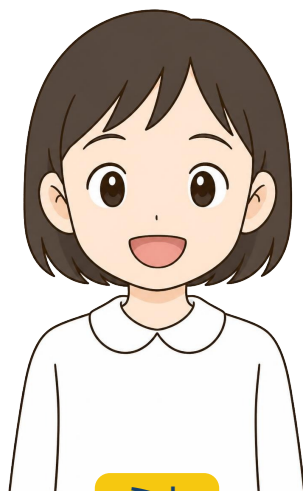
いっしょに^{まな}学ばなかも



ソラ

「なぜ？」と聞くのが
大好き。

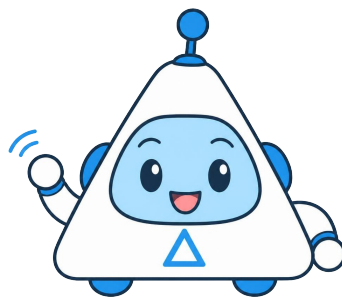
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。

手を動かして^{かんが}考える。



デルタ

計算と記録がとくいな

ロボット。名前は

「変化」を表す

記号 Δ から。

こまったら、3人の^{にん}ことばをヒントにしよう。

ぶつ り かい すうがく
物理を理解するための数学

だい かん
第3巻

かんすう 関数とデータ

きまりを^みつける

ひょう しき へん か
表・グラフ・式で、変化のきまりをつかもう



ほん ろう せん ほん とお
7本の路線が、この本を通っています

ぶつ り かい すうがく へんしゅういんかい へん
「物理を理解するための数学」編集委員会編

もくじ

第3巻 関数とデータ

△ = 路線 (p.4・5) ★☆☆☆☆ = 内容の高さ (★は必ず、☆の所まで) p.8 = 8 ページ

序章

はかったデータから、きまりを見つめよう



★★★★★

p.8

ばねの実験から、式を作ってみよう

第1部

関数とグラフ

p.22

3-1

変わる量と変わらない量



★★★★★

p.24

ずっと変わらない数と、問題ごとに決まる数

3-2

場所を数で表す：座標



★★★★★

p.48

「どこ」を2つの数で伝えよう

3-3

関数は「入ると出てくる」ルール



★★★★★

p.76

表・グラフ・式は、同じことを言っている

3-4

グラフをかこう・読もう



★★★★★

p.104

実験の点に、なめらかな線を引こう

3-5

グラフの傾きは「変化の速さ」



★★★★★

p.128

坂が急なほど、速く変わっている

3-6

2本の直線が交わる場所：連立方程式



★★★★★

p.162

ふたりが出会うのは、グラフの交わる点

第2部

曲がったグラフ

p.190

3-7

反比例のグラフ



★★★★★

p.192

空気をおしちぢめるほど、おし返す力は強くなる

3-8

カッコをはずす：展開と平方完成



★★★★★

p.218

式の形を変えると、最高点が見えてくる

3-9

放物線と $y = ax^2$



★★★★★

p.256

投げたボールは、なぜこの形に飛ぶ？

3-10 ボールはいつその高さに届く？ : 2 次方程式  ★★★★★ P.290

答えが 2 つ出るのは、のぼりとくだりがあるから

第 3 部 倍々とけた P.326

3-11 指数関数 : いまある量に比例してふえる・へる  ★★★★★ P.328

倍々でふえると、あつという間に大きくなる

3-12 対数 : けたを数える道具  ★★★★★ P.358

音の大きさの「デシベル」は、けたの数え方

第 4 部 データと統計 P.386

3-13 データのちらばり : ヒストグラムと平均  ★★★★★ P.388

何回もはかって、本当の値に近づこう

3-14 ばらつきを 1 つの数で : 標準偏差  ★★★★★ P.416

「だいたいこのくらいずれる」を数で言う

3-15 2 つの量の関係 : 散布図と相関  ★★★★★ P.442

背の高い人は、足も速い？

3-16 データに直線を引く : 最小二乗法  ★★★★★ P.474

ずれがいちばん小さくなる線は、どれ？

3-17 偶然のばらつき : 確率と正規分布  ★★★★★ P.498

サイコロをたくさん足すと、つりがねの形に

こたえ P.528 記号カード P.544 よく使う定数・単位・公式 P.548

できるようになったことチェック表 P.555 つぎの巻へ P.558 さくいん P.561

この本の路線図

この本の章は、7本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるかを確かめよう。



① 変化 へんか
ひき算 ひきざん → 傾き かたむき → 微分 びぶん

この巻の駅: 3-5、3-7、3-8、3-9、3-10



② たし合わせ たしあわせ
かけ算 かけざん → 面積 めんせき → 積分 せきぶん

この巻の駅: (この巻には駅がありません)



③ 倍々 ばいばい
累乗 るいじょう → 指数 しすう → e

この巻の駅: 3-11、3-12



④ 回転と波 かいてん なみ
角 かく → $\sin$ → 複素数 ふくそすう

この巻の駅: (この巻には駅がありません)



⑤ 表 ひょう
九九の表 くくひょう → 行列 ぎょうれつ

この巻の駅: 3-3、3-6



⑥ 矢印 やじるし
向き むき → ベクトル ベクトル → 場 ば

この巻の駅: 3-2

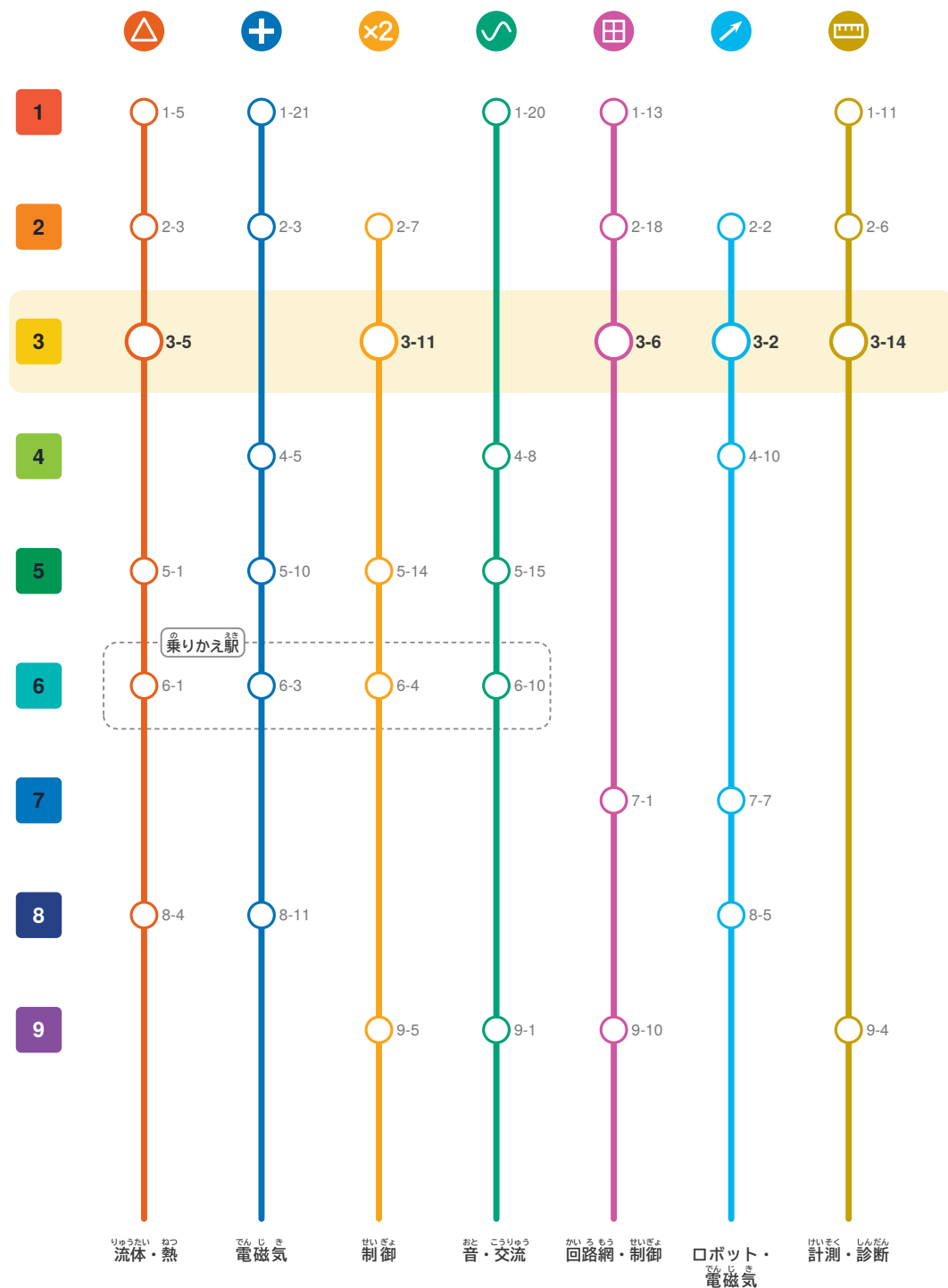


⑦ はかる はかる
目もり めもり → 誤差 ごさ → 統計 とうけい

この巻の駅: 3-1、3-4、3-13、3-14、3-15、3-16、3-17

ぜん かん ろ せん ず 全9巻の路線図

した い へ 行く ほど 先の 巻。 色 の 帯 が この 巻 です。

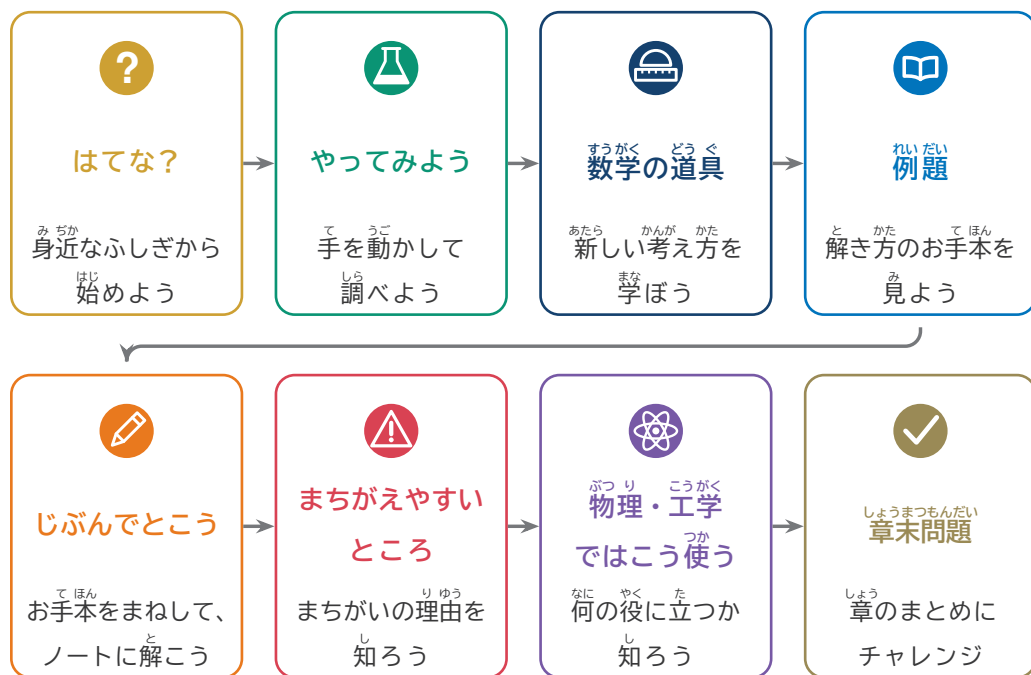


しゅうてん だいがく こうがく つか ぶん や てんせん かこ の えき だい かん び ぶんほうていしき
終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第6巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

① 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

② 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

道しるべ この章の前に 1-14 2-2 この章の先に 3-5 5-9

前に読んでおくといふ章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

③ ★は「どこまで登るか」のしるし



しょう こ み だ
章と小見出しには★がついています。★
かず ないよう たか やまのぼ
の数は、内容の高さ。山登りにたとえ
と、★1つは「はじめのいっぽ」、★5つは
ちようじよう
「頂上」です。

しろ しょう なか のぼ
白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登
る」というしるし。じぶん よ
自分の読める★まで読
んで、さきすす
先へ進んでもだいじょうぶ。

④ ノートを1冊用意しよう

「じぶんでとこう」としょうまつもんだい
章末問題は、ノート
とに解きます。ほん ほん か
本には書きこまないで、
なん ど なお
何でもやり直せます。
もんだい ほんごう か ず しき
問題の番号を書き、図をかくてから式を
かこう。こたえ ほん うし
書こう。答えには単位をつけます。

れい 例	じぶんでとこう 1
	$6 \text{ m/s} \times 15 \text{ s} = 90 \text{ m}$
	こたえ 90 m

⑤ この本の3つのやくそく

- ① かず
数には、いつもたん い
単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
 - ② しき か まえ ひよう ず
式を書く前に、表や図をかくてかんが
考えよう。
 - ③ かえ けいさん でんたく
くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。
- もんだい こたえ ほん うし
問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

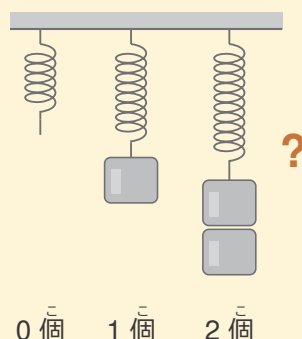
はかったデータから、 きまりを^み見つけよう

ばねにおもりをつるすと、ばねはのびます。おもりをふやすと、もっとのびます。ここまでは、だれでも知っています。

では、おもりを1個ふやすごとに、何^{なん}cm のびるのでしょうか。10個つるしたら、何^{なん}cm のびるのでしょうか。「たくさんつるすと、たくさん^{こた}のびる」ということばだけでは、答えられません。

? はてな?

ばねにおもりを1個ずつ下^さげていくと、のび
はどうなるかな?
はかった数^{かず}を表^{ひょう}とグラフにしたら、のびを計^{けい}
算^{さん}する式^{しき}を作^{つく}れるかな?



この巻は、このような「はかった数^{かず}から、きまりを^み見つける」方法^{ほうほう}を学^{まな}ぶ巻^{かん}です。序章では、ばねの実験^{じっけん}を1つ最後^{さいご}まで通^{とお}してやってみて、この巻の旅^{かん}の地図^{たび}を作^{つく}ります。

🕒 おも^{おも}だ^だそう この章^{しょう}で使^{つか}う、前^{まえ}に学^{まな}んだこと

- 2-3** 変^かわった量^{りょう}は「あとーまえ」、1あたりの量^{りょう}はわり算^{ざん}で求^{もと}める。
- 2-6** はかった値^{あたい}にはずれがある。1目^めもりの10分^{ぶん}の1まで読^よむ。
- 2-15** 比例^{ひれい} $y = ax$ のグラフは、原^{げん}点^{てん}を通^{とお}る直^{ちよく}線^{せん}。ばねは $F = kx$ 。

はかる → 表 → 点 → 線 → 式

科学者や技術者は、新しいきまりを見つけるとき、いつも同じ5つの段を進みます。この巻の章は、どれもこの5つの段のどこかをくわしくする章です。

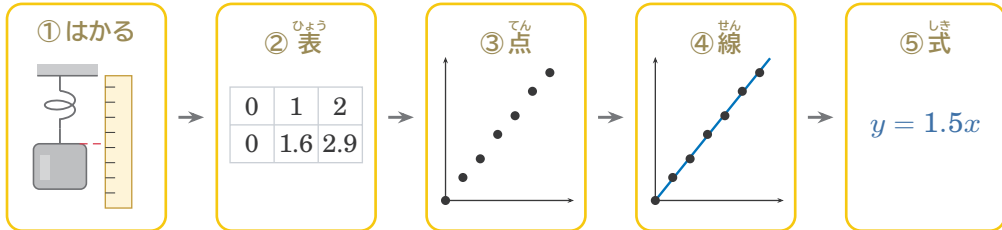
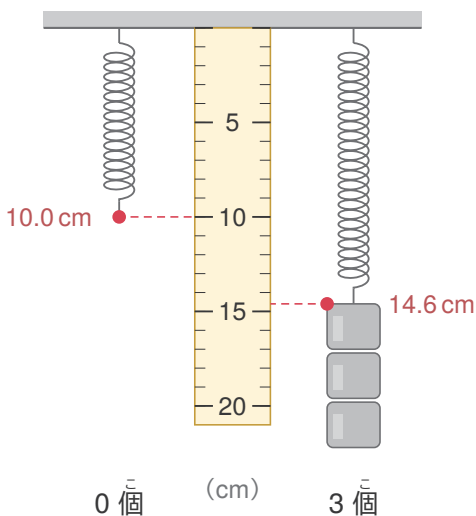


図1 はかった数から式ができるまでの5つの段

1つつ、ばねの実験で見ていきましょう。

1 はかる：目もりを読む



ソラさんは、ばねを天井の板につるし、横に目もり板を立てました。目もり板の0は、ばねの上のはしにそろえてあります。だから、ばねの下のはしの目もりが、そのまま「ばねの長さ」です。

目もり板の1目もりは1cmです。目もりと目もりのあいだは、1目もりの10分の1まで、目で見つもって読みます(2-6)。おもりがなく、ばねの長さは10.0cmでした。

つぎに、1個20gのおもりを1個ずつふやしてつるし、そのたびにばねがゆれなくなるのを待ってから、目もりを読みました。3個のときは14.6cmでした。

「10.0 cm」の「.0」は、書かなくてもいいように見えます。でも、「小数第1位まで読んだら、ちょうど0だった」という大事な記録です (2-6)。

2 表：はかった数を並べる

はかった数は、ノートにばらばらに書かないで、表に並べます。表にすると、変わり方が横に並んで見えるからです。

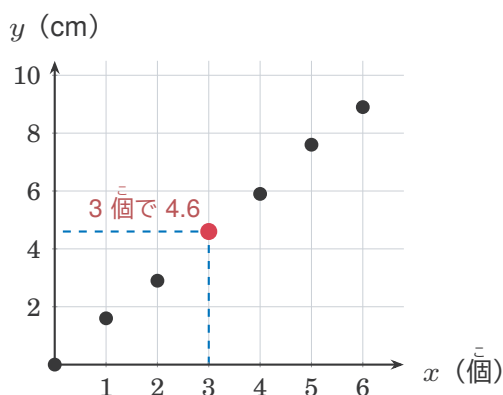
おもりの数 x (個)	0	1	2	3	4	5	6
ばねの長さ (cm)	10.0	11.6	12.9	14.6	15.9	17.6	18.9
のび y (cm)	0	1.6	2.9	4.6	5.9	7.6	8.9

表1 ソラさんがはかったばねの長さ、のび

いちばん下の行の「のび」は、ばねの長さから、おもりが無いときの長さ 10.0 cm をひいた数です。「あとーまえ」で、変わった量を求めました (2-3)。たとえば3個のときは、 $14.6 - 10.0 = 4.6$ で、4.6 cm のびています。

表を横に見ると、おもりが1個ふえるごとに、のびは 1.6、1.3、1.7、1.3、1.7、1.3 とふえています (となりどうしのひき算)。だいたい 1.5 くらいずつ、でも、ぴったり同じではありません。これは、あとでもう一度考えます。

3 点：表の1列を、グラフの1つの点にする

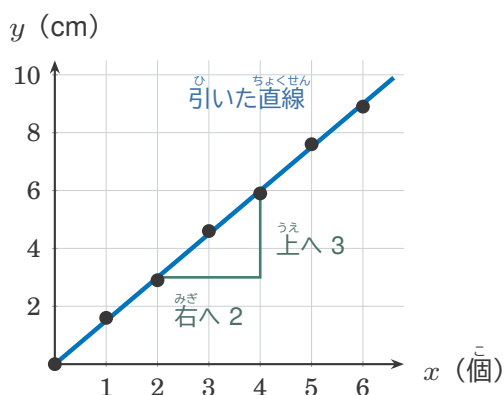


横の軸におもりの数 x 、たての軸にのび y をとります。表のたての1列 (x と y の1組) を、1つの点にします。赤い点は、3個で 4.6 cm のびた、という1組です。0 から右へ3、そこから上へ 4.6 進んだ所にかきます (2-15) の点のかき方。3-2 でくわしく学びます)。

7列の表は、7つの点になりました。数の並びでは見えにくかったことが、点にすると一目で見えます。点は、左下から右上へ、ほぼまっすぐに並んでいます。

④ 線：点の並びに合う線を引く

点がまっすぐに並んでいるので、透明な定規を当てて、点のなるべく近くを通る直線を1本引きます。おもりが0個ならのびも0なので、線は原点($x = 0$, $y = 0$ の点)から引きます。点どうしを順に結んだ、ぎざぎざのおれ線にはしません。点のてんこぼしは、ばねのきまりではなく、はかるときのずれ(2-6)だと考えるからです(3-4でくわしく)。



⑤ 式：線のきまりを文字で書く

引いた直線を読みます。緑の階段のように、直線は右へ2進むと、上へ3上がります。だから、右へ1進むと $3 \div 2 = 1.5$ 上がります。おもり1個あたり1.5 cm のびる、ということです。

1個あたり1.5 cm なので、 x 個なら、1.5 cm の x 分で $1.5 \times x$ (cm) のびます。 $x = 0$ なら $y = 0$ で、原点も通ります。文字の式では×をはぶいて(2-12)、

$$y = 1.5x$$

と書けます。2-15で学んだ比例の形 $y = ax$ で、1.5が比例定数です。

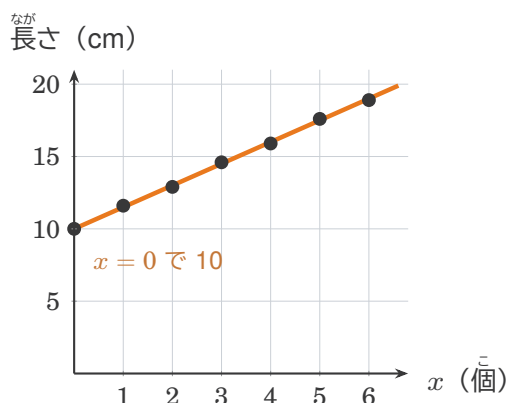
② はてな? の答え：おもりを1個ふやすごとに、のびは約1.5 cm ずつふえます。表とグラフから、のびを計算する式 $y = 1.5x$ を作りました。

たいせつ

しき
式ができると、はかっていない数も計算できる。

おもり 8 個なら、 $y = 1.5 \times 8 = 12$ で、約 12 cm のびる。

ただし、ばねは引っぱりすぎると、のびきってもとにもどらなくなり、式が使えなくなります。式が使える x の範囲は 3-1 で、線をはかった所より先へのばす危なさは 3-4 で学びます。



なが 長さでグラフにすると？

のびのかわりに、ばねの長さ（表のまん中の行）で点をうつと、左のグラフになります。点はやはりまっすぐに並びますが、線は原点を通らず、10 の所から始まります。長さは $10 + 1.5x$ で、比例ではありません。このような直線の式は、3-5 でくわしく学びます。

てん せん うえ 点は、線の上にぴったりのらない

ひょう かず
表の数で、「のび÷おもりの数」を計算してみましょう。おもり 1 個あたりののびです（2-3 の「1 あたりの量」）。

おもりの数 x (個)	1	2	3	4	5	6
のび y (cm)	1.6	2.9	4.6	5.9	7.6	8.9
$y \div x$ (cm/個)	1.6	1.45	1.53...	1.475	1.52	1.48...

ひょう
表 2 1 個あたりののびは、どれも 1.5 の近く。でも、ぴったり 1.5 ではない。

どれも 1.5 の近くですが、1 つも 1.5 ぴったりではありません。だから、点は直線 $y = 1.5x$ の少し上や少し下にあり、線の上にぴったりのってはいません。

理由は、はかるときのずれです (2-6)。目もりの 10 分の 1 は目で見つもの
で、人によって少しちがいます。ばねはなかなかゆれが止まりません。おもりも、
どれもぴったり 20 g とはかぎりません。どんなにていねいにはかっても、ずれ
は 0 にはなりません。

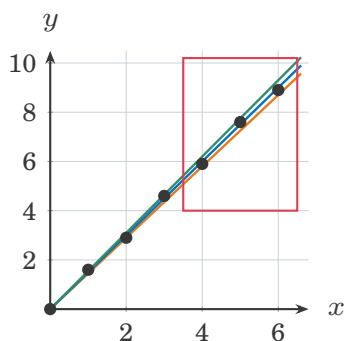
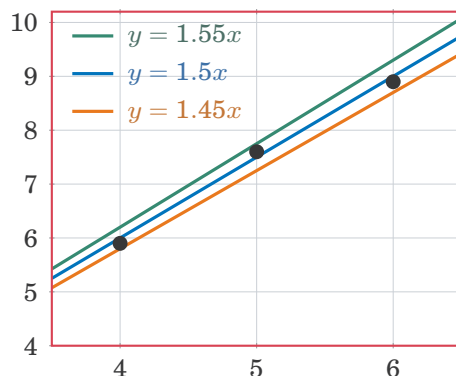


図 2 左のグラフの赤い四角の中を、右で大きくした。3 本の直線は、どれも点の近くを
とおる。

右のグラフでは、3 本の直線を引きました。どの線も、点の近くを通ります。
でも、どの線にも、上にはずれた点と下にはずれた点があります。友だちと同じ
表からグラフをかいて、定規で線を引くと、きっと少しずつちがう線になるで
しょう。

？ はてな？

この巻からの宿題

ずれた点に、どの直線を引けばいい？ 人によって答えが変わらない決め
方はある？

「目で見ても、だいたい」ではなく、だれがやっても同じ線になる決め方がある
と便利です。そのためには、まず「ずれの大きさ」を 1 つの数で言えるようにな
る必要があります (3-13・3-14)。そして、ずれ全体がいちばん小さくなる直線

を、計算で決める方法を、この巻の終わりの 3-16 で学びます。この宿題を、覚えておいてください。

△ やってみよう 輪ゴムでもやってみよう

- ① 輪ゴムをフックにかけ、下に小さなポリぶくろをつるそう。横にものさしを立てて、ぶくろの上のはしの目もりを読もう。
- ② ぶくろに 10 円玉を 5 まいずつ入れて、そのたびに目もりを読もう (10 円玉 1 まいは約 4.5 g)。
- ③ のびを表にして、方眼のノートに点をうとう。横の軸は 10 円玉のまい数、たての軸はのび (cm)。
- ④ 点はまっすぐに並んだかな？ ばねのグラフとくらべよう。

輪ゴムは、のびるにつれてのび方が変わり、点が曲がって並ぶことがあります。まっすぐでないグラフのきまりは、第2部 (3-7~3-10) で学びます。

🔍 コラム なぜ「関数とデータ」なの？

物理のきまりの多くは、「この量が決まると、あの量が決まる」という形をしています。おもりの数が決まると、ばねののびが決まる。時刻が決まると、ボールの高さが決まる。このような関係を、数学では関数とよびます (3-3)。

関数は、頭の中だけで見つかるものではありません。はかった数 (データ) を表とグラフにして、はじめて見えてきます。関数とデータは、きまりを見つげるための車の両輪です。技術者は、実験のデータから式を作り、その式で機械を設計します。

△ やってみよう 表計算で、5つの段をやってみよう

① A列におもりの数、B列にばねの長さを入力しよう。

② C2に「=B2-B\$2」と入力して、C8までコピーしよう（\$は2-18）。

③ A列とC列を選んで、点だけのグラフ（散布図）を作ろう。

④ グラフに「近似曲線（線形）」を追加して、式を表示させよう。

	A	B	C
1	x	ながさ	のび
2	0	10.0	0.0
3	1	11.6	1.6
4	2	12.9	2.9
5	3	14.6	4.6
6	4	15.9	5.9
7	5	17.6	7.6
8	6	18.9	8.9

④では、 $y = 1.4893x + 0.0321$ のような式が出ます（表計算のソフトによって、書き方は少しちがいます）。1.4893は1.5にとっても近く、0.0321は0にとっても近い数です。表計算は、定規を使わずに、計算で1本の直線を決めてくれました。どうやって決めているのかは、3-16でわかります。

ただし、表計算が出した式を、そのまま信じてはいけません。数を1つ入力しまちがえても、表計算はだまって式を出します。だから、式を使う前に、かならずグラフの点を自分の目で見て、1つだけ遠くはなれた点がないか、線が点の並びに合っているかを確かめます。機械に計算をまかせても、確かめるのは人の仕事です。



ソラ

線を引くたびに、ちょっとずつ傾きが変わっちゃう。計算で1つに決まるなら、すっきりするね。

ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

はかりの目もりを決める：校正

キッチンスケールや体重計の中には、重さが
かかると少しだけ曲がる金属の部品（ロード
セル）が入っています。曲がると、部品から出
る電気の信号（電圧）が少し変わります。



工場では、重さが正確にわかっているおもり（分銅）をのせて信号をは
かり、表とグラフから直線の式を作ります。1 kg ごとに信号が 2.5 mV
(1V の 1000 分の 1 が 1mV) ふえるなら、信号が 3.0 mV のときは
 $3.0 \div 2.5 = 1.2$ で、1.2 kg です。計器の目もりをこのように決めること
を、校正といいます。

データロガー：はかる・表にするを自動で

工場や気象台では、センサーが 1 秒ごとや 10 分ごとに温度や電圧をはか
り、自動で表にしていく機械（データロガー）が使われています。1 日で
何万行にもなる表は、人の目では読みきれません。グラフにすれば、どこ
で何が起きたかが一目でわかります (3-4)。

だいがく たね
大学への種

実験のデータから機械の式を作るとは、大学の制御の勉強でも大事な仕
事です。式があれば、機械を動かす前に、どう動くかを計算で確かめられ
るからです。

はかって、きまりを見つけよう

ばねのほかに、身のまわりには、はかって表とグラフにすると、きまりが見えてくるものがたくさんあります。夏休みの自由研究にもぴったりです。グラフがどんな形になるか、先に予想してから、はかってみましょう。

はかること	よこ じく 軸 横の軸	たての じく 軸 たての軸	かたち 形 形	しょう 章 章
おな はや ある ほ すう 同じ速さで歩いた歩数（スマホの歩数計）	じ かん ふん 時間（分）	ほ すう 歩数	ア	3-5
ふ こ かい じ かん 振り子が 10 回ゆれる時間	なが 長さ（cm）	じ かん びょう 時間（秒）	イ	3-11
かいちゆうでんとう あか 懐中電灯からはなれたときの明るさ（スマホの照度センサー）	きょり 距離（cm）	あか 明るさ（lx）	ウ	3-7
さか ころ すす きょり 坂を転がるボールの進んだ距離（動画で調べる）	じ かん びょう 時間（秒）	きょり 距離（cm）	エ	3-9

表3 はかって、グラフにしてみよう（「グラフの形」は、下の図のア～エ）

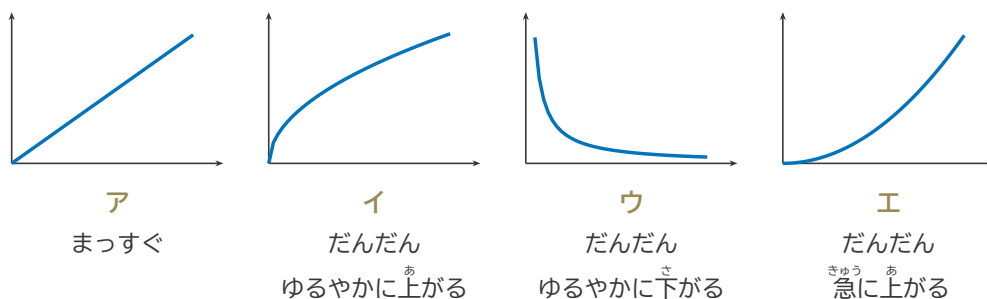


図3 グラフの形の例。形がわかると、式のなかまが予想できる。

まっすぐなグラフ（ア）なら、ばねと同じように傾きを読めば式が作れます。曲がったグラフ（イ・ウ・エ）は、どんな式になるのでしょうか。それを見分ける道具を、この巻で 1 つずつ手に入れていきます。表の右のはしの章を読んだら、もう一度このページにもどってきてください。

たいせつ

はかった数は、消さずにそのまま記録しよう（へんだと思った数も）。

この巻が通る路線と駅

この本の章は、7本の路線の駅です。同じ路線の駅は、1つの考え方でつながっています。第3巻を通るのは、次の5本です。

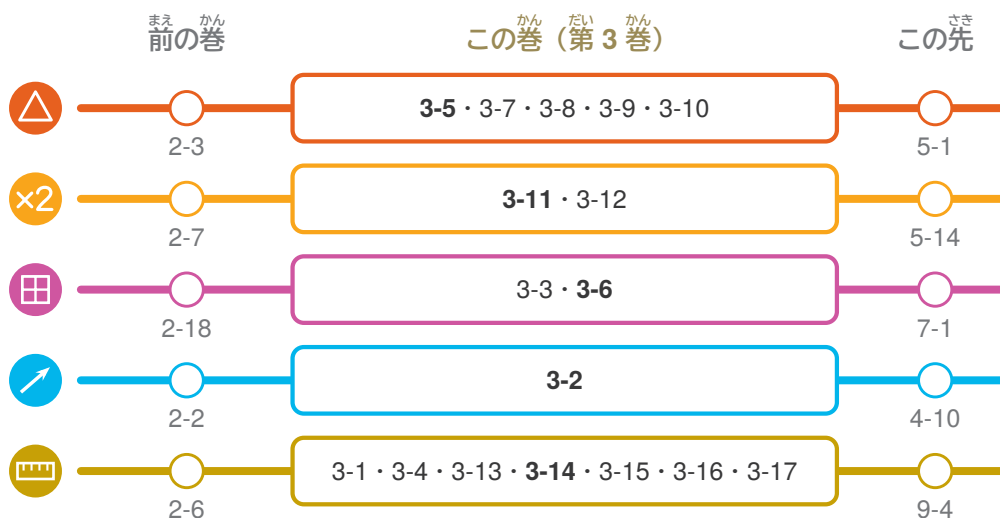


図4 第3巻を通る5本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字は大きな駅）。

	路線	大きな駅のつながり
	へん か 変化	へんかりょう 変化量 (2-3) → かたむ 傾き (3-5) → びぶん 微分 (5-1)
	ばいばい 倍々	るいじょう 累乗 (2-7) → しすうかんすう 指数関数 (3-11) → e (5-14)
	ひょう 表	ひょうけいさん 表計算 (2-18) → れんりつほうていしき 連立方程式 (3-6) → ぎょうれつ 行列 (7-1)
	やじるし 矢印	マイナスの向き (2-2) → ざひょう 座標 (3-2) → ベクトル (4-10)
	はかる	ずれ (2-6) → ひょうじゅんへんさ 標準偏差 (3-14) → けいそく しんだん 計測と診断 (9-4)

表4 5本の路線の、この巻の大きな駅

傾きは「変化の速さ」、指数関数は「いまある量に比例してふえる量」、座標は「場所を2つの数で表す方法」、標準偏差は「ずれを1つの数で表したもの」です。序章のばねの実験は、はかる路線(🚂)の駅です。はかる路線は、この巻でいちばんたくさんの駅に止まります。たし合わせの路線(+)と回転と波の路線(🌊)は、この巻では通らず、第4巻(4-5・4-8)で次の駅に着きます。

この巻でできるようになること

第3巻は、4つの部に分かれています。どの部も、ばねの実験で見た5つの段（はかる・表・点・線・式）のどこかを、くわしくします。

第1部 関数とグラフ 3-1～3-6

$$(3, 2) \quad y = 2x + 5$$

- ・場所を2つの数（座標）で表せる。
- ・表・グラフ・式を行ったり来たりできる。
- ・グラフの傾きを読み、2本の直線の交わる点を求められる。

第2部 曲がったグラフ 3-7～3-10

$$y = \frac{a}{x} \quad y = ax^2$$

- ・反比例と放物線のグラフを読む。
- ・式のかっこをはずしたり、まとめることができる。
- ・ボールがその高さに届く時刻を計算できる。

第3部 倍々とけた 3-11・3-12

$$2^{10} = 1024 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

- ・倍々にふえる量・半分ずつへる量を計算できる。
- ・けたのちがう量を、けたの数（対数）でくらべられる。

第4部 データと統計 3-13～3-17

平均 ± ばらつき

- ・平均と、ずれの大きさを1つの数で言える。
- ・ずれた点に、いちばん合う直線を引ける。
- ・偶然を確率で考えられる。

図5 4つの部と、できるようになること

たいせつ

どの章でも、見つけたきまりは「はかる → 表 → 点 → 線 → 式」の順に確かめる。

式ができたなら、表やグラフにもどって、数が合うかを確かめる。

この巻で出会う新しい記号

第3巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくても大丈夫です。どの記号も、使う前に、場面と表とグラフで、ていねいに説明します。章の中の「記号カード」は、巻末にまとめて並べてあります。

記号	読み方	ひとことと言うと	章
x_1	エックス・いち	1番めの x (かけ算ではない)	3-2
$ x $	ぜったいち 絶対値エックス	0からの距離	3-2
$f(x)$	エフ・エックス	関数 f に x を入れた値	3-3
α, β	アルファ、ベータ	2次方程式の2つの解	3-10
$x^{\frac{1}{2}}$	エックスの2分の1乗	$\sqrt{x}$ のこと	3-11
$\log_a b$	ログ	a を何乗すると b になるか	3-12
$\bar{x}$	エックス・バー	平均	3-13
σ	シグマ	ばらつきのおおきさ (標準偏差)	3-14
$P(A)$	ピー・エー	ことがら A の起こりやすさ (確率)	3-17

表5 この巻で出会う記号 (くわしくはそれぞれの章で)

記号は、長いことばを短く書くための約束です。たとえば $f(3)$ は「関数 f に3を入れた値」という長いことばを、4文字で書いたものです。約束を知らないと読めませんが、知ってしまえば、世界じゅうの人と同じ意味でやりとりできます。

同じ記号が、ちがう意味で使われることもあります。 x_1 はかけ算の $x \times 1$ ではありませんし、 $f(x)$ は $f \times x$ ではありません。どちらも、その章の「まちがえやすいところ」でくわしく見ます。第5巻で使う記号 (lim や e など) は、この巻では使いません。

この巻の読み方



ソラ

第2巻では、文字の式や $F = kx$ を作ったね。第3巻では何をするの？



ミナ

グラフがたくさん出てくるみたい。log とか、見たことのない記号もある……。



デルタ

だいじょうぶ。どの章も、場面を見て、表を作って、グラフにして、気づいてから式にするよ。新しい記号は、使う前にかならず説明するよ。1回でわからなくても、自分の手で点をうってみれば、きっと見えてくるよ。



① おもいだそう

章のはじめに、前に学んだことを1～2行で思い出します。

2-15 ばねの力は $F = kx$

私の章にもどれば、くわしく書いてあります。



② 電卓・表計算を使おう

電卓、表計算(2-18)、プログラム(2-19)を使ってみましょう。

- ・おす前に、式をノートに書く。
- ・答えのだいたいの大きさが合っているか、確かめる。



③ ノートとグラフ

- ・方眼のノートを使う。点をうつ問題が多い。
- ・グラフの軸には、量の名前と単位を書く。
- ・式は1行に1つ。「=」をたてにそろえる。



④ 例題から章末問題へ

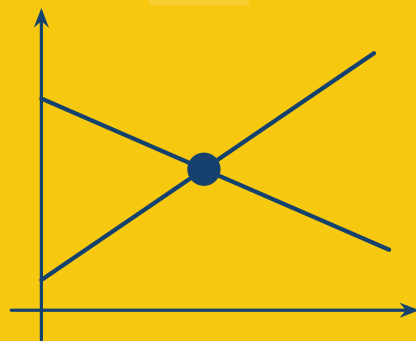
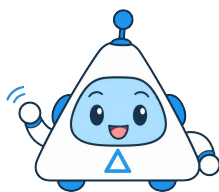
例題を読む → じぶんでどう(同じ形) → 章末問題。

章末問題の形は、どれも例題かじぶんでどうで一度見せてあります。わからなかったら、同じ形の例題にもどろう。

かんすう 関数とグラフ



- ? 「どこ」を2つの^{かず}数で^{つた}伝えられる？
- ? ^{ひょう}表・^{しき}グラフ・^{おな}式は、同じことを^い言っている？
- ? ふたりが^{で あ}出会うのは、グラフのどこ？



かわる^{りょう}量どうしの^{かんけい}関係を、^{ひょう}表・^{しき}グラフ・^み式の3つで見るよ。グラフの^{かたむ}傾きは「^{へん}変化の^{はや}速さ」で、2本の^{ほん}線が^{せん}交わる^{まし}所は、2つの^{しき}式の^{こた}答えだよ。

この部^ぶで学^{まな}ぶこと

3-1 変^かわる量^{りょう}と変^かわらない量^{りょう} ★★★★★ P.24

ずつと変^かわらない数^{かず}と、問^{もん}題^{だい}ご^ごに決^きまる数^{かず}

3-2 場^ば所^{しょ}を数^{かず}で表^{あらわ}す：座^ざ標^{ひょう} ★★★★★ P.48

「ど^{どこ}こ」を 2 つの数^{かず}で伝^{つた}えよう

3-3 関^{かん}数^{すう}は「入^いれると出^でてくる」ル^るー^るル ★★★★★ P.76

表^{ひょう}・グ^{しき}ラ^{おな}フ・式^いは、同^いじこ^いを言^いっ^いて^いる

3-4 グ^よラ^よフをかこ^よう・読^よもう ★★★★★ P.104

実^じ験^{けん}の点^{てん}に、なめ^{せん}ら^ひかな線^ひを引^ひこ^ひう

3-5 グ^{かたむ}ラ^{かたむ}フの傾^{へん}きは「変^か化^かの速^{はや}さ」 ★★★★★ P.128

坂^{さか}が急^{きゅう}なほ^はど、速^{はや}く変^かわっ^かて^かい^かる

3-6 2 本^{ほん}の直^{ちよく}線^{せん}が交^まわるところ：連^{れん}立^{りつ}方^{ほう}程^{てい}式^{しき} ★★★★★ P.162

ふた^{ふた}りが出^で会^あうのは、グ^まラ^まフの交^まわ^まる点^{てん}

この部^ぶを読^よむと…

実^じ験^{けん}の表^{ひょう}からグ^{かたむ}ラ^{かたむ}フをかき、傾^{しき}きと式^{しき}を読^よみとれるようになります。「入^いれると出^でてくる」関^{かん}数^{すう}の見^み方^{かた}は、第^{だい} 5 卷^{かん}の微^び分^{ぶん}から第^{だい} 9 卷^{かん}の制^{せい}御^{ぎよ}まで、ずつと使^{つか}います。

第1部 関数とグラフ



3-1

量と量

道しるべ この章の前に 2-2 2-11 2-15 2-19 この章の先に 3-3 3-5 5-4 5-5

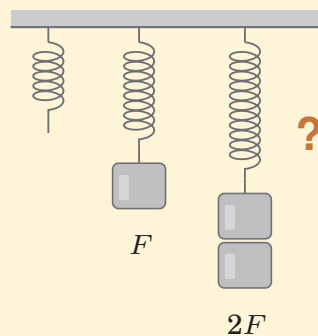
この章でできるようになること

- 式の中の文字や数を、変わるもの（変数）と変わらないもの（定数）に分けられる。
- 物理定数（ g 、 c ）と、問題ごとに決まる数（ k 、 m ）のちがいを説明できる。
- 変数が動ける範囲（変域）を、不等号を使って書ける。

？ はてな？

2-15 で、ばねの力の式 $F = kx$ を作りました。 F はばねを引く力、 x はのび、 k はばね定数です。

この式には、3つの文字が出てきます。引く力を変え、変わる文字はどれかな？ 変わらない文字はどれかな？



3つの文字は、どれも同じように「文字」です。でも、実験をしてみると、文字によって性質がちがうことがわかります。

🔄 おもいだそう この章で使う、前に学んだこと

- 2-11** 文字は、どんな数でも入る箱。道のり $x = \text{速さ } v \times \text{時間 } t$ のように、きまりを 1 行で書ける。
- 2-15** ばねの力 $F = kx$ 。 k はばね定数で、1 m のばすのに何 N いるか。
- 2-19** プログラムの変数は、数を入れておく名前付きの箱。中身は代入で入れかわる。
- 2-2** 不等号。 $0 < x < 6$ は「0 より大きく 6 より小さい」。 $\leq$ はその数もふくむ。

🔧 やってみよう 2 本のばねを引いてみよう

- ばね A を、ばねばかりで 0.5 N、1.0 N、1.5 N、2.0 N の力で引き、そのたびにのびをはかろう。
- ばね B (A より硬いばね) でも、同じようにはかろう。
- のびを m になおし、「力 ÷ のび」を計算しよう (2-15)。

ばね A	力 F (N)	0.5	1.0	1.5	2.0
	のび x (m)	0.02	0.04	0.06	0.08
	$F \div x$ (N/m)	25	25	25	25
ばね B	力 F (N)	0.5	1.0	1.5	2.0
	のび x (m)	0.01	0.02	0.03	0.04
	$F \div x$ (N/m)	50	50	50	50

表の中で、横に見て数が変わっていく行はどれかな？ ずっと同じ数の行はどれかな？

力の行と のび の行は、右へ進むにつれて数が変わります。「力 ÷ のび」の行は、ばね A ではずっと 25、ばね B ではずっと 50 です。同じ表の中に、変わる数と変わらない数がまじっています。この章では、この 2 つをきちんと見分けるためのことを学びます。

すうがく どうぐ 数学の道具

1 か かす か かす へんすう ていすう 変わる数と、変わらない数：変数と定数

まず、ばねより身近な場面で考えます。

水そうに、はじめから 5L の水が入っています。そこへ、じゃ口から 1 分に 2L ずつ水を入れます。x 分後の水の量を y [L] とします。

1 分たつごとに 2L ずつふえるので、x 分では 2L が x 分で $2 \times x$ (L) ふえます (1-12 : 1 分 $\times$ いくつ分)。それに、はじめの 5L をたすので、

$$y = 2x + 5$$

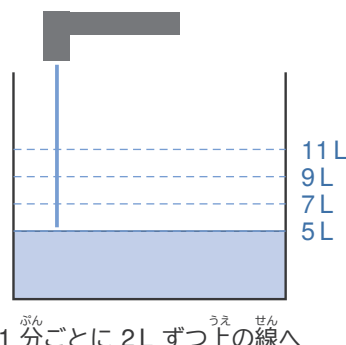
と書けます (×をはぶく書き方は 2-12)。

時間がたつと、式の中のどの数が変わり、どの数が変わらないでしょう。x = 0、1、2、3、4 のときを、表に並べてみます。

時間 x (分)	0	1	2	3	4
1 分にふえる量 (L)	2	2	2	2	2
はじめの量 (L)	5	5	5	5	5
水の量 $y = 2x + 5$ (L)	5	7	9	11	13

表 1 青い 2 行は、時間がたっても同じ数のまま。

x と y は、時間がたつにつれて、0、1、2、…や 5、7、9、…と変わっていきます。2 と 5 は、いつまでたっても 2 と 5 のままです。



たいせつ

$y = 2x + 5$ の x や y のように、いろいろな値をとる文字を変数といいます。

2 や 5 のように、 x が変わっても変わらない数を定数といいます。

箱で考えると

2-11 では、文字を「どんな数でも入る箱」と考えました。変数は、中身がずっと入れかわる箱です。定数は、中身を入れたら、かぎをかけてしまった箱です。



図 1 変数は中身が入れかわる箱、定数はかぎのかかった箱。

文字でも定数のことがある

定数は、2 や 5 のような数字ではありません。 $y = ax + b$ と書いて、「 a は 1 分にふえる量、 b ははじめの量」と決めると、 a と b は文字ですが、時間がたっても変わらないので定数です。2-11 で見たように、昔のフランスの数学者デカルトは、わかっている数に a 、 b 、 c 、わからない数に x 、 y 、 z を使いました。いまでも、定数には a 、 b 、 c 、変数には x 、 y 、 z や時間の t を使うことが多いです。ただし、これは習慣で、きまりではありません。文字の種類ではなく、「変わるか、変わらないか」で見分けます。

プログラムの変数とくらべる

2-19 のプログラムにも「変数」がありました。水そうの計算をプログラムで書いてみます。

Python

```
RATE = 2
x = 0
y = 5
for k in range(4):
    x = x + 1
    y = y + RATE
    print(x, y)
```

実行結果

```
1 7
2 9
3 11
4 13
```

プログラムの x と y は、 $x = x + 1$ や $y = y + \text{RATE}$ の代入が実行されるたびに、中身が1つつ入れかわります。 RATE は、最初に2を入れたあと、一度も変えません。このように、変えないと決めた数には、名前をすべて大文字にして目印にする習慣があります（プログラムの定数）。

	プログラムの変数 (2-19)	数学の変数
おなじところ	どちらも、いろいろな数が入る「名前つきの箱」	
ちがうところ	代入するたびに、中身が1つつ入れかわる	入りうる数を全部まとめて考える
「=」の意味	右を計算して左に入れる（命令）	左と右が等しい

表2 プログラムの変数と数学の変数

数学の $y = 2x + 5$ は、「 x がどんな数でも、 y は $2x + 5$ に等しい」という、すべての x についての約束です。プログラムは、その約束を、 $x = 1, 2, 3, 4$ と1つつ順番に確かめているのだ、と考えることができます。

2 自然が決める数と、問題ごとに決まる数

△ やってみよう の表にもどりましょう。ばね A で実験しているあいだ、力 F とのび x は変わりましたが、 $F \div x$ はいつも25でした。この25がばね定数 k です。だから、ばね A の実験では、

$$F = 25x$$

で、 F と x が変数、 $k = 25$ が定数です。

ところが、ばねBにとりかえると、 k は50になりました。 k は、1本のばねの実験の中では変わりませんが、ばねをとりかえると変わる数です。

② はてな? の答え：引く力を変えると、 F と x が変わります（変数）。 k は変わりません（定数）。ただし k は、ばねごとに決まる数で、ばねをとりかえれば別の値になります。

ボールを取りかえても変わらない数： g

こんどは、ボールを落とす場面です。空気の抵抗が小さいとき、落ちるボールの速さは、1秒ごとに約9.8m/sずつふえます（2-0・2-10）。この「1秒ごとに速さがふえる量」を g と書きます。単位は m/s^2 で、 $g = 9.8\text{m/s}^2$ です（くわしい名前と意味は5-5で学びます）。はなしてから t 秒後の速さ v は、9.8m/sが t ぶんなので、

$$v = gt$$

です。

時間 t (s)	0	1	2	3
g (m/s^2)	9.8	9.8	9.8	9.8
速さ $v = gt$ (m/s)	0	9.8	19.6	29.4

鉄の球でも、ゴムのボールでも、重くても軽くても、 g は同じ9.8です（空気の抵抗が小さいとき）。

9.8という数は、だれかが計算で決めたものではありません。地球の上で、たくさんの人が落ちる物をくわしくはかって、見つけた値です。ばね定数とちがって、ボールをとりかえても変わらず、人が選ぶこともできません。

どこではかっても同じ数：光の速さ c

光は、1秒に約 $3.0 \times 10^8 \text{m}$ 進みます（2-7）。これを c と書き、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ です。太陽の光でも、懐中電灯の光でも、宇宙のどこではかっても、真空（空気もない空間）の中を進む光の速さは同じです。

たいせつ

g や c のように、自然が決めていて、人が選んだり変えたりできない定数を物理定数といいます。

ばね定数 k や質量 m のように、物（問題）ごとに決まり、その問題の中では変わらない数もある。

ぶつりていすう 物理定数

自然が決める。
物をかえても同じ。

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \text{ (地球)}$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

もんだい なか かず 問題ごとに決まる数

物によってちがう。
問題の中では定数。

ばね定数 k 、質量 m 、
抵抗 R

へんすう 変数

問題の中で変わる。

力 F 、のび x 、
時間 t 、速さ v

図2 式に出てくる文字の3つのなかま

おな もじ へんすう 同じ文字が、変数になることも

物にはたらく重力（重さ） W は、質量 m に g をかけて $W = mg$ です (2-15 で「1kg で約 10N」と学んだ 10 は、くわしくは 9.8)。1つのボールについて考えるなら、 m は定数です。でも、「いろいろな質量のボールの重力をくらべる」問題なら、 m は変わるので変数です。変数か定数かは、文字で決まるのではなく、「その問題で、何を変えるのか」で決まります。

せいにかくにいうと

g は、地球の上の場所によって少しだけちがいます。赤道では約 9.78 m/s^2 、北極や南極では約 9.83 m/s^2 です。月の上では約 1.6 m/s^2 です (2-0)。だから g は、「地球の表面の近くでは、どの物にも同じ」という意味の物理定数です。この本では、ふつう 9.8 を使います。光の速さ c は、宇宙のどこでも同じで、ちょうど 299792458 m/s と決められています。

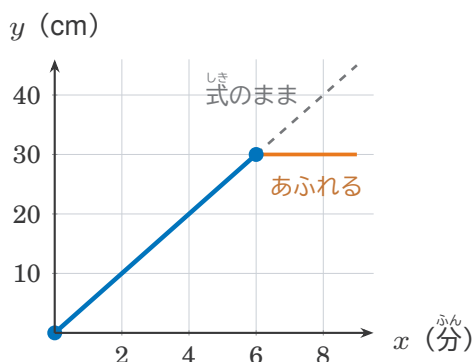
3 変数が動ける範囲：変域

深さ 30 cm の空の水そうに水を入れると、水面が 1 分に 5 cm ずつ上がりました。x 分後の水の深さを y [cm] とすると、5 cm の x 分で、

$$y = 5x$$

です。では、 $x = 8$ を入れて「8 分後は $5 \times 8 = 40$ で、40 cm」と言ってよいでしょうか。

水そうの深さは 30 cm しかないので、 $30 \div 5 = 6$ で、6 分でいっぱいになります。それより後は水があふれて、深さは 30 cm のまま変わりません。式 $y = 5x$ が使えるのは、 x が 0 から 6 までのあいだだけです。



グラフにすると、式 $y = 5x$ の直線 (青) は、 $x = 0$ の点から始まり、 $x = 6$ の点で終わります。そこから先の灰色の点線は、式だけで計算した、ほんとうには起きないことです。

x が 0 から 6 までのあいだにあることを、2-2 の不等号を 2 つつないで、

$$0 \leq x \leq 6$$

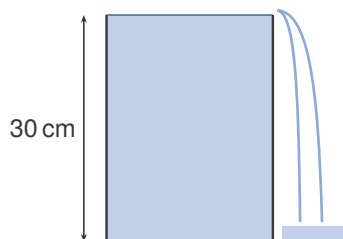
と書きます。0 分 (入れ始めたとき) も、6 分 (ちょうどいっぱいになったとき) も式が使えるので、「ちょうどその数もふくむ」 $\leq$ を使います。同じように、 y は 0 から 30 までなので、 $0 \leq y \leq 30$ です。

たいせつ

変数がとることのできる値の範囲を、変域といいます。

水そうの例では、 x の変域は $0 \leq x \leq 6$ 、 y の変域は $0 \leq y \leq 30$ 。

6 分でいっぱい!



数直線にかくと、変域がよく見えます（2-2と同じで、●はその数をふくむ、○はふくまない、という印）。

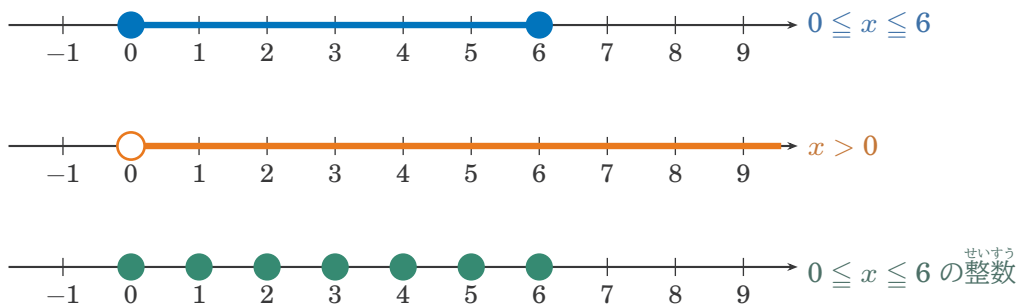


図3 上から、 $0 \leq x \leq 6$ 、 $x > 0$ 、0から6までの整数。

はじめに水が入っているとき

同じ30 cmの水そうに、はじめから10 cmの深さまで水が入っていたら、どうなるでしょう。1分に5 cmずつ上がるなら、 $y = 5x + 10$ です。いっぱいまで上がる高さは $30 - 10 = 20$ (cm)なので、 $20 \div 5 = 4$ で、4分でいっぱいになります。 x の変域は $0 \leq x \leq 4$ です。 y は、 $x = 0$ のときもう10なので、 y の変域は $10 \leq y \leq 30$ です。0からではないことに気をつけましょう。

ふくまない端がある変域

2-15では、1200 mの道を速さ x [m/s]で行くと、かかる時間は $y = \frac{1200}{x}$ 秒でした。速さ x は0にはできません。止まっていたら着きませんし、0でわる計算はできないからです(1-14)。速さはマイナスでもないの、 x の変域は $x > 0$ です。0をふくまないの、数直線では0に○をかきます(上の図のまん中)。

速さを $2 \leq x \leq 6$ にしたとき、 y の変域はどうなるでしょう。 $x = 2$ のとき $y = 1200 \div 2 = 600$ 、 $x = 6$ のとき $y = 1200 \div 6 = 200$ です。速いほど時間は短いので、 x が大きい端で y は小さい端になります。不等号は小さい数を左に書くので、 $200 \leq y \leq 600$ です。

整数しかとらない変域

ばねにつるすおもりの数は、0 個、1 個、2 個、…で、1.5 個はありません。0 個から 6 個までなら、「 $0 \leq x \leq 6$ の整数」と書きます。数直線では、線ではなく、とびとびの点になります（上の図のいちばん下）。

4 1 つが決まると、もう 1 つが決まる

水そうの $y = 5x$ では、 x を 1 つ決めると、 y がただ 1 つに決まります。 $x = 4$ なら、 $y = 5 \times 4 = 20$ で、深さは 20 cm。21 cm になったり 19 cm になったりはしません。 x が変わると、それにつれて y も変わります。このような 2 つの変数を、「ともなって変わる量」といいます。

でも、2 つの量がいつもそうなるとはかぎりません。下の 2 つをくらべましょう。

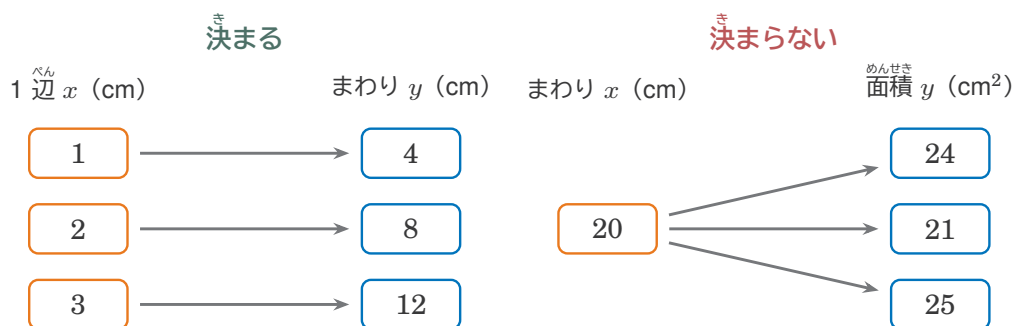


図 4 左：1 つの x から矢印が 1 本。右：1 つの x から矢印が何本も出る。

左は、正方形の 1 辺 x [cm] と、まわりの長さ y [cm] です。正方形は 4 つの辺の長さが等しいので、 $y = 4x$ 。1 辺が決まれば、まわりの長さはただ 1 つに決まります。

右は、まわりの長さが 20 cm の長方形の面積です。たてと横の和は $20 \div 2 = 10$ (cm) です。たて 6 cm・横 4 cm なら $6 \times 4 = 24$ 、たて 7 cm・横 3 cm なら $7 \times 3 = 21$ 、たて 5 cm・横 5 cm なら $5 \times 5 = 25$ (cm²)。まわりの長さが同じでも、面積はいろいろで、1 つに決まりません。

「決まらない」ことを言うには、同じ x で y がちがう例を1つ見せれば十分です。「決まる」ことを言うには、 $y = 4x$ のような式や、きまりを示します。 x を決めると y がただ1つに決まる関係は、物理でとても大事です。3-3 で、この関係に名前をつけて、くわしく調べます。

もっと知りたい ★

数学の定数と「パラメータ」

円のまわりの長さ÷直径は、どんな大きさの円でも $\pi = 3.14159 \dots$ です(2-9)。 π は、はからなくても計算で決まる「数学の定数」です。物理定数は、はかって見つける数でした。

また、ばね定数 k のように「問題ごとに決まり、その問題の中では変わらない数」を、技術者はパラメータとよぶことがあります。機械の設計では、パラメータをいろいろ変えて計算し、いちばんよい値を選びます。

この章で出てきたことば

変数 いろいろな値をとる文字。 $y = 2x + 5$ の x と y 。

定数 x が変わっても変わらない数。 $y = 2x + 5$ の2と5。文字のこともある。

物理定数 自然が決めている定数。 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

変域 変数がかかることのできる値の範囲。 $0 \leq x \leq 6$ のように不等号で書く。

記号カード

初めて出た章 3-1

g

読み方 ジー

意味 落ちる物の速さが、1秒ごとにふえる量。地球で約

9.8 m/s^2

英語 gravity

記号カード

初めて出た章 3-1

c

読み方 シー

意味 真空中の中の光の速さ。約

$3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$

英語 speed of light

コラム 物理定数は、だんだんくわしくなる

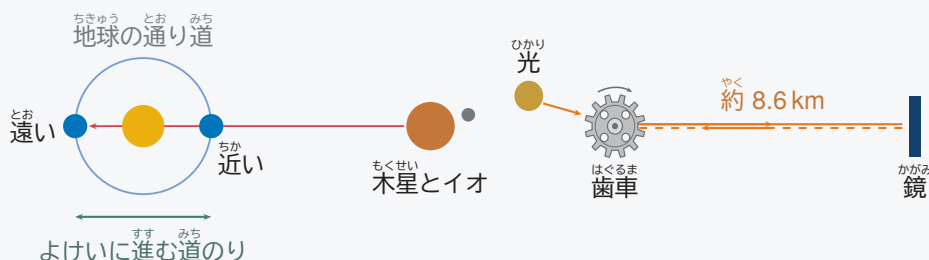
光の速さ c は、昔からいろいろな人が、くふうしてはかってきました。光はとても速いので、ふつうのものさしと時計では、はかれないからです。

① レーマー (1676 年)：宇宙の大きさを使う

木星の月イオは、木星のかげに入っ見えなくなる時刻が、きちんと決まっています。ところが、地球が木星から遠い時期には、その時刻が予定より最大で約 22 分おくらえて見えました。デンマークのレーマーは、これを「光が、地球の通り道の直径の分だけ、よけいに進む時間」と考えました。この考えから、光の速さは秒速約 22 万 km と見つもられました。

② フィゾー (1849 年)：回る歯車を使う

フランスのフィゾーは、歯車のすきまを通した光を、約 8.6 km はなれた丘の上の鏡ではね返しました。歯車を速く回すと、帰ってきた光が次の歯にさえぎられて見えなくなります。そのときの回る速さと、往復の道のり約 17 km から、秒速約 31 万 km と計算しました。



③ いま：光の速さが、ものさしになる

はかり方がよくなるにつれて、値はほんとうの値に近づき、いまでは秒速 299792.458 km (約 30 万 km) です。1983 年からは、この値をちょうど決めて、光が 299792458 分の 1 秒に進む長さを 1 m としています。物理定数が、長さのものさしの元になっているのです。物理定数は「自然が決めた数」ですが、その値を知るには、人がはかるしかありません。はかる路線 (🚶) の大事な仕事です。

例題でたしかめよう

例題1 変数と定数を見分ける

1個120円のりんごを x 個と、150円のかごを1つ買います。代金を y 円とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 式の中の変数と定数を答えましょう。

考え方 りんごの代金は「1個の値段×個数」です。買う個数を変えると変わるものが変数、変わらないものが定数です。

しき (1) りんご代は120円の x こ分で $120 \times x = 120x$
かご代150円をたして、 $y = 120x + 150$

(2) x を変えると y も変わる。120と150は変わらない

個数 x (個)	0	1	2	3
1個の値段 (円)	120	120	120	120
かご代 (円)	150	150	150	150
代金 y (円)	150	270	390	510

こたえ (1) $y = 120x + 150$ (2) 変数は x と y 、定数は120と150

じぶんでとこう1

1冊80円のノートを x 冊と、200円のペンを1本買います。代金を y 円とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 変数と定数を答えましょう。

例題 2 物理の式の文字を分ける

ばね定数 40 N/m のばねを、いろいろな力 $F \text{ [N]}$ で引き、のび $x \text{ [m]}$ をはかります。式は $F = kx$ です。

(1) この実験で、変数と定数はどれですか。(2) k は、物理定数と問題ごとに決まる数の、どちらですか。(3) 2 N で引くと、何 cm のびますか。

考え方 1 本のばねで力を変えるので、変わるのは F と x です。(3) は $F = kx$ の両辺を k でわって、 $x = \frac{F}{k}$ にします (2-14)。

しき (1) F と x は変わる。 $k = 40$ は変わらない

(2) ばねをとりかえると k は変わるので、問題ごとに決まる数

(3) $x = \frac{2}{40} = 0.05$ 。 $0.05 \text{ m} \times 100 \text{ cm/m} = 5 \text{ cm}$

表で確かめると、 F と x は変わり、 $F \div x$ はいつも 40 です。

力 $F \text{ (N)}$	1	2	3	4
のび $x \text{ (m)}$	0.025	0.05	0.075	0.1
$k = F \div x \text{ (N/m)}$	40	40	40	40

こたえ (1) 変数は F と x 、定数は k (40) (2) 問題ごとに決まる数
(3) 5 cm

じぶんでとこう 2

抵抗 20Ω の電熱線に、いろいろな電圧 $V \text{ [V]}$ をかけて、電流 $I \text{ [A]}$ をはかります。式は $V = RI$ です。(1) 変数と定数はどれですか。(2) R は、物理定数と問題ごとに決まる数の、どちらですか。(3) 6 V をかけると、何 A 流れますか。

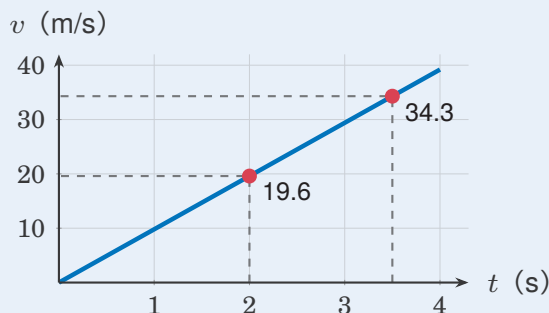
例題3 物理定数を使って計算する

空気の抵抗が小さいとき、はなしてから t 秒後の速さは $v = gt$ です ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)。 (1) 2 秒後、 (2) 3.5 秒後の速さを求めましょう。 (3) 重いボールにとりかえると、 g は変わりますか。

考え方 g は物理定数なので、どの問題でも 9.8 を使います。単位は $\text{m/s}^2 \times \text{s} = \text{m/s}$ (2-10)。

しき (1) $v = 9.8 \times 2 = 19.6$

(2) $v = 9.8 \times 3.5 = 34.3$



こたえ (1) 19.6 m/s (2) 34.3 m/s (3) 変わらない (物理定数だから)

じぶんでとこう3

光が t 秒で進む道のりは $x = ct$ です ($c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$)。 (1) 2 秒、 (2) 0.5 秒で進む道のりを求めましょう。 (3) 懐中電灯の光を太陽の光にかえると、 c は変わりますか。

例題 4 変域を不等号で書く

深さ 40 cm の水そうに、はじめ 4 cm の深さまで水が入っています。水をいれると、水面は 1 分に 6 cm ずつ上がります。 x 分後の深さを y [cm] とすると、 $y = 6x + 4$ です。(1) 何分後にいっぱいになりますか。(2) x の変域と、(3) y の変域を答えましょう。

考え方 いっぱいになるまでに上がる高さを、1 分に上がる高さでわります。 y は 0 からではなく、はじめの 4 から始まります。

しき (1) 上がる高さは $40 - 4 = 36$ 。 $36 \div 6 = 6$

(2) 入れ始め (0 分) からいっぱい (6 分) まで。どちらもふくむ

(3) $x = 0$ で $y = 6 \times 0 + 4 = 4$ 、 $x = 6$ で $y = 6 \times 6 + 4 = 40$



y の線は 0 からではなく、4 から始まります。

こたえ (1) 6 分後 (2) $0 \leq x \leq 6$ (3) $4 \leq y \leq 40$

じぶんでこう 4

深さ 30 cm の水そうに、はじめ 6 cm の深さまで水が入っています。水面は 1 分に 3 cm ずつ上がり、 $y = 3x + 6$ です。(1) 何分後にいっぱいになりますか。(2) x の変域と、(3) y の変域を答えましょう。

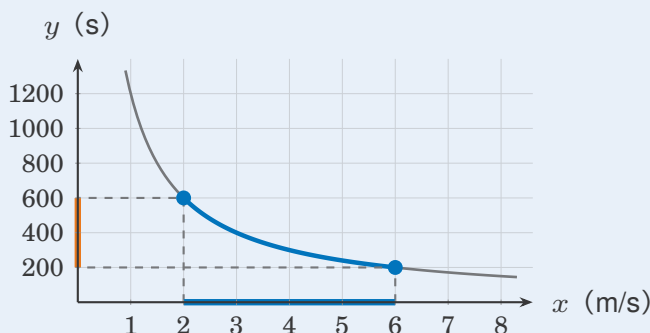
例題5 ふくまない端と、へっていく y の変域

1200 m の道を速さ x [m/s] で行くと、かかる時間は $y = \frac{1200}{x}$ 秒です。

(1) x の変域を答えましょう。(2) 速さを $2 \leq x \leq 6$ にするとき、 y の変域を答えましょう。

考え方 (1) 速さは0にできず(0でわれない)、マイナスでもありません。(2) 両端の x を代入して、小さいほうを左に書きます。

しき (2) $x = 2$ で $y = 1200 \div 2 = 600$ 、 $x = 6$ で $y = 1200 \div 6 = 200$
速いほど時間は短い。小さいほうの200を左に書く



横の軸の青い範囲 ($2 \leq x \leq 6$) に対して、たての軸のオレンジの範囲 ($200 \leq y \leq 600$) が y の変域です。

こたえ (1) $x > 0$ (2) $200 \leq y \leq 600$

じぶんでとこう5

2400 m の道を速さ x [m/s] で行くと、かかる時間は $y = \frac{2400}{x}$ 秒です。

(1) x の変域を答えましょう。(2) 速さを $3 \leq x \leq 8$ にするとき、 y の変域を答えましょう。

例題 6 整数しかとらない変域

1 個 30 g のおもりを、ばねに 8 個までつるせます。おもりの数を x 個、おもりの重さの合計を y [g] とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) x の変域を答えましょう。(3) y のいちばん大きい値を答えましょう。

考え方 おもりの数は、0、1、2、…と整数だけです。「の整数」と書きそえます。

しき (1) 30 g の x 個分で $y = 30x$

(2) 0 個から 8 個までの整数。数直線では、とびとびの点になる



(3) $x = 8$ のとき $y = 30 \times 8 = 240$

こたえ (1) $y = 30x$ (2) $0 \leq x \leq 8$ の整数 (3) 240 g

じぶんでこう 6

1 個 50 g のおもりを、ばねに 6 個までつるせます。おもりの数を x 個、重さの合計を y [g] とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) x の変域と、(3) y のいちばん大きい値を答えましょう。

例題7 1つが決まると、もう1つが決まる？

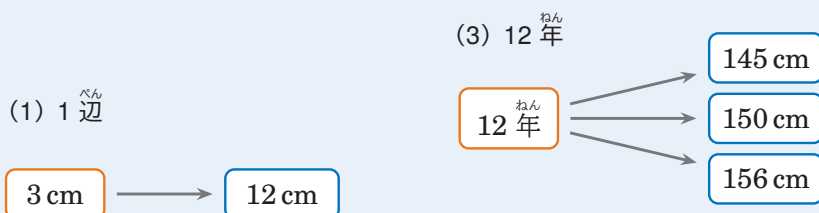
x を決めると y がただ1つに決まるものには○、決まらないものには×をつけましょう。(1) 正方形の1辺 x [cm] と、まわりの長さ y [cm] (2) まわりの長さ x [cm] の長方形の面積 y [cm²] (3) 生まれてからの年数 x 年と、身長 y [cm]

考え方 決まるなら式を書きます。決まらないなら、同じ x で y がちがう例を1つ見つけます。

しき (1) 4つの辺が等しいので $y = 4x$

(2) $x = 20$ でも、たて6・横4なら24、たて5・横5なら25

(3) 同じ12年でも、人によって身長はちがう



こたえ (1) ○ ($y = 4x$) (2) × (3) ×

じぶんできよう7

x を決めると y がただ1つに決まるものには○、決まらないものには×をつけましょう。(1) 1個50gのおもり x 個の重さの合計 y [g] (2) 面積が x [cm²] の長方形のまわりの長さ y [cm] (3) テストの勉強をした時間 x 時間と、テストの点数 y 点

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

文字なら、みんな変数？

✕ $y = ax + b$ には文字が4つあるので、変数も4つ

○ a (ふえる量) と b (はじめの量) は、その問題の中では変わらないので定数

文字かどうかではなく、「その問題で変わるか」で見分けます。

⚠ まちがえやすいところ

定数は、どんなときでも同じ？

✕ ばね定数は定数だから、どのばねでも25

○ k はばねごとに決まる数。ばねAでは25、ばねBでは50
1本のばねの実験の中で変わらない、という意味です。どの問題でも同じなのは、 g や c のような物理定数です。

⚠ まちがえやすいところ

端をふくむ？ ふくまない？

✕ 水そうが6分でいっぱいになるとき、 $0 < x < 6$

○ 0分も6分も式が使えるので、 $0 \leq x \leq 6$

< は、その数をふくみません。端の数を式に入れて使えるかどうかで決めます。

⚠ まちがえやすいところ

y の変域^{へんいき}は、いつも 0 から？

✕ $y = 6x + 4$ ($0 \leq x \leq 6$) の y の変域^{へんいき}は $0 \leq y \leq 40$

○ $x = 0$ のとき $y = 4$ なので、 $4 \leq y \leq 40$

y の変域^{へんいき}は、 x の両端^{りょうはし}を式に代入^{だいゆ}して求めます。

⚠ まちがえやすいところ

不等号^{ふとうごう}の向きと並べ方^{むならかた}

✕ $y = \frac{1200}{x}$ ($2 \leq x \leq 6$) で、 $600 \leq y \leq 200$

○ 小さい数^{ちい かず}を左^{ひだり}に書いて、 $200 \leq y \leq 600$

$600 \leq y$ と $y \leq 200$ を両方^{りょうほう}みたら y はありません。数直線^{すうちよくせん}と同じく、左^{ひだり}が小さい数^{ちい かず}です。

⚠ まちがえやすいところ

「未満^{みまん}」と「以下^{い か}」

✕ 「速さは 6 m/s 未満^{みまん}」を $x \leq 6$ と書く

○ 未満^{みまん}は 6 をふくまないで $x < 6$ 。6 をふくむ「6 以下^{い か}」が $x \leq 6$

ことばと記号^{きごう}の組み合わせは 2-2 の表^あで確かめよう。以上^{ひょう たし}・以下^{いじょう}はふくむ ($\geq \cdot \leq$)、より大きい^{おお}・未満^{みまん}はふくまない ($> \cdot <$)。

物理・工学ではこう使う

設計で「決めた値」と「動く値」

機械を作るとき、技術者はまず、大きさ・強さ・使える範囲などの「決めた値」を決めます。これを仕様といいます。仕様は、その機械にとっての定数です。そのうえで、使うときに動く値（変数）が、どんな範囲で動いても安全に働くように作ります。

エアコン

設定温度（たとえば 26°C ）は、人が決める値で、運転しているあいだは定数です。部屋の温度は、外の暑さや人の数で変わる変数です。エアコンは部屋の温度をはかりつづけ、設定温度との差が大きいほど強く冷やします（このしくみは第9巻の制御で学びます）。



エレベーター

「定員9名・積載量600kg」のように、のせてよい重さは設計で決めた定数です。乗っている人と荷物の重さ W [kg] は変数で、その変域は $0 \leq W \leq 600$ です。重さがこの変域をこえると、ブザーが鳴って動きません。定員の9は、1人を65kgとして $600 \div 65 = 9.2\dots$ の整数の部分から決めた数です。



大学への種

大学の工学では、仕様の定数と、動く変数と、その変域をはっきり分けて式を書くことから、設計が始まります。変数が変域のいちばん端になったときでもこわれないか、を必ず確かめます。



しょうまつもんだい
章末問題

3-1 のまとめ

きほん
基本



- 1 電気を1か月に x [kWh] 使ったときの電気料金は、 $y = 30x + 1000$ (円) でした。この式の変数と定数を答えましょう (kWh は電気の量の単位)。
- 2 抵抗 50Ω の電熱線に、いろいろな電圧 V [V] をかけて電流 I [A] をはかります ($V = RI$)。 (1) 変数と定数はどれですか。 (2) R は物理定数ですか、問題ごとに決まる数ですか。 (3) 10 V をかけると何 A 流れますか。
- 3 $v = gt$ ($g = 9.8\text{ m/s}^2$) を使って、落ちるボールの (1) 4 秒後、 (2) 1.5 秒後の速さを求めましょう。
- 4 深さ 50 cm の水そうに、はじめ 5 cm の深さまで水が入っています。水面は1分に 9 cm ずつ上がり、 $y = 9x + 5$ です。 (1) 何分後にいっぱいになりますか。 (2) x の変域と、 (3) y の変域を答えましょう。
- 5 1800 m の道を速さ x [m/s] で行くと、かかる時間は $y = \frac{1800}{x}$ 秒です。 (1) x の変域を答えましょう。 (2) $3 \leq x \leq 9$ のとき、 y の変域を答えましょう。
- 6 x を決めると y がただ1つに決まるものには○、決まらないものには×をつけましょう。 (1) $1\text{ L } 200$ 円の灯油を x [L] 買ったときの代金 y 円 (2) クラスの人の身長 x [cm] と体重 y [kg]
- 7 1個 40 g のおもりを、ばねに5個までつるせます。おもりの数を x 個、重さの合計を y [g] とします。 (1) y を x の式で表しましょう。 (2) x の変域と、 (3) y のいちばん大きい値を答えましょう。

チャレンジ ★★

8 太陽を出た光は、約 500 秒で地球に届きます。 $x = ct$ ($c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$) を使って、太陽から地球までの距離を求めましょう。 10^n を使って書きます (2-7)。

9 定員 9 名のエレベーターに、1 人 65 kg の人が x 人乗ります。乗っている人の重さの合計を y [kg] とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) x の変域を答えましょう。(3) y のいちばん大きい値を求め、積載量 600 kg をこえないか確かめましょう。

10 深さ 60 cm の水そうに、はじめ 12 cm の深さまで水が入っています。水面は 1 分に 8 cm ずつ上がり、 $y = 8x + 12$ です。(1) 何分後にいっぱいになりますか。(2) x の変域と、(3) y の変域を答えましょう。(4) 3.5 分後の深さを求めましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 式の中の変数と定数を見分けられる。 → 26 ページ

☐ 物理定数と、問題ごとに決まる数のちがいを説明できる。 → 28 ページ

☐ 変域を不等号で書ける。 → 31 ページ



デルタ

変わる数と変わらない数を分けると、式が読みやすくなるね。次の章では、変数を 2 つ使って、場所を表すよ。

第1部 関数とグラフ

★～★★

3-2

ばしょ かず あらわ ざひょう
場所を数で表す：座標

道しるべ この章の前に 1-6 2-2 2-15 この章の先に 3-3 3-4 4-4 4-10 4-13 4-15

この章でできるようになること

- ★ 原点と2本の軸を決めて、点 (x, y) をかいたり、点の座標を読んだりできる。
- ★★ マイナスの座標と4つの区画、点を動かしたときの座標がわかる。
- ★★ 絶対値を使って、横やたてに並んだ2点の距離を求められる。

? はてな?

きょう きょうしつ せき
今日、教室の席がえがありました。休
んだともだちに、でんわ あたら せき つた
電話で新しい席を伝
えます。

「まどから4列め」だけで、せき
に決まるかな? 「どこ」を、いくつ
かず つた
の数で伝えればいいかな?

こくばん まえ
黒板(前)

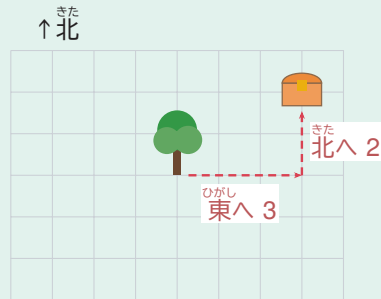
			?		
1	2	3	4	5	6

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-6 数直線は、0 から同じ間かくで数を並べたもの。右へ進むほど大きい。
- 2-2 負の数は0 の左に並ぶ。マイナスは「反対の向き」。
- 2-15 グラフの点は、0 から右へ2、そこから上へ4 進んだ所にかく ($x = 2, y = 4$)。
- 2-3 変わった量は「あとーまえ」。△ x と書く。

△ やってみよう 宝さがしゲームをしよう

- 1 方眼紙のまん中に木を1 本かき、上を北とする。友だちに見せないように、宝の場所に印をつけよう。
- 2 友だちに、ことばだけで宝の場所を伝えよう。友だちは自分の方眼紙に印をつける。
- 3 2 人の紙を重ねて、印が同じ場所にあるか確かめよう。伝えるのに何が必要だったかな？



「宝は東のほう」だけでは、伝わりません。うまく伝えるには、次の3 つが必要だったはずです。

- 1 どこから数えるか (木の場所)
- 2 どちら向きに数えるか (東と北)
- 3 いくつ進むか (東へ3 マス、北へ2 マス)

しかも、③の数は「東へ3」と「北へ2」の2 つがいりました。この章では、平らな紙や画面の上の場所を、2 つの数で表す方法を学びます。

数学の道具

1 数直線を、たてと横の2本にする

1本の線の上なら、数は1つでよい

まっすぐな線路を走る電車の場所は、「駅から東へ3km」のように1つの数で言えます。駅を0、東を+の向きにした数直線(2-2)を線路にそって置けば、東へ3kmは3、西へ2kmは-2です。

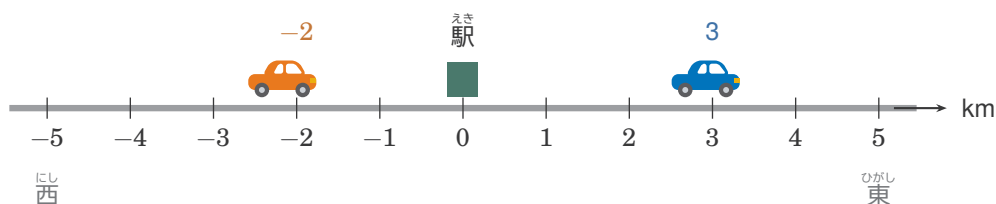
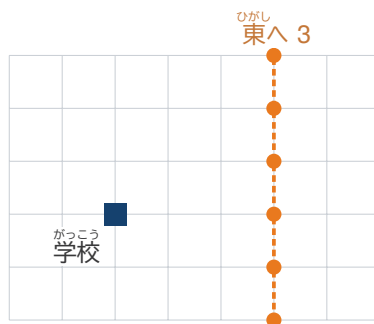


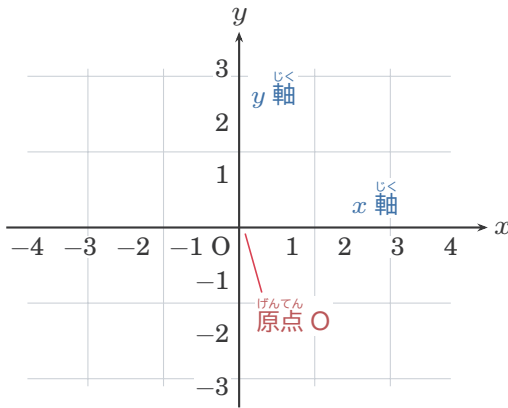
図1 線路の上の場所は、1つの数で表せる。

平らな所では、数が2ついる

町の中のように、東西にも南北にも動ける所ではどうでしょう。「学校から東へ3」といわれても、右の図の点線の上のどこなのか、わかりません。北へ何マス進むかとも言わないと、場所が1つに決まらないのです。



そこで、数直線を2本使います。横の数直線と、たての数直線を、どちらも0の所で直角に交わるように置きます。横の数直線は右が+、たての数直線は上が+です。



横の数直線を x 軸、たての数直線を y 軸、2本をまとめて座標軸といいます。2本の軸が交わる0の点を原点といい、Oと書きます。Oは、「はじまり」という意味の英語 origin の頭の文字で、数字の0ではありません。

2 点の場所を2つの数で：座標 (x, y)

右の図の点Aは、原点Oから右へ3、そこから上へ2進んだ所にあります。2-15のグラフで、点を「0から右へ2、そこから上へ4」とかいたのと同じです。

「右へ3」は x 軸の3、「上へ2」は y 軸の2です。この2つの数を、かつこの中に x が先、 y が後の順に並べて、

$(3, 2)$

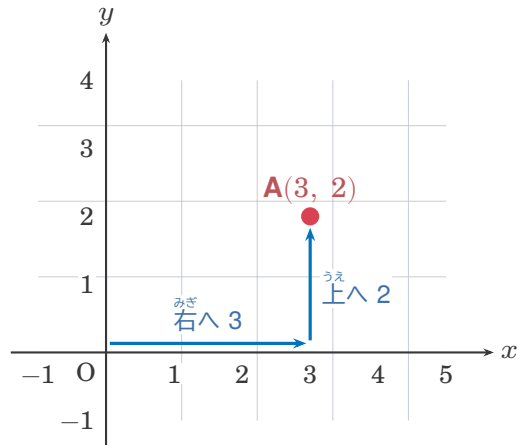
と書きます。

点の場所を表すこの数の組を、その点の座標といいます。3を x 座標、2を y 座標といいます。「点Aの座標は $(3, 2)$ 」を、短く $A(3, 2)$ とも書きます。 $(3, 2)$ は「さん、に」と読みます。

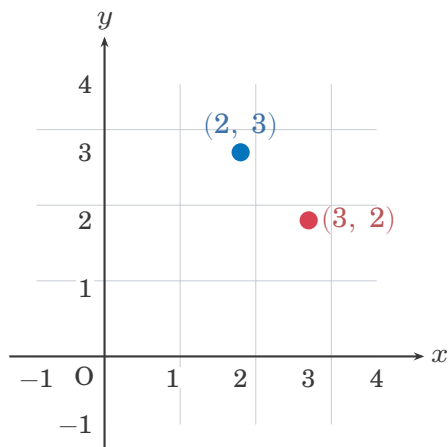
たいせつ

点 (a, b) をかくには、原点Oから右へ a 、そこから上へ b 進む。

かっこの中は、いつも x 座標が先、 y 座標が後。



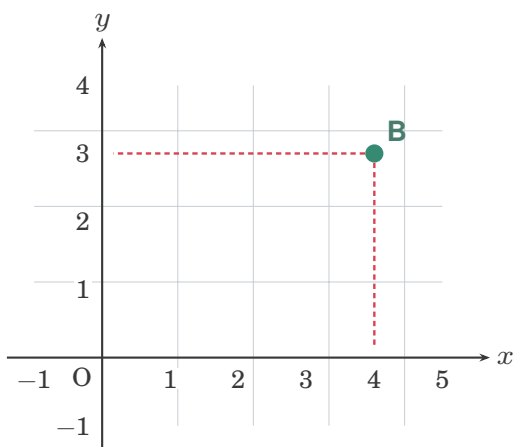
順番を入れかえると、ちがう点



(3, 2) と (2, 3) は、使っている数は同じでも、ちがう場所の点です。(2, 3) は「右へ2、上へ3」だからです。座標は、数の組であるだけでなく、並べる順番にも意味があります。

点から座標を読む

反対に、かいてある点の座標を読むには、点から軸へまっすぐな線をおろします。点 B から真下へおろした線は x 軸の4に、真横へ引いた線は y 軸の3に当たります。だから B(4, 3) です。進む道すじ（矢印）でも、軸へおろす線（点線）でも、同じ2つの数が見つかります。



軸の上の点にも座標があります。 x 軸の上の4の点は、上へは0進むので (4, 0)。 y 軸の上の3の点は (0, 3)。原点は (0, 0) です。

点が目もりの線の交わる所にもないこともあります。右へ2と3のまん中、上へ1と2のまん中にある点なら、(2.5, 1.5) です。座標は整数だけでなく、小数や分数にもなります。はかったデータの点 (3-4) は、たいていこのような点です。

△ やってみよう 点をつないで、絵をかこう

1 方眼のノートに、 x 軸（ $-4 \sim 4$ ）と y 軸（ $-5 \sim 6$ ）をかき、原点 O を書きこもう。

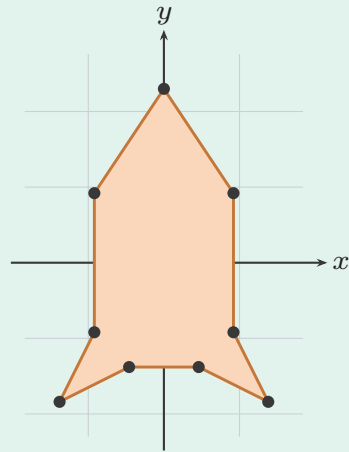
2 次の点を順にうって、直線でつなごう。
最後の点は、はじめの点にもどす。

$(0, 5) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, -2) \rightarrow (3, -4) \rightarrow (1, -3) \rightarrow (-1, -3) \rightarrow (-3, -4) \rightarrow (-2, -2) \rightarrow (-2, 2) \rightarrow (0, 5)$

3 何の絵ができたかな？ 右の図で確かめよう。

4 $(2, 2)$ と $(-2, 2)$ のように、 x 座標の符号だけがちがう点は、 y 軸をはさんで左右にちょうど向かい合っているかな？

左右がそろった形になるのは、 (a, b) と $(-a, b)$ が、 y 軸から同じ距離 $|a|$ だけ、反対の向きにはなれているからです。

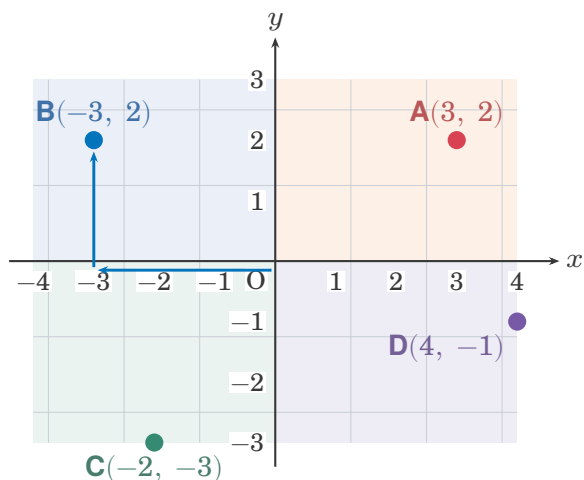


🔍 コラム 表計算の「B3」も2つの数

2-18 の表計算では、セルの場所を「B3」のような番地で表しました。B は左から 2 番めの列、3 は上から 3 番めの行です。これも、場所を「横の位置」と「たての位置」の 2 つで表す方法です。ただし表計算の行は下へ行くほど番号が大きくなり、座標の y （上が+）とは向きが反対です。教室の席も「まどから 4 列め、前から 3 番め」と、2 つの数で 1 つに決まります。❓ はてな？ の答えは「数は 2 つ」です。

3 マイナスの座標と、4つの区画

x 軸も y 軸も数直線なので、0 の左や下にはマイナスの数が並びます（2-2：
温度計をたおすと数直線）。マイナスは「反対の向き」なので、 x 座標が負なら
左へ、 y 座標が負なら下へ進みます。



点 $B(-3, 2)$ は、O から左へ
3、そこから上へ2（青い矢印）。

$C(-2, -3)$ は、左へ2、下へ
3。

$D(4, -1)$ は、右へ4、下へ1。

2本の軸で、平面は4つの区画に分かれます。どの区画にあるかは、 x 座標と
 y 座標の符号（+か-か）だけで決まります。

区画	x 座標	y 座標	例
右上	+	+	$A(3, 2)$
左上	-	+	$B(-3, 2)$
左下	-	-	$C(-2, -3)$
右下	+	-	$D(4, -1)$

表1 符号で、区画が決まる。

$(4, 0)$ や $(0, -3)$ のように、座標のどちらかが0の点は軸の上にあり、どの
区画にも入りません（高校では、4つの区画を象限とよび、右上から反時計回りに第1象限、第2象限、…と名前をつけます）。

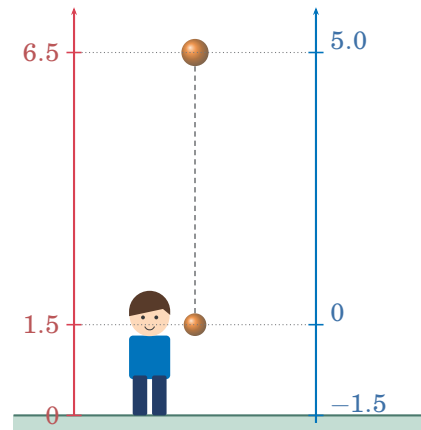
4 +の向きと原点は、自分で決める

座標を使うとき、原点をどこに置くか、どちらを+の向きにするかは、問題を解く人が自分で決めてかまいません。宝さがしでは木を原点にしましたが、池を原点にしてもよかったのです。ただし、大事な約束が2つあります。

たいせつ

- ① 原点と+の向きを決めたら、図にかき、問題の途中で変えない。
- ② 原点は、計算が楽になる所に置く。

手で真上にボールを投げます。ボールをはなした手は地面から1.5m、ボールのいちばん高い所は地面から6.5mでした。上を+にしたy軸で、原点の置き方を2通り考えます（右の図の赤い軸と青い軸）。



地面を原点にする（赤）：手は $y = 1.5$ 、いちばん高い所は $y = 6.5$ 。上がった高さは $6.5 - 1.5 = 5.0$ (m)。

手を原点にする（青）：手は $y = 0$ 、いちばん高い所は $y = 5.0$ 。上がった高さは $5.0 - 0 = 5.0$ (m)。

原点を変えると、座標の数は変わります。でも、2つの点のあいだの長さ（上がった高さ）は、どちらでも5.0mで同じです。原点は「ものさしの0をどこに当てるか」を決めているだけだからです。「どれだけ上がったか」を知りたいなら、はなした所を原点にすると、ひき算がいらす楽です。

途中で原点を変えと

手の高さは地面を原点にして 1.5、いちばん高い所は手を原点にして 5.0 と、ばらばらに決めてしまうと、 $5.0 - 1.5 = 3.5$ となって、まちがった答えが出ます。ほんとうは 5.0m 上がっています。①の約束は、このまちがいをふせぐためです。

下を+にしてもよい

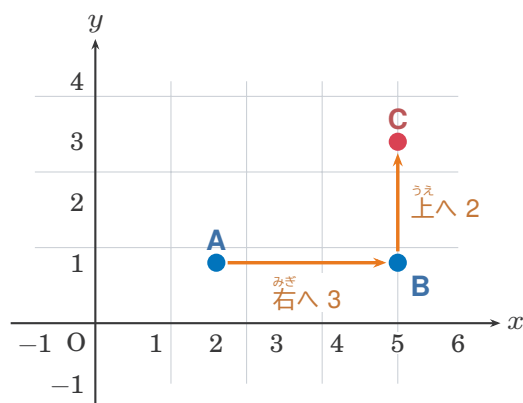
落ちる物だけを考えるときは、下を+にすると、座標がマイナスにならず計算が楽です。たとえば、はなしてから 1 秒で 4.9m 落ちたボールは、下を+にすれば $y = 4.9$ 、上を+にすれば $y = -4.9$ です。どちらも正しい表し方です。コンピュータの画面では、原点を左上のすみに置き、 y を下向きに+にするのがふつうです (71 ページ)。

⑤ 点を動かす

ゲームで、キャラクターが方眼の上を動きます。いまの場所は A(2, 1) です。右へ 3 マス動くと、どこへ行くでしょう。

右へ動くので、 x 座標が 3 ふえて $2 + 3 = 5$ 。上下には動かないので、 y 座標は 1 のまま。B(5, 1) です。そこから上へ 2 マス動くと、 y 座標が 2 ふえて $1 + 2 = 3$ 。C(5, 3) です。

数だけで書くと、次のようになります。



動き	x 座標	y 座標
右へ p	p ふえる $(+p)$	そのまま
左へ p	p へる $(-p)$	そのまま
上へ q	そのまま	q ふえる $(+q)$
下へ q	そのまま	q へる $(-q)$

表2 点 (a, b) を動かすと

点 (a, b) を右へ 3 動かすと $(a + 3, b)$ 、左へ 2 動かすと $(a - 2, b)$ 、右へ p ・上へ q 動かすと $(a + p, b + q)$ です。横の動きは x 座標だけ、たての動きは y 座標だけを変えます。横とたては、おたがいにじゃまをしません。

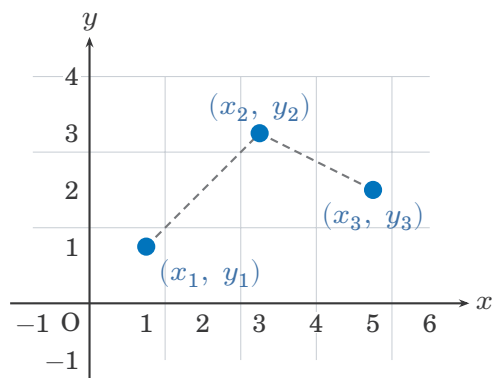
どれだけ動いたかを求める

反対に、A(2, 1) から C(5, 3) へ動いたとき、どれだけ動いたかは、「あとーまえ」(2-3) で求めます。 x は $5 - 2 = 3$ で右へ 3、 y は $3 - 1 = 2$ で上へ 2 です。ひき算の答えがマイナスなら、左や下へ動いたということです。

6 点がたくさんあるとき：下つき文字

部屋のそうじをするロボットそうじ機は、自分の場所を座標で覚えながら動きます。1 秒ごとの場所を記録すると、座標がたくさん並びます。

1 回めに記録した座標を (x_1, y_1) 、2 回めを (x_2, y_2) 、3 回めを (x_3, y_3) と書きます。 x の右下の小さな数字は「何番めか」を表す名札で、これを下つき文字といいます。 x_1 は「エックス・いち」、 x_2 は「エックス・に」と読みます。



図の例では、 $(x_1, y_1) = (1, 1)$ 、 $(x_2, y_2) = (3, 3)$ 、 $(x_3, y_3) = (5, 2)$ です。 $x_2 = 3$ 、 $y_3 = 2$ のように、1つずつ取り出して使うこともできます。点が100個あっても、 a 、 b 、 c 、…のように文字が足りなくなることはありません。

書き方	読み方	意味
x_1	エックス・いち	1番めの x (名札)
x^2	エックスの2乗	$x \times x$ (2-7)
$2x$	2 エックス	$2 \times x$ (2-12)

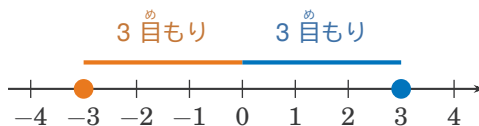
表3 小さな数字の位置で、意味がまったくちがう。

下つき文字は、かけ算ではありません。 x_1 を $x \times 1$ と読むと、ただの x になってしまい、名札の意味がなくなります。2回めと1回めのあいだに x が変わった量は、「あとーまえ」で $x_2 - x_1$ です。2-3の Δx と同じものです。図の例では $x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$ で、ロボットは右へ2動きました。3-13からのデータの章でも、1回めにはかった値を x_1 、2回めを x_2 と書いて使います。

7 0からの距離：絶対値と、2点の距離

数直線で見ると

数直線の -3 と 3 は、 0 の左と右にあり、向きは反対です。でも、 0 からどれだけはなれているかは、どちらも3目もりで同じです。海面から上へ 50m の山の上と、下へ 50m の海の中は、向きはちがっても、海面からの距離は同じ 50m です。



数直線の上で、ある数が0からどれだけはなれているかを、その数の絶対値といいます。-3の絶対値を、数を2本のたての線ではさんで $|-3|$ と書き、「絶対値マイナス3」と読みます。

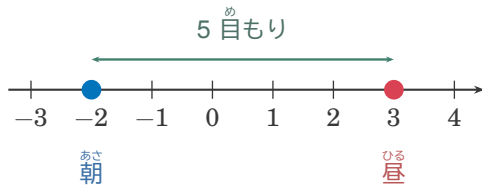
$$|-3| = 3, \quad |3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-2.5| = 2.5$$

記号で見る

上の例を見ると、絶対値は「マイナスの符号をとった数」になっています。正の数と0は、そのままです。距離はマイナスにならないので、絶対値はいつも0か正の数です。距離で考えても、符号をとると考えても、同じ答えになります。

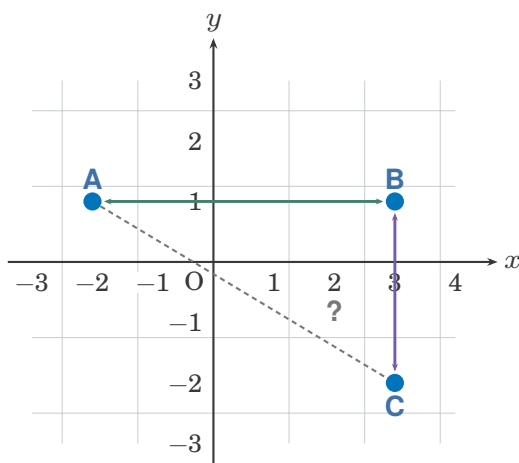
数直線の2点の距離

朝の気温が -2°C 、昼が 3°C でした。温度計の目もりを数えると、-2から3までは5目もりです。計算では「大きいほう-小さいほう」で $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ です（2-2：ひく数がマイナスなら、たす）。



順番を逆にひくと $-2 - 3 = -5$ になりますが、絶対値をとれば $|-5| = 5$ で、同じ距離になります。だから、どちらからひいてもよいように、2点 a 、 b の距離は $|b - a|$ と書きます。

横・たてに並んだ2点の距離



$A(-2, 1)$ と $B(3, 1)$ は、 y 座標がどちらも 1 なので、横に並んでいます。距離は x 座標だけを比べて、 $|3 - (-2)| = 5$ です。マス目を数えても 5 です。

$B(3, 1)$ と $C(3, -2)$ は、 x 座標が同じで、たてに並んでいます。距離は $|-2 - 1| = 3$ です。

下つき文字で書くと、横に並んだ2点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_1) の距離は $|x_2 - x_1|$ 、たてに並んだ2点 (x_1, y_1) 、 (x_1, y_2) の距離は $|y_2 - y_1|$ です。

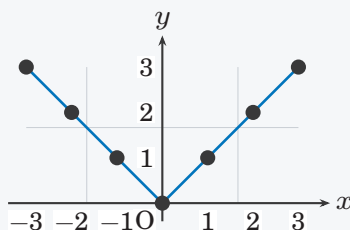
A と C のように斜めに並んだ2点の距離は、5 と 3 をたした 8 ではありません（斜めの近道のほうが短いからです）。斜めの距離は、第4巻の4-4（三平方の定理）で求められるようになります。

もっと知りたい ★★

$y = |x|$ の点をうってみよう

x が $-3, -2, \dots, 3$ のときの $y = |x|$ を表にして、点をうつと、下のよに V 字の形に並びます。原点で、線がとがって折れ曲がっています。このとがった所は、第5巻の5-3で、もう一度調べます。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3



この章で出てきたことば

座標軸 横の x 軸とたての y 軸。0 の所で直角に交わる。

原点 2本の軸が交わる点。0 と書く。座標は $(0, 0)$ 。

座標 点の場所を表す数の組。 $(x$ 座標, y 座標) の順に書く。

下つき文字 x_1, x_2 のように、何番めかを表す右下の小さな数字。かけ算ではない。

絶対値 数直線で 0 からの距離。 $|-3| = 3$ 。

記号カード

初めて出た章 3-2

x_1

読み方 エックス・いち
意味 1 番めの x 。右下の数字は名形で、かけ算ではない
英語 x sub one

記号カード

初めて出た章 3-2

$|x|$

読み方 絶対値エックス
意味 x の絶対値。数直線で 0 からの距離。 $|-3| = 3$
英語 absolute value

コラム 将棋の「7 六歩」も、地球の緯度・経度も座標

将棋の記録では、「7 六歩」のように、盤の右から数えた列（1～9 の数字）と、上から数えた段（一～九の漢数字）の 2 つで場所を表します。地球の上の場所は、赤道から北や南へ何度かを表す緯度と、イギリスのグリニッジから東や西へ何度かを表す経度の 2 つで表します。たとえば東京駅は、北緯約 35.7 度、東経約 139.8 度です。スマホの地図は、この 2 つの数で今いる場所を示しています。どれも、「どこから・どちら向きに・いくつ」を 2 組決めて、場所を 2 つの数で伝える方法です。

たいせつ

点 (a, b) : 原点から右へ a 、上へ b (マイナスなら左・下)。 x が先、 y があと。

右へ p 、上へ q 動かすと $(a + p, b + q)$ 。動いた量は $x_2 - x_1$ 、 $y_2 - y_1$ (あと-まえ)。

横に並んだ2点の距離は $|x_2 - x_1|$ 、たてなら $|y_2 - y_1|$ 。

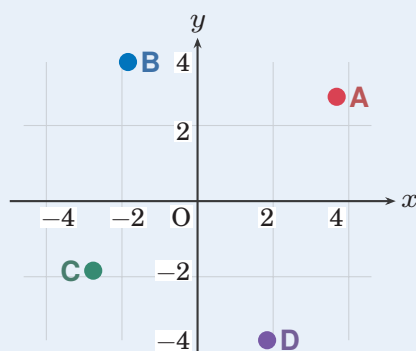
📖 れいだい 例題でたしかめよう

📖 れいだい 例題1 点の座標を読む・点をかく

(1) 右の図の点 A、B、C、D の座標を答えましょう。

(2) 点 E $(-4, 1)$ をかくには、原点からどう進めばよいですか。

かんが かんた 考え方 点から x 軸・ y 軸へまっすぐな線をおろして、当たった目もりを読みます。 x が先、 y があとです。



しき (1) A : 下へおろすと x 軸の4、横へ引くと y 軸の3

B : x 軸の-2、 y 軸の4。C : -3と-2。D : 2と-4

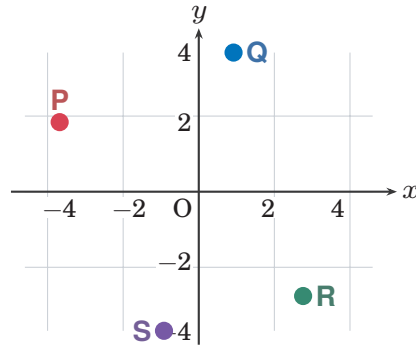
(2) $x = -4$ はマイナスなので左へ4、 $y = 1$ はプラスなので上へ1

こたえ (1) A $(4, 3)$ 、B $(-2, 4)$ 、C $(-3, -2)$ 、D $(2, -4)$

(2) 原点から左へ4、そこから上へ1進む

じぶんでこう1

(1) 右の図の点 P、Q、R、S の座標を答えましょう。



(2) 点 T(3, -2) をかくには、原点からどう進めばよいですか。

例題2 どの区画にある？

次の点は、右上・左上・左下・右下のどの区画にありますか。軸の上にあるときは、どちらの軸の上かを答えましょう。

(1) (-4, 7) (2) (5, -1) (3) (-2, -6) (4) (0, -3)

考え方 x 座標の符号で左右、 y 座標の符号で上下が決まります。0 なら軸の上です。

しき (1) x は-で左、 y は+で上 (2) x は+で右、 y は-で下
(3) 左と下 (4) $x = 0$ なので、左右には動かない。下へ3

こたえ (1) 左上 (2) 右下 (3) 左下 (4) y 軸の上

じぶんでこう2

次の点は、どの区画にありますか。軸の上なら、どちらの軸の上かを答えましょう。(1) (3, 8) (2) (-2, -6) (3) (6, 0) (4) (-5, 4)

例題3 点を動かす

(1) 点 A(2, -1) を、右へ4、上へ3動かした点 B と、左へ5、下へ2動かした点 C の座標を求めましょう。

(2) ゲームの画面は、原点が左上のすみで、 x は右向き、 y は下向きが+です。キャラクターは (100, 50) にいて、ボタンを1回おすと右へ20、上へ15動きます。3回おすと、どこへ行きますか。

考え方 右・左は x 座標、上・下は y 座標だけが変わります。(2) は y が下向きに+なので、上へ動くと y はへります。

しき (1) B : $(2 + 4, -1 + 3) = (6, 2)$

C : $(2 - 5, -1 - 2) = (-3, -3)$

(2) 3回で右へ $20 \times 3 = 60$ 、上へ $15 \times 3 = 45$

$(100 + 60, 50 - 45) = (160, 5)$

こたえ (1) B(6, 2)、C(-3, -3) (2) (160, 5)

じぶんでとこう3

(1) 点 A(-1, 3) を、右へ2、下へ5動かした点 B と、左へ3、上へ1動かした点 C の座標を求めましょう。(2) 原点が左上、 y が下向きに+の画面で、(60, 80) にいるキャラクターが、1回で左へ10、下へ25動きます。2回動くと、どこへ行きますか。

例題 4 下つき文字と、動いた量

ロボットの手の先が、点 $(x_1, y_1) = (3, -2)$ から点 $(x_2, y_2) = (-1, 4)$ へ動きました（単位は cm）。

(1) x_1 と y_2 はいくつですか。(2) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を求めましょう。

(3) 手の先は、左右・上下にどれだけ動きましたか。

考え方 1 は 1 番め（はじめ）、2 は 2 番め（あと）の名札です。動いた量は「あと－まえ」。マイナスなら左や下です。

しき (1) x_1 ははじめの x 座標で 3。 y_2 はあとの y 座標で 4

(2) $x_2 - x_1 = -1 - 3 = -4$ 、 $y_2 - y_1 = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$

(3) -4 は左へ 4、 6 は上へ 6

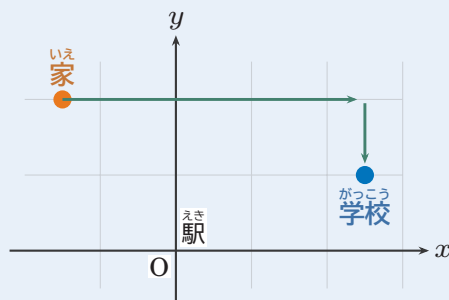
こたえ (1) $x_1 = 3$ 、 $y_2 = 4$ (2) -4 と 6 (3) 左へ 4 cm、 上へ 6 cm

じぶんでこう 4

ロボットの手の先が、 $(x_1, y_1) = (-2, 5)$ から $(x_2, y_2) = (4, 1)$ へ動きました（cm）。(1) y_1 と x_2 はいくつですか。(2) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を求めましょう。(3) 左右・上下にどれだけ動きましたか。

例題5 原点をとりかえる

駅を原点、東を x の+、北を y の+とし、1目もりを100mとします。学校は(5, 2)、家は(-3, 4)です。向きはそのまま、原点を家にとりかえると、学校と駅の座標はどうなりますか。



考え方 新しい座標は「家から見て、どれだけ東・北にあるか」です。家から学校への動きを「あとーまえ」で求めます（緑の矢印）。

しき 学校： x は $5 - (-3) = 8$ 、 y は $2 - 4 = -2$

駅： x は $0 - (-3) = 3$ 、 y は $0 - 4 = -4$

確かめ：マスを数えると、家から学校は東へ8、南へ2

こたえ 学校 (8, -2)、駅 (3, -4)

じぶんでこう5

駅を原点、東を x の+、北を y の+とすると、公園は(4, -1)、家は(-2, 3)です。向きはそのまま原点を家にとりかえると、公園と駅の座標はどうなりますか。

例題 6 絶対値

次の値を求めましょう。(1) $|-7|$ (2) $|2.5|$ (3) $|0|$ (4) $|-3| + |2|$
(5) $|-6| - |4|$

考え方 絶対値は 0 からの距離なので、マイナスの符号をとりません。(4)
(5) は、それぞれの絶対値を先に求めてから計算します。

しき (1) -7 は 0 から 7 (2) 2.5 は 0 から 2.5 (3) 0 は 0 から 0
(4) $|-3| + |2| = 3 + 2 = 5$ (5) $|-6| - |4| = 6 - 4 = 2$

こたえ (1) 7 (2) 2.5 (3) 0 (4) 5 (5) 2

じぶんでとこう 6

次の値を求めましょう。(1) $|-12|$ (2) $|0.8|$ (3) $|-1.5|$ (4)
 $|-5| + |-3|$ (5) $|-9| - |5|$

例題 7 横・たてに並んだ 2 点の距離

(1) A($-3, 2$) と B($4, 2$) の距離を求めましょう。(2) C($1, -5$) と D($1, 3$)
の距離を求めましょう。

考え方 (1) は y 座標が同じなので横に並び、 x 座標の差の絶対値。(2)
は x 座標が同じなので、たてに並び、 y 座標の差の絶対値です。

しき (1) $|4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7$

(2) $|3 - (-5)| = |3 + 5| = |8| = 8$

確かめ：方眼にかいてマス数を数えても、7 と 8

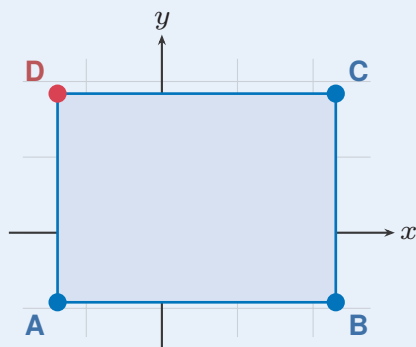
こたえ (1) 7 (2) 8

じぶんでとこう7

- (1) $A(-6, -1)$ と $B(-2, -1)$ の距離を求めましょう。(2) $C(2, 4)$ と $D(2, -3)$ の距離を求めましょう。

例題8 長方形の頂点・まわりの長さ・面積

長方形 $ABCD$ の3つの頂点が $A(-3, -2)$ 、 $B(5, -2)$ 、 $C(5, 4)$ です(1目もり1cm)。(1) 頂点 D の座標を求めましょう。(2) 長方形のまわりの長さと面積を求めましょう。



考え方 D は、 A と同じたての線の上 (x が同じ)、 C と同じ横の線の上 (y が同じ) にあります。辺の長さは、横・たてに並んだ2点の距離です。

しき (1) D の x は A と同じ -3 、 y は C と同じ 4
 (2) 横の辺 AB は $|5 - (-3)| = 8$ 、たての辺 BC は $|4 - (-2)| = 6$
 まわり： $(8 + 6) \times 2 = 28$ 、面積： $8 \times 6 = 48$

こたえ (1) $D(-3, 4)$ (2) まわり 28 cm 、面積 48 cm^2

じぶんでとこう8

長方形 $ABCD$ の3つの頂点が $A(-1, -3)$ 、 $B(3, -3)$ 、 $C(3, 2)$ です(1目もり1cm)。(1) D の座標を求めましょう。(2) まわりの長さと面積を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

x と y の順番

✕ 点 (3, 2) を、上へ3、右へ2進んでかく

○ かつこの前が x (右へ3)、後が y (上へ2)

入れかえると、(2, 3) というちがう点になります。「横が先、たてが後」とおぼえよう。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスの座標の向き

✕ 点 (-3, 2) を、右へ3、上へ2進んでかく

○ x がマイナスなので、左へ3、そこから上へ2

マイナスは「反対の向き」(2-2)。 x なら左、 y なら下です。

⚠ まちがえやすいところ

下つき文字をかけ算にする

✕ $x_1 = x \times 1 = x$

○ x_1 は「1番めの x 」。 x_1 と x_2 は、ちがう数でもよい

右下の小さな数字は名札です。右上の x^2 (2乗) とも、前の $2x$ ともちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスをはさむ2点の距離

✗ $A(-2, 1)$ と $B(3, 1)$ の距離は、 $3 - 2 = 1$

○ $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ 。マスを数えても5

-2 のマイナスを落としてはいけません。0 をまたぐときは、0 までの距離2 と、0 からの距離3 をたした5 になります。

⚠ まちがえやすいところ

絶対値の中に式があるとき

✗ $|-3 + 1| = 3 + 1 = 4$

○ 中を先に計算して、 $|-3 + 1| = |-2| = 2$

たての線ではさまれた所は、かつこと同じ「ひとまとまり」です (2-11)。

⚠ まちがえやすいところ

途中で原点を変える

✗ 手は地面から 1.5、最高点は手から 5.0。上がった高さは
 $5.0 - 1.5 = 3.5$

○ 地面を原点にそろえて、 $6.5 - 1.5 = 5.0$ (手を原点にそろえても
 $5.0 - 0 = 5.0$)

1 つの問題の中では、原点と+の向きを1 つに決め、図にかいておこう。

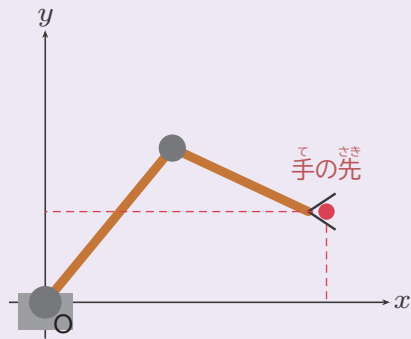
物理・工学ではこう使う

ロボットの手の先の位置

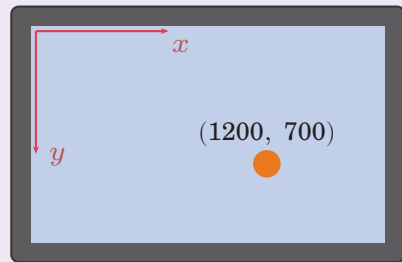
工場で部品を運ぶロボットは、台の中心を原点にして、手の先の位置を (x, y) (単位は mm) で覚えていきます。「 $(250, 120)$ の部品をつかんで、 $(-180, 300)$ へ運べ」という命令を受けると、 x を $-180 - 250 = -430$ 、 y を $300 - 120 = 180$ だけ動かせばよいと計算します。

画面の座標は、 y が下向き

スマホやパソコンの画面は、ピクセルという小さな点が並んでできています。横 1920 個・たて 1080 個の画面なら、左上のすみが原点 $(0, 0)$ で、 x は右へ、 y は下へ数えます。画面は上の行から順に表示するので、上から数えるほうが便利だからです。右下のすみは $(1919, 1079)$ です (0 から数えるので、 1920 ではなく 1919)。



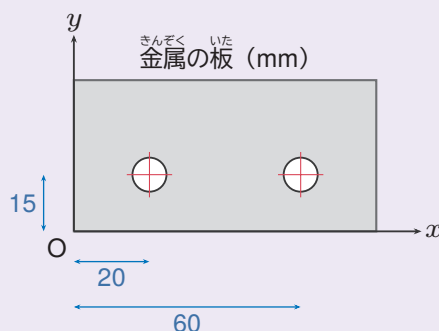
$(0, 0)$



ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

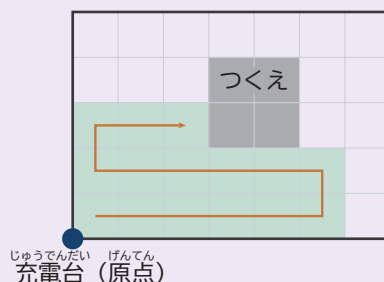
こうさく きかい げんてん
工作機械の原点

金属の板に穴をあける機械 (NC フライス盤) では、板の左下の角を原点にして、「(20, 15) と (60, 15) に穴をあける」のように座標 (mm) で命令します。角を原点にすると、図面に書かれた「角から何 mm」がそのまま座標になり、計算がいりません。原点を計算が楽な所に置く、よい例です。



ロボットそうじ機の地図

ロボットそうじ機の中には、充電台を原点にして、床を小さな正方形のマスに分けた地図を作るものがあります。走りながら、自分がいるマスの座標と、壁や家具にぶつかったマスの座標を記録していきます。まだ通っていないマスの座標がわかるので、そうじのしのこしをへらせます。



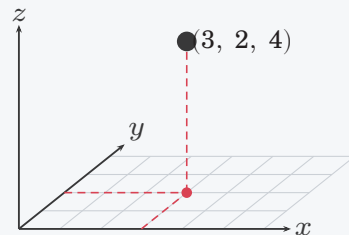
だいがく たね
大学への種

空間の中の場所は、高さの z を加えた 3 つの数 (x, y, z) で表します (4-13)。また、「原点からの距離と向きの角度」の 2 つで表す方法もあります (極座標、4-2)。どれも、この章の「原点と向きを決めて、数で場所を言う」考え方の続きです。

もっと知りたい ★★

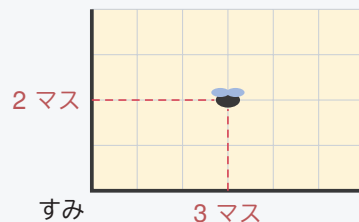
部屋の中を飛ぶハエは、3つの数

天井のハエは2つの数で言えました。部屋の中を飛ぶハエは、床のすみを原点にして、床にそった x と y の向きに、上向きの z を加えた3つの数 (x, y, z) で場所が決まります。 $(3, 2, 4)$ は、 x の向きに3、 y の向きに2進み、そこから上へ4の場所です（くわしくは4-13）。



コラム 座標を考えたデカルト

フランスのデカルト（1596～1650年）は、2-11で、わかっている数を a, b, c 、わからない数を x, y, z と書いた人です。ベッドから天井のハエを見ていて、「すみから、こちらの壁にそって何マス、あちらの壁にそって何マス」と、ハエの場所を2つの数で言えると気づいた、という話が伝わっています（ほんとうの話かどうかは、わかりません）。



デカルトは1637年の本で、図形を数と式で表して計算する方法を示しました。それで、この座標は「デカルト座標」ともよばれます。この考えから、3-3で学ぶ関数のグラフや、第5巻の微分・積分が生まれました。



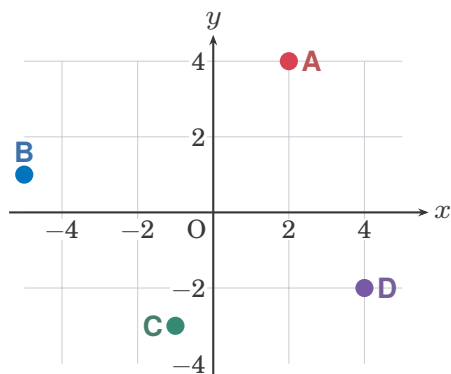
しょうまつもんだい
章末問題

3-2 のまとめ

きほん
基本



- 1 右の図の点 A、B、C、D の座標を答えましょう。



- 2 次の点は、どの区画にありますか。軸の上なら、どちらの軸の上かを答えましょう。(1) $(-1, -9)$ (2) $(7, 2)$ (3) $(0, 5)$ (4) $(4, -6)$
- 3 点 A $(-4, 2)$ を、右へ 6、下へ 3 動かした点 B と、左へ 1、上へ 4 動かした点 C の座標を求めましょう。
- 4 点 $(x_1, y_1) = (5, 1)$ から点 $(x_2, y_2) = (-2, -3)$ へ動きました。(1) x_2 と y_1 はいくつですか。(2) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を求め、左右・上下にどれだけ動いたかを答えましょう。
- 5 次の値を求めましょう。(1) $|-20|$ (2) $|3.6|$ (3) $|-4| + |-1|$ (4) $|-8| - |6|$
- 6 (1) A $(-5, 3)$ と B $(2, 3)$ の距離、(2) C $(-4, -6)$ と D $(-4, 1)$ の距離を求めましょう。

7 駅を原点、東を x の+、北を y の+とすると、図書館は $(3, 5)$ 、家は $(-4, 1)$ です。向きはそのまま原点を家にとりかえると、図書館と駅の座標はどうなりますか。

チャレンジ ★★

8 長方形 ABCD の3つの頂点が $A(-4, -1)$ 、 $B(2, -1)$ 、 $C(2, 3)$ です (1 目もり 1 cm)。D の座標と、まわりの長さ、面積を求めましょう。

9 原点が左上、 x が右向き、 y が下向きに+の画面で、ボールが $(300, 200)$ にあります。ボールは 1 秒ごとに右へ 40、上へ 25 動きます。4 秒後のボールの座標を求めましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 原点と軸を決めて、点をかいたり座標を読んだりできる。

→ 51 ページ

☐ マイナスの座標、4 つの区画、点を動かした座標がわかる。

→ 56 ページ

☐ 絶対値を使って、2 点の距離を求められる。

→ 58 ページ



ソラ

2 つの数で、場所がぴったり決まるんだね。次の章では、この点を並べて、関数のグラフにするよ。

第1部 関数とグラフ

★～★★

3-3

関数は

「入れると出てくる」ルール

この章の先に 2-11 2-13 2-15 3-1 3-2
この章の先に 3-4 3-5 5-1 5-3 5-6 9-8

この章でできるようになること

- ★ 1つ決まるともう1つが決まる2つの量（関数）を見分け、表・グラフ・式で表せる。
- ★★ $f(x)$ の書き方を読み、 $f(3)$ や $f(a+h)$ を計算できる。
- ★★ 2つの関数をつないだ合成関数 $f(g(x))$ を作れる。

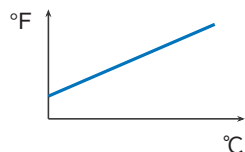
？ はてな？

アメリカの天気予報で「あしたの最高気温は86度」。暑いのかな？ 寒いのかな？ アメリカでは、温度をふつう華氏（°F）という目もりで表します。日本で使う摂氏（°C）とは、目もりがちがうのです。3人が、摂氏と華氏の間係を、それぞれのやり方で調べてきました。3人は、同じことを言っているのかな？ 86°F は、摂氏で何°Cかな？

ソラさんの表

°C	0	10	20	100
°F	32	50	68	212

ミナさんのグラフ



デルタさんの式

$$F = 1.8C + 32$$

C が摂氏、 F が華氏

△ やってみよう きまり当てゲーム

ふたり 1組で遊びます。1人が「出す人」、もう1人が「当てる人」です。

- 1 出す人は、「2倍して3たす」のような計算のきまりを、紙にこっそり書いておく。
- 2 当てる人は、好きな数を1つ言う。出す人は、きまりのとおり計算した数を答える。
- 3 当てる人は、言った数と答えの数を、表に書いていく。
- 4 きまりがわかったら、当てる人は「入れた数を x 、出てきた数を y とすると、 $y = \dots$ 」と式で答えよう。

ソラさんが当てる人になったときの表です。どんなきまりかな？

言った数 x	1	2	5	10	0
答えの数 y	5	7	13	23	3

1を言うと5、2を言うと7です。言った数が1ふえると、答えは2ふえています。だから「2倍」が入っていそうです。 $1 \times 2 = 2$ で、5になるには3たりません。ほかの数でも確かめると、 $5 \times 2 + 3 = 13$ 、 $10 \times 2 + 3 = 23$ 、 $0 \times 2 + 3 = 3$ で、全部合います。きまりは「2倍して3たす」、式で書くと $y = 2x + 3$ です。

このゲームで大事なのは、同じ数を言えば、いつも同じ答えが返ってくることです。もし、1を言ったのに、あるときは5、あるときは8と答えが変わったら、きまりは当てられません。この章では、この「入ると、決まった1つが出てくる」しくみに名前をつけて、書き方を学びます。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-11** 文字を使うと、どんな数でも成り立つきを1つの式で書ける。
- 2-13** 文字に数を入れるのが代入。マイナスの数や式は、かっこをつけて、かっこごとに入れる。
- 2-15** 比例 $y = ax$: x が2倍・3倍になると y も2倍・3倍。グラフは原点を通る直線。
- 3-1** x を1つ決めると y がただ1つに決まる関係がある。まわりが20cmの長方形の面積は、1つに決まらない。変数のとる値の範囲(変域)は、不等号で書く。
- 3-2** 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y 進んだ所にかく。



ミナ

きを当てるとき、表を横に見たら「1ふえると2ふえる」が見つかったよ。

数学の道具

1 1つ決まると、1つ決まる：関数

3-1では、1つの量を決めると、もう1つの量がただ1つに決まる関係を見ました。ここでは、この関係に名前をつけます。

身のまわりには、一方が変わると、それにつれてもう一方も変わる2つの量がたくさんあります。たとえば、正方形の1辺の長さを変えると、面積も変わります。このような2つの量を「**ともなって変わる量**」といいます。

正方形の1辺を x [cm]、面積を y [cm²] として、表にしてみます。面積は1辺×1辺なので、 $x = 3$ なら $y = 3 \times 3 = 9$ です。

1 辺 x (cm)	1	2	3	4	5
面積 y (cm ²)	1	4	9	16	25

表 1 1 辺を決めると、面積がただ 1 つに決まる。

1 辺を 3 cm と決めれば、面積は必ず 9 cm² です。同じ 3 cm なのに、面積が 9 cm² になったり 10 cm² になったりすることはありません。

決まらない例 今度は、クラスの人の「年齢」と「身長」を考えます。同じ 13 歳でも、身長が 150 cm の人も、162 cm の人もいます。年齢を 13 歳と決めても、身長は 1 つに決まりません。

関数 (○)



自動販売機

ボタン 1 つに、飲み物 1 つ

関数ではない (×)



カプセルのおもちゃ

同じお金でも、何が出るかわからない

図 1 入れるもの (ボタン・お金) を決めると、出てくるものが 1 つに決まるか？

もう 1 つの見方：自動販売機 自動販売機は、どのボタンをおすかを決めると、出てくる飲み物が 1 つに決まります。ちがうボタンから同じお茶が出てきません。でも、カプセルのおもちゃの機械は、同じお金を入れても、何が出てくるかわかりません。出てくるものが 1 つに決まらないのです。

このように、2 つの量 x と y があって、 x の値を 1 つ決めると、それによって y の値がただ 1 つに決まるとき、「 y は x の関数である」といいます。正方形の面積は 1 辺の関数です。身長は年齢の関数ではありません。 x と y は、ど

1
 ちらも値が変わる変数です(3-1)。 x を「入れる数」、 y を「出てくる数」と考えると、関数は「入ると、決まった1つが出てくるルール」です。

1 せいかくに言う

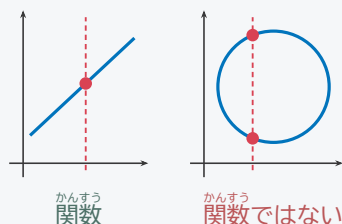
「ただ1つに決まる」とは、同じ x に対して y が2つ以上にならない、ということです。ちがう x に対して同じ y になるのはかまいません。たとえば、 $y = x^2$ では、 $x = 3$ でも $x = -3$ でも $y = 9$ ですが、 y は x の関数です。

2 もっと知りたい ★★

グラフで関数を見分ける：たての線を引いてみよう

グラフに、たての直線(x が同じ値の点の集まり)を、いろいろな所に引いてみます。

どこに引いても、グラフと交わる点が1つまでなら、 y は x の関数です。まっすぐなグラフはそうになっています。円の形のグラフは、たての線と2つの点で交わる所があります。同じ x に y が2つあるので、関数ではありません。



2 3つの見方：表・グラフ・式

② はてな? の温度で考えましょう。華氏と摂氏は、目もりの0の場所も、1目もりの大きさもちがいます。そこで、2つの目もりをくらべるのに、だれでもつくれる2つの温度を使います。

- 水がおこる温度：摂氏で 0°C 、華氏で 32°F
- 水がふっとうする温度(山の上でない所で)：摂氏で 100°C 、華氏で 212°F

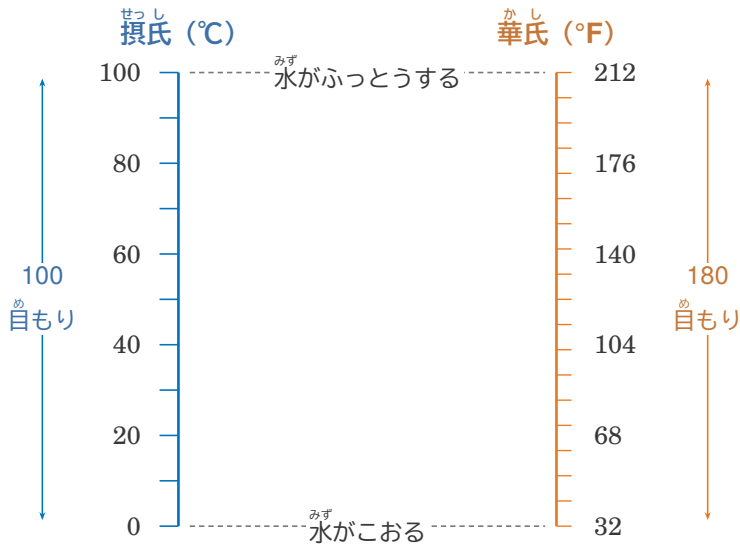


図2 同じ温度のはばが、摂氏では100 目もり、華氏では180 目もり。

こおる温度からふつとうする温度までは、摂氏では $100 - 0 = 100$ 目もり、華氏では $212 - 32 = 180$ 目もりです。同じはばを、華氏は180 にわけているのです。だから、摂氏の1 目もりは、華氏では

$$180 \div 100 = 1.8$$

目もりぶんです (1 あたりの量。2-3)。摂氏が 1°C 上がるごとに、華氏は 1.8°F ずつ上がります。

1 ひょう 表にする

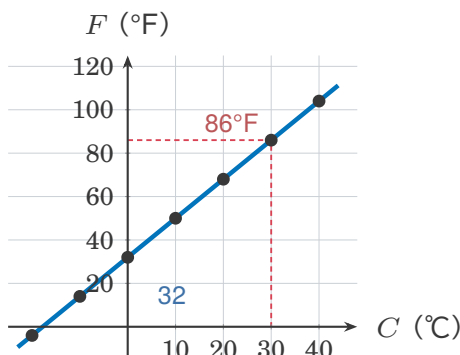
摂氏が 0°C のとき、華氏は 32°F 。そこから摂氏が 10°C 上がるごとに、華氏は $1.8 \times 10 = 18$ ずつ上がります。

摂氏 $C (^{\circ}\text{C})$	-20	-10	0	10	20	30	40
華氏 $F (^{\circ}\text{F})$	-4	14	32	50	68	86	104

表2 摂氏が10 ふえるごとに、華氏は18 ふえる。

表を見ると、 86°F は 30°C です。**？はてな？** の答えは 30°C 。暑い夏の日は。

2 グラフにする



表の組を点にして (3-2)、なめらかにつなぐと、まっすぐな線になります。摂氏が同じだけ上がると、華氏も同じだけ上がるからです。グラフなら、表にない温度も読めます。たて軸の 86 から横へ進み、線に当たった所から下へ進むと、30℃です (赤い点線)。

線は、たて軸と 32 の所で交わります。原点は通りません。0℃が 0°F ではないからです。だから、華氏は摂氏に比例はしていません (2-15)。

3 式にする

摂氏 C [°C] は、0℃から C だけ上がった温度です。華氏は 32 から、1.8 の C 倍だけ上がります。

$$F = 1.8C + 32$$

$C = 30$ を代入すると (2-13)、 $F = 1.8 \times 30 + 32 = 54 + 32 = 86$ で、表と合います。式があれば、表にもグラフにもない温度でも、正確に計算できます。たとえば体温の 36.5℃ は、 $1.8 \times 36.5 + 32 = 65.7 + 32 = 97.7$ で、97.7°F です。

3 つは同じことを言っている ソラさんの表、ミナさんのグラフ、デルタさんの式は、どれも「摂氏が決まると、華氏がただ 1 つに決まる」という同じ関数を表しています。言い方がちがうだけです。それぞれに、得意なことがあります。

	得意なこと	にがてなこと
ひょう 表	書いてある値が、すぐ正確に読める	書いていない値はわからない
グラフ	全体の形と、変わり方がひと目でわかる	細かい値は、目まりの分だけおまか
しき 式	どんな値でも、計算で正確に求められる	形や変わり方が、すぐには見えない

表3 表・グラフ・式の、得意なこととにがてなこと。



図3 表・グラフ・式は、行き来できる。

3 入ると出てくる箱： $f(x)$

関数は、数を入ると、きまりにしたがって1つの数が出てくる「箱」のようなものです。箱の中のきまりが「1.8倍して32たす」なら、30を入ると86が出てきます。

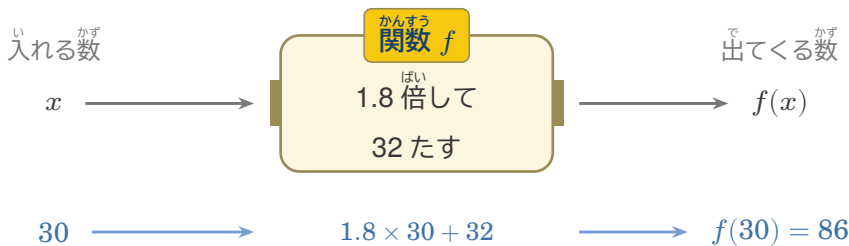


図4 関数 f は、入れた数 x から、1つの数 $f(x)$ をつくって出す箱。

この箱に f という名前をつけます。 f は、関数を英語で function (ファンクション) ということから来た文字です。 $f(x)$ という書き方は、およそ290年前に、スイスの数学者オイラーが使いはじめました。日本では、むかし関数を「函数」と書きました。「函」は「はこ」という意味の字です。そして、

- 箱 f に x を入れて出てきた値を、 $f(x)$ と書き、「エフ・エックス」と読みます。
- 箱 f に 3 を入れて出てきた値は、 $f(3)$ と書き、「エフ・かっこ 3」と読みます。

この箱のきまりは、 $f(x) = 1.8x + 32$ と書けます。「 x を入れると $1.8x + 32$ が出てくる」という意味です。30 を入れると、

$$f(30) = 1.8 \times 30 + 32 = 86$$

です。「 $f(30) = 86$ 」の 1 行で、「入れた数は 30」「出てきた数は 86」の両方がわかります。 $y = 86$ と書くだけでは、何を入れたのかがわかりません。これが $f(x)$ の書き方のよいところです。

$f(3)$ はかけ算ではない f は「きまりの名前」で、数ではありません。だから $f(3)$ は $f \times 3$ ではありません。駅の「3 番線」が「駅 $\times$ 3」でないのと同じように、 $f(3)$ のかっこは「この数を入れる」という印です。2-12 では、 $3(a+2)$ のように、数や文字とかっこのあいだのかけ算の記号を省きました。でも、かっこの前が関数の名前ときは、かけ算ではありません。

表で見ると 関数 $f(x) = x^2$ を、表にしてみます。上の行が入れる数 x 、下の行が出てくる数 $f(x)$ です。 $f(3)$ は「表の $x = 3$ の下の数」なので、 $f(3) = 9$ です。 $f(-3)$ も 9 です。

x	-3	-1	0	2	3
$f(x)$	9	1	0	4	9

いろいろな名前の関数 関数がいくつも出てくるときは、 $g(x)$ 、 $h(x)$ のように、ほかの文字も使います。物理では、量の名前をそのまま関数の名前に使うことがよくあります。たとえば、ボールが落ちはじめてから t 秒後に落ちた距離 x は $x = 5t^2$ (m) でした (2-13)。 x は時刻 t の関数なので、

$$x(t) = 5t^2$$

と書き、「エックス・かっこティー」と読みます。 $x(2) = 5 \times 2^2 = 20$ は「2 秒後には 20m 落ちている」という意味です。時刻 1.1 秒なら $x(1.1)$ (エックス・かっこ 1.1) と書きます。第 5 巻では、この書き方で速さを計算します (5-1)。

🔍 もっと知りたい ★★

プログラムの「関数」

2-19 のプログラム (Python) でも、「入ると出てくる箱」を作れます。プログラムでも、この箱を関数といいます。

```
def f(x):
    return 1.8 * x + 32
print(f(30))
print(f(100))
```

Python

じっこうけつ か
実行結果86.0
212.0

`def` は、英語の `define` (決める) の頭の 3 文字で、「箱 `f` のきまりを、こう決める」という意味です。`return` は「計算した数を出す」という命令です。`f(30)` と書くと、`x` に 30 が入って $1.8 \times 30 + 32$ が計算され、86.0 が出てきます。数学の $f(30)$ と同じ書き方です。

4 式をかっこごとに入れる

箱には、数だけでなく、マイナスの数も、文字も、式も入れられます。入れるときは、2-13 と同じように、 x の所に、入れるものをかっこごと置きます。

$$f(x) = x^2 \text{ なら}$$

$$f(\boxed{}) = (\boxed{})^2$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(a+h) = (a+h)^2$$

おな 同じものを、りょうほう い 両方の口に入れる

図 5 $f(x) = x^2$ は「入れたものを 2 乗する」きまり。入れたものはかっこでつつむ。

$f(x) = x^2$ なら、

● 3 を入れると、 $f(3) = 3^2 = 9$

● -3 を入れると、 $f(-3) = (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ (マイナスの数はかっこごと。2-13)

● $a + h$ を入れると、 $f(a + h) = (a + h)^2$

最後の $f(a + h)$ は、「 a より h だけ大きい数を入れた値」です。 $a + h$ はひとまとまりの数なので、かっこでつつんでから2乗します。 $(a + h)^2$ のかっこをはずす計算は、3-8 で学びます。

数で確かめる $a = 1$ 、 $h = 0.1$ とします。 $a + h = 1.1$ なので、はじめから1.1 を入れると、

$$f(1.1) = 1.1^2 = 1.1 \times 1.1 = 1.21$$

です。かっこごとに入れた式に $a = 1$ 、 $h = 0.1$ を入れても、

$$(a + h)^2 = (1 + 0.1)^2 = 1.1^2 = 1.21$$

で、同じになります。もし、かっこをつけずに $a + h^2$ とすると、

$$1 + 0.1^2 = 1 + 0.01 = 1.01$$

で、ちがう値になってしまいます。2乗が h だけにかかってしまうからです。

x が何回出てきても、全部おきかえる $f(x) = 3x + 1$ なら、 $f(a + h)$ は x の所に $a + h$ を入れて、

$$f(a + h) = 3(a + h) + 1 = 3a + 3h + 1$$

です (分配法則。2-12)。 $f(x) = x^2 + x$ のように x が2回出てくるときは、2つとも $a + h$ におきかえて、 $f(a + h) = (a + h)^2 + (a + h)$ です。1つだけおきかえて、もう1つを x のまま残してはいけません。

何のために？ 第5巻では、「 a から、ほんの少し h だけ進んだ所」の値 $f(a + h)$ と、もとの $f(a)$ をくらべて、変わる速さを調べます (5-3)。 h には0.1 や 0.01 などの小さな数が入ります。どんな h でも使えるように、文字のまま計算するのです。

5 箱をつなぐ：合成関数

1つの箱から出てきた数を、別の箱に入れることもできます。まず、買い物で考えましょう。1000円のおもちゃを、「100円引き」のクーポンを使って買います。お店では、ねだんに消費税10%がかかり、ねだんの1.1倍をはらいます(2-5)。

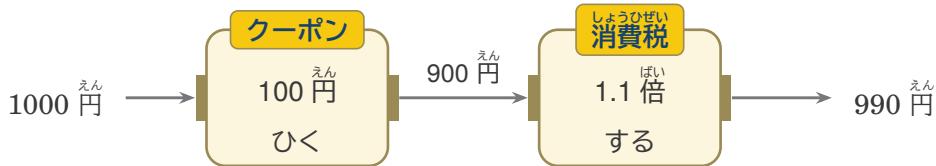


図6 はじめに100円ひいて、そのあとで1.1倍する。

2つめの箱では、 $900 \times 1.1 = 990$ になります。はらうのは990円です。

では、箱の順番を入れかえると、どうなるでしょう。先に1.1倍すると $1000 \times 1.1 = 1100$ 円、そのあとで100円ひくと $1100 - 100 = 1000$ 円です。同じ2つの箱でも、つなぐ順番で、出てくる数が変わることがあります。

数学の箱でつなぐ x を入れると $u = 3x + 1$ が出てくる箱と、 u を入れると $y = u^2$ が出てくる箱を、この順につなぎます。 $x = 0, 1, 2$ を入れて、表にしてみます。

入れる数 x	0	1	2
① 3倍して1たす $u = 3x + 1$	1	4	7
② それを2乗する $y = u^2$	1	16	49

表4 2つの箱を順に通す。 $x = 2$ なら、 $u = 3 \times 2 + 1 = 7$ 、 $y = 7^2 = 49$ 。

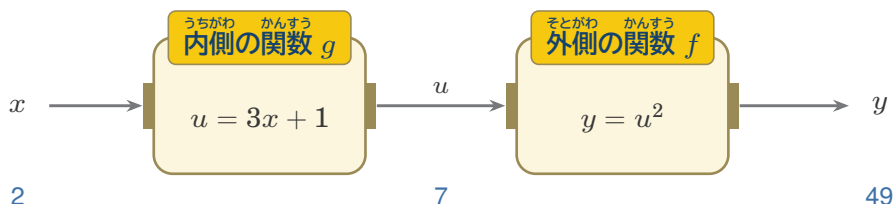


図7 2つの関数を順につないだもの。青い数は $x = 2$ のとき。

$u = 3x + 1$ を $y = u^2$ の u に、かっごと代入すると (2-13)、

$$y = u^2 = (3x + 1)^2$$

となって、 x から直接 y を求める式になります。 $x = 2$ を入れると、 $(3 \times 2 + 1)^2$ は $7^2 = 49$ になり、表と合います。

関数の書き方で書く 1つめの箱に g 、2つめの箱に f という名前をつける
と、 $g(x) = 3x + 1$ 、 $f(u) = u^2$ と書けます。 x を g に入れて出てきた $g(x)$ を、 f に入れるので、

$$y = f(g(x)) = (3x + 1)^2$$

と書きます。「エフ・ジー・エックス」と読みます。このように、関数の出力を別の関数に入れてつくった関数を、**合成関数**といいます。先にはたらく g を**内側の関数**、あとにはたらく f を**外側の関数**とよびます。 $f(g(x))$ の書き方でも、 g は内側のかっこの中にあります。

計算は、内側から $f(g(2))$ を求めるときは、かっこの中から先に計算します (2-11)。

$$g(2) = 3 \times 2 + 1 = 7, \quad f(g(2)) = f(7) = 7^2 = 49$$

順番を入れかえると 先に f (2乗する)、あとで g (3倍して1たす) にすると、 $g(f(x)) = 3x^2 + 1$ です。 $x = 1$ で、 $f(g(1)) = f(4) = 16$ 、 $g(f(1)) = g(1) = 4$ で、ちがいます。買い物のクーポンと同じで、順番が大事です。

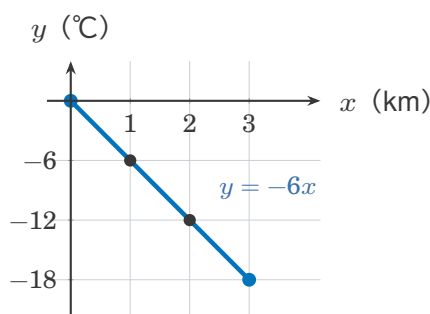
6 いろいろな関数

1 比例定数がマイナスの比例

空気の温度は、高い所ほど低くなります。山に登ると、100 m 登るごとに約 0.6°C 下がります。1 km (1000 m) なら、 $0.6 \times 10 = 6$ で、約 6°C 下がります。地面からの高さを x [km]、地面とくらべた温度の変化を y [$^{\circ}\text{C}$] とすると、下がるので y はマイナスの数です。

高さ x (km)	0	1	2	3
変化 y ($^{\circ}\text{C}$)	0	-6	-12	-18

x が 1 から 2 へ 2 倍になると、 y も -6 から -12 へ 2 倍です。 $y \div x$ は、 $(-6) \div 1 = -6$ 、 $(-12) \div 2 = -6$ で、いつも -6 です。だから $y = -6x$ で、比例定数が -6 の比例です。



比例定数がマイナスのときも、 x が 2 倍・3 倍になると y も 2 倍・3 倍になります。グラフは原点を通る直線ですが、右下がりになります。 x が 1 ふえるごとに、 y が 6 ずつへるからです。高さ 3776 m の富士山の頂上 (約 3.8 km) では、 $-6 \times 3.8 = -22.8$ で、地面より約 23°C 低くなります。ふもとが 25°C なら、頂上は約 2°C です。

2 変域: x と y のとる値の範囲

高さ 3 km の山なら、 x は 0 から 3 までしかとりません。このような変数のとる値の範囲を変域といい、不等号で $0 \leq x \leq 3$ と書きます (3-1)。このとき y の変域も決まります。 $x = 0$ で $y = 0$ 、 $x = 3$ で $y = -18$ なので、 $-18 \leq y \leq 0$ です。小さいほうを左に書きます。 x が大きいはしとき、 y は小さいはしになっています。右下がりのグラフだからです。

グラフでは、範囲のはしの点を●でかきます ($y = -6x$ のグラフの青い点)。●は「この点をふくむ」という印です。はしをふくまないとき (< のとき) は、○でかきます。

3 階段の関数：式で書けなくても関数

駐車場の料金が「30 分までごとに 200 円」だとします。10 分でも 30 分でも 200 円、31 分なら 400 円です。とめた時間を x 分、料金を y 円とします ($0 < x \leq 120$)。

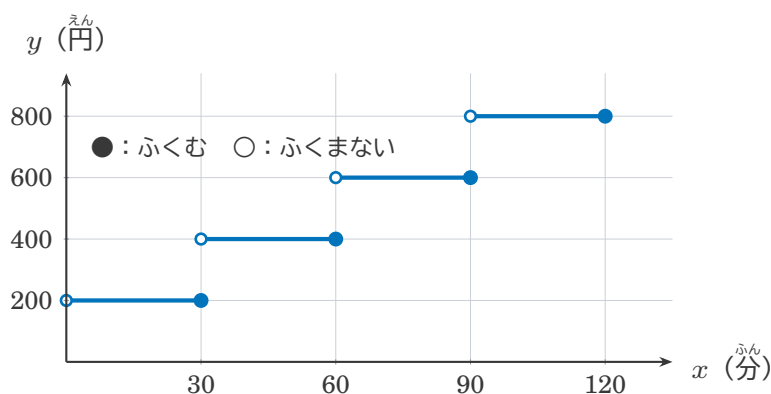


図8 駐車場の料金。30 < $x \leq 60$ のときは 400 円。

このグラフは、横にまっすぐな線が、段になって上がっていきます。ちょうど 30 分のときは 200 円なので、 $x = 30$ の所は、下の段のはしが●、上の段のはしが○です。 y を 1 つの式で書くことはできませんが、 x を決めると y はただ 1 つに決まるので、 y は x の関数です。関数は、式で書けるものだけではありません。2-17 で見た、なめらかな電圧を 8 ビットの数 (0~255) にする階段も、このような関数です。

4 比例式

比例するとき、 x と y の比はいつも同じです。ばねに同じおもりを 3 個下げると 6 cm のびるとき、5 個下げたときののびを y [cm] とすると、のびとおもりの数の比は等しいので、

$$6 : 3 = y : 5$$

と書けます。このように、比が等しいことを表す式を**比例式**といいます。比 $a:b$ の比の値は $\frac{a}{b}$ ($a \div b$) でした (2-5)。比が等しいとき、比の値も等しいので、

$$\frac{6}{3} = \frac{y}{5} \quad \text{すなわち} \quad 2 = \frac{y}{5}$$

y を 5 でわると 2 なので、 $y = 2 \times 5 = 10$ です (両辺に 5 をかける。2-14)。のびは 10 cm です。

たいせつ

x を 1 つ決めると y がただ 1 つに決まるとき、 y は x の関数。表・グラフ・式は、同じ関数の 3 つの見方。

$f(x)$ は「関数 f に x を入れた値」。 $f(x) = x^2$ なら $f(3) = 3^2 = 9$ 、 $f(a+h) = (a+h)^2$ 。入れるものは、かっこごと。

関数の出力を、別の関数に入れることができる (合成関数)。 $u = 3x + 1$ 、 $y = u^2$ なら $y = (3x + 1)^2$ 。計算は内側から。

この章で出てきたことば

関数 x の値を 1 つ決めると、 y の値がただ 1 つに決まるとき、「 y は x の関数」という。

$f(x)$ 関数 f に x を入れた値。「エフ・エックス」。 $f(3)$ は「エフ・かっこ 3」で、かけ算ではない。

合成関数 関数の出力を、別の関数に入れてつくった関数。 $f(g(x))$ 。先にはたらく g が内側の関数、あとの f が外側の関数。

変域 変数のとる値の範囲。 $0 \leq x \leq 3$ のように不等号で書く。

比例式 $6:3 = y:5$ のように、比が等しいことを表す式。比の値が等しいことを使って解く。

記号カード

初めて出た章 3-3

$f(x)$

読み方 エフ・エックス
意味 関数 f に x を入れた
値
英語 function

$f(3)$ は「エフ・かっこ 3」。かっこは「この数を入れる」という印で、かけ算ではありません。 $x(t)$ は「エックス・かっこティー」。

例題でたしかめよう

例題 1 関数かどうかを見分ける

y は x の関数ですか。関数でないものは、 y が 1 つに決まらない例を 1 つあげましょう。

- (1) 1 本 60 円のえんぴつを x 本買ったときの代金 y 円
- (2) 1 辺が x [cm] の正方形の面積 y [cm²]
- (3) まわりの長さが x [cm] の長方形の面積 y [cm²]

考え方 x を 1 つ決めて、 y が 1 つに決まるかを調べます。決まらないときは、同じ x で y がちがう例をあげます。

- しき** (1) 代金は $y = 60x$ 。 $x = 3$ なら $y = 180$ だけ。
 (2) 面積は 1 辺 $\times$ 1 辺で $y = x^2$ 。 y は 1 つに決まる。
 (3) まわりが 20 cm でも、たて 5 cm $\cdot$ 横 5 cm なら面積は 25、
 たて 1 cm $\cdot$ 横 9 cm なら面積は 9。同じ $x = 20$ で、 y が 2 つ。

こたえ (1) 関数 (2) 関数 (3) 関数ではない (例: $x = 20$ のとき、 $y = 25$ にも $y = 9$ にもなる)

例題2 ことばから式・表・グラフを作る

ある電気料金は、使った量に関係なくかかる基本料金が1000円で、さらに電気1kWh（キロワット時）ごとに30円かかります。1か月に x [kWh]使ったときの料金を y 円とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x = 0, 100, 200, 300$ のときの表とグラフを作りましょう。(3) 料金が7000円の時、使った電気は何kWhですか。

かんがえ方 料金 = 基本料金 + (1kWhあたりの料金) × (使った量) です。

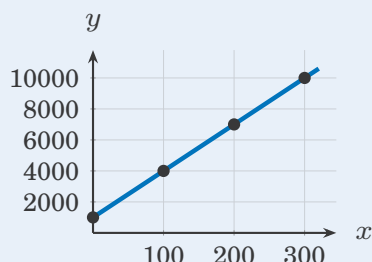
(3) は、式の y に7000を入れて、 x についての方程式を解きます(2-16)。

しき (1) $y = 1000 + 30 \times x = 30x + 1000$

(2) $x = 100$ なら $y = 30 \times 100 + 1000 = 4000$

ほかの x も同じように代入して、表にする。表の組を点にしてグラフにする。

x (kWh)	0	100	200	300
y (円)	1000	4000	7000	10000



(3) $30x + 1000 = 7000$

$30x = 7000 - 1000 = 6000$ 1000を移項する(2-14)

$x = 6000 \div 30 = 200$ 両辺を30でわる

こたえ (1) $y = 30x + 1000$ (2) しきの中の表とグラフ (3) 200 kWh

(確かめ: $30 \times 200 + 1000 = 7000$)

じぶんでところ1

y は x の関数ですか。関数でないものは、 y が1つに決まらない例を1つあげましょう。(1) 時速40 km で x 時間走ったときの道のり y [km] (2) 1辺が x [cm] の立方体の体積 y [cm³] (3) 面積が x [cm²] の長方形の、たての長さ y [cm]

じぶんでところ2

あるスポーツジムは、入会金が2000 円で、さらに1回使うごとに500 円かかります。 x 回使ったときの合計を y 円とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x = 0, 1, 2, 3, 4$ のときの表とグラフを作りましょう(ノートに)。(3) 合計が6000 円の時、何回使いましたか。

例題3 $f(x)$ の値を求める

(1) $f(x) = 1.8x + 32$ のとき、 $f(20)$ 、 $f(-10)$ 、 $f(37)$ を求めましょう。

(2) $x(t) = 5t^2$ のとき、 $x(3)$ を求めましょう。

考え方 $f(20)$ は「 x に20を入れた値」です。マイナスの数は、かっこをつけて入れます。(2) は、関数の名前が x 、入れる文字が t です。 t に3を入れます。

しき (1) $f(20) = 1.8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$

$$f(-10) = 1.8 \times (-10) + 32 = -18 + 32 = 14$$

$$f(37) = 1.8 \times 37 + 32 = 66.6 + 32 = 98.6$$

(2) $x(3) = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$

こたえ (1) $f(20) = 68$ 、 $f(-10) = 14$ 、 $f(37) = 98.6$ (2) $x(3) = 45$
(3秒で45m 落ちる)

例題 4 式をカッコごとに入れる

$f(x) = x^2$ 、 $g(x) = 3x + 1$ のとき、次の式を求めましょう。

(1) $f(-4)$ (2) $f(a + h)$ (3) $f(2a)$ (4) $g(a + h)$

かんが かんが **考え方** x の所に、入れるものをカッコごとと置きます。(3) の $(2a)^2$ は $2a \times 2a$ です。(4) はカッコの前に 3 があるので、分配法則でカッコをはずします (2-12)。

しき (1) $f(-4) = (-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

(2) $f(a + h) = (a + h)^2$

(3) $f(2a) = (2a)^2 = 2a \times 2a = 2 \times 2 \times a \times a = 4a^2$

(4) $g(a + h) = 3(a + h) + 1 = 3a + 3h + 1$

こたえ (1) 16 (2) $(a + h)^2$ (3) $4a^2$ (4) $3a + 3h + 1$

じぶんでこう 3

(1) $g(x) = 2.5x + 10$ のとき、 $g(4)$ 、 $g(-2)$ 、 $g(0.4)$ を求めましょう。(2) $x(t) = 5t^2$ のとき、 $x(4)$ を求めましょう。

じぶんでこう 4

$f(x) = x^2$ 、 $g(x) = 2x - 5$ のとき、次の式を求めましょう。

(1) $f(-5)$ (2) $f(t + 1)$ (3) $f(3a)$ (4) $g(a + h)$

例題5 はこ箱をつなぐ：合成関数

$g(x) = 2x - 1$ 、 $f(u) = u^2$ とします。

- (1) $f(g(3))$ を求めましょう。(2) $y = f(g(x))$ を x の式で表しましょう。
 (3) $g(f(3))$ を求め、(1) とくらべましょう。

考え方 計算は内側から。 $f(g(3))$ は、まず $g(3)$ を計算し、出てきた数を f に入れます。(2) は、 $g(x)$ をそのまま f にかっこごとに入れます。

しき (1) $g(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$ 、 $f(g(3)) = f(5) = 5^2 = 25$

(2) $f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2$

確かめ： $x = 3$ を入れると $(2 \times 3 - 1)^2 = 5^2 = 25$ 。(1) と同じ。

(3) $f(3) = 3^2 = 9$ 、 $g(f(3)) = g(9) = 2 \times 9 - 1 = 17$

こたえ (1) 25 (2) $y = (2x - 1)^2$ (内側の関数が g 、外側の関数が f)
 (3) 17。(1) の 25 とちがう。

例題6 ひれいていすう 比例定数がマイナスの比例と変域

$y = -2x$ で、 x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域を求めましょう。

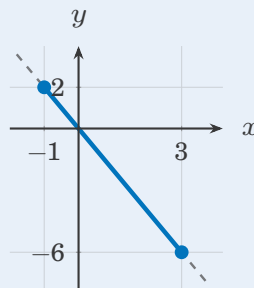
考え方 x の変域の両はしで、 y を計算します。比例定数がマイナスなので、グラフは右下がりです。 x が大きいほど y は小さくなります。

しき $x = -1$ のとき、 $y = -2 \times (-1) = 2$

$x = 3$ のとき、 $y = -2 \times 3 = -6$

小さいほうの -6 を左に書く。

こたえ $-6 \leq y \leq 2$



じぶんでとこう 5

$g(x) = x + 3$, $f(u) = u^2$ とします。(1) $f(g(2))$ を求めましょう。(2) $y = f(g(x))$ を x の式で表しましょう。(3) $g(f(2))$ を求め、(1) とくらべましょう。

じぶんでとこう 6

$y = -3x$ で、 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域を求めましょう。

例題 7 階段の関数を読む

駐車場の料金は「30 分までごとに 200 円」です (90 ページのグラフ)。とめた時間を x 分、料金を y 円とします。(1) 45 分とめたときの料金は何円ですか。(2) ちょうど 60 分とめたときの料金は何円ですか。(3) 料金が 600 円になるのは、 x がどんな範囲のときですか。不等号で答えましょう。

考え方 30 分ごとに区切って考えます。区切りの時間ちょうどのは、グラフの●の段 (下の段) です。

しき (1) 45 分は、30 分より長く 60 分まで、の 2 つめの段。

$$200 \times 2 = 400$$

(2) 60 分ちょうどは、「60 分まで」に入るので、2 つめの段で 400 円

(3) 600 円は 3 つめの段。60 分より長く、90 分まで

こたえ (1) 400 円 (2) 400 円 (3) $60 < x \leq 90$

例題8 比例式を解く

(1) $x : 12 = 3 : 4$ の x を求めましょう。

(2) 同じ紙 20 まいの重さは 90 g でした。この紙 50 まいの重さを x [g] として比例式を作り、 x を求めましょう。

考え方 比が等しいとき、比の値（前の数÷後の数）も等しくなります。

(2) は、重さとまい数の比が等しいので、 $x : 50 = 90 : 20$ です。

しき (1) $\frac{x}{12} = \frac{3}{4}$ 比の値が等しい

$$x = \frac{3}{4} \times 12 = 9 \quad \text{両辺に 12 をかける (2-14)}$$

$$(2) x : 50 = 90 : 20 \text{ より、} \frac{x}{50} = \frac{90}{20} = 4.5$$

$$x = 4.5 \times 50 = 225 \quad \text{両辺に 50 をかける}$$

こたえ (1) $x = 9$ (確かめ: $9 \div 12 = 0.75$, $3 \div 4 = 0.75$) (2) 225 g

じぶんでこう7

貸し自転車の料金は「1 時間までごとに 300 円」です。借りた時間を x 時間、料金を y 円とします ($0 < x \leq 4$)。 (1) 1.5 時間借りたときの料金は円ですか。

(2) ちょうど 3 時間借りたときの料金は円ですか。 (3) 料金が 600 円になるのは、 x がどんな範囲のときですか。

じぶんでこう8

(1) $x : 15 = 2 : 5$ の x を求めましょう。 (2) 同じくぎ 30 本の重さは 72 g でした。このくぎ 80 本の重さを x [g] として比例式を作り、 x を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

$f(3)$ をかけ算と読む

✕ $f(x) = x^2$ のとき、 $f(3) = f \times 3$

○ $f(3)$ は「 f に 3 を入れた値」。 $f(3) = 3^2 = 9$

f はきまりの名前で、数ではありません。かっこは「この数を入れる」という印です。

⚠ まちがえやすいところ

ちがう x で同じ y なら関数ではない？

✕ $y = x^2$ は、 $x = 3$ でも $x = -3$ でも $y = 9$ なので、関数ではない

○ $y = x^2$ は関数。同じ x に y が 2 つあるときだけ、関数ではない
ちがうボタンから同じお茶が出る自動販売機と同じです。 x を決めたとき y が 1 つなら関数です。

⚠ まちがえやすいところ

かっこをつけずに入れる

✕ $f(x) = x^2$ のとき、 $f(a + h) = a + h^2$

○ $f(a + h) = (a + h)^2$

$a = 1$ 、 $h = 0.1$ で確かめると、 $f(1.1) = 1.21$ 。 $a + h^2 = 1.01$ は合いません。 $a + h$ はひとまとまりで 2 乗します。

⚠ まちがえやすいところ

変域で、大小を逆に書く

$y = -2x$ 、 $1 \leq x \leq 3$ のとき

✗ $-2 \leq y \leq -6$

○ $-6 \leq y \leq -2$

-6 は -2 より小さい数です ($2 \cdot 2$)。小さいほうを左に書きます。

⚠ まちがえやすいところ

階段のはしの値

✗ 30 分までごとに 200 円の駐車場に、ちょうど 30 分とめると 400 円

○ ちょうど 30 分は「30 分まで」に入るので 200 円

グラフのはしの●と○を見て、どちらの段に入るかを確かめよう。

⚠ まちがえやすいところ

合成関数の順番を逆にする

$g(x) = 3x + 1$ 、 $f(u) = u^2$ のとき、 $f(g(1))$ は?

✗ 先に 2 乗して $1^2 = 1$ 、それから $3 \times 1 + 1 = 4$

○ 内側の g が先。 $g(1) = 4$ 、 $f(4) = 16$

かつこの中 (内側) から計算します。順番を入れかえると、ちがう関数になります。

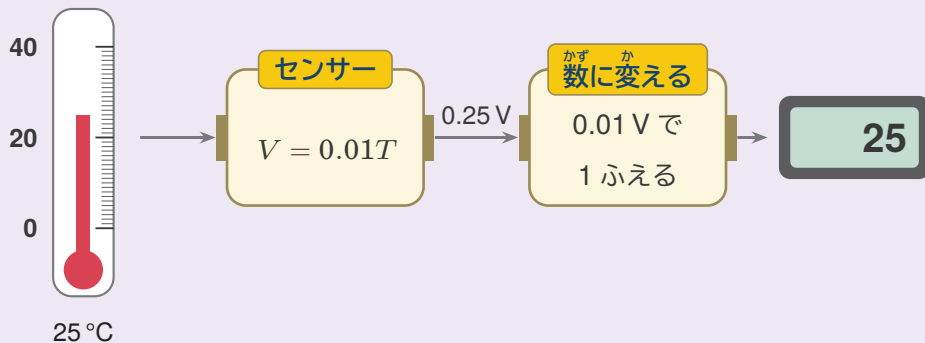
ぶつり 物理・工学ではこう使う

温度センサー：温度を入ると電圧が出てくる箱

エアコンや冷蔵庫には、温度をはかるセンサーが入っています。ある温度センサーは、 1°C につき 0.01V の電圧を出します。温度 $T[^{\circ}\text{C}]$ を入ると、電圧 $V = 0.01T$ (V) がでてくる関数です。 25°C なら $0.01 \times 25 = 0.25$ で、 0.25V です。

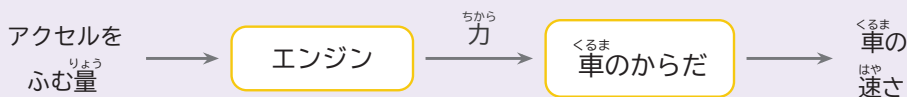
箱をつなぐと、温度が数になる

コンピュータは、電圧をそのままでは計算できません。電圧を数に変える部品 (2-17 の 8 ビットの階段) につなぎます。この部品が、 0.01V ごとに 1 つずつ数をふやすとすると、 0.25V は 25 になります。「温度→電圧→数」と、 2 つの箱をつないだ合成関数です。



ブロック線図：機械を「箱と矢印」でかく

機械を作る人は、しくみを「入ると出てくる箱」を矢印でつないだ図でかきます。この図をブロック線図といいます。たとえば自動車は、「アクセルをふむ量→エンジンの力→車の速さ」と、箱をつないでかけます。第9巻 (9-8) では、この箱の中のきまりを式で書き、機械全体のふるまいを計算します。





しょうまつもんだい
章末問題

3-3 のまとめ

基本



1 y は x の関数ですか。関数でないものは、 y が1つに決まらない例を1つあげましょう。

(1) 1まい80円の切手を x まい買ったときの代金 y 円

(2) 半径 x [cm] の円の直径 y [cm]

(3) まわりの長さが x [cm] の長方形の、横の長さ y [cm]

2 送料が300円で、1箱800円の紙を x 箱注文したときの合計を y 円とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x=3$ のときの y を求めましょう。

(3) 合計が4300円の時、箱をいくつ注文しましたか。

3 $f(x) = -2x + 7$ のとき、 $f(3)$ 、 $f(-4)$ 、 $f(0.5)$ を求めましょう。

4 $f(x) = x^2$ 、 $g(x) = 4x - 3$ のとき、次の式を求めましょう。

(1) $f(-6)$ (2) $f(a+2)$ (3) $f(5a)$ (4) $g(a+h)$

5 $g(x) = x - 2$ 、 $f(u) = u^2$ とします。(1) $f(g(5))$ を求めましょう。(2) $y = f(g(x))$ を x の式で表しましょう。(3) $g(f(5))$ を求めましょう。

6 $y = -4x$ で、 x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域を求めましょう。

7 次の比例式の x を求めましょう。(1) $x:9 = 4:6$ (2) $x:20 = 3:5$

チャレンジ



8 摂氏を華氏に直す関数は $f(x) = 1.8x + 32$ です。(1) $f(-40)$ を求めましょう。何かふしぎなことに気づきましたか。(2) 華氏で 212°F になるのは、摂氏で何 $^\circ\text{C}$ ですか。 $f(x) = 212$ として方程式を解きましょう。

9 コインパーキングの料金は「20 分までごとに 100 円」です。とめた時間を x 分、料金を y 円とします ($0 < x \leq 100$)。 (1) 50 分とめたときの料金を求めましょう。 (2) ちょうど 80 分とめたときの料金を求めましょう。 (3) 料金が 300 円になるのは、 x がどんな範囲のときですか。

10 $g(x) = 2x + 1$, $f(u) = u^2$ とします。 (1) $y = f(g(x))$ と $y = g(f(x))$ を、それぞれ x の式で表しましょう。 (2) $x = 1$ のとき、それぞれの値を求め、ちがうことを確かめましょう。

11 温度センサーは、温度 T [°C] を入ると、電圧 $g(T) = 0.01T$ (V) を出します。電圧を数に変える部品は、電圧 u [V] を入ると、数 $f(u) = 100u$ を出します。 (1) $f(g(25))$ を求めましょう。 (2) $y = f(g(T))$ を T の式で表しましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 関数を見分け、表・グラフ・式で表せる。 → 78 ページ
- ☐ $f(x)$ を読み、 $f(3)$ や $f(a + h)$ を計算できる。 → 83 ページ
- ☐ 2 つの関数をつないだ合成関数を作る。 → 87 ページ



デルタ

関数は「入ると出てくる箱」。次の章では、はかった点からグラフを自分でかいて、表にない値を読みとるよ。

第1部 関数とグラフ



3-4 グラフをかこう・読もう

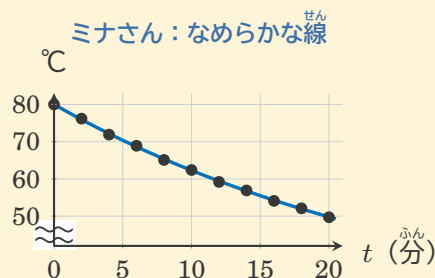
道しるべ この章の前に 1-17 1-18 2-3 2-6 3-2 3-3
この章の先に 3-5 3-16 5-1 5-9

この章でできるようになること

- ★ 軸に量と単位を書き、目もりを決めて、はかった点からグラフをかける。
- ★ x - t グラフと v - t グラフを読み分けられる。
- ★ グラフから表にない値を読みとり、線を先へのぼすときの注意を説明できる。

? はてな?

カップのお湯が冷めていく温度を2分ごとにはかって、グラフに点をうちました。ソラさんは点を順にまっすぐな線で結び(おれ線)、ミナさんは点の近くを通るなめらかな線を1本引きました。どちらがよいのかな?
表にない5分のときの温度は、何℃くらいかな?



△ やってみよう お湯が冷めていく温度をはかろう

① おうちのひとといっしょに、カップに熱いお湯を入れる（やけどに気をつけよう）。

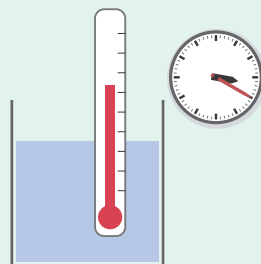
② 温度計をお湯に入れ、時計を見て、0分・2分・4分…と、2分ごとに20分まで温度を読む（1-11）。

③ 読んだ温度を、表に書いていく。

ソラさんがはかった結果です（部屋の温度は20℃）。

時間（分）	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
温度（℃）	80.0	76.2	71.9	68.9	65.1	62.4	59.2	56.9	54.1	52.1	49.7

この表を、グラフにしてみよう。



温度は、0分から20分までに、80.0℃から49.7℃まで下がりました。2分ごとの下がり方を「あと-まえ」（2-3）で計算すると、 $76.2 - 80.0 = -3.8$ 、 $71.9 - 76.2 = -4.3$ 、 $68.9 - 71.9 = -3.0$ …です。はじめは速く下がり、だんだんゆっくりになっていきます。ただ、-3.8、-4.3、-3.0のように、少しでこぼこもあります。このでこぼこを、グラフでどうあつかえばよいのでしょうか。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-17** グラフをかく前に、いちばん大きい数が入るように、1目もりの大きさを決める。
- 1-18** おれ線グラフは、かわり方を見るグラフ。かたむきが急なほど、はやくかわる。とちゅうをはぶくしるしは $\sim$ 。
- 2-3** 速さと時間のグラフ (v - t グラフ)。速さが一定なら、長方形の面積が道のり。
- 2-6** はかった数には、ずれがある。何回かはかって、ならして考える。
- 3-2** 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y 進んだ所にかく。
- 3-3** y が x の関数のとき、入れる数 x を横軸に、出てくる数 y をたて軸にとる。

数学の道具

1 軸と目もりを決める

グラフは、紙の上にかいた「表の絵」です。よい絵にするには、かく前に、次の①～④を決めます。

1 横軸とたて軸に、どの量をとるか

自分で決めて変えた量や、時間を横軸にとります。それにともなって変わった量（結果）を、たて軸にとります。お湯の実験では、時間 t を横、温度 T をたてにとります。温度は時間の関数（3-3）で、 t が「入れる数」、 T が「出てくる数」だからです。

2 軸に、量の名前と単位を書く

「 t (分)」「 T (°C)」のように書きます。単位がないと、10 が 10 秒なのか 10 分なのか、わかりません。

3 1目もりの大きさを決める

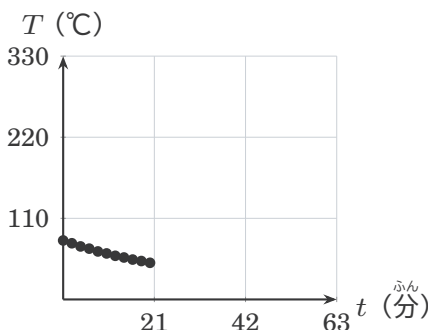
いちばん小さい値から、いちばん大きい値までが、紙にできるだけ大きく入るようにします。1目もりは、 $1 \cdot 2 \cdot 5$ 、または $10 \cdot 20 \cdot 50 \cdots$ や $0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \cdots$ にします（1-17）。

4 0 から始めるかを決める

値が 0 から遠い所にかたまっているときは、とちゅうをはぶくしるし $\approx$ を軸にかいて、0 の近くを省きます (1-18)。

なぜ 1・2・5 なのか 目もりは、あとで読むときに楽な数にします。1 目もりを 3 にすると、7 は「2 目もりと、そのあと 3 分の 1 目もり」の所です。目で 3 等分するのは、むずかしいですね。1 目もりが 2 なら、7 は「3 目もり半」、5 なら「1 目もりと 5 分の 2」で、ずっと読みやすくなります。1・2・5 は、10 をわりきれる数なので、10・20・50…と大きくしても、0.1・0.2・0.5…と小さくしても、きりのよい数になります。

× 小さい、目もりも読みにくい



○ 大きくて、読みやすい

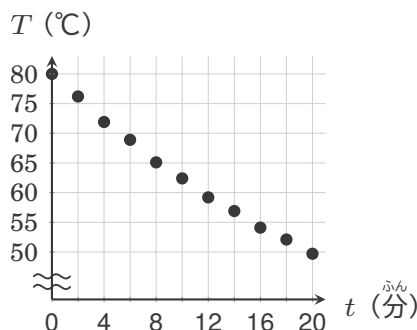


図 1 同じ表から作った 2 つのグラフ。左は 1 目もりが 21 分・110℃、右は 2 分・5℃。

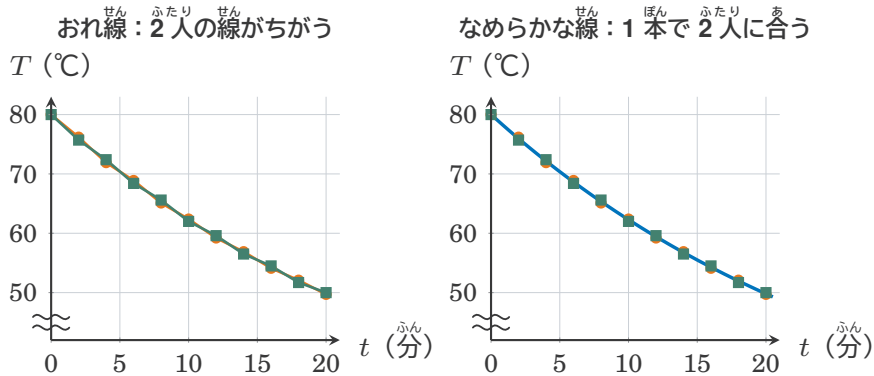
左のグラフは、0℃から 330℃までの目もりなので、点が下のほうに小さくかたまり、変わり方が見えません。1 目もりも 21 や 110 で、読みにくい数です。右のグラフは、温度の目もりを 45℃より下で省き、1 目もりを 5℃にしたので、点の並び方がよく見えます。

2 点をうって、なめらかな線を引く

点をうったら、線を引きます。**② はてな?** のように、引き方は 2 つ考えられます。おれ線にするか、なめらかな線にするかです。どちらがよいかを考えるために、同じカップのお湯を、ソラさんとミナさんが、同時にはかったとしましょう。

じ かん 時間 (分)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
ソラ (°C)	80.0	76.2	71.9	68.9	65.1	62.4	59.2	56.9	54.1	52.1	49.7
ミナ (°C)	80.0	75.7	72.4	68.4	65.6	62.0	59.6	56.5	54.5	51.7	50.0

ひょう 表1 同じお湯を、2人で同時にはかった。2人の値は、少しずつちがう。



ず 図2 ●がソラさん、■がミナさん。

み かん かんが ぶん 見方1: 2人の線をくらべる おれ線でつなぐと、ソラさんの線とミナさんの線は、ぎざぎざの形がちがい、何回も交わります。同じお湯をはかったのに、線の形がちがうのは、おかしいですね。ぎざぎざは、お湯の冷め方ではなく、温度計を読むときのずれ(2-6)から生まれたものだからです。なめらかな線なら、1本で2人の点にどちらも合います。

み かん かず かんが ぶん 見方2: 数で考える 6分のとき、ソラさんは68.9°C、ミナさんは68.4°Cでした。どちらかが正しいのではなく、本当の温度はこの近くのどこかです。4分と8分の値から考えると、6分の本当の温度は、2人の値のあいだの約68.6°Cだと考えられます。1つ1つの点は少しずれているので、全部の点の「まん中」を通る線のほうが、本当の変わり方に近いのです。

たいせつ

実験で、あいだもつづけて変わる量（時間・温度・長さなど）をはかったときは、点と点を結ぶおれ線ではなく、点の近くを通るなめらかな線を1本引く。点がまっすぐに並ぶなら定規で直線を、曲がって並ぶならフリーハンドで曲線を引く。点が線の上と下に同じくらい散らばるようにする。

② はてな？ の答え：ミナさんのなめらかな線がよいのです。5分のときの温度は、線から読むと約 70°C です（読み方は④でくわしく）。

おれ線を使うとき 1-18 では、1時間ごとの気温を、おれ線グラフにしました。おれ線は、「いくつかの時刻の記録」をならべて、変わり方をひと目で見めるためのグラフです。月ごとの電気代や、日ごとの最高気温のように、あいだの値がないものや、あいだの変わり方がわからないものは、おれ線で表します。

まっすぐに並ぶとき 電熱線にかける電圧を変えて、電流をはかりました(2-15)。点は、ほぼまっすぐに並び、0Vのときは電流も0です。だから、定規を当てて、原点を通り、点の近くを通る直線を引きます。

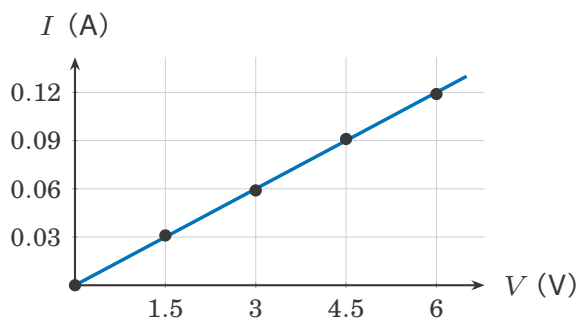


図3 はかった点（黒）と、定規で引いた直線（青）。

③ 位置と時間のグラフ： $x-t$ グラフ

ソラさんが、家から700m先の図書館まで行きました。家からの道を数直線にして(2-2)、家を0、図書館の向きを+とし、1分ごとにソラさんの位置 x [m] を書きます。はじめの5分は1分に60mずつ歩き、次の3分は信号で止まり、最後の4分は1分に100mずつ急いで歩きました。

t (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x (m)	0	60	120	180	240	300	300	300	300	400	500	600	700

表2 ソラさんの位置。5分から8分までは、300 mの所で止まっている。

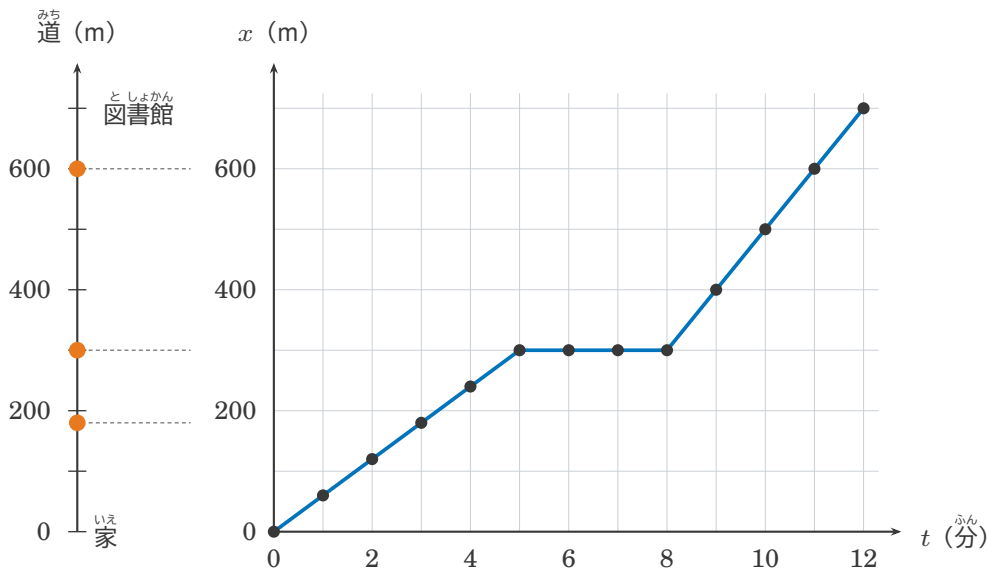


図4 道の数直線をたてに立てて、時刻ごとに右へずらして点をうつと、 $x-t$ グラフになる。

道の数直線だけでは、ソラさんがどこにいたかはわかりますが、いつそこにいたかはわかりません。そこで、数直線をたてに立てて、1分ごとに右へずらしながら、その時刻の位置に点をうちます。3分のときは180 m、5分のときは300 mの高さです。点を線で結ぶと、 $x-t$ グラフになります。歩いているあいだ、位置は時間とともに続けて変わるので、点と点のあいだも線でつなげます。

このように、横軸を時間 t 、たて軸を位置 x にしたグラフを、 $x-t$ グラフという。位置 x は時刻 t の関数なので、3-3の書き方で $x(3) = 180$ 、 $x(5) = 300$ と書けます。

$x-t$ グラフの読み方

- 線の高さは、その時刻にいる場所。12分の高さ700は、図書館にいること。
- 線が水平な所は、時間がたっても位置が変わらない、つまり止まっている。5分から8分。

- **線が急**な所ほど、1 分に進む道のりが大きく、**速い**（1-18 の「かたむきが急なほど、はやくかわる」）。8 分から 12 分のほうが、0 分から 5 分より急。
- もし家へもどれば、位置が小さくなるので、線は**右下がり**になる。

v-t グラフとならべる 同じ道のりを、速さ v と時間 t のグラフ（ v - t グラフ、2-3）にもかいてみます。0 分から 5 分は速さ 60 m/min、5 分から 8 分は 0、8 分から 12 分は 100 m/min です。

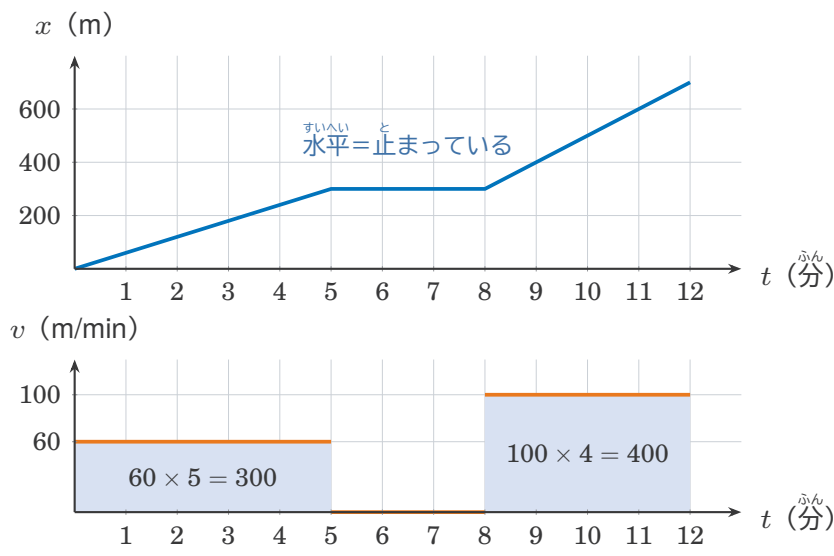


図5 上が x - t グラフ、下が v - t グラフ。同じ道のりを2つのグラフで表した。

	x - t グラフ	v - t グラフ
たて軸	位置（どこにいるか）	速さ（どれだけ速いか）
と止まっているとき	水平な線（高さはその場所）	高さ 0 の線
速く進むとき	急な線	高い線
進んだ道のり	たての変化量（あと- まえ）	線の下の面積

表3 x - t グラフと v - t グラフのちがい。

進んだ道のりを 2 つのグラフでくらべます。 x - t グラフでは、たての変化量で $700 - 0 = 700$ (m)。 v - t グラフでは、長方形の面積（2-3）で $60 \times 5 + 100 \times 4 = 300 + 400 = 700$ (m)。同じになります。

4 表にない値を読む：内挿と外挿

なめらかな線を引くと、はかっている時刻の温度も読みとれます。

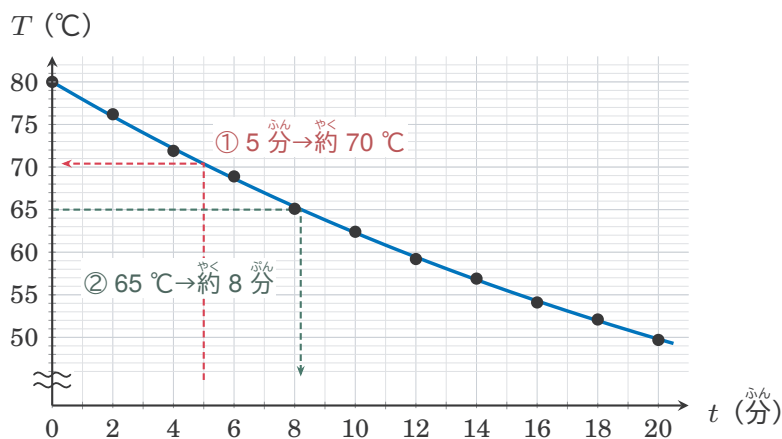


図6 線から読む。①は横軸から上へ、②はたて軸から横へ進む。

1 横軸の値から、たての値を読む

5分のときの温度を読みます。横軸の5から真上へ進み、線に当たった所から左へ進んで、たて軸の目もりを読みます。約70℃です。

数でも確かめる 5分は、4分と6分のちょうどまん中です。4分は71.9℃、6分は68.9℃なので、そのまん中は $(71.9 + 68.9) \div 2 = 140.8 \div 2 = 70.4$ で、約70.4℃です。グラフで読んだ値と合います。

2 たての値から、横軸の値を読む

反対に、温度が65℃になったのは、何分のときでしょう。たて軸の65から横へ進み、線に当たった所から下へ進むと、約8分です。8分ではかった65.1℃とも合います。

このように、はかった点と点のあいだの値を、グラフの線から読みとることを**内挿**といいます。内側（はかった範囲の中）を「おぎなう」という意味です。

3 線を先へのぼすのは危ない：外挿

では、40 分のときの温度を予想してみましょう。はじめの 2 分で 3.8°C 、1 分あたり $3.8 \div 2 = 1.9 (^{\circ}\text{C})$ 下がりました。このまま同じ速さで下がり続けると考えて、まっすぐな線をのぼすと、40 分では

$$80.0 - 1.9 \times 40 = 80.0 - 76 = 4.0$$

で、 4°C になってしまいます。でも、部屋の温度は 20°C です。お湯が、部屋より冷たくなることはありません。

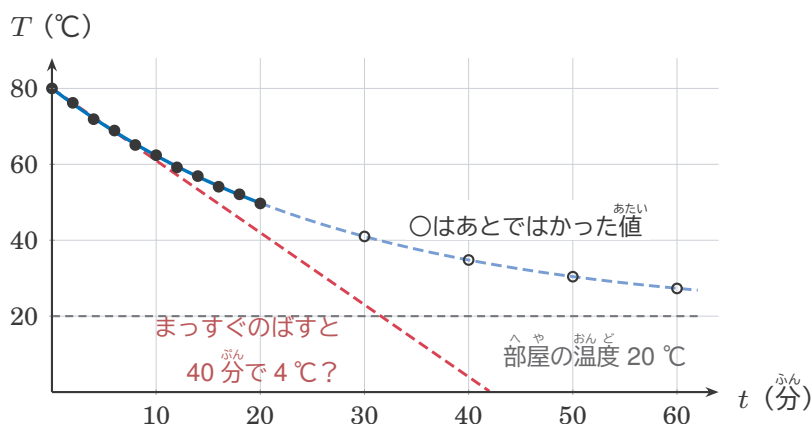


図 7 赤の点線は、はじめの下がり方のまま、まっすぐにのぼした線。本当の温度 (○) は、部屋の温度に近づいていく。

あとで本当にはかると、30 分で 41.0°C 、40 分で 34.8°C 、60 分で 27.3°C でした。お湯と部屋の温度の差が小さくなるほど、冷め方はゆっくりになり、部屋の温度にだんだん近づいていくのです (このきまりは 3-11 で学びます)。

はかった範囲の外へ、線をのぼして値を予想することを外挿といいます。外挿は、はかった範囲の外でもきまりが変わらないときにしか、正しくなりません。はかっていない所では、きまりが変わることがあるからです。ばねも、強く引きすぎると比例しなくなりました (2-15)。

もう 1 つの例：身長 ある子の身長が、10 歳で 140 cm 、11 歳で 146 cm 、12 歳で 152 cm でした。1 年に 6 cm ずつのびています。このまま 40 歳までの

ばすと、 $140 + 6 \times 30 = 140 + 180 = 320$ で、320 cm になってしまいます。

身長は、大人になるとのびなくなるので、こうはなりません。

せいかくに言うと

外挿がまったく使えないわけではありません。天気予報や、ロケットの動きの計算は、先の値を予想する外挿の一種です。そのときは、ただ線をのぼすのではなく、物のしくみ（物理のきまり）から作った式を使います。しくみがわかっている所だけ、先へのばしてよいのです。

5 グラフの形を読む

グラフは、形を見るだけで、多くのことを教えてくれます。ある春の日の気温を、2時間ごとにはかってグラフにしました。

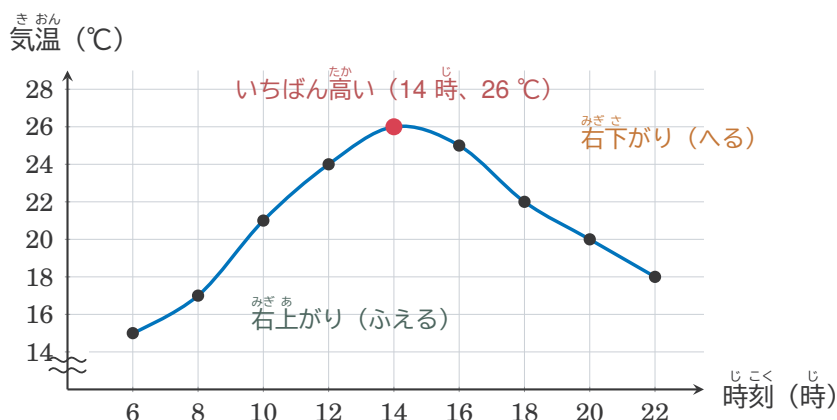
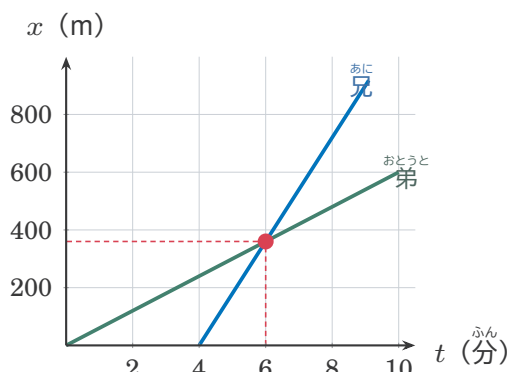


図8 ある春の日の気温。

- 右上がりの所 (6時～14時) は、時間がたつと気温がふえている。
- 右下がりの所 (14時～22時) は、気温がへっている。
- 右上がりから右下がりになる所が、いちばん高い所。この日の最高気温は14時の約26℃。
- 線が急な所ほど、気温が速く変わっている。8時～10時は2時間で4℃、14時～16時は2時間で1℃。

2本の線が交わる所 弟が、家から図書館へ、1分に60mの速さで歩いて出発しました。4分後に、兄が自転車で、1分に180mの速さで追いかけてきた(2-16の追いかけ)。2人の x - t グラフを、同じ軸にかきます。



弟の線(緑)は0分から、兄の線(青)は4分から始まります。兄の線のほうが急です。2本の線は、6分・360mの点で交わります。交わる点は「同じ時刻に、同じ場所にいる」点なので、ここで兄が弟に追いつくのです。

確かめてみましょう。6分のとき、家からの位置は、

● 弟：60 × 6 = 360 (m)

● 兄：走ったのは6 - 4 = 2 (分) なので、180 × 2 = 360 (m)

で、2人は同じ所にいます。交わる点を、グラフを読まずに式で求める方法は、3-6で学びます。

この章で出てきたことば

x - t グラフ 横軸を時間 t 、たて軸を位置 x にしたグラフ。水平なら止まっている。急なほど速い。

v - t グラフ 横軸を時間 t 、たて軸を速さ v にしたグラフ (2-3)。線の下面積が進んだ道のり。

内挿 はかった点と点のあいだの値を、グラフの線から読みとること。

外挿 はかった範囲の外へ線をのばして、値を予想すること。きまりが変わることがあるので危ない。

例題でたしかめよう

例題1 軸と目もりを決めてグラフをかく

水を電熱線であたためて、1分ごとに温度をはかりました。方眼の横は12マス、たては10マスです。横軸とたて軸に何をとり、1マスをいくつにすればよいですか。グラフもかきましょう（ノートに）。

時間 (分)	0	1	2	3	4	5	6
温度 (℃)	20.0	22.7	25.2	27.9	30.4	33.1	35.6

考え方 時間を横軸、温度をたて軸にとります。全部の値が入り、できるだけ大きくかける目もりを、1・2・5…から選びます。

しき (1) 横軸：時間 t (分)。0～6分を12マスに入れるので、1マス $6 \div 12 = 0.5$ (分)

(2) たて軸：温度 T (℃)。20.0～35.6℃を10マスに入れる。

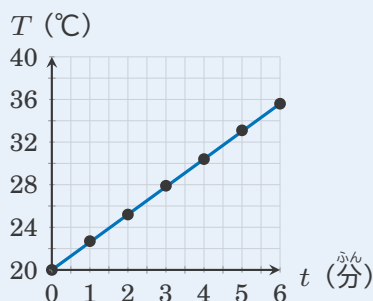
0から始めると、1マス4℃は読みにくいので5℃。0～50℃で、点は下半分にかたまる。

20℃より下を〰で省くと、1マス2℃で20～40℃。点が全体に広がる。

(3) 点はほぼまっすぐに並ぶので、定規で直線を引く（グラフ）。

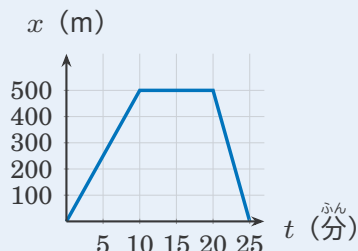
こたえ 横軸は時間で1マス0.5分。

たて軸は温度で、20℃より下を省いて1マス2℃。



例題2 x - t グラフを読む

ミナさんが家から公園へ行き、しばらく遊んでから家へ帰りました。グラフは、そのときの x - t グラフです。(1) 公園は家から何 m ですか。(2) 公園には何分いましたか。(3) 行きと帰りの速さは、それぞれ 1 分に何 m ですか。(4) 帰りの線が右下がりなのは、なぜですか。



考え方 線の高さが位置、水平な所が止まっている所です。速さは、進んだ道のり÷かかった時間(2-3)で求めます。

しき (1) 線がいちばん高い所の高さは 500。

(2) 線が水平なのは 10 分から 20 分。 $20 - 10 = 10$ (分)

(3) 行き：10 分で 500 m 進んだので、 $500 \div 10 = 50$

帰り：20 分から 25 分までの 5 分で 500 m 進んだので、
 $500 \div 5 = 100$

(4) 家に近づくと、家からの位置 x が小さくなるから。

こたえ (1) 500 m (2) 10 分 (3) 行き 50 m、帰り 100 m (4) 位置 x がへっていくから

じぶんでところ1

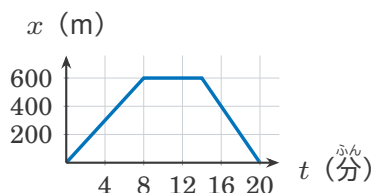
ろうそくをもやして、2分ごとに
ながさはかりました。方眼は横
10マス、たて10マスです。横軸
とたて軸に何をとり、1マスをい
くつにすればよいですか。グラフ
もかきましよう（ノートに）。

時間（分）0、2、4、6、8、10

ながさ（cm）15.0、13.9、13.1、12.0、
10.9、10.1

じぶんでところ2

ソラさんが家からコンビニへ
行って、家へ帰りました。（1）コ
ンビニは家から何mですか。（2）
コンビニに何分いましたか。（3）
行きと帰りの速さは、1分に何m
ですか。

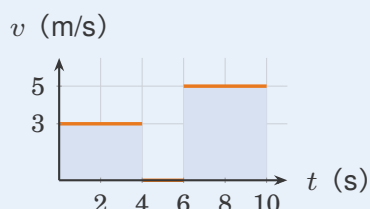


コラム グラフをかいたら、5つのチェック

- 横軸とたて軸に、量の名前と単位を書いたかな？（「 t （分）」「 T （℃）」）
- 1目もりは、 $1 \cdot 2 \cdot 5$ （ $10 \cdot 20 \cdot 50$ 、 $0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.5$ ）のどれかかな？
- 目もりは、等しい間かくでならんでいるかな？
- 0の近くを省いたときは、軸に $\sim$ をかいたかな？
- 実験の点には、おれ線ではなく、なめらかな線を1本引いたかな？

例題3 v - t グラフから位置を求める

ロボットが、まっすぐな線の上を動きま
した。グラフは v - t グラフです。動きは
じめの位置を 0 とします。(1) 4 秒、6
秒、10 秒のときの位置を求めましょう。



(2) x - t グラフの形を言いましょう。

考え方 進んだ道のりは、 v - t グラフの線の下の方の長方形の面積（速さ×時間）です(2-3)。位置は、前の位置に、進んだ道のりをたしていきます。

しき (1) 0～4 秒： $3 \times 4 = 12$ 。4 秒の位置は $0 + 12 = 12$

4～6 秒：速さ 0 で止まっている。6 秒の位置は 12 のまま

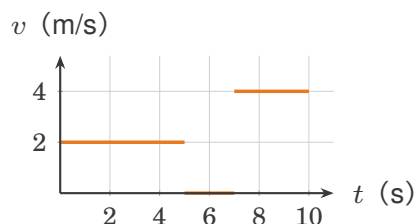
6～10 秒： $5 \times 4 = 20$ 。10 秒の位置は $12 + 20 = 32$

(2) 0～4 秒は右上がりの直線、4～6 秒は水平、6～10 秒は前より急な右上がりの直線。

こたえ (1) 4 秒で 12m、6 秒で 12m、10 秒で 32m (2) 上がる→水平→もっと急に上がる

じぶんでとこう3

台車の v - t グラフです。動きははじめの位置を 0 とします。(1) 5 秒、7 秒、10 秒のときの位置を求めましょう。(2) x - t グラフの形を言いましょう。



例題4 内挿と外挿

やかんの水を熱して、2分ごとに温度をはかりました。点はまっすぐに並びました。

時間 (分)	0	2	4	6	8
温度 (°C)	20	36	52	68	84

(1) 5分のときの温度を求めましょう。(2) 76°Cになったのは何分のときですか。(3) この直線を12分までのばすと何°Cになりますか。それは正しいと言えますか。

考え方 2分ごとに16°Cずつ上がっているの、1分に $16 \div 2 = 8$ (°C) 上がります。(1) (2) ははかった範囲の中 (内挿)、(3) は外 (外挿) です。

しき (1) 5分は4分と6分のまん中。 $(52 + 68) \div 2 = 120 \div 2 = 60$
 (2) 76は68と84のまん中なので、6分と8分のまん中の7分
 (3) 0分に20°Cだった水が、1分に8°Cずつ12分上がると、
 $20 + 8 \times 12 = 20 + 96 = 116$

でも水は100°Cでふっとうし、それより熱くならない。

こたえ (1) 60°C (2) 7分 (3) 116°Cになるが、正しくない (水は100°Cより熱くならない。はかった範囲の外では、きまりが変わる)

じぶんできょう4

ある子の身長をはかると、8歳で126cm、9歳で132cm、10歳で138cm、11歳で144cmで、点はまっすぐに並びました。(1) 9歳半のときの身長を求めましょう。(2) 141cmだったのは何歳のときですか。(3) この直線を30歳までのばすと何cmになりますか。それは正しいと言えますか。

 例題 5 2本の線が交わる所を読む

弟が家から図書館へ、1分に60mで歩いて出発しました。4分後に、兄が1分に180mの自転車で追いかけてきました（114ページのグラフ）。図書館は家から900mです。（1）兄が出発したとき、弟は家から何mの所にいましたか。（2）兄が弟に追いつくのは、何分の、家から何mの所ですか。（3）どちらが何分早く図書館に着きますか。

考え方 (2) は2本の線の交わる点を読み、計算で確かめます。(3) は、かかる時間＝道のり÷速さ（2-14）で求めます。

しき (1) $60 \times 4 = 240$

(2) 交わる点は6分・360m。確かめ：弟 $60 \times 6 = 360$ 、兄 $180 \times 2 = 360$

(3) 弟：900 ÷ 60 = 15（分）

兄：900 ÷ 180 = 5。4分後に出了ので $4 + 5 = 9$ （分）

$15 - 9 = 6$

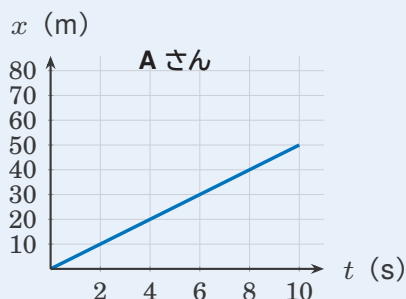
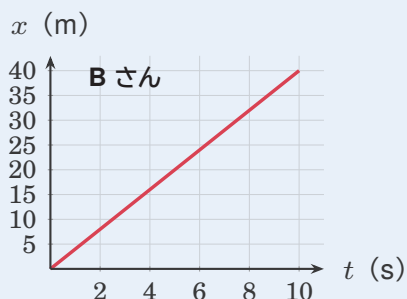
こたえ (1) 240m (2) 6分、家から360m (3) 兄が6分早い

 じぶんでとこう 5

Aさんは家から1分に70mで歩いて出発し、6分後にBさんが1分に210mの自転車で追いかけてきました。駅は家から1050mです。（1）Bさんが出発したとき、Aさんは家から何mですか。（2）Bさんが追いつくのは何分の、家から何mの所ですか（ノートにグラフをかいて読み、計算で確かめよう）。（3）どちらが何分早く駅に着きますか。

例題6 1目もりのちがうグラフをくらべる

AさんとBさんの x - t グラフです。Bさんの線のほうが急に見えます。どちらが速いですか。



考え方 見た目の急さは、1目もりの大ききで変わります。目もりの数字を読んで、速さ＝進んだ道のり÷時間を計算します。

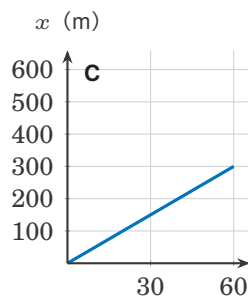
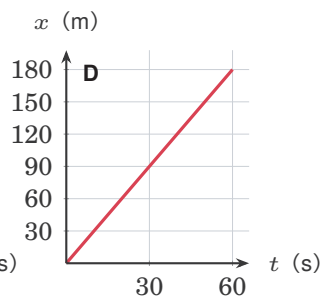
しき Aさん：たて1目もり10m。10秒で50m。50÷10＝5

Bさん：たて1目もり5m。10秒で40m。40÷10＝4

こたえ Aさんが速い（Aさんは5m/s、Bさんは4m/s）

じぶんでこう6

CさんとDさんの x - t グラフです。Dさんの線のほうが急に見えます。どちらが速いですか。



⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

1 目もりのちがうグラフを、見た目でくらべる

✕ 線が急に^{せん きゅう}見える^みほうが、いつも^{はや}速い

○ 目もりの^め数字^{すうじ}を読んで、道のり^{みち}÷時間^{じかん}を計算^{けいさん}してくらべる

たて軸の1目もりを半分^{はんぶん}にすると、同じ^{おな}速さ^{はや}でも線は2倍^{せん ばいきゅう}急^みに見えます(1-18)。

⚠ まちがえやすいところ

x - t グラフの^{すいへい}水平^{せん}な線

✕ x - t グラフの^{すいへい}水平^{せん}な線は「同じ^{おな}速さ^{はや}で進^{すす}んでいる」

○ x - t グラフの^{すいへい}水平^{せん}な線は「止^とまっている」

位置^いが変^かわらないから水平^{すいへい}です。 v - t グラフの水平^{すいへい}な線(速さ^{はや}が一定^{いってい})と混^まぜないようにしよう。

⚠ まちがえやすいところ

はかった時刻^{じこく}を、等しい^{ひと}間^{かん}かくに並^{なら}べる

✕ 0分^{ふん}・1分^{ふん}・2分^{ふん}・5分^{ふん}・10分^{ふん}を、横軸^{よこじく}に同じ間^{おな}かくでならべる

○ 横軸^{よこじく}は1目もりを決^めめて、5分^{ふん}は5の所^{ところ}、10分^{ふん}は10の所^{ところ}にかく

目もりが等しい間^{ひと}かくでないと、グラフの形^{かたち}がゆがみ、変^かわり方^{かた}を読みま^よちがえます。

△ まちがえやすいところ

じっけん てん せん
実験の点をおれ線でつなぐ

✕ はかった点を、全部通るおれ線で結ぶ

○ 点の近くを通る、なめらかな線を1本引く

点のてん でこぼこは、はかるときのずれです。全部の点を通さなくてよいのです。

△ まちがえやすいところ

せん
線をどこまでものばす

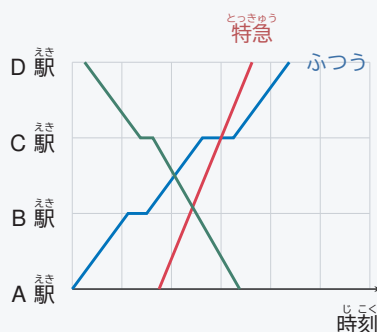
✕ はかった範囲の外も、線をのばした値になる

○ 範囲の外では、きまりが変わることがある

お湯は部屋の温度より冷たくならず、水は100℃より熱くならず、身長はのびなくなります。

🔍 コラム 電車のダイヤグラムは $x-t$ グラフ

でんしゃ かいしゃ よこじく じこく じく えき い
電車の会社は、横軸を時刻、たて軸を駅の位置にした $x-t$ グラフで、電車の動きを計画します。このグラフをダイヤグラムといいます。水平な所は駅に止まっている所、急な線は速い特急、交わる所は2本の電車がすれちがったり追いこしたりする所です。「ダイヤがみだれる」の「ダイヤ」は、このグラフのことです。



物理・工学ではこう使う

データロガー：自動でグラフを作る機械

工場や冷蔵庫、ビニールハウスでは、温度

センサー（3-3）をつないだデータロガーと

いう小さな機械が、1分ごとなどに温度を記

録します。記録した表をコンピュータに送る

と、 x - t グラフと同じように、時間を横軸に

したグラフが自動でかけます。冷蔵庫のとび

らを開けると、中の温度が上がり、とじると

また下がるようですが、グラフで見えます。

蒸気表：表のあいだを内挿で読む

水は、まわりの圧力（おす力の強さ）

が高いほど、高い温度でふっとうし

ます。ふっとうする温度と圧力の表

を蒸気表といい、発電所やボイラー

の設計に使います。115℃は表にあ

りませんが、グラフで110℃と120

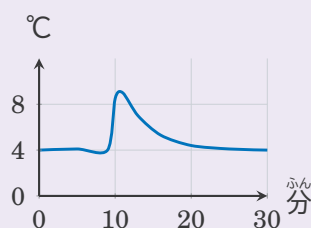
℃のあいだを読むと、約170kPaで

す（kPaはキロパスカル。圧力の単

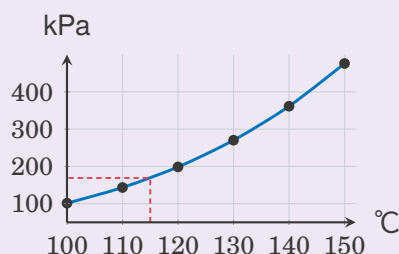
位）。圧力なべの中は約200kPaな

ので、水は約120℃でふっとうし、

料理が早くできます。



おんど 温度 (°C)	100	110	120	130	140	150
あつりよく 圧力 (kPa)	101	143	199	270	362	476





しょうまつもんだい
章末問題

3-4 のまとめ

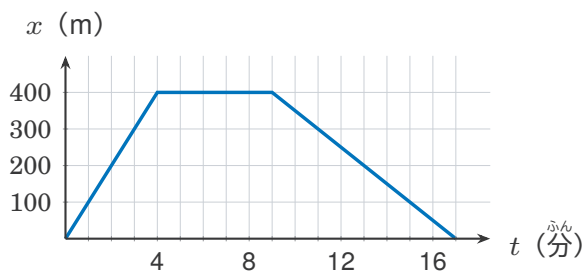
基本



1 水を温めて、1 分ごとに温度をはかりました。方眼は横 10 マス、たて 10 マスです。横軸とたて軸に何をとり、1 マスをいくつにすればよいですか。グラフもかきましよう（ノートに）。

時間（分） 0、1、2、3、4、5 温度（℃） 15.0、18.1、20.9、24.0、27.1、29.9

2 グラフは、ミナさんが家から本屋へ行き、家へ帰ったときの $x-t$ グラフです。(1) 本屋は家から何 m ですか。(2) 本屋に何分いましたか。(3) 行きと帰りの速さは、それぞれ 1 分に何 m ですか。



3 ある台車の速さは、0～3 秒が 4 m/s、3～5 秒は止まって 0、5～9 秒が 2 m/s でした（ノートに $v-t$ グラフをかこう）。動きははじめの位置を 0 として、3 秒・5 秒・9 秒の位置を求めましよう。

4 ばねにおもりをつるして、のびをはかりました。点はまっすぐに並びました。

おもり（g） 0、20、40、60 のび（cm） 0、1.5、3.0、4.5

(1) 30 g のときののびを求めましよう。(2) のびが 3.75 cm になるのは何 g のときですか。(3) この直線をのばして、1000 g のときののびを予想すると何 cm になりますか。それは正しいと言えますか。

5 PさんとQさんの x - t グラフです。Pさんは、たて1目もりが5mのグラフで、5秒で4目もり上がりました。Qさんは、たて1目もりが2mのグラフで、5秒で8目もり上がりました。どちらが速いですか。

チャレンジ ★★

6 姉が家から1分に50mで歩いて出発しました。10分後に、妹が1分に150mの自転車で追いかけました。駅は家から1200mです。(1) 妹が出発したとき、姉は家から何mですか。(2) ノートに2人の x - t グラフをかき、妹が追いつく時刻と場所を読みとって、計算で確かめましょう。(3) どちらが何分早く駅に着きますか。

7 物理・工学ではこう使うの蒸気表を使います。(1) 125℃でふつとようする圧力は約何kPaですか。表の値のまん中で考えましょう。(2) この表は100～150℃しかありません。線をのばして300℃の値を予想するのは、なぜ危ないのですか。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 軸と目もりを決めて、はかった点からグラフをかける。

→ 106 ページ

☐ x - t グラフと v - t グラフを読み分けられる。

→ 109 ページ

☐ 表にない値を線から読み、外挿の注意を説明できる。

→ 112 ページ



ソラ

x - t グラフは、急なほど速かったね。次の章では、その「急さ」を数で言う方法を学ぶよ。

第1部 関数とグラフ



3-5

グラフの傾きは「変化の速さ」

道しるべ この章の前に 2-3 2-15 2-16 3-2 3-4
この章の先に 3-6 3-7 5-1 5-3 8-2

この章でできるようになること

- ★★ グラフの傾きを「たての変化量÷横の変化量」で求め、正・負・0の意味がわかる。
- ★★ 1次関数 $y = ax + b$ の傾きと切片を読み、 x - t グラフの傾きを速さとして使える。
- ★★★ 1点と傾きから、直線の式 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を作れる。

？ はてな？

学校の近くに、2つの坂があります。坂Aは、横に20m進むあいだに2m上がります。坂Bは、横に5m進むあいだに1m上がります。自転車でのぼるとき、きついのはどちらかな？

坂の「急さ」を、1つの数で言うには、どうすればよいでしょう。

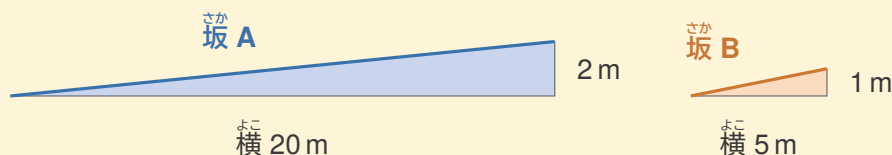


図1 横もたても、1mを同じ長さでかいた図。

グラフの線も、坂のように上がったり下がったりします。3-4でかいた x - t グラフでは、線が急な所ほど、位置が速く変わっていました。この章では、坂やグラ

フの「急さ」を数にします。その数が、「変化の速さ」を表していることを確かめます。

🔧 やってみよう スロープ・階段・すべり台の急さをくらべよう

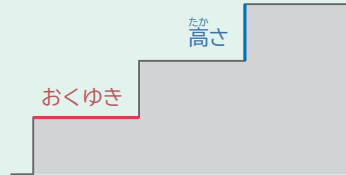
① メジャーで、学校の入り口のスロープの「横の長さ」と「上がる高さ」をはかろう。

② 階段は1段の「おくゆき」と「高さ」を、すべり台はすべる所の「横の長さ」と「高さ」をはかろう。

③ 高さ÷横の長さを電卓で計算しよう。
いちばん急なのはどれかな？

ソラさんがはかった結果です。

	横の長さ	上がる高さ	高さ÷横
スロープ	360 cm	30 cm	
階段 1 段	30 cm	16 cm	
すべり台	240 cm	120 cm	



🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

2-3 変化量は「あとーまえ」。Δx は「x の変化量」。速さ = $\Delta x \div \Delta t$ 。

2-15 比例 $y = ax$ のグラフは原点を通る直線。a は 1 あたりの量で、大きいほど線は急。

2-14 等式の両辺に同じ数をたしても、ひいても、かけても、等式は成り立つ。

3-2 点 (x, y) は、原点から右へ x、上へ y の所。x₁ は「エックス・いち」と読み、かけ算ではない。

3-4 横軸を時間 t、たて軸を位置 x にしたグラフを、x-t グラフという。

やってみようの答え：スロープは $30 \div 360 = 0.083\ldots$ です（…は数字がずっと続くし）。階段は $16 \div 30 = 0.533\ldots$ 、すべり台は $120 \div 240 = 0.5$ です。数が大きいほど急なので、いちばん急なのは階段、いちばんゆるやかなのはスロープです。階段は急でも、段があるので足がすべりません。



ソラ

高さだけを見たら、すべり台の 120 cm がいちばん大きいのに、階段のほうが急なんだね。

数学の道具

1 急さを数で言う：傾き

【？はてな？】の2つの坂をくらべます。まず、よくある考え方をためしてみよう。

✕ 坂 A は 2m、坂 B は 1m 上がる。だから坂 A のほうが急

この考え方では、横に進む長さを見ていません。坂 A は 2m 上がるのに、20m も進みます。坂 B は 1m 上がるのに、たった 5m です。もし高さだけでくらべてよいなら、長い長い道を 2m だけ上がる、ほとんど平らな道も「急」になってしまいます。急さをくらべるには、横の長さをそろえる必要があります。

1 方法1：横の長さをそろえる

坂 B を 4 つつなぐと、横は $5 \times 4 = 20$ で 20m、高さは $1 \times 4 = 4$ で 4m になります。同じ急さの坂をつないでも、急さは変わりません。横 20m どうしでくらべると、A は 2m、B は 4m 上がるので、B のほうが急です。

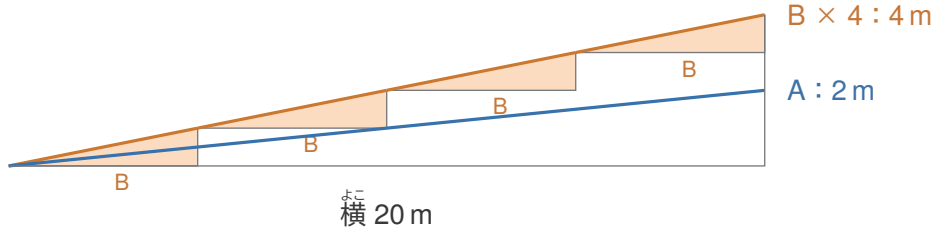


図2 坂 B (横 5m・高さ 1m) を 4 つつなぐと、横 20m で 4m 上がる坂になる。

2 方法 2: 横に 1m 進むと何 m 上がるか

横を 1m にそろえることもできます。「横 1m あたり」の高さは、1 あたりの量なので、わり算で求めます (2-3)。

$$A : 2\text{m} \div 20\text{m} = 0.1 \quad B : 1\text{m} \div 5\text{m} = 0.2$$

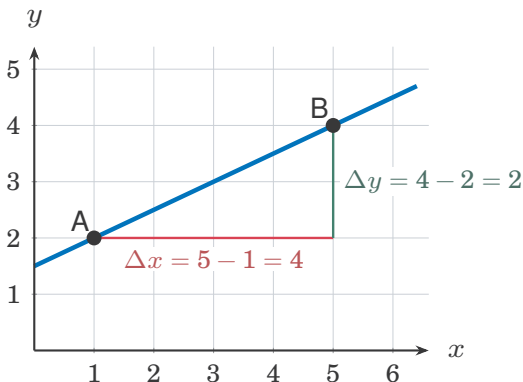
B の 0.2 は A の 0.1 の 2 倍です。方法 1 でも、B の 4m は A の 2m の 2 倍でした。2 つの方法の答えが合っています。m ÷ m なので、この数には単位が付きません。

② はてな? の答え: きついのは坂 B です。急さは、A の 2 倍あります。

このように、急さは「上がった高さ ÷ 横に進んだ長さ」で表せます。この数を傾きといいます。道路や線路では「こう配」ともよびます。

3 グラフの傾き

グラフの直線でも同じです。直線の上に 2 つの点をとります。左の点を A、右の点を B とします。A から B へ行くとき、横に進んだ長さは x の変化量 Δx 、上がった高さは y の変化量 Δy です (どちらも「あと-まえ」。2-3)。



A は (1, 2)、B は (5, 4) です。

横の変化量 (赤) は、 x のあと-まえで $\Delta x = 5 - 1 = 4$ 。

たての変化量 (緑) は、 y のあと-まえで $\Delta y = 4 - 2 = 2$ 。

傾きは $2 \div 4 = \frac{2}{4} = 0.5$ です。

点A(x_1, y_1)から点B(x_2, y_2)までなら、 $\Delta x = x_2 - x_1$ 、 $\Delta y = y_2 - y_1$ です。だから、

$$\text{傾き} = \frac{\text{たての変化量}}{\text{よこの変化量}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と書けます。 x_1, x_2 の右下の小さな1、2は「1つめの点」「2つめの点」の印です(3-2)。たてを上、よこを下に書きます。坂の「高さ÷横」と同じ順番です。

せいかくに言う

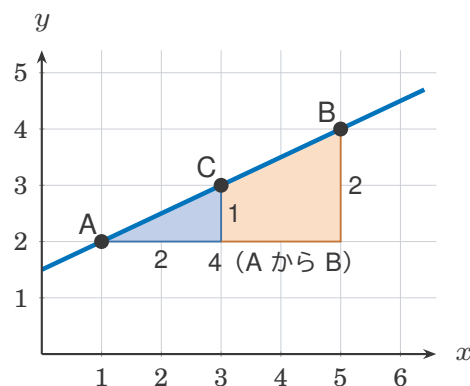
逆の順番で書いても同じ

BからAへ向かって計算すると、 $\Delta y = 2 - 4 = -2$ 、 $\Delta x = 1 - 5 = -4$ で、 $\frac{-2}{-4} = 0.5$ 。

マイナスどうしのわり算はプラス(2-2)なので、答えは同じです。ただし、たてと横で同じ順番にひくこと。たてはBからA、横はAからBのようにまぜると、符号がまちがいます。

4 直線なら、どの2点でも傾きは同じ

同じ直線の上で、別の2点をとったら、傾きは変わりますか。上の直線で、Aと(3, 3)の点Cをとってみます。



AからC: $\Delta x = 2$ 、 $\Delta y = 1$ 。傾きは $\frac{1}{2} = 0.5$ 。

AからB: $\Delta x = 4$ 、 $\Delta y = 2$ 。傾きは $\frac{2}{4} = 0.5$ 。

大きい三角形(だいだい)は、小さい三角形(ちい)を、横もたても2倍にのばした形です。

横が2倍になると、たても2倍になります。分数の分母と分子に同じ2をかけても、分数の大きさは変わりません($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 、2-4)。まっすぐな線は、同じ

形の階段がくり返してできているので(2-15)、どこで何段ぶんとっても、たて÷横は同じです。だから、直線の傾きは、1つに決まります。

1つの直線に、1つの傾き。この傾きを、記号 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で表すことができます。

記号カード

初めて出た章 3-5

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

読み方 デルタエックス分のデルタワイ
意味 傾き。たての変化量 ÷ 横の変化量。
英語 slope

② 右上がり、右下がり、水平

坂には、のぼり坂もくだり坂もあります。グラフも同じです。左から右へ見ていくとき、上がっていく線、下がっていく線、平らな線の3つの傾きを計算してみます。どれも、左の点から右の点へ向かって、あとーまえで計算します。

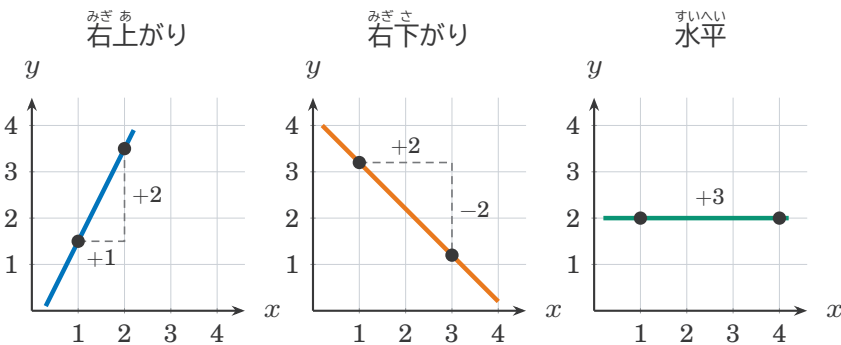


図3 左の点から右の点へ。横の変化量は、どれも正（右へ進む）。

	Δx	Δy	傾き $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
右上がり	+1	+2	$\frac{2}{1} = 2$ (正)
右下がり	+2	-2	$\frac{-2}{2} = -1$ (負)
水平	+3	0	$\frac{0}{3} = 0$

表1 右下がりでは、あとーまえの Δy がマイナスになる。

右下がりの線では、右へ進むと下がるので、 y の「あと」が「まえ」より小さくなります。だから Δy はマイナスです。マイナスをプラスでわると、答えはマ

イナスです (2-2)。水平な線は、右へ進んでも高さが変わらないので、 $\Delta y = 0$ で、傾きは0です。

傾き	線のようす
正 (+)	右上がり。数が大きいほど急。
0	水平 (平ら)。
負 (-)	右下がり。絶対値 (3-2) が大きいほど急。

表2 傾きの符号は向き (のぼりか、くだりか)、絶対値は急さを表す。

たとえば、傾き -3 の線と傾き -1 の線では、数としては -3 のほうが小さい (2-2) のですが、坂としては -3 のほうが急なくだり坂です。右へ1進むと、3も下がるからです。急さをくらべるときは、符号をとった絶対値 $|-3| = 3$ と $|-1| = 1$ をくらべます。

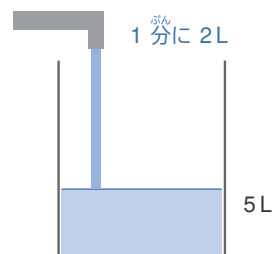
せいかくに言うと

たての直線には、傾きがない

x 軸に垂直な、まっすぐたての直線では、2点の x が同じなので、 $\Delta x = 0$ です。0でわることはできない (1-14) ので、たての直線には傾きの数が決まりません。横に進まずに上がる、かべのような坂だからです。

③ まっすぐなグラフの式：1次関数 $y = ax + b$

水そうに、はじめから5Lの水が入っています。じゃくちから、1分に2Lずつ水を入れます。入れはじめてから x 分後の水の量を y [L] とします。3分後は何Lかな？ 10分後は？



1分ごとに2Lずつふえるので、表にすると次のようになります。

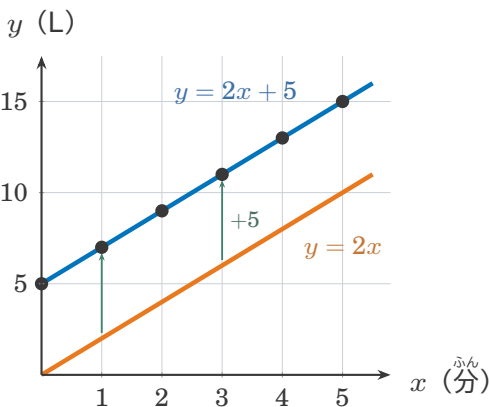
時間 x (分)	0	1	2	3	4	5
水の量 y (L)	5	7	9	11	13	15

表3 x が1ふえるごとに、 y は2ずつふえる。

式にする x 分で入る水は、2Lの x 分で $2 \times x$ (L) です (1-12:1つ分 $\times$ いくつ分)。はじめの5Lにこれがたされるので、 $y = 5 + 2x$ 。たし算は順番を入れかえてもよいので、 x の項を先に書いて、

$$y = 2x + 5$$

です。 $x = 3$ なら $y = 2 \times 3 + 5 = 11$ 、 $x = 10$ なら $y = 2 \times 10 + 5 = 25$ 。3分後は11L、10分後は25Lです。



点をかきこむと、まっすぐにならびます。 x が1ふえるごとに y がいつも2ずつふえるので、同じ形の階段がくり返すからです (2-15)。

オレンジは、はじめが0Lのとき ($y = 2x$ 、比例) です。青の線は、オレンジの線を、そのまま上へ5ずらしたものです。どの x でも、 y が5だけ大きいからです (緑の矢印)。

$2x + 5$ のように、「 x に数をかけた項」と「数だけの項」でできた式を、 x の1次式といいます (x^2 のような2乗の項がないから「1次」)。 y が x の1次式で書けるとき、「 y は x の1次関数である」といいます。一般に、1次関数は

$$y = ax + b \quad (a, b \text{ は定数。} a \text{ は} 0 \text{ でない})$$

と書けます。定数は「 x が変わっても変わらない数」でした (3-1)。水そうなら $a = 2$ 、 $b = 5$ です。比例 $y = ax$ は、 $b = 0$ の1次関数です。

1 a は傾き：変化の割合

表で、 x が 1 から 4 まで変わるときを見ます。 y は 7 から 13 まで変わります。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13 - 7}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

x が 0 から 5 までなら、 $\frac{15 - 5}{5 - 0} = \frac{10}{5} = 2$ 。どこを選んでも 2 です。この 2 は、「1 分あたり 2 L」の 2、つまり $y = 2x + 5$ の a です。

x の変化量に対する y の変化量の割合 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を、**変化の割合**といいます。中学校の教科書では、変化量を「増加量」とよぶこともあります。1 次関数では、変化の割合はグラフの傾きと同じで、いつも a です。

なぜいつも a になるの？ 文字のままで確かめます。 x が x_1 から x_2 まで変わるとき、 $y_1 = ax_1 + b$ 、 $y_2 = ax_2 + b$ です。

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \quad (\text{かっこをはずす。2-12}) \\ &= ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \quad (b - b = 0. a \text{ でくくる})\end{aligned}$$

$x_2 - x_1$ は Δx なので、 $\Delta y = a \times \Delta x$ 。両辺を Δx でわると $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ です。はじめの量 b は、あと一まへのひき算で消えてしまいます。変化の速さは、はじめにいくら入っていたかとは関係がないのです。

2 b は切片：グラフが y 軸と交わる高さ

$x = 0$ を入れると、 $y = a \times 0 + b = b$ です。グラフでは、 $x = 0$ の所、つまり y 軸の上の点 $(0, b)$ を通ります。この b を、グラフの**切片**といいます。 y 軸から切りとる所の高さ、という意味です。水そうなら、入れはじめ (0 分) の 5 L が切片です。

3 a が負のとき

スマートフォンの電池が 100% (パーセント) あります。動画を見つづけると、1 時間に 20% ずつへります。 x 時間後の電池の残りを $y\%$ とします。

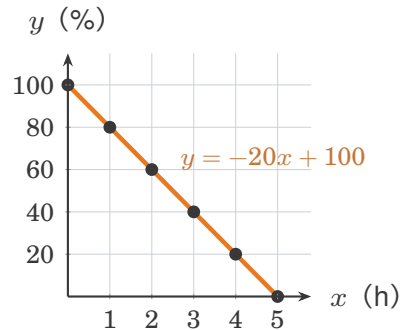
時間 x (h)	0	1	2	3	4	5
残り y (%)	100	80	60	40	20	0

表 4 h は時間の記号 (hour の h 。2-10)。

1 時間に 20% ずつへるので、 x 時間では $20x$ へります。はじめの 100 から引いて $y = 100 - 20x$ 。並べかえると

$$y = -20x + 100$$

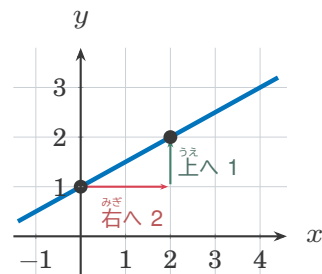
です。 $a = -20$ 、 $b = 100$ 。傾きが負なので、グラフは右下がりです。 -20 は「1 時間あたり 20% へる」という、へる速さを表しています。



4 式からグラフをかく手順

1 次関数のグラフは直線なので、2 つの点がわかればかけます。 $y = \frac{1}{2}x + 1$ でやってみましょう。

- 1 切片の点をとる。 $b = 1$ なので $(0, 1)$ 。
- 2 そこから傾きの分だけ進む。傾き $\frac{1}{2}$ は「右へ 1 で上へ $\frac{1}{2}$ 」。目もりにのらないので、2 倍して「右へ 2 で上へ 1」と進む (傾きは $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots$ のどれでも同じ)。 $(2, 2)$ に着く。



- 3 2 つの点を通る直線を引く。傾きが負のときは、右へ進んで下へ下がる。

4 $x-t$ グラフの傾きは、速さ

ミナさんは自転車で、家から 1000 m はなれた公園へ行き、しばらく休んでから家へ帰りました。家を 0 として、公園の向きに何 m の所にいるかを位置 x とし、出発してから時間を t として、 $x-t$ グラフにしました (3-4)。

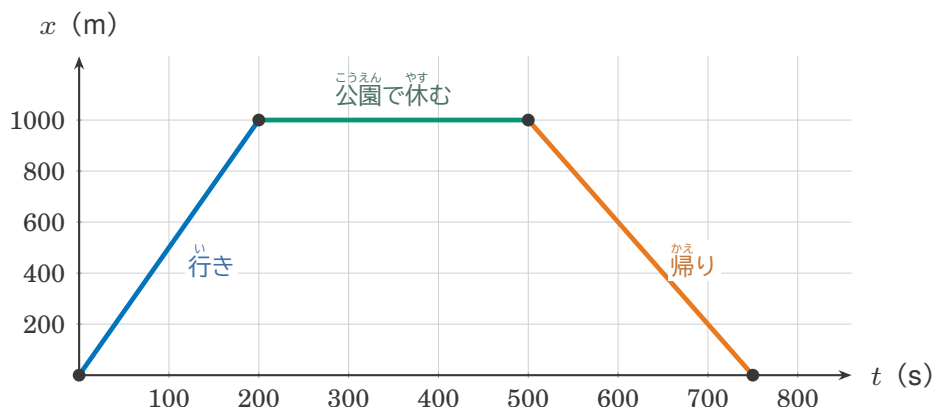


図4 ミナさんの $x-t$ グラフ。行きは 0～200 秒、休みは 200～500 秒、帰りは 500～750 秒。

3 つの部分の傾きを計算します。たては位置 x 、横は時間 t なので、傾きは $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ です。

$$\begin{aligned} \text{行き} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{1000 \text{ m} - 0 \text{ m}}{200 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{1000 \text{ m}}{200 \text{ s}} = 5 \text{ m/s} \\ \text{休み} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{1000 \text{ m} - 1000 \text{ m}}{500 \text{ s} - 200 \text{ s}} = \frac{0 \text{ m}}{300 \text{ s}} = 0 \text{ m/s} \\ \text{帰り} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{0 \text{ m} - 1000 \text{ m}}{750 \text{ s} - 500 \text{ s}} = \frac{-1000 \text{ m}}{250 \text{ s}} = -4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

傾き = 速さ $\Delta x \div \Delta t$ は、進んだ道のり ÷ かかった時間、つまり速さそのものです (2-3)。行きは秒速 5 m で走っていました。 $x-t$ グラフでは、線が急なほど、同じ時間にたくさん進むので、速いのです。

傾き 0 = 止まっている 休んでいるあいだは、時間がたっても位置が変わりません。グラフは水平で、速さは 0 です。

傾きが負 = 反対向きに進む 帰りの傾き -4 のマイナスは、 x が小さくなる向き、つまり家のほうへ進んでいることを表します。速さの大きさは秒速 4 m で

す。帰りのほうが、行きより少しゆっくりでした。物理では、このように向きまでふくめた速さを速度とよびます (5-5)。

傾きには単位がある 坂の傾きは $m \div m$ で単位がありませんでした。 $x-t$ グラフの傾きは、 $m \div s$ で m/s という単位がつきます。傾きの単位は、いつも「たての単位 $\div$ 横の単位」です。

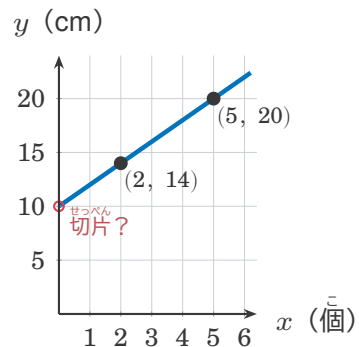
グラフ	たて	よこ	傾き	意味
位置と時間	m	s	m/s	速さ
水の量と時間	L	min	L/min	水の入る速さ
電池の残り時間	%	h	%/h	電池のへる速さ
気温と時刻	°C	h	°C/h	気温の上がる速さ
力とばねののび	N	m	N/m	ばね定数 (2-15)

表5 傾きの単位は「たての単位 $\div$ 横の単位」。min は分の記号。

横が時間のグラフでは、傾きは「1 秒あたり $\cdot$ 1 分あたり $\cdot$ 1 時間あたり、たての量がどれだけ変わるか」、つまり変化の速さです。この章の題「グラフの傾きは変化の速さ」は、このことです。

5 2点を通る直線の式

ばねにおもりをつるして、ばね全体の長さをはかりました。おもり 2 個で 14 cm、5 個で 20 cm でした。ばね全体の長さは、おもりの数に比例しません (2-15 の「まちがえやすいところ」)。でも、のびは比例するので、グラフは直線になり、1 次関数で書けるはずです。おもりの数を x 個、ばね全体の長さを y [cm] とし、 $y = ax + b$ の a と b を求めます。



1 傾き a を求める

2つの点 $(2, 14)$ と $(5, 20)$ から、

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 14}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

おもりを1個ふやすごとに、2cmのびるということです。

2 1つの点を代入して b を求める

$y = 2x + b$ のグラフは $(2, 14)$ を通るので、 $x = 2$ 、 $y = 14$ を代入すると等式が成り立ちます (2-13)。

$$14 = 2 \times 2 + b \quad (x = 2, y = 14 \text{ を代入})$$

$$14 = 4 + b$$

$$14 - 4 = b \quad (4 \text{ を移項。2-14})$$

$$b = 10$$

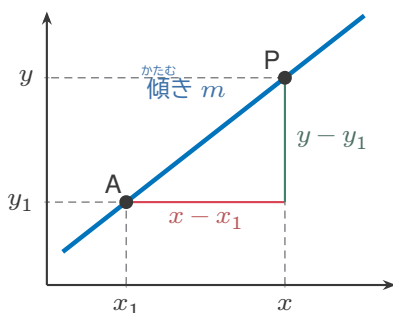
3 式を書き、もう1つの点で確かめる

$y = 2x + 10$ です。 $x = 5$ を入れると $y = 2 \times 5 + 10 = 20$ で、もう1つの点 $(5, 20)$ も通っています。切片10は、おもり0個のときのばねの長さ（もとの長さ）10cmです。はかっている「0個」の長さが、計算でわかりました。この求め方のほかに、 a と b を2つの式からいっしょに求める方法もあります (3-6)。

6 1点と傾きから： $y - y_1 = m(x - x_1)$

こんどは、「おもり2個で14cm。1個ふやすごとに2cmのびる」とだけわかっているとします。通る1点 $(2, 14)$ と、傾き2がわかっています。このとき、直線の式をすぐに書く方法があります。

1 見方 1：傾きの式から



傾きを m とし、直線が点 $A(x_1, y_1)$ を通るとします。直線の上に、 A でない点 $P(x, y)$ をどこでもいいからとります。 A から P までの傾きも m です（直線の傾きは 1 つ）。

A から P までは、横の変化量が $x - x_1$ 、たての変化量が $y - y_1$ なので、

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

両辺に $x - x_1$ をかけると（2-14. 左辺の分母が約分されて消える）、

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

これが、傾きが m で、点 (x_1, y_1) を通る直線の式です。傾きを m と書くことも多いのですが、 m は $y = ax + b$ の a と同じもの（傾き）です。文字がちがうだけです。

2 見方 2：階段をのぼる

傾き m は「右へ 1 進むと上へ m 」でした。だから、 A から右へ $x - x_1$ だけ進むと、上へ $m \times (x - x_1)$ だけ上がります。 A の高さは y_1 なので、 P の高さは

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

です。 y_1 を左辺へ移項すると $y - y_1 = m(x - x_1)$ 。見方 1 と同じ式になりました。

3 数で確かめる

ばねなら、 $m = 2$ 、 $(x_1, y_1) = (2, 14)$ なので、

$$y - 14 = 2(x - 2) \quad (m, x_1, y_1 \text{ に数を入れる})$$

$$y - 14 = 2x - 4 \quad (\text{右辺のかっこをはずす。2-12})$$

$$y = 2x - 4 + 14 \quad (-14 \text{ を移項。2-14})$$

$$y = 2x + 10$$

2点から求めた式 (139 ページ) と同じです。展開すると、いつでも $y = ax + b$ の形にもとせします。

なぜ分数の形のままだにしないの? $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ の形では、 $x = x_1$ のとき分母が 0 になって、計算できません。つまり、点 A そのものが式から落ちてしまいます。かけ算の形 $y - y_1 = m(x - x_1)$ なら、 $x = x_1$ を入れると $y - y_1 = m \times 0 = 0$ で $y = y_1$ 。点 A もちゃんと入ります。

マイナスの座標に注意 点 $(-1, 3)$ を通り、傾き 2 の直線なら、 $x_1 = -1$ なので $x - x_1 = x - (-1) = x + 1$ です。

$$y - 3 = 2(x + 1) \rightarrow y - 3 = 2x + 2 \rightarrow y = 2x + 5$$

x_1 がマイナスのときは、かっこをつけてから入れます (2-13 の「かっこごとに入れる」)。

もっと知りたい ★★★

第5巻では、この式で接線を引く

曲がったグラフの 1 点に、ぴったりふれる直線を接線といいます (5-3)。

接線は、ふれる点は 1 つわかっていて、傾きは微分という計算で求めます。

「1 点と傾き」がわかるので、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ がそのまま使えます。

7 v - t グラフでは、面積が道のり

みなさんの行き（図 4 の 0～200 秒。138 ページ）を、2 つのグラフでなべてみます。左は x - t グラフ、右は横に時間、たてに速さをとった v - t グラフ（2-3）です。

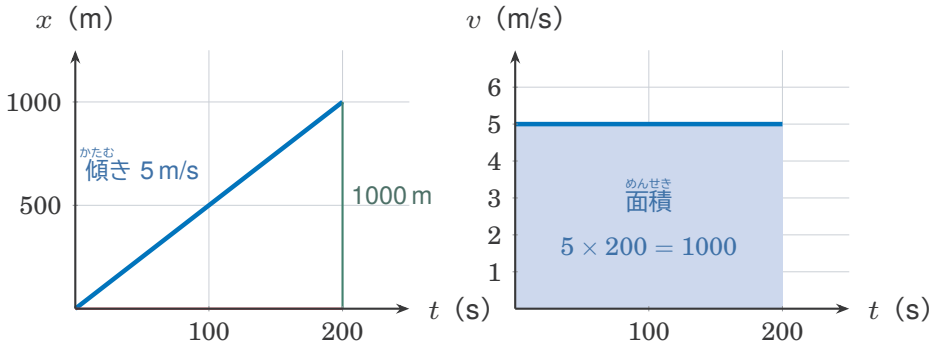


図 5 左の傾き 5 が、右の高さ 5 になる。右の面積 1000 が、左の上った高さ 1000 になる。

x - t グラフの傾き 5 m/s が、 v - t グラフでは高さ 5 になっています。反対に、 v - t グラフの長方形の面積（たて×横＝速さ×時間）は $5 \times 200 = 1000$ で、進んだ道のり 1000 m です（2-3）。これは、 x - t グラフで上がった高さ Δx と同じです。

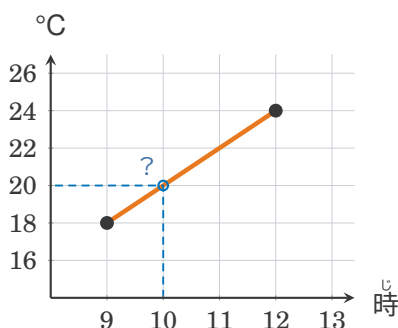
x - t グラフの傾き → v - t グラフの高さ v - t グラフの面積 → x の変化量
速さがとちゅうで変わると、 x - t グラフは曲がり、 v - t グラフは長方形でなくなります。そのときの傾きは $5-1 \cdot 5-3$ で、面積は $5-9$ で考えます。この「傾き」と「面積」の行き来が、第 5 巻の微分と積分です。

8 表のあいだを直線で読む：内挿

3-4 では、表にない値を、グラフの線から読み取りました（内挿）。傾きを使うと、グラフをかかずに計算で求められます。

ある日の気温は、9時に18℃、12時に24℃でした。10時の気温は、何度くらいだったでしょう。

気温は少しずつ変わるので、9時から12時までは、2つの点を結ぶ直線にそって変わったと考えます。



① 傾き（1時間あたりに上がる温度）は、

$$m = \frac{24^{\circ}\text{C} - 18^{\circ}\text{C}}{12\text{h} - 9\text{h}} = \frac{6^{\circ}\text{C}}{3\text{h}} = 2^{\circ}\text{C/h}$$

② 9時から10時まで、1時間たったので、 $2^{\circ}\text{C/h} \times 1\text{h} = 2^{\circ}\text{C}$ 上がります。
 $18 + 2 = 20$ で、10時は約20℃です。

これは、点(9, 18)と傾き2の直線 $y = 18 + 2(x - 9)$ (140ページの $y = y_1 + m(x - x_1)$) に、 $x = 10$ を入れたのと同じです。表のあいだの値を、2つの点を結ぶ直線で求めることを、**直線内挿**ともいいます。

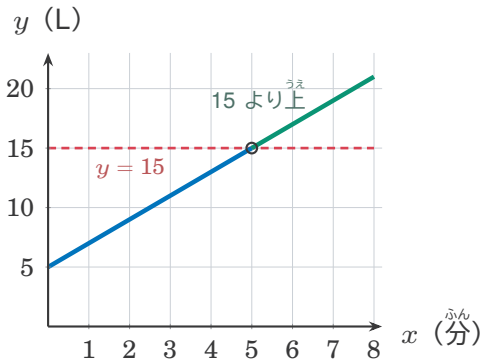
外へのぼすのは危ない（外挿、3-4） 同じ直線を21時までのぼすと、

$$y = 18 + 2 \times (21 - 9) = 18 + 24 = 42$$

で、42℃になってしまいます。夜の気温がそんなに高いはずはありません。気温は昼すぎから下がるので、朝の「1時間に2℃」は、夜までは続きません。直線で読んでよいのは、はかった2つの点のあいだの、近い所だけです。

⑨ どこから上になる？ : 1次不等式の入り口

134ページの水そう $y = 2x + 5$ で、水が15Lより多くなるのは、何分後より後でしょうか。「より多い」は、不等号で $y > 15$ と書けます (2-2)。



グラフで $y = 15$ の水平な線を引きます。青い直線は、 $x = 5$ でこの線と交わり、それより右では線より上（緑）にあります。だから、5分より後です。右上がりの直線は、一度こえたら、もう下にはもどりません。

式で $2x + 5 > 15$ のように、不等号を使った式を不等式といい、 x が1次式なら1次不等式といいます。方程式（2-16）と同じように解けます。

$$2x + 5 > 15$$

$$2x > 15 - 5 \quad (5 \text{ を移項する})$$

$$2x > 10$$

$$x > 5 \quad (\text{両辺を } 2 \text{ でわる})$$

不等式は、片方に傾いた天びんです。両方の皿から同じ5をとっても、重いほうは重いままです。両方を半分にしても、重いほうは重いままです。だから、不等号の向きはそのままです。

マイナスでかける・わると、向きが反対になる。電池の $y = -20x + 100$ で、残りが30%より少なくなるのはいつからでしょう。 $-20x + 100 < 30$ を解きます。100を移項すると $-20x < -70$ 。ここで両辺を -20 でわります。数直線で、マイナスをかけると何が起きるかを見てみましょう。

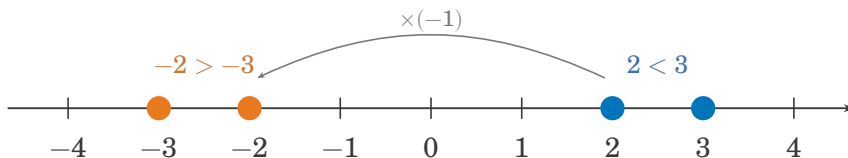


図6 -1 をかけると、0をはさんで左右が入れかわる。右にあった3が、左の -3 になる。

2 < 3 の両辺に -1 をかけると、 -2 と -3 になります。数直線では -2 のほうが右なので、 $-2 > -3$ です (2-2)。大小が入れかわりました。マイナスの数でかけたり、わったりすると、不等号の向きが反対になります。

$$-20x + 100 < 30$$

$$-20x < -70 \quad (100 \text{ を移項する})$$

$$x > 3.5 \quad (\text{両辺を } -20 \text{ でわる。向きが反対})$$

3.5 時間より後です。数で確かめると、 $x = 4$ なら $y = -80 + 100 = 20$ で 30 より少ない。 $x = 3$ なら $y = -60 + 100 = 40$ で 30 より多い。右下がりのグラフなので、右へ行くほど低くなる、というグラフの見方とも合っています。

たいせつ

傾き = たての変化量 ÷ 横の変化量 = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。右上がりなら正、

右下がりなら負、水平なら 0。

1 次関数 $y = ax + b$: a が傾き (変化の割合。いつも同じ)、 b が切片 ($x = 0$ のときの y)。

x - t グラフの傾き = 速さ。傾きの単位は、たての単位 ÷ 横の単位。

傾きが m で、点 (x_1, y_1) を通る直線の式は $y - y_1 = m(x - x_1)$ 。

この章で出てきたことば

傾き 直線の急さ。たての変化量 ÷ 横の変化量。道路ではこう配ともいう。

1 次関数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) の形で書ける関数。グラフは直線。

変化の割合 x の変化量に対する y の変化量の割合 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。1 次関数ではいつも a 。

切片 グラフが y 軸と交わる点の y 座標。 $y = ax + b$ の b 。

1 次不等式 $2x + 5 > 15$ のような、1 次式の不等式。マイナスでかける・わると、不等号の向きが反対になる。

例題でたしかめよう

例題1 2点から傾きを求める

次の2点を通る直線の傾きを求め、右上がりか右下がりかを答えましょう。

- (1) (1, 3)、(4, 9) (2) (-2, 5)、(2, -3)

考え方 たても横も「2つめ-1つめ」でひきます。マイナスの数をひくときは、かっこをつけます(2-2)。

しき (1) $\frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$ (2) $\frac{-3-5}{2-(-2)} = \frac{-8}{4} = -2$ 分母は $2+2=4$

こたえ (1) 2、右上がり (2) -2、右下がり

例題2 1次関数の傾き・切片・変化量

1次関数 $y = -3x + 6$ の(1)傾きと切片、(2) x が1から4まで変わる時の y の変化量を求めましょう。

考え方 $y = ax + b$ の a が傾き、 b が切片。 $a = -3$ はマイナスごと読みます。(2)は y の値を2つ計算して、あと-まえ。

しき (1) $a = -3$ 、 $b = 6$

(2) $x = 1$ のとき $y = -3 \times 1 + 6 = 3$

$x = 4$ のとき $y = -3 \times 4 + 6 = -6$

$\Delta y = -6 - 3 = -9$

確かめ：変化の割合は -3 なので、 $\Delta y = -3 \times \Delta x = -3 \times 3 = -9$

こたえ (1) 傾き -3 、切片 6 (2) -9 (9へる)

じぶんでところ1

2点を通る直線の傾きを求め、右
上がりか右下がりかを答えま
しょう。(1) (2, 1)、(5, 10)
(2) (-3, 4)、(1, -4)

じぶんでところ2

1次関数 $y = 2x - 4$ の (1) 傾
きと切片、(2) x が1から5ま
で変わるときの y の変化量を求
めましょう。

例題3 式からグラフをかく

次の1次関数のグラフを、ノートにかきま
しょう。

(1) $y = \frac{1}{2}x - 1$ (2) $y = -2x + 3$

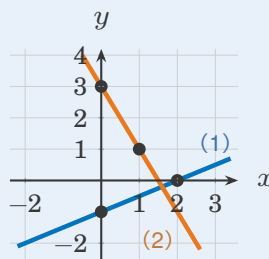
考え方 ① 切片の点 ② 傾きの分だけ進ん
だ点 ③ 2点を通る直線、の順にかきます。

しき (1) (0, -1) から「右へ2・上へ
1」で (2, 0)

(2) (0, 3) から「右へ1・下へ2」で

(1, 1)

こたえ 図のとおり。(1) は (0, -1) と (2, 0)、(2) は (0, 3) と (1, 1)
を通る直線

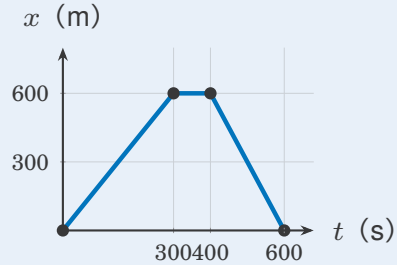


じぶんでところ3

次の1次関数のグラフを、ノートにかきま
しょう。(1) $y = \frac{1}{3}x + 1$
(2) $y = -x + 2$

例題 4 $x-t$ グラフから速さを求める

ソラさんが家から公園までジョギングをして、少し休み、家へ帰ったときの $x-t$ グラフです。0～300 秒、300～400 秒、400～600 秒の速さ（向きもふくめて）を求めましょう。



考え方 傾きが速さです。点の座標を読み、 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ を単位つきで計算します。水平なら 0、右下がりなら負です。

しき 0～300 秒：
$$\frac{600 \text{ m} - 0 \text{ m}}{300 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{600 \text{ m}}{300 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

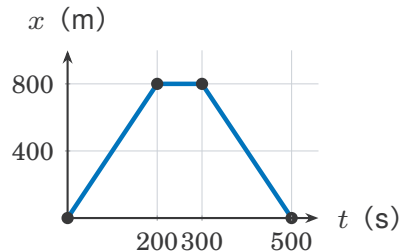
300～400 秒：
$$\frac{600 \text{ m} - 600 \text{ m}}{400 \text{ s} - 300 \text{ s}} = \frac{0 \text{ m}}{100 \text{ s}} = 0 \text{ m/s}$$

400～600 秒：
$$\frac{0 \text{ m} - 600 \text{ m}}{600 \text{ s} - 400 \text{ s}} = \frac{-600 \text{ m}}{200 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}$$

こたえ 0～300 秒は 2 m/s、300～400 秒は 0 m/s（止まっている）、400～600 秒は -3 m/s（家のほうへ秒速 3 m。帰りのほうが速い）

じぶんでこう 4

右の $x-t$ グラフは、犬の散歩のようすです。0～200 秒、200～300 秒、300～500 秒の速さ（向きもふくめて）を求めましょう。



例題5 2点を通る直線の式

次の2点を通る直線の式を、 $y = ax + b$ の形で求めましょう。

- (1) (1, 5)、(3, 11) (2) (-1, 7)、(2, 1)

考え方 ① 傾き a を求める ② 1点を代入して b を求める ③ もう1点で確かめる。

しき (1) $a = \frac{11 - 5}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$

(1, 5) を代入: $5 = 3 \times 1 + b$, $b = 2$ 。確かめ: $3 \times 3 + 2 = 11$

(2) $a = \frac{1 - 7}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = -2$

(2, 1) を代入: $1 = -2 \times 2 + b$, $b = 5$ 。確かめ: $-2 \times (-1) + 5 = 7$

こたえ (1) $y = 3x + 2$ (2) $y = -2x + 5$

じぶんでとこう5

2点を通る直線の式を、 $y = ax + b$ の形で求めましょう。(1) (2, 7)、(4, 11) (2) (-2, 8)、(1, 2)

コラム 電気料金も1次関数

家の電気料金は、使わなくてもはらう「基本料金」と、使った量に比例する料金の和です。使った量の単位は kWh (キロワット時) です。基本料金が 900 円で、1 kWh 使うごとに 30 円かかるなら、 x [kWh] 使った月の料金 y 円は $y = 30x + 900$ です。傾き 30 は「1 kWh あたり 30 円」、切片 900 は基本料金です。300 kWh 使った月は $30 \times 300 + 900 = 9900$ で 9900 円。

例題 6 表のあいだの値を求める (内挿)

やかんの水をあたためると、2分後に 32°C 、6分後に 52°C でした。このあいだは直線で変わったとして、3分後と5分後の温度を求めましょう。

考え方 ① 1分あたりに上がる温度 (傾き) を求める ② 2分後から何分たったかをかけて、32にたす。

しき 傾き: $\frac{52^{\circ}\text{C} - 32^{\circ}\text{C}}{6\text{min} - 2\text{min}} = \frac{20^{\circ}\text{C}}{4\text{min}} = 5^{\circ}\text{C}/\text{min}$

3分後: $32 + 5 \times (3 - 2) = 32 + 5 = 37$

5分後: $32 + 5 \times (5 - 2) = 32 + 15 = 47$

こたえ 3分後は約 37°C 、5分後は約 47°C

例題 7 場面から1次関数の式を作る

ろうそくに火をつけると、4分後に 16cm 、10分後に 13cm になりました。一定の速さで短くなるとして、 x 分後の長さを y [cm] とします。

(1) y を x の式で表しましょう。(2) 火をつける前の長さは何 cm ですか。(3) 燃えつきるのは何分後ですか。

考え方 「一定の速さ」なので1次関数で、点 $(4, 16)$ 、 $(10, 13)$ を通ります。火をつける前は $x = 0$ 、燃えつきるのは $y = 0$ のときです。

しき (1) $a = \frac{13 - 16}{10 - 4} = \frac{-3}{6} = -0.5$

$16 = -0.5 \times 4 + b$ より $b = 16 + 2 = 18$

(2) $x = 0$ を入れて $y = 18$

(3) $0 = -0.5x + 18$ 。移項して $0.5x = 18$ 。 $x = 18 \div 0.5 = 36$

こたえ (1) $y = -0.5x + 18$ (2) 18cm (3) 36 分後

じぶんでところ6

ある日の気温は、6時に 12°C 、
10時に 20°C でした。このあい
だは直線で変わったとして、7時
と9時の気温を求めましょう。

じぶんでところ7

水そうの水をぬいていくと、2分
後に 32L 、5分後に 20L になり
ました。一定の速さでへるとし
て、 x 分後の水の量を $y\text{ [L]}$ と
します。(1) y を x の式で表し
ましょう。(2) はじめの量は何
 L ですか。(3) 空になるのは何
分後ですか。

例題8 1点と傾きから直線の式

次の直線の式を、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を使って作り、 $y = ax + b$ の形に
直しましょう。

- (1) 傾き3で、点 $(2, 5)$ を通る (2) 傾き $-\frac{1}{2}$ で、点 $(-2, 4)$ を通る

考え方 m 、 x_1 、 y_1 に数を入れます。 x_1 がマイナスなら、かっこをつけ
て入れます。右辺を展開して、移項します。

しき

$$\begin{aligned} (1) \quad y - 5 &= 3(x - 2) & (2) \quad y - 4 &= -\frac{1}{2}\{x - (-2)\} = -\frac{1}{2}(x + 2) \\ y - 5 &= 3x - 6 & y - 4 &= -\frac{1}{2}x - 1 \\ y &= 3x - 6 + 5 & y &= -\frac{1}{2}x - 1 + 4 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$

確かめ：(1) $x = 2$ で $3 \times 2 - 1 = 5$

$$(2) \quad x = -2 \text{で} -\frac{1}{2} \times (-2) + 3 = 1 + 3 = 4$$

こたえ (1) $y = 3x - 1$ (2) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

 例題 9 1 次不等式を解く

つぎの不等式を解きましょう。(1) $3x + 6 > 21$ (2) $-20x + 100 < 30$

考え方 方程式と同じように移項して、 x の係数 (x にかかっている数) でわります。(2) は -20 でわるので、不等号の向きが反対になります。

しき (1) $3x > 21 - 6$, $3x > 15$, $x > 5$

3 (プラス) でわったので、向きはそのまま

(2) $-20x < 30 - 100$, $-20x < -70$, $x > 3.5$

-20 (マイナス) でわったので、向きが反対

確かめ: (2) $x = 4$ なら $-80 + 100 = 20$ で、 30 より小さい

こたえ (1) $x > 5$ (2) $x > 3.5$

 じぶんでとこう 8

$y - y_1 = m(x - x_1)$ を使って
直線の式を作り、 $y = ax + b$ に
直しましょう。(1) 傾き 2 で
(3, 4) を通る (2) 傾き $-\frac{1}{3}$ で
(-3, 5) を通る

 じぶんでとこう 9

つぎの不等式を解きましょう。

(1) $4x + 3 > 19$

(2) $-5x + 60 < 20$

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

たてと横を逆にわる

✕ $(1, 3), (4, 9)$ の傾きは $\frac{4-1}{9-3} = \frac{3}{6} = 0.5$

○ $\frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$ (たての変化量を上に)

傾きは「横に1進むと、たてに何上がるか」。たてを横でわります。坂の「高さ÷横」を思い出そう。

⚠ まちがえやすいところ

ひく順番がたてと横でちがう

✕ $(1, 3), (4, 9)$ の傾きは $\frac{9-3}{1-4} = \frac{6}{-3} = -2$

○ たても横も「2つめ-1つめ」。 $\frac{9-3}{4-1} = 2$

たては「2つめ-1つめ」、横は「1つめ-2つめ」とまぜたので、符号が逆になりました。グラフをかくと右上がりなので、傾きはプラスのはずです。

⚠ まちがえやすいところ

かず 数だけの項を傾きと読む

✕ $y = 5 - 2x$ の傾きは 5

○ $y = -2x + 5$ と並べかえると、傾きは -2 、切片は 5
傾きは「 x にかかっている数」です。書いてある順番ではありません。 x が 1 ふえると、 y は 2 へります。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスの座標を、かっこなしで入れる

✕ 傾き 2 で $(-1, 3)$ を通る直線は $y - 3 = 2(x - 1)$

○ $y - 3 = 2\{x - (-1)\} = 2(x + 1)$

$x_1 = -1$ をかっこごとに入れます。 $\times$ の式に $x = -1$ を入れると $y - 3 = 2 \times (-2)$ で $y = -1$ になり、 $(-1, 3)$ を通りません。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスでわったのに、不等号をそのままにする

✕ $-2x > 6$ だから $x > -3$

○ -2 でわるので向きが反対。 $x < -3$

$x = 0$ で確かめると、 $-2 \times 0 = 0$ は 6 より大きくありません。でも、 $\times$ の答え $x > -3$ には 0 が入ってしまいます。 $x = -4$ なら $-2 \times (-4) = 8 > 6$ で、○の答えに合います。

コラム 蒸気表と直線内挿

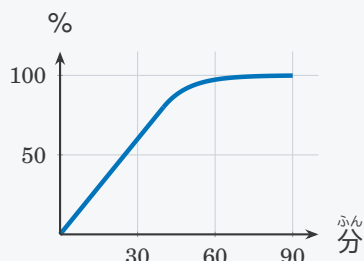
発電所や工場のボイラーを設計する人は、水がふつとあつりようする温度と圧力（おす強さ。2-10 の kPa）の表（蒸気表）を使います。表には 100℃ で 101.42 kPa、110℃ で 143.38 kPa のように、とびとびの温度しかのっていません。105℃ の値がほしいときは、直線内挿をします。傾きは $(143.38 - 101.42) \div 10 = 4.196$ (1℃ あたりの kPa) なので、

$$101.42 + 4.196 \times 5 = 101.42 + 20.98 = 122.40$$

約 122.4 kPa です。本当の値は 120.90 kPa で、ずれは約 1.5 kPa (約 1%)。この関係のグラフは少し曲がっているので、直線で読むと少しずれます。そこで、くわしい蒸気表は温度を細かくきざんで、内挿のずれを小さくしています。

コラム スマートフォンの充電と傾き

充電中の電池の残り (%) を時間のグラフにすると、多くのスマートフォンでは、はじめは傾きが大きく（速く充電）、80% をこえるころから傾きが小さく（ゆっくり充電）なります。満タン近くで電流を強く流しつづけると電池がいたむので、電子回路が傾き（充電の速さ）を調節しているのです。



グラフが曲がっていても、2つの時刻のあいだの傾きは $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で計算できます。それは、そのあいだの「平均の充電の速さ」です (5-1)。

ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

どうろ せんろ ばい
道路と線路のこう配

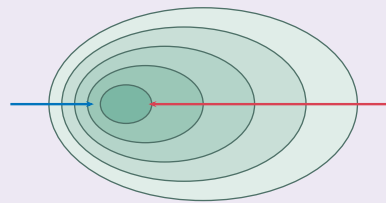
山の道路には、右のような「10%」の標識があります。横に 100 m 進むと 10 m 上がる、つまり傾き $\frac{10}{100} = 0.1$ のこう配です。鉄道は車輪がすべりやすいので、もっとゆるやかにつくります。1000 分の何かを% (パーミル) で表し、日本でいちばん急な登山電車でも 80 % (傾き 0.08) です。



車いす用のスロープは、建物のバリアフリーのきまりで、 $\frac{1}{12}$ (約 0.083) より急にしないことになっています。やってみようのスロープ ($\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$) は、ちょうどこのきまりの急さです。

ち ず とうこうせん さか きゅう
地図の等高線と坂の急さ

地図では、同じ高さの所を結んだ線 (等高線) で、山の形を表します。2 万 5 千分の 1 の地図では、等高線は高さ 10 m ごとに引かれています。地図の上で線と線の間が 4 mm なら、本当の横の長さは $4 \text{ mm} \times 25000 = 100000 \text{ mm} = 100 \text{ m}$



ひだり 左から：急
みぎ 右から：ゆるやか

なので、傾きは $\frac{10}{100} = 0.1$ です。

線の間がせまい所ほど、同じ 10 m を短い横の長さで上がるので、坂は急です。山では、進む向きによって坂の急さがちがいます。東へ進むときと北へ進むときの傾きは、8-2 で学びます。

コラム 温度センサーは2点で合わせる

電子温度計の中の温度センサーは、温度に応じた電圧を出します。電圧は温度の1次関数になるように作られています。1つ1つ少しずつちがうので、工場では2つの温度で電圧をはかって直線を決めます（校正）。たとえば、 0°C で 0.50V 、 100°C で 1.50V なら、傾きは $(1.50 - 0.50) \div 100 = 0.01$ で、 1°C あたり 0.01V です。温度を x [$^{\circ}\text{C}$]、電圧を y [V] とすると $y = 0.01x + 0.50$ 。電圧が 0.75V と出たら、 $0.75 = 0.01x + 0.50$ から $0.01x = 0.25$ 、 $x = 25$ で、 25°C とわかります。工場の計器の点検でも、このように2点で直線を合わせる作業をします。



しょうまつもんだい 章末問題

3-5 のまとめ

基本



1 次の2点を通る直線の傾きを求め、右上がりか右下がりかを答えましょう。

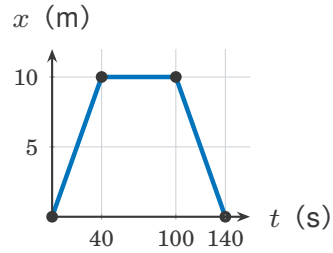
(1) $(1, 2)$ 、 $(4, 11)$ (2) $(-1, 6)$ 、 $(3, -2)$

2 1次関数 $y = -2x + 7$ の (1) 傾きと切片、(2) x が2から5まで変わるときの y の変化量を求めましょう。

3 次の1次関数のグラフを、ノートにかきましょう。(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

- 4 右の x - t グラフは、電車の模型の動きです。0～40 秒、40～100 秒、100～140 秒の速さ（向きもふくめて）を求めましょう。

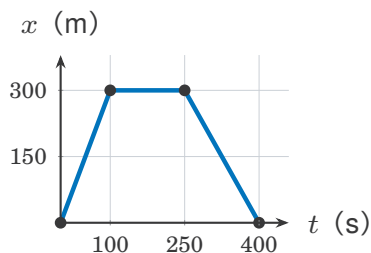


- 5 次の2点を通る直線の式を、 $y = ax + b$ の形で求めましょう。(1) (3, 7)、(5, 11) (2) (-2, 9)、(2, 1)
- 6 次の直線の式を、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を使って作り、 $y = ax + b$ の形に直しましょう。(1) 傾き 4 で (1, 3) を通る (2) 傾き $-\frac{1}{2}$ で (-4, 5) を通る
- 7 水の温度が、1 分後に 24°C 、5 分後に 40°C でした。このあいだは直線で変わったとして、3 分後の温度を求めましょう。
- 8 次の不等式を解きましょう。(1) $5x - 4 > 11$ (2) $-3x + 9 < 0$

チャレンジ ★★★

- 9 バネにおもりをつるすと、3 個で 26 cm、7 個で 34 cm になりました（ばね全体の長さ）。おもりの数を x 個、長さを y [cm] とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) おもりをつるす前の長さは何 cm ですか。(3) 長さが 40 cm になるのは、おもり何個のときですか。
- 10 スマートフォンの電池が 80% あり、動画を見つづけると 1 時間に 15% ずつへります。 x 時間後の残りを $y\%$ とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 残りが 20% より少なくなるのは、何時間後より後ですか。不等式を作って解きましょう。

- 11 右の $x-t$ グラフは、ミナさんが家からポストまで歩いて手紙を出し、家へもどったときのようなものです。(1) $0 \sim 100$ 秒、 $100 \sim 250$ 秒、 $250 \sim 400$ 秒の速さ(向きもふくめて)を求めましょう。(2) 行きと帰りでは、どちらが速いですか。



- 12 傾き -3 で、点 $(-2, 1)$ を通る直線の式を、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を使って作り、 $y = ax + b$ の形に直しましょう。また、 $x = -2$ を入れて確かめましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 傾きを「たての変化量 ÷ 横の変化量」で求め、正・負・0 がわかる。

→ 130 ページ

- ☐ $y = ax + b$ の傾きと切片を読み、 $x-t$ グラフの傾きを速さとして使える。

→ 134 ページ

- ☐ 1 点と傾きから、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ で直線の式を作れる。

→ 140 ページ



デルタ

急さを数にしたら、坂も速さも電池も、同じ「傾き」で話せたね。次の章では、2本の直線が交わる点を求めるよ。

メモ

Handwriting practice area with horizontal dashed lines.

第1部 関数とグラフ



3-6

2本の直線が交わる場所： 連立方程式

この章の前に 2-13 2-14 2-16 2-18 3-5
この章の先に 3-10 3-16 7-1 9-10

この章でできるようになること

- ★★ 2本の直線の交わる点が、2つの式を同時にみたす (x, y) であることがわかる。
- ★★ 代入法と加減法で連立方程式を解き、代入して確かめられる。
- ★★ 解がない・無数にあるわけを説明し、出会い・買い物・回路の問題を解ける。

? はてな?

家と駅は1500mはなれています。ミナさんは家から駅へ、分速60mで歩きます。ソラさんは同じときに駅を出て、家に向かって分速90mで歩きます。2人が出会うのは何分後、家から何mの所かな? 2人の位置と時間のグラフをかいたら、出会う所はグラフのどこに現れるでしょう。

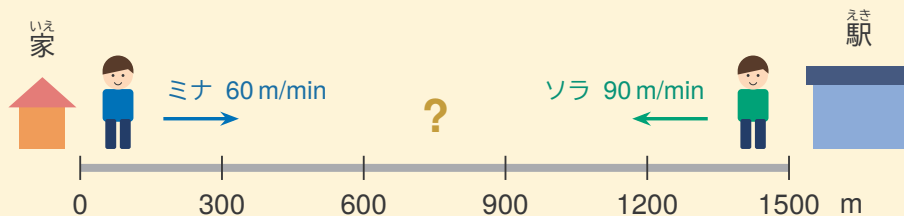


図1 2人は同じときに出発。どこで出会う?

2-16では、兄が弟に追いつく時間を、1次方程式で求めました。そのとき、2人のグラフの交わる点の答えになっていました。この章では、「2本の直線の交わる点」をしっかりと考えます。わからない数が2つ（何分後と、どこで）あるとき、2つの式をいっしょに使って解く方法を学びます。

△ やってみよう 表とグラフで、出会う所をさがそう

- ① ミナさんは家から1分に60m進みます。ソラさんは1500mの所から、1分に90mずつ家に近づきます。下の表をノートに写し、2分ごとに、家からの位置をうめよう。
- ② 横に時間、たてに家からの位置をとって、2人の点を色を変えてかき、それぞれ直線で結ぼう。
- ③ 2本の直線が交わるのは、どこかな？ そのとき2人の位置はどうなっているかな？

時間 (分)	0	2	4	6	8	10	12
ミナの位置 (m)	0	120	240				
ソラの位置 (m)	1500	1320	1140				

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-13 文字に式を入れるときは、かっこごとに入れる。 $y = x + 1$ なら $3y = 3(x + 1)$ 。
- 2-14 等式は天びん。両辺に同じ数をたしても、ひいても、かけても、等式は成り立つ。
- 2-16 1次方程式は、移項して同類項をまとめ、 x の係数でわって解く。 $2t = 10 + 2t$ には解がない。
- 2-18 表計算では、式を下へコピーすると、行の番号もずれる。
- 3-5 1次関数 $y = ax + b$ のグラフは直線。 a が傾き、 b が切片。

やってみようの表は、ミナさんが360、480、600、720、ソラさんが960、780、600、420と続きます。10分後に、2人とも600mの所にいます。同じ時間に同じ場所にいるので、ここで出会います。



ミナ

表で見つけたけど、もし出会うのが9.4分後みたいな半ばな時間だったら、表では見つけにくいね。

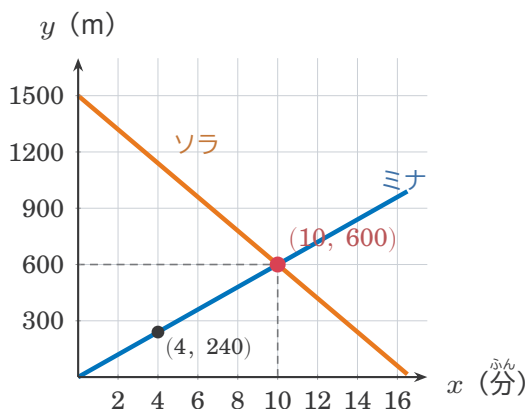
数学の道具

① 交わる点は、2つの式を同時にみtas

出発してから時間を x 分、家からの位置を y [m] とします。2人の位置を式にしましょう。

ミナさん 家(0の所)から1分に60mずつ進むので、 $y = 60x$ です(道のり = 速さ × 時間。2-3)。

ソラさん はじめは1500mの所にいて、1分に90mずつ家に近づくので、位置は x 分で $90x$ だけ小さくなります。 $y = 1500 - 90x$ 、並べかえて $y = -90x + 1500$ です。傾き -90 は「1分に90m、家のほうへ進む」速さ、切片1500は出発の位置です(3-5)。



青がミナさんの $y = 60x$ 、オレンジがソラさんの

$y = -90x + 1500$ です。

2本の直線は、点(10, 600)で交わっています。10分後、家から600mの所で出会う、ということです。

線の上の点は、その式をみたく 青い線の上の点 (4, 240) を、ミナさんの式に入れると $60 \times 4 = 240$ で、等式が成り立ちます。「線の上にある」とことと「その式をみたく」ことは、同じことです。でも、(4, 240) をソラさんの式に入れると、 $-90 \times 4 + 1500 = 1140$ で、240 になりません。この点は、オレンジの線の上にはないのです (4 分後、ソラさんは 1140 m の所)。

交わる点は、両方をみたく (10, 600) を入れると、

$$\text{ミナ} : 60 \times 10 = 600 \quad \text{ソラ} : -90 \times 10 + 1500 = -900 + 1500 = 600$$

両方の式が成り立ちます。交わる点は、両方の線の上にあるので、両方の式を同時にみたく点です。交わる点を、交点といいます。

このように、2つの式を組にして、両方を同時に成り立たせる x と y をさがすとき、その組の式を連立方程式といいます。「連立」は、ならんで立つという意味です。右のカードのように、左に大きな波かっこをつけて書きます。

記号カード

初めて出た章 3-6



読み方 連立の波かっこ
意味 2つ (いくつ) の式を、同時に成り立たせる組だという印。
英語 system of equations

$$\begin{cases} y = 60x \\ y = -90x + 1500 \end{cases}$$

2つの式を同時に成り立たせる x と y の組を、連立方程式の解といい、「 $x = 10$ 、 $y = 600$ 」や「 $(x, y) = (10, 600)$ 」と書きます。 x だけ、 y だけでは解になりません。2つで1組です。

② はてな? の答え : 2人のグラフの交点が、出会う時間と場所です。10分後、家から 600 m の所で出会います。

2 代入法： y のかわりに式を入れる

グラフは、交点の目もりがちょうど読めるときには便利です。でも、交点が目もりのあいだにあると、正確には読めません。そこで、計算で解く方法を2つ学びます。

1 出会う所では、2人の y が等しい

交点では、ミナさんの y とソラさんの y が同じ数です。ミナさんの式から、 y は $60x$ と等しいので、ソラさんの式の y のかわりに $60x$ を入れます。

$$60x = -90x + 1500 \quad (\text{ソラさんの式の } y \text{ に } 60x \text{ を代入})$$

$$60x + 90x = 1500 \quad (-90x \text{ を移項。2-14})$$

$$150x = 1500$$

$$x = 10 \quad (\text{両辺を } 150 \text{ でわる})$$

y が消えて、 x だけの1次方程式になりました。これは2-16と同じ形です。 $x = 10$ をミナさんの式に入れて、 $y = 60 \times 10 = 600$ 。グラフで読んだ答えと合っています。

$150x$ の150は、2人が1分に近づく距離 $60 + 90 = 150$ (m)です。1500mのあいだが、1分に150mずつちぢまるので、 $1500 \div 150 = 10$ 分で0になる、とも考えられます(2-16の「差に目をつける」)。

2 かっこごとに入れる

次の連立方程式では、2つめの式が「 $y =$ 」の形になっていません。

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \dots \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 12 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①から、 y は $2x - 1$ と等しいので、②の y のかわりに $2x - 1$ を入れます。②の $2y$ は「 $2 \times y$ 」なので、 y の箱に $2x - 1$ をまるごと入れて、 $2 \times (2x - 1)$ にします(2-13)。

$$3x + 2 \boxed{y} = 12 \longrightarrow 3x + 2 \boxed{(2x - 1)} = 12$$

y の箱 かっこごとに入れる

図2 y の箱に、 $2x - 1$ をまるごと入れる。

$$3x + 2(2x - 1) = 12 \quad (\text{②の } y \text{ に①を代入})$$

$$3x + 4x - 2 = 12 \quad (\text{かっこをはずす。} 2 \times 2x = 4x、2 \times (-1) = -2)$$

$$7x = 14 \quad (3x + 4x = 7x。-2 \text{ を移項して } 12 + 2 = 14)$$

$$x = 2$$

$x = 2$ を①に入れると、 $y = 2 \times 2 - 1 = 3$ 。解は $x = 2$ 、 $y = 3$ です。

確かめ ②に入れると、 $3 \times 2 + 2 \times 3 = 6 + 6 = 12$ 。①も②も成り立つので、正しい解です。連立方程式の確かめは、必ず両方の式でします。

このように、1つの式を「 $y = \dots$ 」(または「 $x = \dots$ 」)の形にして、もう1つの式に代入し、文字を1つ消して解く方法を、**代入法**といいます。

①	1つの式を「 $y = \dots$ 」の形にする(はじめからその形なら、そのまま)。
②	もう1つの式の y に、かっこごと代入する。 x だけの1次方程式になる。
③	1次方程式を解いて x を求める(2-16)。
④	x を「 $y = \dots$ 」の式に入れて y を求め、両方の式で確かめる。

表1 代入法の手順

3 加減法：式どうしをたす・ひく

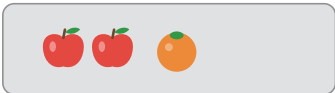
くだもの屋さんで、りんごとみかんを買いました。右の2つのトレーの値段から、りんご1個とみかん1個の値段がわかるでしょうか。

A



420 円

B



300 円

1 くらべて考える

A と B をくらべると、りんごの数は同じ 2 個で、ちがうのはみかんの数だけです。A のほうがみかんが $3 - 1 = 2$ 個多く、値段は $420 - 300 = 120$ 円高いので、みかん 2 個で 120 円。みかん 1 個は $120 \div 2 = 60$ 円です。B から、りんご 2 個は $300 - 60 = 240$ 円なので、りんご 1 個は $240 \div 2 = 120$ 円です。

2 式で考える

りんご 1 個を x 円、みかん 1 個を y 円とすると、

$$\begin{cases} 2x + 3y = 420 & \dots ① \\ 2x + y = 300 & \dots ② \end{cases}$$

①から②を、左辺どうし、右辺どうしでひきます。同じ文字の項をたてにそろえて書くと、ひき算の筆算のようにできます。

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 420 \\ -) 2x + y = 300 \\ \hline 2y = 120 \end{array}$$

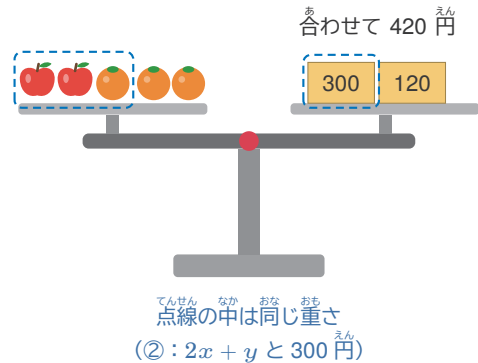
$2x - 2x = 0$ で x が消え、 $3y - y = 2y$ 、 $420 - 300 = 120$ 。 $2y = 120$ から $y = 60$ 。これを②に入れて $2x + 60 = 300$ 、 $2x = 240$ 、 $x = 120$ です。確かめ：①は $2 \times 120 + 3 \times 60 = 240 + 180 = 420$ で成り立ちます。

3 なぜ式どうしをひいてよいの？

等式は、つり合った天びんでした

(2-14)。①の天びんは、左に $2x + 3y$ 、右に 420 円がのってつり合っています。

②から、 $2x + y$ と 300 円は同じ重さです。①の左の皿から $2x + y$ を、右の皿から 300 円をとると、同じ重さをとったので、つり合ったままです。残りは、左が $2y$ 、右が 120 円。だから $2y = 120$ です。



図では、右の皿の 420 円を、300 円と 120 円に分けてかいています。点線の中どうしをとると、左にはみかん 2 個、右には 120 円が残ります。等しいものから等しいものをひいても、残りは等しいのです。たすときも同じで、等しいものに等しいものをたしても、つり合ったままです。

4 たして消す

「2つの数の和が7、差が1」のとき、大きいほうを x 、小さいほうを y とすると、

$$\begin{cases} x + y = 7 & \dots ① \\ x - y = 1 & \dots ② \end{cases} \quad \begin{array}{r} x + y = 7 \\ +) \quad x - y = 1 \\ \hline 2x \quad = 8 \end{array}$$

$+y$ と $-y$ は、たすと 0 になって消えます。 $2x = 8$ から $x = 4$ 。①に入れて $4 + y = 7$ 、 $y = 3$ 。確かめ：②は $4 - 3 = 1$ 。 y の符号が同じなら引き、反対ならたすと、 y が消えます。

5 係数がそろっていないときは、かけてそろえる

次の連立方程式を解きます。

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & \dots ① \\ 3x - y = 3 & \dots ② \end{cases}$$

このままとしても、ひいても、どちらの文字も消えません。そこで、②の両辺に2をかけて、 y の係数を -2 にします。両辺に同じ数をかけても、等式は成り立ちます(2-14)。全部の項にかけるので、右辺の3にもかけます。

$$\begin{array}{rcl} & x + 2y = & 8 \\ ② \times 2 & 6x - 2y = & 6 \quad \dots ②' \\ \hline & 7x & = 14 \end{array}$$

$x = 2$ 。①に入れて $2 + 2y = 8$ 、 $2y = 6$ 、 $y = 3$ 。確かめ：②は $3 \times 2 - 3 = 3$ で成り立ちます。②'は「②を2倍した式」の印です(「ダッシュ」と読みます)。このように、式どうしをたしたりひいたりして文字を1つ消す方法を、**加減法**といいます。「加」はたし算、「減」はひき算です。

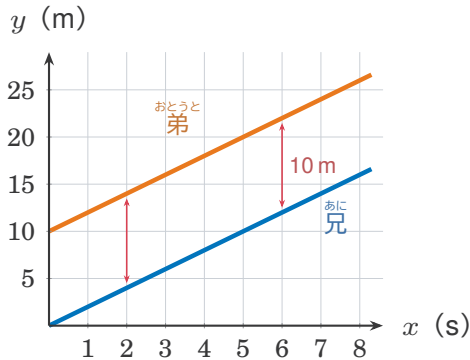
代入法で解いても同じ くだもの屋さんの問題を代入法で解いてみます。②の $2x$ を移項して $y = 300 - 2x$ 。①に代入すると、

$$2x + 3(300 - 2x) = 420$$

かっこをはずして $2x + 900 - 6x = 420$ 、まとめて $-4x = -480$ 、両辺を -4 でわって $x = 120$ 。 $y = 300 - 2 \times 120 = 60$ で、同じ答えです。どちらの方法でも解けます。「 $y = \dots$ 」の形の式があれば代入法、係数がそろっていたり、そろえやすかったりすれば加減法が楽です。

4 平行なら交わらない、重なれば無数

2-16の「もっと知りたい」で、兄も弟も秒速2mだったら、方程式 $2t = 10 + 2t$ には解がない、という話をしました。「グラフでは、2本の線が同じかたむきで平行になり、いつまでも交わりません(3-6)」と書いてありました。ここで、そのわけを確かめます。



x 秒後の兄の位置を $y = 2x$ 、弟の位置を $y = 2x + 10$ とします。傾きはどちらも2で同じ、切片は0と10でちがいます。

2本の線は、どこでもたてに10mはなれたまま進みます。同じ傾きなので、近づきも、はなれもしないからです。

代入法で解こうとすると、

$$2x = 2x + 10 \rightarrow 2x - 2x = 10 \rightarrow 0 = 10$$

x が消えて、成り立たない式 $0 = 10$ が残ります。 x にどんな数を入れても、0は10になりません。だから、この連立方程式には解がありません。グラフの平行な2本の線には、交点がありません。式で見ても、グラフで見ても、同じ結論です。

重なるとき このときは、次の連立方程式を代入法で解いてみます。

$$\begin{cases} y = 2x + 1 & \dots \text{①} \\ 4x - 2y = -2 & \dots \text{②} \end{cases}$$

②に①を代入すると、

$$4x - 2(2x + 1) = -2 \rightarrow 4x - 4x - 2 = -2 \rightarrow -2 = -2$$

となります。 x が消えて、いつでも成り立つ式が残りました。 x がどんな数でも、 $y = 2x + 1$ なら②も成り立つ、ということです。②を変形すると、 $-2y = -4x - 2$ 、両辺を -2 でわって $y = 2x + 1$ 。②は、①と同じ直線だったのです。2本の線がぴったり重なるので、直線の上のどの点も交点です。解は、 $(0, 1)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 5)$ 、……と無数（数えきれないほどたくさん）にあります。

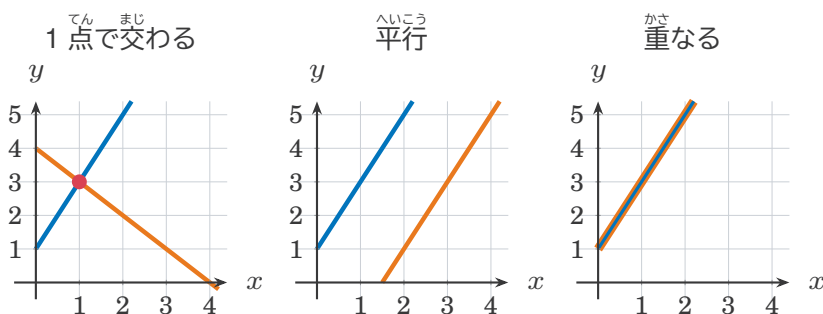


図3 左： $y = 2x + 1$ と $y = -x + 4$ 。中： $y = 2x + 1$ と $y = 2x - 3$ 。右： $y = 2x + 1$ と $4x - 2y = -2$ （同じ直線）。

2本の直線	グラフ	連立方程式の解
傾きがちがう	1点で交わる	1組だけ
傾きが同じで、切片がちがう	平行	ない（ $0 = 10$ のような式が残る）
傾きも切片も同じ	かさなる	無数（ $-2 = -2$ のような式が残る）

表2 2つの式を「 $y = ax + b$ 」の形にすると、解がいくつあるか、解く前にわかる。

5 表計算で交点をさがす

ミナさんが分速 70 m で歩いたらどうなるでしょう。連立方程式は $y = 70x$ と $y = -90x + 1500$ です。2-16 のように、表でためして交点に近づいてみます。表計算（2-18）を使うと楽です。D 列には、2人のあいだの距離（ソーミナ）を計算させます。

	A	B	C	D
1	x (分)	ミナ	ソラ	差
2	8	560	780	220
3	9	630	690	60
4	10	700	600	-100
5	11	770	510	-260

$$B2 = 70 \times A2$$

$$C2 = 1500 - 90 \times A2$$

$$D2 = C2 - B2$$

を入れて、下へコピー

図4 差が正から負に変わる9分と10分のあいだに、交点がある。

差がプラスのうちは、ソラさんがまだ家から遠い所^{いへ}にいて、2人は出会^{にん}っていません。マイナスになったら、すれちがった後^{あと}です。だから、差が0になる交点^{こうてん}は、9分と10分のあいだにあります。A列を9.0、9.1、9.2、……と0.1ずつにすると、9.3分で差が12、9.4分で-4になり、9.3分と9.4分のあいだまでしばれます。

代入法で解くと、

$$70x = -90x + 1500, \quad 160x = 1500, \quad x = 1500 \div 160 = 9.375$$

で、 $y = 70 \times 9.375 = 656.25$ です。9.375分の0.375分を秒にすると、 $0.375 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} = 22.5 \text{ s}$ (2-10)。9分22.5秒です。表計算は答えのありかを見つけるのが得意で、式の計算はぴったりの答えを出すのが得意です。両方を使うと、まちがいにも気づきやすくなります。

6 係数を表にならべる：行列の種

くだもの屋さんの連立方程式をもう一度見ます。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 420 \\ 2x + y = 300 \end{cases}$$

加減法で計算しているあいだ、 x や y の文字は動きません。変わるのは、文字にかかっている数(係数)と右辺の数だけです。そこで、文字を書かずに、数だけ

を表にならべてみます。1行が1つの式です。たとえば1行め「2、3、420」は、 $2x + 3y = 420$ のことです。

x	y	右辺		x	y	右辺		x	y	右辺
2	3	420	→	2	3	420	→	1	0	120
2	1	300		0	1	60		0	1	60

はじめ

2行め - 1行め
を -2 でわる

1行め - 2行め × 3
を 2 でわる

$x = 120$
 $y = 60$

図5 数の表だけで加減法をする。最後の表は「 $1x + 0y = 120$ 」「 $0x + 1y = 60$ 」と読む。

1つめの矢印：2行めから1行めをひくと、「0、-2、-120」（ $2 - 2 = 0$ 、 $1 - 3 = -2$ 、 $300 - 420 = -120$ ）。これを -2 でわって「0、1、60」。 $0x + 1y = 60$ 、つまり $y = 60$ です。

2つめの矢印：1行めから、2行めを3倍した「0、3、180」をひくと「2、0、240」。2でわって「1、0、120」。 $x = 120$ です。

表の行どうしをひいたり、行に数をかけたりするのは、加減法そのものです。文字を書かなくても解けるので、コンピュータはこのやり方で、文字が何千もある連立方程式を解いています。この数の表を、大学の数学では行列とよび、7-1で学びます。

7 回路の2つの電流を、いっしょに求める

2-16の最後に「電気の回路では、わからない電流をいくつも文字にして、方程式を何本もいっしょに解きます（連立方程式、3-6）」と書きました。下の回路には、電源（電源装置）が2つあります。左の電源が流す電流を I_1 、右の電源が流す電流を I_2 （単位はA）とします。

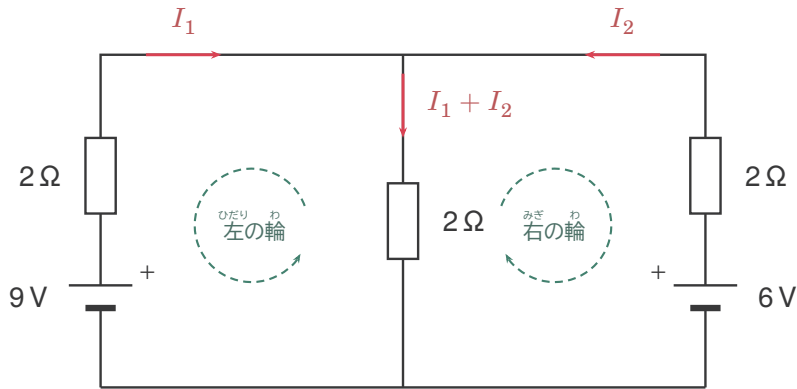


図6 電源の長い線が+。抵抗は四角でかく。赤い矢印が電流の向き。

式を作るために、電流の3つのきまりを使います（中2の理科と2-15）。

きまり1：合わさった電流は、たし算

上の線で、左から来た I_1 と右から来た I_2 が合わさって、まん中の抵抗を下へ流れます。電流は途中でなくならないので、まん中の電流は $I_1 + I_2$ です。

きまり2：抵抗にかかる電圧は、抵抗×電流

オームの法則 $V = RI$ です(2-15)。左の抵抗には $2I_1$ 、まん中には $2(I_1 + I_2)$ 、右には $2I_2$ (V) の電圧がかかります。

きまり3：1つの輪では、電源の電圧＝抵抗の電圧の和

直列の回路で、電源の電圧が、それぞれの抵抗にかかる電圧の和になるのと同じです。電源は電気を高い所へもち上げるポンプ、抵抗は電気が下る坂のようなものです。輪をひとまわりするともとの高さにもどるので、もち上げた高さ（電源の電圧）と、下った高さの合計（抵抗の電圧の和）は等しくなります。

左の輪（左の電源・左の抵抗・まん中の抵抗）と、右の輪（右の電源・右の抵抗・まん中の抵抗）で、きまり3を式にします。

$$\text{左の輪} \quad 9 = 2I_1 + 2(I_1 + I_2) \quad \rightarrow \quad 4I_1 + 2I_2 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{右の輪} \quad 6 = 2I_2 + 2(I_1 + I_2) \quad \rightarrow \quad 2I_1 + 4I_2 = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

加減法で解きます。①を2倍すると $8I_1 + 4I_2 = 18$ 。ここから②をひくと、 $6I_1 = 12$ 、 $I_1 = 2$ 。②に入れて $4 + 4I_2 = 6$ 、 $4I_2 = 2$ 、 $I_2 = 0.5$ 。

答え： $I_1 = 2\text{A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{A}$ 、まん中の抵抗には $2 + 0.5 = 2.5$ で 2.5A 流れます。確かめ：左の輪は $2 \times 2 + 2 \times 2.5 = 4 + 5 = 9$ 、右の輪は $2 \times 0.5 + 2 \times 2.5 = 1 + 5 = 6$ で、どちらも電源の電圧と合います。

2つの電流は、どちらもまん中の抵抗を通るので、片方だけでは決まりません。2つの輪の式を同時にみたす組として、いっしょに決まるのです。

🔍 もっと知りたい ★★★

3つの文字の連立方程式

輪が3つある回路（網目のような回路）では、わからない電流が3つになり、式も3つ必要です。たとえば、

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & \dots ① \\ x - y = 1 & \dots ② \\ y - z = 1 & \dots ③ \end{cases}$$

②から $x = y + 1$ 、③から $z = y - 1$ 。これを①に代入すると、 $(y + 1) + y + (y - 1) = 9$ 、 $3y = 9$ 、 $y = 3$ 。だから $x = 4$ 、 $z = 2$ です。文字を1つずつ消していけば、文字がいくつあっても、同じ考え方で解けます。式の数、わからない数の数と同じだけが必要です。

たいせつ

連立方程式の解 = 2つの式を同時にみたす (x, y) の組 = 2本の直線の交点。

代入法：「 $y = \dots$ 」をもう1つの式にかっこごとに入れる。加減法：係数をそろえて、式どうしをたす・ひく。

平行（傾きが同じ・切片がちがう）なら解なし。重なるなら解は無数。

解は、必ず両方の式に代入して確かめる。

この章で出てきたことば

連立方程式 2つ（いくつか）の式を組にして、同時に成り立たせる文字の値をさがすもの。

交点 2本の線が交わる点。両方の式をみたらす。

代入法 1つの式を「 $y = \dots$ 」にして、もう1つの式に代入し、文字を1つ消す解き方。

加減法 式どうしをたしたりひいたりして、文字を1つ消す解き方。

係数 文字にかかっている数。 $3y$ の3、 $-y$ の-1。

例題でたしかめよう

例題1 グラフで交点を読み、確かめる

$y = x + 1$ と $y = -2x + 7$ のグラフをかき、交点を読みとりましょう。読んだ点で両方の式をみたすか、確かめましょう。

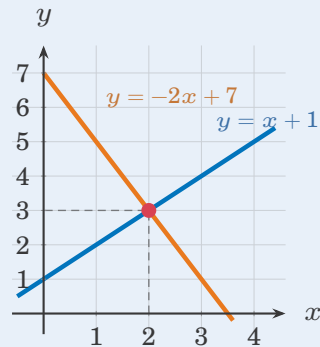
かんがえ方 切片と傾きからグラフをかきます (3-5)。 $y = x + 1$ は (0, 1) から右へ1・上へ1。 $y = -2x + 7$ は (0, 7) から右へ1・下へ2。

しき グラフから、交点は (2, 3)

$$y = x + 1 : 2 + 1 = 3$$

$$y = -2x + 7 : -2 \times 2 + 7 = 3$$

こたえ (2, 3)。両方の式をみたす。



じぶんでとこう1

$y = x + 2$ と $y = -x + 6$ のグラフをノートにかき、交点を読みとりましょう。読んだ点が両方の式をみたすか、確かめましょう。

例題2 代入法で解く

次の連立方程式を、代入法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = -x + 8 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

考え方 (1) は両方とも「 $y =$ 」なので、右辺どうしを $=$ で結びます。(2) は $2y$ の y に $x - 1$ をかつごとに入れます。 $-2 \times (-1) = +2$ に注意します。

しき (1) $3x - 4 = -x + 8$ 、 $3x + x = 8 + 4$ 、 $4x = 12$ 、 $x = 3$ 。

$$y = 3 \times 3 - 4 = 5$$

$$\text{確かめ: } -3 + 8 = 5$$

(2) $5x - 2(x - 1) = 8$ 、 $5x - 2x + 2 = 8$ 、 $3x = 6$ 、 $x = 2$ 。

$$y = 2 - 1 = 1$$

$$\text{確かめ: } 5 \times 2 - 2 \times 1 = 10 - 2 = 8$$

こたえ (1) $x = 3$ 、 $y = 5$ (2) $x = 2$ 、 $y = 1$

例題3 加減法：そのままひく・たす

次の連立方程式を、加減法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

考え方 (1) は x の係数が同じ2なので、ひくと x が消えます。(2) は y の係数が $+1$ と -1 なので、たすと y が消えます。

しき (1) 上-下: $3y - y = 2y$, $13 - 7 = 6$. $2y = 6$, $y = 3$. $2x + 3 = 7$, $2x = 4$, $x = 2$

(2) 上+下: $2x = 8$, $x = 4$. $4 + y = 7$, $y = 3$

確かめ: (1) $2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$. (2) $4 - 3 = 1$

こたえ (1) $x = 2$, $y = 3$ (2) $x = 4$, $y = 3$

じぶんでこう2

次の連立方程式を、代入法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

じぶんでこう3

次の連立方程式を、加減法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

例題 4 加減法：かけてそろえてから

次の連立方程式を、加減法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 7 & \dots ① \\ x - 3y = -7 & \dots ② \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 12 & \dots ① \\ 3x + 2y = 13 & \dots ② \end{cases}$$

考え方 (1) は①を3倍すると、 y の係数が+3と-3になるので、たします。(2) はどちらか1つだけではそろわないので、①を3倍、②を2倍して、 x の係数を6にそろえ、ひきます。右辺にもかけるのを忘れないこと。

しき (1) ① $\times 3$: $6x + 3y = 21$ 。これと②をたすと $7x = 14$ 、 $x = 2$
 ①に入れて $4 + y = 7$ 、 $y = 3$
 (2) ① $\times 3$: $6x + 9y = 36$ 。② $\times 2$: $6x + 4y = 26$
 ひくと $5y = 10$ 、 $y = 2$
 ①に入れて $2x + 6 = 12$ 、 $2x = 6$ 、 $x = 3$
確かめ : (1) ②は $2 - 9 = -7$ 。(2) ②は $9 + 4 = 13$

こたえ (1) $x = 2$ 、 $y = 3$ (2) $x = 3$ 、 $y = 2$

じぶんでとこう 4

次の連立方程式を、加減法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

例題5 買い物の問題

えんぴつ 3本とノート 2冊で 520 円、えんぴつ 1本とノート 3冊で 570 円でした。えんぴつ 1本とノート 1冊の値段を求めましょう。

考え方 わからない数が2つなので、2つの文字にします。えんぴつ 1本を x 円、ノート 1冊を y 円とします。代金 = 値段 $\times$ 数の合計で、2つの式を作ります。

しき $3x + 2y = 520$ ① $x + 3y = 570$ ②

② $\times 3$: $3x + 9y = 1710$ 。これから①をひくと $7y = 1190$ 、 $y = 170$

②に入れて $x + 510 = 570$ 、 $x = 60$

確かめ：①は $180 + 340 = 520$

こたえ えんぴつ 60 円、ノート 170 円

例題6 出会いの問題

家と駅は 1200 m はなれています。Aさんは家から分速 50 m で、Bさんは同じときに駅から分速 70 m で、おたがいに向かって歩きます。出会うのは何分後、家から何 m の所ですか。

考え方 x 分後の家からの位置を y [m] とし、2人の式を作ります。Bさんは 1200 から $70x$ ずつ小さくなります。

しき A: $y = 50x$ B: $y = -70x + 1200$

$50x = -70x + 1200$ 、 $120x = 1200$ 、 $x = 10$ 。 $y = 50 \times 10 = 500$

確かめ： $-700 + 1200 = 500$

こたえ 10 分後、家から 500 m の所

じぶんでところ5

ジュース 2 本とパン 1 個で 380
円、ジュース 1 本とパン 3 個で
540 円でした。ジュース 1 本と
パン 1 個の値段を求めましょう。

じぶんでところ6

家と駅は 1500 m はなれていま
す。C さんは家から分速 40 m
で、D さんは同じときに駅から
分速 60 m で、おたがいに向かっ
て歩きます。出会うのは何分後、
家から何 m の所ですか。

例題7 解はいくつ？

次の連立方程式の解は、1 組・なし・無数のどれですか。1 組なら求めま
しょう。

$$(1) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y = -x + 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

考え方 2つの式を「 $y = ax + b$ 」の形にして、傾きと切片をくらべます。

しき (1) 傾きはどちらも 2、切片は 1 と -3 でちがう、平行

(2) $2y = -2x + 8$ 、 $y = -x + 4$ 。1 つめと同じ直線、重なる

(3) 傾きが 2 と -1 でちがう、1 点で交わる。 $2x + 1 = -x + 4$ 、

$$3x = 3, x = 1, y = 3$$

こたえ (1) なし (2) 無数 (3) 1 組、 $x = 1, y = 3$

例題 8 2点を通る直線を、連立方程式で求める

2点 (1, 5)、(3, 11) を通る直線 $y = ax + b$ の a と b を、連立方程式で求めましょう。

考え方 3-5 では傾きを先に求めました。ここでは、わからない a と b を2つの文字と考えます。直線が点を通るので、その x 、 y を代入すると等式が成り立ちます。

しき (1, 5) を代入： $5 = a \times 1 + b$ 、 $a + b = 5$ ①

(3, 11) を代入： $11 = a \times 3 + b$ 、 $3a + b = 11$ ②

②-①： $2a = 6$ 、 $a = 3$ 。①に入れて $3 + b = 5$ 、 $b = 2$

こたえ $a = 3$ 、 $b = 2$ ($y = 3x + 2$ 。3-5 の例題と同じ答え)

じぶんでとこう 7

次の連立方程式の解は、1組・なし・無数のどれですか。1組なら求めましょう。

$$(1) \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x + 3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$$

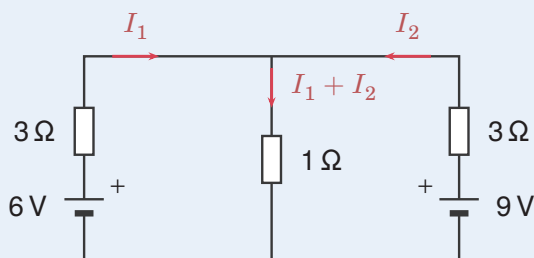
$$(3) \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

じぶんでとこう 8

2点 (2, 7)、(4, 11) を通る直線 $y = ax + b$ の a と b を、連立方程式で求めましょう。

例題 9 回路の電流を求める

右の回路で、電流 I_1 、 I_2 と、まん中の抵抗を流れる電流を求めましょう。



考え方 まん中の電流は $I_1 + I_2$ (きまり 1)。抵抗の電圧は RI (きまり 2)。左の輪と右の輪で「電源の電圧 = 抵抗の電圧の和」(きまり 3)。

しき 左 : $6 = 3I_1 + 1 \times (I_1 + I_2)$ 、 $4I_1 + I_2 = 6$ ①

右 : $9 = 3I_2 + 1 \times (I_1 + I_2)$ 、 $I_1 + 4I_2 = 9$ ②

① $\times 4$: $16I_1 + 4I_2 = 24$ 。これから②をひくと $15I_1 = 15$ 、 $I_1 = 1$

①に入れて $4 + I_2 = 6$ 、 $I_2 = 2$ 。まん中は $1 + 2 = 3$

確かめ : 左 $3 \times 1 + 1 \times 3 = 6$ 、右 $3 \times 2 + 1 \times 3 = 9$

こたえ $I_1 = 1\text{A}$ 、 $I_2 = 2\text{A}$ 、まん中は 3A

じぶんでとこう 9

例題 9 の回路で、左の電源を 9V 、右の電源を 6V にかえました (抵抗は左 3Ω 、まん中 1Ω 、右 3Ω のまま)。 I_1 、 I_2 と、まん中の電流を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

だいにゅう
代入するとき、かっこをつけない

✕ $3x + 2y = 12$ に $y = 2x - 1$ を入れて、 $3x + 2 \times 2x - 1 = 12$

○ $3x + 2(2x - 1) = 12 \rightarrow 3x + 4x - 2 = 12$

✕では、2を $2x$ にしかかけていません。 -1 にもかける必要があります。
 y の箱に、 $2x - 1$ をまるごと入れよう。

⚠ まちがえやすいところ

ひくときの符号

✕ $2x + 3y = 13$ から $2x - y = 1$ をひいて、 $2y = 12$

○ $3y - (-y) = 3y + y = 4y$ 。 $4y = 12 \rightarrow y = 3$

マイナスの項をひくと、プラスになります(2-2)。心配なら、下の式の符号を全部反対にしてから、たすとよい。

⚠ まちがえやすいところ

うへん
右辺にかけ忘れる

✕ $x + 2y = 8$ を2倍して、 $2x + 4y = 8$

○ $2x + 4y = 16$ (右辺の8にも2をかける)

てん
たびんの片方の皿だけ2倍にすると、つり合いがくずれます。両辺の全部の項にかけます。

△ まちがえやすいところ

片方だけ求めて終わる

✕ $y = 3$ が出たので、答えは $y = 3$

○ x も求めて「 $x = 2, y = 3$ 」

連立方程式の解は、 x と y の組です。交点の場所は、2つの数がそろわな
いと決まりません。

△ まちがえやすいところ

$0 = 10$ になったら「解は0」?

✕ $2x = 2x + 10$ を解くと $0 = 10$ 。だから $x = 0$

○ どんな x でも成り立たないので、解なし

$x = 0$ を入れると $0 = 10$ で、成り立ちません。傾きが同じ2本の平行な
線なので、交点がないのです。

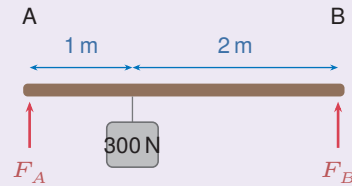
🔍 コラム 「方程式」ということばは、連立方程式から

今から2000年ほど前の中国の数学の本『九章算術』には、「方程」とい
う章があります。そこでは、何種類かの穀物の量と合計を、算木という細
い棒で表のようにならべ、列どうしをひいたり何倍かしたりして、連立方
程式を解いていました。⑥の「係数を表にならべる」方法と、ほとんど同
じです。「方程式」ということばは、この「方程」から来ています。

ぶつり とうがく つか
物理・工学ではこう使う

2人で荷物をかつぐ：力のつり合い

長さ3mの棒の、Aさんから1mの所に、
重さ300N（質量約30kgの物）にはたら
く重力。2-15)の荷物をつるし、Aさん
とBさんが両はしでかつぎます。2人が
棒を上へおす力を F_A 、 F_B (N) としま



す。棒は動かないので、

① 上と下の力がつり合う： $F_A + F_B = 300$

② 荷物の所を支点と見たてこのつり合い（小6の理科・2-15）：

$$F_A \times 1 = F_B \times 2$$

②から $F_A = 2F_B$ 。①に代入して $3F_B = 300$ 、 $F_B = 100$ 、 $F_A = 200$ 。

荷物に近いAさんが、Bさんの2倍の200Nを支えます。橋をささえる
両はしの柱にかかる力も、建築ではこの連立方程式で計算します。

スマートフォンの位置を決める

スマートフォンは、空の4つ以上の人工衛星から届く電波をもとに、自分
の位置を計算しています（GPS）。わからない数は、東西・南北・高さの3
つと、スマートフォンの時計のずれの、合わせて4つ。だから、4つの衛
星から4つの式を作り、連立方程式として同時に解いています。わからな
い数と同じ数だけ、式が必要なのです。

コラム 工場で液を混ぜる

化学工場では、こさのちがう液を混ぜて、ちょうどよいこさの液を作ります。10%の食塩水と4%の食塩水を混ぜて、6%の食塩水を300g作るとします。10%のほうを x [g]、4%のほうを y [g] とすると、全体の重さで $x + y = 300$ 、とけている食塩の重さで $0.1x + 0.04y = 300 \times 0.06 = 18$ 。2つめを100倍すると $10x + 4y = 1800$ 。1つめを4倍した $4x + 4y = 1200$ をひいて、 $6x = 600$ 、 $x = 100$ 、 $y = 200$ です。



しょうまつもんだい 章末問題

3-6 のまとめ

基本



1 $y = x + 3$ と $y = -x + 5$ のグラフをノートにかき、交点を読みとりましよう。両方の式をみたすかも確かめましよう。

2 代入法で解きましよう。(1)
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

3 加減法で解きましよう。(1)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 4x + y = 14 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

4 加減法で解きましよう。(1)
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

5 解は1組・なし・無数のどれですか。

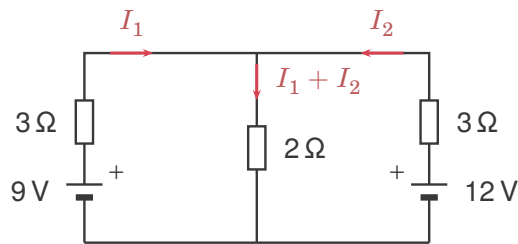
(1)
$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y = x - 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

6 博物館の入館料は、大人2人と子ども3人で2600円、大人1人と子ども2人で1500円でした。大人1人と子ども1人の入館料を求めましょう。

7 2000mはなれた2つの地点から、Eさんは分速60m、Fさんは分速100mで、同じときにおたがいに向かって歩きます。出会うのは何分後、Eさんの出発した地点から何mの所ですか。

チャレンジ ★★★

8 右の回路で、電流 I_1 、 I_2 と、まん中の抵抗を流れる電流を求めましょう。



9 2点 $(-1, 1)$ 、 $(2, 7)$ を通る直線 $y = ax + b$ の a と b を、連立方程式で求めましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 交点が、2つの式を同時にみたす組だとわかる。 → 164 ページ
- ☐ 代入法と加減法で解き、両方の式で確かめられる。 → 166 ページ
- ☐ 解がない・無数のわけを説明し、出会い・買い物・回路の問題を解ける。 → 171 ページ



ミナ

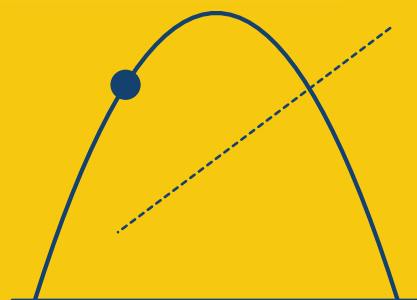
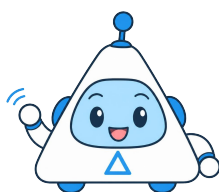
2つのわからない数は、2つの式でいっしょに決まるんだね。次の部分では、曲がったグラフを調べるよ。

ま 曲がったグラフ

? おし返^{かえ}す力^{ちから}は、なぜだんだん強^{つよ}くなる？

? 投げ^なげたボールは、なぜこの形^{かたち}に飛^とぶ？

? ボールが同じ高^{おな たか}さを2回^{かいとお}通^とるのは、いつ？



まっすぐでないグラフにも、きまりがあるよ。式^{しき}のかっこをは
ずしたり、形^{かたち}を変えたりすると、ボールのいちばん高^{たか}い所^{ところ}や、
届^{とど}く時刻^{じこく}が計算^{けいさん}で見^みつかるよ。

この部^ぶで学^{まな}ぶこと

3-7 反比例^{はん び れい}のグラフ

△ ★★★★★ P.192

空気^{くう き}をおしちぢめるほど、おし返^{かえ}す力^{ちから}は強^{つよ}くなる

3-8 かっこをは^{てんかい}ずす：展^{へい}開^{ほうかん}と平^{せい}方^{ほう}完^{かん}成^{せい}

△ ★★☆☆★ P.218

式^{しき}の形^{かたち}をえ^かえると、最^{さい}高^{こう}点^{てん}が見^みえてくる

3-9 放物線^{ほうぶつせん}と $y = ax^2$

△ ★★☆☆★ P.256

な^な投^なげ^なたボ^なール^なは、な^なぜ^なこ^なの^な形^なに飛^{かたち}ぶ^と？

3-10 ボールはいつそ^{たか}の^{とど}高^{たか}さに届^{とど}く？：2 次^じ方^{ほう}程^{てい}式^{しき}

△ ★★☆☆★ P.290

答^{こた}え^えが2 つ出^でる^のは、上^{のぼ}り^くと下^{くだ}り^{がある}から

この部^ぶを^よ読むと…

反比例^{はん び れい}と放物線^{ほうぶつせん}のグラフを^よ読み、2 次^じ方^{ほう}程^{てい}式^{しき}を^と解^とけるようになります。式^{しき}の形^{かたち}を^かえ^{ちから}る力^{てん}（展^{かい}開^{こう}・恒^{こう}等^{とう}式^{しき}・因^{いん}数^{すう}分^{ぶん}解^{かい}）は、微^び分^{ぶん}・積^{せき}分^{ぶん}と制^{せい}御^{ぎよ}の計^{けい}算^{さん}の土^ど台^{だい}になります。

第2部 曲がったグラフ



3-7

反比例のグラフ

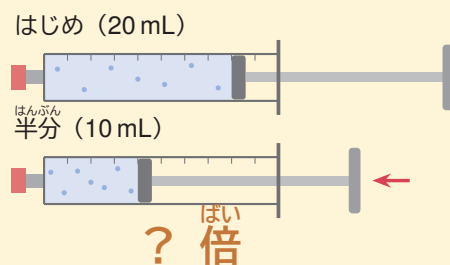
道しるべ この章の前に 2-15 3-2 3-4 3-5 この章の先に 3-11 5-4 5-14

この章でできるようになること

- ★★ $y = \frac{a}{x}$ の表を作って点を取り、なめらかな曲線（双曲線）がかけ。軸にくっつかないわけを説明できる。
- ★★ x や a が負のときもふくめてグラフの形を読み、変化の割合が一定でないことを確かめられる。
- ★★ xy が一定の関係（ pV が一定、てこ、速さと時間）を見つけ、式を作って使える。

? はてな？

注射器に空気を入れ、先をゴムのふたでふさいで、ピストンをおしこみます。おしこむほど、手をおし返す力は強くなります。空気を半分までおしちぢめると、おし返す強さは何倍になるかな？ もっとおしこんで、空気を0にすることはできるかな？ この関係をグラフにかくと、どんな形になるでしょう。



2-15 では、 xy が一定になる 2 つの量を反比例とよび、そのグラフが「軸に近づくけれど、くっつかない曲線」になることを少しだけ見ました。この章では、その曲線を自分の手でかいて、なぜそういう形になるのかを、1 つずつ確かめます。

△ やってみよう 注射器の空気をおしちぢめよう

① 注射器に空気を 20 mL 入れ、先を圧力計（空気がおす強さをはかる計器）につなぐ。

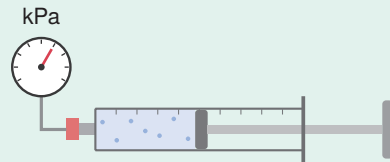
② ピストンをゆっくりおして、体積を 16、12、10、8、5 mL にし、そのたびに圧力計を読む。

③ 体積と圧力をかけ算してみよう。

学校ではかった結果です（圧力の単位 kPa は次のページで説明します）。

体積 V (mL)	20	16	12	10	8	5
圧力 p (kPa)	101	125	168	201	249	402

体積が半分の 10 mL になると、圧力はどうなったかな？



圧力と kPa

空気まわりをおす強さを、 1 m^2 あたりの力で表したものを**圧力**といいます（中 1 の理科）。単位は Pa（パスカル）で、 1 m^2 あたり 1 N の力が 1 Pa です。1000 Pa を 1 kPa （キロパスカル）と書きます（2-10 の「k は 1000」）。

わたしたちのまわりの空気の圧力（大気圧）は、約 101 kPa です。天気予報の「 1013 hPa （ヘクトパスカル）」と同じ大きさです（h は 100 なので、 $1013 \times 100 = 101300\text{ Pa}$ ）。だから、ピストンをおす前の注射器の中も、約 101 kPa でした。

やってみようの表で、体積が20から10へ半分になると、圧力は101から201へ、約2倍になりました。20から5へ $\frac{1}{4}$ になると、101から402へ約4倍です。2-15で学んだ反比例に似ています。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

2-15 反比例 $y = \frac{a}{x}$: x が2倍、3倍になると、 y は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍。 xy がいつも同じ数 a 。

1-14 0でわることはできない。 $12 \div 0$ は計算できない。

3-2 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y 。マイナスなら左へ・下へ。座標平面は4つの区画に分かれる。

3-5 傾き (変化の割合) = たての変化量 $\div$ 横の変化量。1次関数 $y = ax + b$ では、いつも a 。

すうがく 数学の道具

1 反比例の点を、自分でかいてみよう

まず、数のかんたんな $y = \frac{12}{x}$ で考えます。「面積が 12cm^2 の長方形の、横 x [cm] とたて y [cm]」と同じ関係です (たて = 面積 $\div$ 横)。12は、1、2、3、4、6、12でわりきれるので、表がきれいな数になります。

x	1	2	3	4	6	12
$y = \frac{12}{x}$	12	6	4	3	2	1
$x \times y$	12	12	12	12	12	12

表1 x に1つずつ数を入れて、 $12 \div x$ を計算した。

1 表の組を点にする

$x = 2, y = 6$ の組は、点 (2, 6) です。原点から右へ 2、そこから上へ 6 進んだ所にかきます (3-2)。ほかの 5 つの組も同じようにかくと、図 1 の 6 つの黒い点になります。

2 点と点のあいだは、どうなっている？

点を定規でまっすぐつなぐ (おれ線にする) と、よいでしょうか。点のあいだの x でも、ちゃんと計算してみます。 $x = 1.5$ なら $12 \div 1.5 = 8$ 、 $x = 5$ なら $12 \div 5 = 2.4$ です。

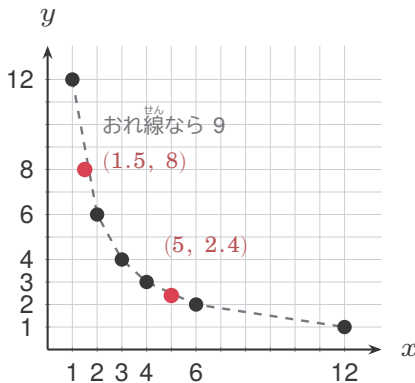


図 1 おれ線 (点線) と、本当の点 (赤)

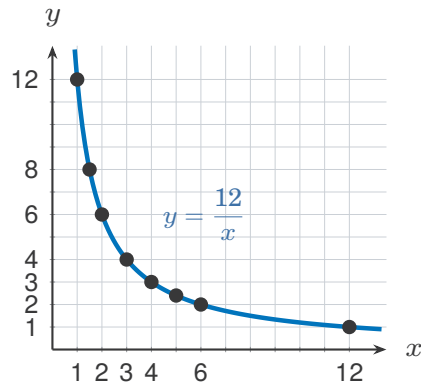


図 2 点を、なめらかな曲線でつなぐ

おれ線なら、 $x = 1.5$ では 12 と 6 のまん中の 9 になるはずですが、でも本当は 8 で、おれ線より下にあります。 $x = 5$ でも、おれ線の 2.5 より下の 2.4 です。点をふやすほど、点はなめらかにまがった線の上にならびます (図 2)。だから反比例のグラフは、おれ線ではなく、なめらかな曲線でつなぎます (3-4 の「なめらかな線を引く」と同じ)。

3 直線ではないことを、傾きで確かめる

もし直線なら、どの 2 点を選んでも傾きは同じです (3-5)。点 (1, 12) から (2, 6) までの傾きと、(2, 6) から (4, 3) までの傾きをくらべます。

$$\frac{6 - 12}{2 - 1} = \frac{-6}{1} = -6, \quad \frac{3 - 6}{4 - 2} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

傾きがちがうので、3つの点は1本の直線にのっていません。比例のグラフ(2-15)とちがいで、反比例のグラフは直線ではありません。

2 軸に近づくけれど、くっつかない

グラフの右のはしと上のはしは、どうなっているでしょう。 x をうんと大きくしたり、うんと小さくしたりして計算します。

x	0.01	0.1	0.5	1	...	12	120	1200
$y = \frac{12}{x}$	1200	120	24	12	...	1	0.1	0.01

表2 x を小さくすると y はどんどん大きく、 x を大きくすると y はどんどん0に近づく。

x を大きくするほど、 y は0に近づき、グラフは横の軸(x 軸)にどんどん近づきます。 x を0に近づけるほど、 y はどんどん大きくなり、グラフはたての軸(y 軸)に近づきます。では、いつか軸にくっつくのでしょうか。2通りの方法で考えます。

考え方A：かけ算で考える

グラフの上の点は、どれも $x \times y = 12$ をみちます。もしグラフが x 軸にくっついたら、その点では $y = 0$ です。すると $x \times 0 = 0$ になり、12になりません。どんな数に0をかけても0だからです。だから、 y がちょうど0になる点は、グラフの上にはありません。 y 軸も同じで、 $x = 0$ なら $0 \times y = 0$ です。そもそも、 $x = 0$ のときの y は $12 \div 0$ で、計算できません(1-14)。

考え方 B：長方形の面積で考える

グラフの上の点 (x, y) と原点を、向かい合う角にした長方形をかきます。横が x 、たてが y なので、面積は $xy = 12$ です。

右の図の3つの長方形は、どれも面積が12です。点が右へ行くほど、長方形は横に長く、うすくなります。でも、面積を12のままにするには、高さを0にすることはできません。高さが0の長方形は、面積が0だからです。

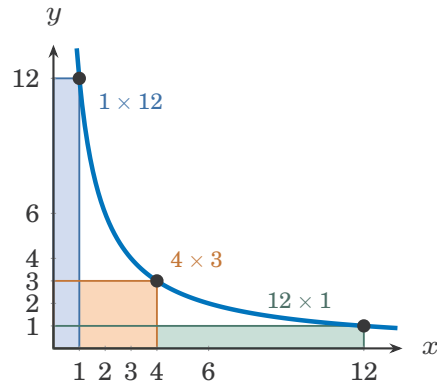


図3 面積はどれも12

2通りのどちらで考えても、グラフは x 軸にも y 軸にも、近づくけれど、くっつかないことがわかりました。原点 $(0, 0)$ も通りません。

2-15では、「曲線は、横の軸に近づくけれど、くっつきません。比例とちがいの、直線ではなく、原点も通りません（くわしくは3-7）」と書きました。そのわけが、これでそろいました。

- 直線ではない……傾きが場所によってちがうから（道具1の③）。
- 軸にくっつかない…… $xy = 12$ なので、 x も y も0になれないから（考え方A・B）。
- 原点を通らない…… $x = 0$ のときの y がないから。

せいかくに言うと

「近づくけれど、くっつかない」とは

y を0.001より小さくしたければ x を12000より大きく、0.000001より小さくしたければ x を12000000より大きくすればよい、というように、どんなに小さい数を決めても、 y をそれより小さくできます。それでも y は0にはなりません。グラフがこのような近づいていく直線を、高校の数学では漸近線とよびます。 $y = \frac{12}{x}$ では、 x 軸と y 軸が漸近線です。

3 x が負のがわ：2本の枝

面積や体積はマイナスになりませんが、式 $y = \frac{12}{x}$ には、マイナスの数も入れられます。 $x = -2$ なら、 $y = 12 \div (-2) = -6$ です（プラス÷マイナスはマイナス、2-2）。

x	-12	-6	-4	-3	-2	-1
$y = \frac{12}{x}$	-1	-2	-3	-4	-6	-12
$x \times y$	12	12	12	12	12	12

表3 マイナス×マイナスはプラスなので、 $x \times y$ はやはり 12。

これらの点は、 x も y もマイナスなので、左下の区画 (3-2) に入ります。なめらかにつなぐと、右上の曲線とそっくりな形の曲線が、もう 1 本できます。

点 (2, 6) と (-2, -6) をくらべてみましょう。どちらも原点から同じ距離にあり、原点をはさんでちょうど反対がわです (図の点線)。どの点でも同じなので、2本の曲線は、原点を中心に半回転させると重なります。

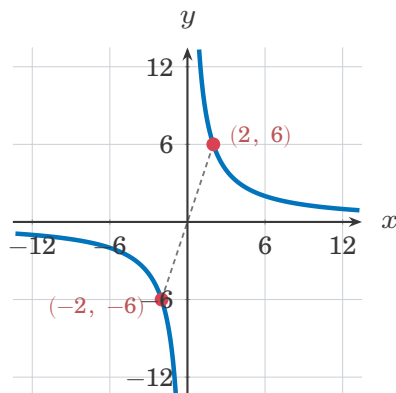


図4 $y = \frac{12}{x}$ の2本の枝

反比例のグラフは、このように離れた2本の曲線でできています。2本は $x = 0$ のところでつながりません。 $x = 0$ のときの y がないからです。この曲線を双曲線といい、1本1本を双曲線の枝といいます。「双」は「2つで1組」という意味です。

体積や速さのように、マイナスにならない量の反比例では、 $x > 0$ の範囲 (変域、3-1) だけを考えるので、右上の枝だけを使います。

4 a を変えると、グラフはどう変わる？

a が大きいと、原点から遠くなる

$y = \frac{4}{x}$ 、 $y = \frac{12}{x}$ 、 $y = \frac{24}{x}$ をくらべます。 $x = 2$ のときの y は、それぞれ 2、6、12 です。 a が大きいほど、同じ x での y が大きく、曲線は原点から遠い所を通ります (図 5)。面積で考えると、面積 a の長方形の角をつないだ線なので、面積が大きいほど外がわになるのです。

a が負のとき

$y = -\frac{12}{x}$ の表を作ります。 $a = -12$ です。

x	-12	-4	-2	-1	1	2	4	12
$y = -\frac{12}{x}$	1	3	6	12	-12	-6	-3	-1

表 4 $y = \frac{12}{x}$ の y の符号が、すべて反対になっている。

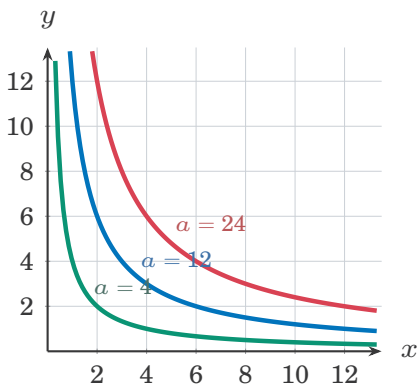


図 5 a が大きいほど外がわ

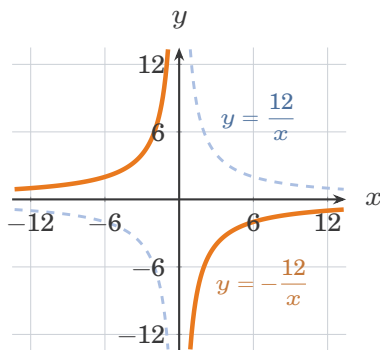


図 6 a が負なら右下と左上

$y = -\frac{12}{x}$ のグラフ (図 6 のオレンジ) は、 $y = \frac{12}{x}$ のグラフ (点線) を、 x 軸で折り返した形です。同じ x で、 y の符号だけが反対になるからです。枝は右下と左上の区画に入ります。 $xy = -12$ で、 x と y の符号がいつもちがうからです。

ここで気をつけたいことがあります。 $x > 0$ のがわでは、 x が 1、2、4 とふえると、 y は -12 、 -6 、 -3 とふえています。グラフは右上がりです。「反比例は、ふえるとへる」とはかぎりません。2-15 の「 x が 2 倍になると y は $\frac{1}{2}$ 倍」は、 $a < 0$ でもそのまま成り立ちます (-12 の $\frac{1}{2}$ 倍は -6)。 $\frac{1}{2}$ 倍になると 0 に近づくので、マイナスの数は大きくなるのです。

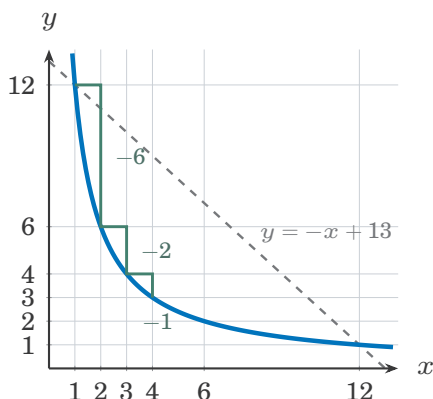
5 変化の割合は一定ではない

3-5 では、1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は、どこでもいつも a でした。反比例ではどうでしょう。 $y = \frac{12}{x}$ で、 x の区間ごとに、変化の割合 = (y の変化量) $\div$ (x の変化量) を計算します。

x の区間	x の変化量	y の変化量	変化の割合
1 $\rightarrow$ 2	1	$6 - 12 = -6$	$-6 \div 1 = -6$
2 $\rightarrow$ 3	1	$4 - 6 = -2$	$-2 \div 1 = -2$
3 $\rightarrow$ 4	1	$3 - 4 = -1$	$-1 \div 1 = -1$
4 $\rightarrow$ 6	2	$2 - 3 = -1$	$-1 \div 2 = -0.5$
6 $\rightarrow$ 12	6	$1 - 2 = -1$	$-1 \div 6 = -\frac{1}{6}$

表5 $y = \frac{12}{x}$ の変化の割合。右へ行くほど 0 に近づく。

変化の割合は区間ごとにちがいが、一定ではありません。 x を同じ 1 ずつふやしても、はじめは y が 6 もへり、次は 2、その次は 1 しかへりません。右の図の階段(緑)の段の高さが、だんだん低くなっています。



同じ2点(1, 12)と(12, 1)を通る直線 $y = -x + 13$ (点線) は、どこでも変化の割合が -1 です。反比例のグラフは、はじめは急な下り坂で、右へ行くほどゆるやかになる坂なのです。

2-15の「 x が2倍になると、 y は $\frac{1}{2}$ 倍」は、何倍になるか(わり算の見方)のきまりでした。3-5の変化の割合は、何だけふえるか(ひき算の見方)です。反比例は、わり算の見方ではきれいなきまりがあるのに、ひき算の見方では一定になりません。

🔍 もっと知りたい ★★★

変化の割合を、1つの式で

表の変化の割合を、区間の両はしの x で見てみます。1 → 2 では $-6 = -\frac{12}{1 \times 2}$ 、2 → 3 では $-2 = -\frac{12}{2 \times 3}$ 、4 → 6 では $-0.5 = -\frac{12}{4 \times 6}$ です。どれも「 $-12 \div$ (両はしの x の積)」になっています。 x が p から q まで変わるとき、

$$\frac{\frac{12}{q} - \frac{12}{p}}{q - p} = -\frac{12}{pq}$$

となるのです(分子を通分すると $\frac{12p - 12q}{pq} = -\frac{12(q - p)}{pq}$ で、これを $q - p$ でわる)。 p と q がとても近いと、 pq は x^2 にほぼ等しくなり、変化の割合は $-\frac{12}{x^2}$ に近づきます。これは第5巻の5-4で、微分を使って確かめる形です。

6 xy が一定を見つける： pV が一定

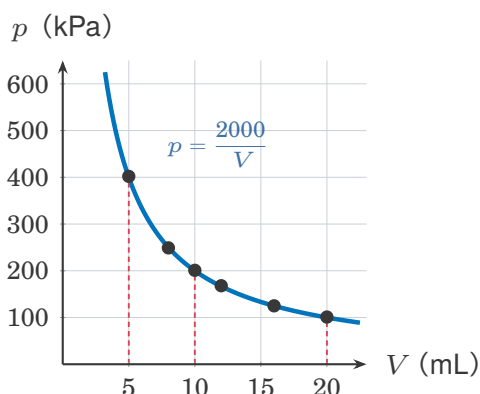
やってみようの表にもどしましょう。2-15のように、体積 V と圧力 p をかけ算します。

たいせき 体積 V (mL)	20	16	12	10	8	5
あつりょく 圧力 p (kPa)	101	125	168	201	249	402
$p \times V$	2020	2000	2016	2010	1992	2010

表6 $p \times V$ は、どれも2000に近い。

$p \times V$ は、どれも2000の近くです。少しずつちがうのは、はかるときのずれです(2-6)。ならすと $pV = 2000$ と考えられます。両辺を V でわると(2-14)、 $p = \frac{2000}{V}$ です。

p は V に反比例します。 $a = 2000$ の反比例です。体積はマイナスにならないので、 $V > 0$ の枝だけをかきます。はかった点(黒)は、曲線 $p = \frac{2000}{V}$ のすぐ近くになりました。

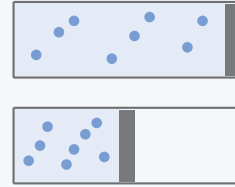


【? はてな?】の答え：体積を半分の10 mLにすると、 $p = 2000 \div 10 = 200$ で、おし返す強さ(圧力)は約2倍です。 $\frac{1}{4}$ の5 mLなら約4倍、 $\frac{1}{10}$ の2 mLなら $2000 \div 2 = 1000$ で約10倍になります(グラフの赤い点線)。空気を0にすることはできません。体積を0に近づけるほど圧力はどこまでも大きくなり、グラフは p 軸にくっつかないからです。グラフの形は、まっすぐな線ではなく双曲線です。

温度が変わらなければ、気体の圧力と体積の積 pV は一定です。このきをまりをボイルの法則といいます。やってみようで「ゆっくりおす」としたのは、速くおすと空気の温度が上がってしまうからです。

コラム なぜ、おしちぢめると強くおし返すの？

空気は、とても小さなつぶ（分子）がたくさん飛び回ってできています。分子がピストンにぶつかるときの力を全部あわせたものが、空気がおす力です。体積を半分にすると、同じ数の分子が半分の部屋につめこまれ、1秒あたりにピストンにぶつかる回数が2倍になります。だから圧力も2倍になるのです。



反比例かどうかを、データから見分ける手順

- 1 表のたての組ごとに、 $x \times y$ を計算する。
- 2 どれも同じ（はかった値なら、ほぼ同じ）なら反比例。その値が a 。
- 3 $y = \frac{a}{x}$ と書き、ほしい x や y を計算する。

	比例 $y = ax$	反比例 $y = \frac{a}{x}$
一定になるもの	$y \div x = a$	$x \times y = a$
x を2倍にすると	y も2倍	y は $\frac{1}{2}$ 倍
グラフ	原点を通る直線	原点を通らない双曲線
軸との関係	原点で交わる	近づくが、くっつかない
変化の割合	いつも a	区間ごとにちがう

表7 比例と反比例のくらべ

△ やってみよう 表計算で $x = 0$ を入れてみよう

① A 列に x の値を入れ、B2 に $=12/A2$ と入れて、下へコピーする (2-18)。

② $x = 0$ の行は、どうなるかな？

③ A 列と B 列で散布図をかこう。

	A	B
1	x	y
2	-4	-3
3	-1	-12
4	0	#DIV/0!
5	1	12
6	4	3

#DIV/0! は「0 でわった」(division by 0) というエラーの印です。表計算も、 $x = 0$ のときの y は計算できません。だから散布図には、 $x = 0$ の点がかかれず、2 本の枝は離れたままです。

たいせつ

反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフは双曲線。直線ではなく、原点も通らない。

x 軸・ y 軸に近づくが、くっつかない ($xy = a$ なので、 x も y も 0 にならない)。

$a > 0$ なら右上と左下、 $a < 0$ なら右下と左上に 2 本の枝。

変化の割合は一定ではない。

📖 この章で出てきたことば

双曲線・枝 反比例のグラフの形。離れた 2 本の曲線 (枝) でできている。

圧力 (Pa) 1 m^2 あたりにおす力。1 kPa = 1000 Pa。まわりの空気は約 101 kPa。

ボイルの法則 温度が変わらないとき、気体の圧力と体積の積 pV は一定。

漸近線 グラフが近づくけれどくっつかない直線 (高校のことば)。

例題でたしかめよう

例題1 反比例の式を作って使う

y は x に反比例し、 $x = 3$ のとき $y = 8$ です。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x = 6$ 、 $x = -4$ のときの y を求めましょう。(3) $y = 2$ になる x を求めましょう。

考え方 反比例なので $y = \frac{a}{x}$ の形で、 $xy = a$ です。わかっている1組の x と y をかけると、 a が求まります。

しき (1) $a = xy = 3 \times 8 = 24$ だから $y = \frac{24}{x}$

(2) $x = 6$ を代入して $y = \frac{24}{6} = 4$

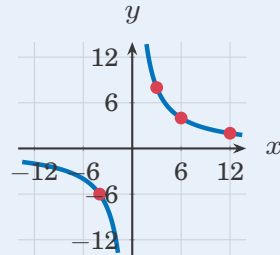
$x = -4$ を代入して $y = \frac{24}{-4} = -6$ (+÷-は-)

(3) $xy = 24$ に $y = 2$ を入れて $2x = 24$ 。両辺を2でわって $x = 12$

こたえ (1) $y = \frac{24}{x}$ (2) $x = 6$ のとき 4、 $x = -4$ のとき -6 (3) $x = 12$

グラフで確かめる

求めた点 (3, 8)、(6, 4)、(12, 2)、(-4, -6) をかきこむと、どれも $y = \frac{24}{x}$ の双曲線の上にあります。どの点も、 $x \times y$ が 24 だからです。



じぶんでこうし

y は x に反比例し、 $x = 4$ のとき $y = -3$ です。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x = 2$ 、 $x = -6$ のときの y を求めましょう。(3) $y = 6$ になる x を求めましょう。

例題2 表を作って、グラフをかく

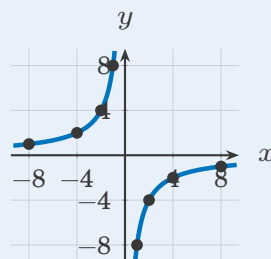
$y = -\frac{8}{x}$ について、 $x = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$ のときの y の表を作り、グラフをかきましょう。グラフはどの区画を通りますか。

考え方 x を1つずつ代入します。マイナスの数はかっこをつけて代入します(2-13)。点は直線でつながず、なめらかな曲線でつながります。 $x = 0$ の所ではつながりません。

しき $x = -8$ なら $y = -\frac{8}{(-8)} = 1$ 。 $x = 1$ なら $y = -\frac{8}{1} = -8$ 。ほかも同じように計算する。

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1

こたえ 表は左のとおり。グラフは右の図。 $a = -8$ が負なので、左上と右下の区画を通る双曲線。

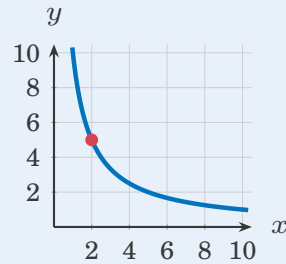


じぶんでこう2

$y = \frac{6}{x}$ について、 $x = -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$ のときの y の表を作り、グラフをノートにかきましょう。グラフはどの区画を通りますか。

例題 3 グラフから式を読み、点がのっているか調べる

右のグラフは反比例のグラフで、点 $(2, 5)$ を通ります。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 点 $(4, 2.5)$ と点 $(-5, 2)$ は、このグラフの上にありますか。



考え方 グラフの上の点は、どれも $xy = a$ をみます。(2) は、 $x \times y$ を計算して a と同じになるかを調べます。

しき (1) $a = 2 \times 5 = 10$ だから $y = \frac{10}{x}$

(2) $4 \times 2.5 = 10$ 10 と同じなので、のっている

$(-5) \times 2 = -10$ 10 とちがうので、のっていない

こたえ (1) $y = \frac{10}{x}$ (2) $(4, 2.5)$ はのっている。 $(-5, 2)$ はのっていない

じぶんどこう 3

反比例のグラフが点 $(3, -4)$ を通ります。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 点 $(-6, 2)$ と点 $(2, 6)$ は、このグラフの上にありますか。

例題4 反比例の変化の割合

$y = \frac{12}{x}$ で、 x が1から3まで変わるときと、3から6まで変わるとき、
変化の割合をそれぞれ求めましょう。

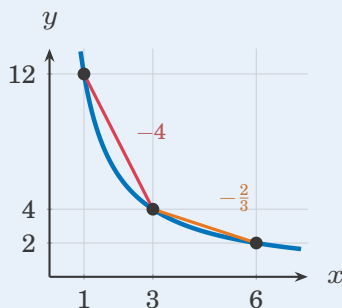
考え方 変化の割合 = y の変化量 ÷ x の変化量 (3-5)。変化量は「あとーまえ」で計算します。はじめに、区間の両はしの y を求めます。

しき $x = 1$ で $y = 12$ 、 $x = 3$ で $y = 4$ 、 $x = 6$ で $y = 2$
 $1 \rightarrow 3 : \frac{4 - 12}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4$ $3 \rightarrow 6 : \frac{2 - 4}{6 - 3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

こたえ $1 \rightarrow 3$ は -4 、 $3 \rightarrow 6$ は $-\frac{2}{3}$ (区間によってちがう)

グラフで見る

変化の割合は、グラフの2点を結んだ直線の傾きです (3-5)。1 → 3 の線 (赤) は急で、3 → 6 の線 (オレンジ) はゆるやかです。双曲線が、右へ行くほどゆるやかになるからです。



じぶんでこう4

$y = \frac{24}{x}$ で、 x が2から4まで変わるときと、4から8まで変わるとき、
変化の割合をそれぞれ求めましょう。

例題 5 ボイルの法則：注射器の空気

注射器に 30 mL の空気を入れて先をふさぐと、圧力は 100 kPa でした。温度は変わりません。(1) 体積を 20 mL にすると、圧力は何 kPa ですか。(2) 圧力を 300 kPa にするには、体積を何 mL にすればよいですか。(3) 体積を $\frac{1}{3}$ にすると、圧力は何倍ですか。

考え方 ボイルの法則で pV が一定です。はじめの値から pV を求め、 $p = \frac{pV}{V}$ 、 $V = \frac{pV}{p}$ で計算します。

しき $pV = 100 \times 30 = 3000$

$$(1) p = \frac{3000}{20} = 150 \quad (2) V = \frac{3000}{300} = 10$$

$$(3) \frac{1}{3} \text{ の } 10 \text{ mL では (2) より } 300 \text{ kPa。} 300 \div 100 = 3$$

こたえ (1) 150 kPa (2) 10 mL (3) 3 倍

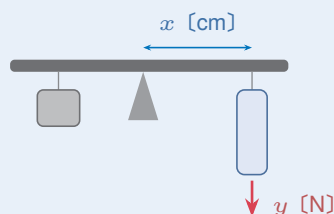
じぶんでこう 5

自転車の空気入れのつちに、100 kPa の空気が 40 mL 入っています。先をふさいでおしこみます（温度は変わりません）。(1) 25 mL にすると圧力は何 kPa ですか。(2) 400 kPa にするには何 mL にすればよいですか。(3) 体積を $\frac{1}{4}$ にすると、圧力は何倍ですか。(4) 圧力をはじめの 5 倍の 500 kPa にするには、体積をはじめの何分の 1 にすればよいですか。

例題 6 表から反比例を見つける：てこ

てこの左がわにおもりをつるし、右がわをばねばかりで下に引いて、つり合わせます。支点からばねばかりまでの距離 x [cm] と、ばねばかりの力 y [N] は下の表のようになりました。 y を x の式で表し、 $x = 25$ のときの y を求めましょう。

x (cm)	10	20	30	40
y (N)	6	3	2	1.5



考え方 「手順」の①～③のとおりにします。まず、たての組ごとに $x \times y$ を計算します。

しき $10 \times 6 = 60$ 、 $20 \times 3 = 60$ 、 $30 \times 2 = 60$ 、 $40 \times 1.5 = 60$

どれも 60 なので反比例で、 $a = 60$

$$y = \frac{60}{x} \text{ に } x = 25 \text{ を代入して } y = \frac{60}{25} = 2.4$$

こたえ $y = \frac{60}{x}$ 、 $x = 25$ のとき 2.4 N

じぶんでとこう 6

6V の電源にいろいろな抵抗をつなぎ、抵抗 x [Ω] と電流 y [A] をはかりました。 y を x の式で表し、12 Ω の抵抗をつないだときの電流を求めましょう。

x (Ω)	2	3	4	6
y (A)	3	2	1.5	1

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

グラフを軸にくっつける

✕ $y = \frac{12}{x}$ のグラフを、右のはしで x 軸につなげてかく

○ x 軸に近づけるが、くっつけない

くっついた所では $y = 0$ ですが、 $x \times 0 = 0$ は 12 になりません。グラフの上の点は、どれも $xy = 12$ です。

⚠ まちがえやすいところ

$x = 0$ のとき $y = 0$ としてしまう

✕ $y = \frac{12}{x}$ は、 $x = 0$ のとき $y = 0$ なので、原点を通る

○ $x = 0$ のときの y はない。原点は通らない

$12 \div 0$ は計算できません (1-14)。 $y = ax$ (比例) なら $x = 0$ で $y = 0$ ですが、反比例はちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

反比例なら、いつも右下がり？

✕ $y = -\frac{6}{x}$ も、 x がふえると y がへる

○ $x > 0$ では、 $x = 1$ で -6 、 $x = 2$ で -3 。 y はふえる

$a < 0$ のとき、 $x > 0$ の枝は右上がりです。表を作って確かめよう。

⚠ まちがえやすいところ

変化の割合を a とする

✕ $y = \frac{12}{x}$ の変化の割合は、いつも 12

○ 区間ごとにちがう。1 → 2 なら -6、2 → 3 なら -2

「変化の割合はいつも a 」は、1 次関数 $y = ax + b$ のきまりです (3-5)。

反比例では、毎回計算します。

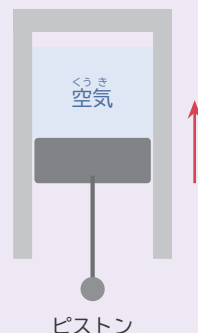
🌸 物理・工学ではこう使う

エンジンのシリンダー

自動車のエンジンでは、シリンダー (つつ) の中でピストンが上に動いて、空気とガソリンをおしちぢめてから火をつけます。ふつうのガソリンエンジンでは、体積を約 $\frac{1}{10}$ にします。たとえば、100 kPa・500 mL の空気を 50 mL にすると、温度が変わらなければ $pV = 100 \times 500 = 50000$ なので、

$$p = \frac{50000}{50} = 1000$$

で、1000 kPa (10 倍) になります。じっさいは、速くおしちぢめると空気の温度が上がるので、圧力をもっと大きくなります。その計算には、3-11 で $pV^{1.4}$ が一定という式を使います。



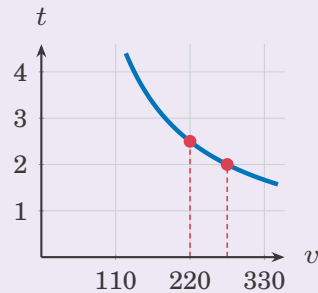
ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

おな みち 同じ道のりの、はや じ かん 速さと時間

とうきよう しんおおさか しんかんせん せん ろ やく
東京から新大阪までの新幹線の線路は、約
550km です。へいきん はや 平均の速さ v [km/h] とか
かる時間 t 時間は、 $vt = 550$ ではん び れい
す。へいきん 平均 220 km/h なら $550 \div 220 = 2.5$
で 2.5 時間、275 km/h なら 2 時間です。時
かん 間を 30 分ぶん ちぢ 縮めるには、はや 速さを 55 km/h も
あ 上げなければなりません。はや 速くするほど、おな
じ 30 分をぶん ちぢ 縮めるのはむずかしくなります。
そうきよくせん みぎ い 双曲線が右へ行くほどゆるやかになるから
です。

でん き ていこう でんりゅう
電気の抵抗と電流

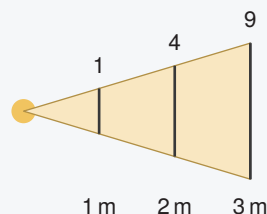
でんあつ おな 電圧が同じなら、ほうそく オームの法則 $V = RI$ (2-15) から RI がいつてい でんりゅう
はていこう はん び れい 抵抗に反比例します。いえ 家のコンセント (100 V) につないだドライヤーの
でんねつせん ていこう ちい 電熱線は、抵抗を小さくするほどおお でんりゅう なが
たくさんねつ で熱が出ます。



もっと知りたい ★★★★★

はなれるほど、もっとよわくなる： $\frac{1}{x^2}$

電球から 1m はなれた所の明るさを 1 とします。2m はなれると、光はたても横も 2 倍に広がり、同じ光が $2 \times 2 = 4$ 倍の面積に当たります。だから明るさは $\frac{1}{4}$ です。3m なら $3 \times 3 = 9$ 倍の面積で $\frac{1}{9}$ です。明るさ y は、距離 x の 2 乗に反比例し、 $y = \frac{1}{x^2}$ と書けます。



電気を帯びたもの同士がおし合う・引き合う力や、地球が月を引く力も、距離の 2 乗に反比例します。距離が 2 倍で $\frac{1}{4}$ 、10 倍で $\frac{1}{100}$ と、 $\frac{1}{x}$ よりずっと速く弱くなります。

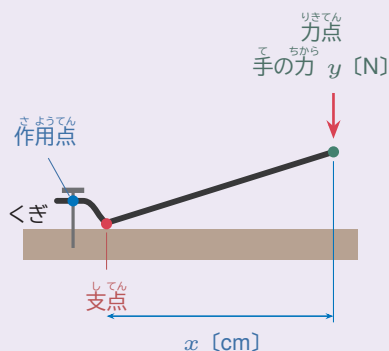
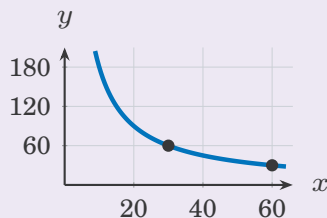
物理・工学ではこう使う

くぎぬき（パール）とてこ

くぎぬきは、てこを使った道具です。くぎを抜くのに 600 N の力があるとし、くぎから支点までが 3 cm なら、てこのつり合い（力 $\times$ 支点からの距離が等しい、2-15）から、手の力 y [N] と、支点から手までの距離 x [cm] は、

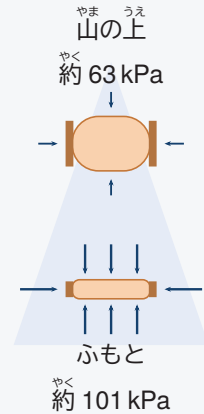
$$xy = 600 \times 3 = 1800$$

で、反比例します。30 cm の所を持てば 60 N（約 6 kg の物を持つくらい）、60 cm なら 30 N ですみます。長い柄の道具が楽なのは、このためです。



コラム 山の上で、おかしな袋がふくらむわけ

富士山の頂上では、まわりの空気の圧力は約 63 kPa で、地上（約 101 kPa）の 6 割ほどです。閉じたおかしな袋の空気は、まわりと同じ圧力になるまでふくらみます。地上で 100 mL の空気なら、 $pV = 101 \times 100 = 10100$ なので、頂上では $10100 \div 63$ で約 160 mL になります（気温が変わる分、少しずれます）。



しょうまつもんだい
章末問題

3-7 のまとめ

基本



1 y は x に反比例し、 $x = 2$ のとき $y = 9$ です。 y を x の式で表し、 $x = -3$ のときの y と、 $y = 4$ になる x を求めましょう (例題 1)。

2 $y = -\frac{12}{x}$ について、 $x = -6, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 6$ のときの y の表を作り、グラフをノートにかきましょう。グラフはどの区画を通りますか (例題 2)。

3 次の点のうち、 $y = \frac{20}{x}$ のグラフの上にあるものをすべて選びましょう (例題 3)。

ア (4, 5) イ (-2, -10) ウ (5, -4) エ (0.5, 40)

4 $y = \frac{18}{x}$ で、 x が 1 から 3 まで変わるときと、3 から 6 まで変わるとき、変化の割合を求めましょう (例題 4)。

5 注射器に 100 kPa の空気を 50 mL 入れ、先をふさぎました (温度は変わらないとします)。(1) 20 mL にすると圧力は何 kPa ですか。(2) 圧力を 125 kPa にするには、何 mL にすればよいですか ()。

6 かみ合う歯車で、歯の数 x が 10、20、30、40 のとき、1 分間の回転数 y は 60、30、20、15 でした。 y を x の式で表し、歯が 24 の歯車の回転数を求めましょう ()。

チャレンジ

7 反比例のグラフが点 (3, 4) を通ります。このグラフは、点 (6, b) と点 (c , -2) も通ります。 b と c を求めましょう ( ・ )。

8 エンジンのシリンダーで、100 kPa · 500 mL の空気をおしちぢめます (温度は変わらないとします)。(1) 50 mL にすると圧力は何 kPa ですか。(2) 圧力を 1200 kPa にするには、体積をはじめの何分の 1 にすればよいですか。

9 120 km はなれた町へ、車で行きます。平均の速さを x [km/h]、かかる時間を y 時間とします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) $x = 40$ 、 $x = 60$ のときの y を求めましょう。(3) 1.5 時間で着くには、平均何 km/h で走ればよいですか。

10 地上 (100 kPa) で 120 mL の空気が入った袋を、圧力が 80 kPa の高い山に持っていきました。温度は変わらないとすると、袋の空気は何 mL になりますか ()。

11 12 V の電源に抵抗をつなぐと、抵抗 x [Ω] が 3、4、6 のとき、電流 y [A] は 4、3、2 でした。 y を x の式で表し、8 Ω のときの電流を求めましょう ()。

12 $y = -\frac{18}{x}$ のグラフが、点 $(3, b)$ と点 $(c, 2)$ を通ります。 b と c を求めましょう ( 例題 1 ・  例題 3)。

13 先をふさいだ注射器の空気の体積を $\frac{1}{5}$ にすると、圧力は何倍になりますか。温度は変わらないとします ( 例題 5)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 双曲線をかき、軸にくっつかないわけを言える。 → 196 ページ
- ☐ $a < 0$ のグラフを読み、変化の割合を計算できる。 → 200 ページ
- ☐ xy が一定を見つけ、式を作って使える。 → 201 ページ



ソラ

おしちぢめた空気も、新幹線の時間も、同じ双曲線になるんだね。次の章では、かっこをはずす計算で、ボールのいちばん高い点を見つけるよ。

第2部 曲がったグラフ

★★～★★★★

3-8

かっこをはずす： 展開と平方完成

道しるべ この章の前に 2-11 2-12 2-13 3-6 この章の先に 3-9 3-10 3-16 5-4 9-7

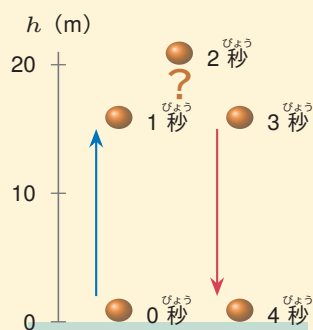
この章でできるようになること

- ★★ 「全部の組み合わせをかけたす」で、かっこのある式を展開できる。面積の図でわけを説明できる。
- ★★★ 恒等式と方程式を見分け、係数を比べたり数を代入したりして、わからない係数を決められる。
- ★★★ 平方完成をして、式のいちばん小さい値・いちばん大きい値を読みとれる。

? はてな?

真上に 20 m/s で投げ上げたボールの、 t 秒後の高さは $h = 20t - 5t^2$ (m) です (わけは 5-5 で)。 $t = 0 \sim 4$ では $h = 0, 15, 20, 15, 0$ なので、2 秒後がいちばん高そう。でも、1.9 秒や 2.1 秒のほうが高いかも?

この式は $h = 20 - 5(t - 2)^2$ と書けて、この形ならいちばん高い点がすぐ見えるそうです。本当に同じ式? なぜ見えるの?

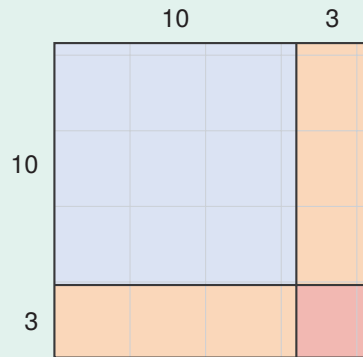


この章では、かっこのある式のかっこをはずす計算 (展開) と、その反対に式をかっこにまとめる計算を学びます。どちらも、長方形や正方形の面積で考える

と、わけがよくわかります。式の形を自由に変えられるようになると、同じ式から、ちがうことが読みとれるようになります。

🔗 やってみよう 13×13 を、4 つに分けて計算しよう

- 1 方眼紙に、1 辺が 13 マスの正方形をかく。
- 2 はしから 10 マスの所に、たてと横に 1 本ずつ線を引いて、4 つに分ける。
- 3 4 つの部分のマス数を、かけ算で求めて、たそう。
- 4 13×13 や、 $10 \times 10 + 3 \times 3$ とくらべよう。



青い部分は $10 \times 10 = 100$ 、オレンジの 2 つは $10 \times 3 = 30$ ずつ、赤い部分は $3 \times 3 = 9$ マスです。たすと $100 + 30 + 30 + 9 = 169$ で、 $13 \times 13 = 169$ とぴったり合います。いっぽう、 $10 \times 10 + 3 \times 3 = 109$ では、オレンジの $30 + 30 = 60$ マスがたりません。「たしてから 2 乗」と「2 乗してからたす」はちがうのです。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-11 分配法則： $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ 。長方形の面積を 2 通りに表した式。
- 2-12 $\times$ を省く。同類項をまとめる ($3x + 2x = 5x$)。 $3(x + 2) = 3x + 6$ 。
 $x^2 \times x^3 = x^5$ (2-7)。
- 2-13 式をかっこと代入する： x^2 の x に $a + h$ を入れると $(a + h)^2$ 。
- 2-16 方程式は、文字に入れる数によって、成り立ったり成り立たなかったりする等式。
- 3-6 連立方程式は、2 つの式をたしたりひいたりして、文字を 1 つ消して解く (加減法)。

すうがく 数学の道具

① かけ算だけの式：単項式と次数

2-12では、 $3 \times a \times a \times b$ を $3a^2b$ と短く書く約束をしました。 $3a^2b$ や $5x$ 、 $-2x^2$ 、7のように、数と文字のかけ算だけでできている式を単項式といいます。「項が1つだけの式」という意味です。

$3x^2 - 2x + 5$ のように、いくつかの項（+でつながった1つ1つ、2-12）の和になっている式を多項式といいます。ひき算は「マイナスの項をたす」と考えるので、 $3x^2 - 2x + 5 = 3x^2 + (-2x) + 5$ の項は $3x^2$ 、 $-2x$ 、5の3つです。

次数：文字をいくつかたか

単項式で、かけ合わせてある文字の個数を、その単項式の次数といいます。

単項式	×を書くと	かけた文字の数	次数
$5x$	$5 \times x$	1こ	1
$-2x^2$	$(-2) \times x \times x$	2こ	2
$3a^2b$	$3 \times a \times a \times b$	3こ	3
7	7	0こ	0

表1 次数は、×を全部書いて文字を数えるとわかる。

多項式の次数は、いちばん次数の大きい項の次数です。いちばん大きい次数が2の多項式を2次式、1の多項式を1次式といいます。 $3x^2 - 2x + 5$ は2次式、 $2x + 1$ は1次式です（2-16の「1次方程式」の1次はこれ）。 $h = 20t - 5t^2$ は t の2次式です。

単項式のかけ算

$3a^2b \times 2ab$ は、 $\times$ を全部書けば、ただのかけ算の並びです。かけ算は順番を入れかえてよいので（交換法則、2-11）、数は数どうし、同じ文字は同じ文字どうしで集めます。

$$\begin{aligned} 3a^2b \times 2ab &= 3 \times a \times a \times b \times 2 \times a \times b \\ &= (3 \times 2) \times (a \times a \times a) \times (b \times b) = 6a^3b^2 \end{aligned}$$

a は $2 + 1 = 3$ こ、 b は $1 + 1 = 2$ こです。 $a^2 \times a = a^{2+1} = a^3$ （2-12 の指数のきまり）と同じです。次数は、3 次 $\times$ 2 次で $3 + 2 = 5$ 次になります。かけ算すると、次数はたし算になるのです。

② かっこ $\times$ かっこ：全部の組み合わせをかけてたす

2-12 では、 $3(x + 2) = 3x + 6$ のように、かっこの外の数の中のものにもかけました（分配法則）。では、かっこのかけ算 $(a + b)(c + d)$ は、どうすればよいでしょう。2 通りの方法で考えます。

考え方 A：長方形の面積で

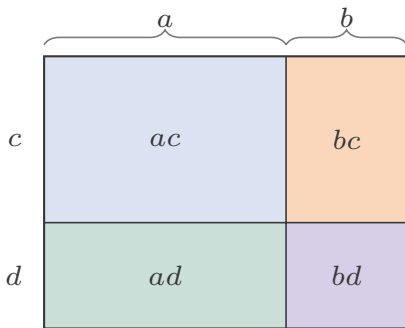


図1 横 $a + b$ 、たて $c + d$ の長方形

横が $a + b$ 、たてが $c + d$ の長方形を、横とたての線で4つに分けます。全体の面積は $(a + b)(c + d)$ です。4 つの小さな長方形の面積は ac 、 bc 、 ad 、 bd です。全体は4つの合計なので、

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

考え方 B：分配法則を2回使う

$c + d$ を1つのかたまりと見て、 M と書きます。すると $(a + b)M$ で、2-11 の分配法則がそのまま使えます。

① M を a にも b にもかける： $(a + b)M = aM + bM$

② M を $c + d$ にもどす: $aM + bM = a(c + d) + b(c + d)$

③ もう1回、分配法則: $a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$

面積で考えても、分配法則で考えても、同じ4つの項になりました。左のかっこの項 (a, b) の1つずつと、右のかっこの項 (c, d) の1つずつを、全部の組み合わせでかけて、たしています。 $2 \times 2 = 4$ 組です。このように、かっこのある式をかけ算して、かっこのない多項式にすることを展開といいます。

たいせつ

かっこをかけるときは、全部の組み合わせをかけてたす。

組み合わせの表を使う

項が多いときや、マイナスの項があるときは、かけ算の表を作ると、組み合わせをわすれません(5-4でも使う方法です)。 $(2x + 1)(x - 3)$ なら、 $x - 3 = x + (-3)$ と見て、表を作ります。

かける数	$\times x$	$\times (-3)$
$2x$	$2x^2$	$-6x$
1	x	-3

4つのますを全部たして、同類項 $(-6x$ と $x)$ をまとめます(2-12)。

$$2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

確かめ: $x = 2$ を入れると、左は $(4 + 1) \times (2 - 3) = 5 \times (-1) = -5$ 、右は $8 - 10 - 3 = -5$ で合います。

コラム かけ算の筆算も、展開だった

23×14 の筆算を、展開で見してみましょう。 $23 = 20 + 3$ 、 $14 = 10 + 4$ と分けると、

$$(20 + 3)(10 + 4) = 200 + 80 + 30 + 12 = 322$$

筆算の1段めの92は $23 \times 4 = 80 + 12$ 、2段めの230は $23 \times 10 = 200 + 30$ です。小学校から使ってきた筆算は、「全部の組み合わせを掛けてたす」を、位ごとに整理して書く方法だったのです。

3 2乗の展開： $(a + b)^2$ と $(a - b)^2$

$(a + b)^2$ ：やってみようの正方形

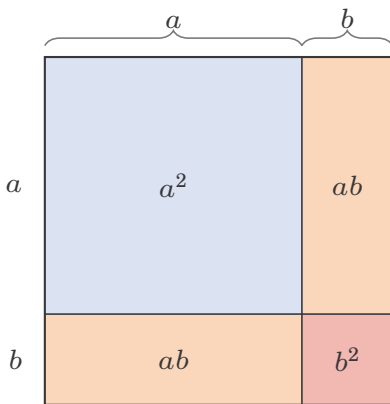


図2 1辺 $a + b$ の正方形

やってみようの正方形で、10を a 、3を b にかえます。1辺 $a + b$ の正方形は、大きな正方形 a^2 (青)、細長い長方形 ab が2まい (オレンジ)、小さな正方形 b^2 (赤) に分かります。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

式でも確かめます。 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ なので、組み合わせは $a \times a$ 、 $a \times b$ 、 $b \times a$ 、 $b \times b$ の4つです。 ab と ba は同じ (交換法則) なので、まとめて $2ab$ になります。まん中の「2」は、オレンジの長方形が2まいあることです。

$(1 + h)^2$ ：第5巻で何度も使う形

$a = 1$ 、 $b = h$ とすると、

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

数で確かめましょう。 $h = 0.1$ なら、左は $1.1^2 = 1.1 \times 1.1 = 1.21$ 、右は $1 + 0.2 + 0.01 = 1.21$ で、ぴったり合います。 h が小さいと、 h^2 (赤い小さな正方形) はとても小さくなります。 $h = 0.1$ なら 0.01 、 $h = 0.01$ なら 0.0001 です。この「 h^2 はとても小さい」ことを、5-2・5-8 で使います。

$(a - b)^2$: 正方形から切りとる

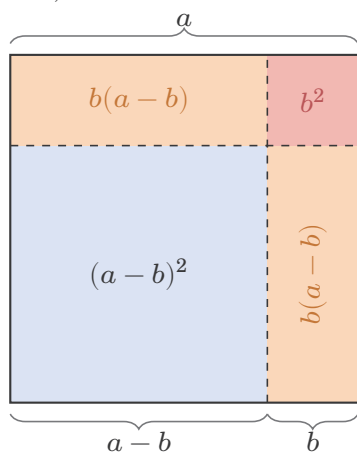


図3 1辺 a の正方形から、はばが b の帯を切りとる

1 辺 a の正方形 (面積 a^2) から、右と上の、はばが b の帯を切りとると、のこりの青い正方形は 1 辺 $a - b$ です。

帯は、1 本が長さ a ・はば b で面積 ab 。2 本ひくと $a^2 - 2ab$ です。ところが、右上の赤い角 b^2 は、2 本の帯の両方に入っているの、2 回ひいたことになります。1 回分を返して、 $+b^2$ します。

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

式なら、 $(a - b)^2 = \{a + (-b)\}^2$ と見て $(a + b)^2$ の b を $-b$ にかえれば同じです。 $2a \times (-b) = -2ab$ 、 $(-b)^2 = b^2$ (マイナス×マイナスはプラス、2-2) だからです。

数で確かめます。 $a = 10$ 、 $b = 3$ なら、左は $7^2 = 49$ 、右は $100 - 60 + 9 = 49$ で合います。

$(12 - 2x)^2$: 数がついていても同じ

$a = 12$ 、 $b = 2x$ と見ます。 b が $2x$ という単項式でも、かたまりとして同じように使えます。

$$\begin{aligned} (12 - 2x)^2 &= 12^2 - 2 \times 12 \times 2x + (2x)^2 \\ &= 144 - 48x + 4x^2 \end{aligned}$$

$(2x)^2 = 2x \times 2x = 4x^2$ です。 $2x^2$ としないように気をつけます（道具 1 の単項式のかけ算）。この式は、5-7 で箱の体積がいちばん大きくなる形を求めるときに使います。

4 わと差の積・ $(x+a)(x+b)$

$(a+b)(a-b)$ ：まん中が消える

組み合わせの 4 つをかけてたします。

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$-ab$ と $+ab$ が打ち消し合って、2 つの項だけがのこります。図でも見てみましょう。

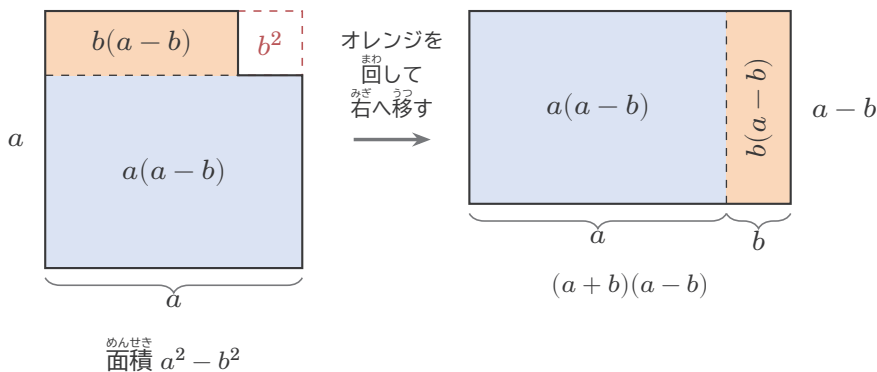
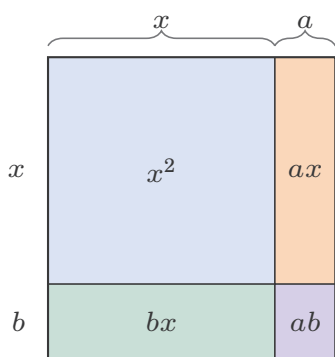


図 4 1 辺 a の正方形から角の b^2 をとり、オレンジの部分（横 $a-b$ 、たて b ）を回して右へ移すと、横 $a+b$ 、たて $a-b$ の長方形

左の形は、1 辺 a の正方形から右上の b^2 をとったので、面積は $a^2 - b^2$ です。上のオレンジの長方形（横 $a-b$ 、たて b ）を 90° 回して立て、青い長方形（横 a 、たて $a-b$ ）の右にならべると、横 $a+b$ 、たて $a-b$ の長方形になります。面積は変わらないので、 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ です。

暗算にも使えます。 $101 \times 99 = (100+1)(100-1) = 10000 - 1 = 9999$ 。

$(x+a)(x+b)$: 和と積



横 $x+a$ 、たて $x+b$ の長方形です。 ax と bx は同類項なので、まとめて $(a+b)x$ です (2-12)。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

x の係数は a と b の和、数だけの項は a と b の積です。

たとえば $(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$ です ($2+5=7$ 、 $2 \times 5=10$)。 a や b がマイナスでも、和と積を計算すれば同じです。 $(t+5)(t-3)$ なら、 $5+(-3)=2$ 、 $5 \times (-3)=-15$ なので、 $t^2 + 2t - 15$ です。

かっこの形	展開した形	図で見ると
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	正方形を4つに分ける
$(a-b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	帯を2本切り、角を返す
$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$	角をとって並べかえる
$(x+a)(x+b)$	$x^2 + (a+b)x + ab$	長方形を4つに分ける

表2 よく使う展開の形。どれも「全部の組み合わせをかけたつ」から作れる。

表の形は、覚えていなくてもかまいません。わすれたら、組み合わせの表や面積の図から、いつでも作り直せます。

5 立方体で見る $(a+b)^3$

3乗も、2乗を使って展開できます。

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

左のかっこの3つの項と、右のかっこの2つの項で、 $3 \times 2 = 6$ 組の組み合わせができます。

かける数	$\times a$	$\times b$
a^2	a^3	a^2b
$2ab$	$2a^2b$	$2ab^2$
b^2	ab^2	b^3

表3 6つの組み合わせ。 a^2b は $1 + 2 = 3$ こ、 ab^2 は $2 + 1 = 3$ こある。

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

数で確かめます。 $a = 10$ 、 $b = 1$ なら、左は $11^3 = 1331$ です。右は $1000 + 300 + 30 + 1$ で、やはり 1331 です。

$(a + b)^3$ は、1辺 $a + b$ の立方体の体積です。1辺 a の立方体（青）のたて・横・高さを b ずつのぼし、ふえた部分をひきはなして、種類ごとに並べます。

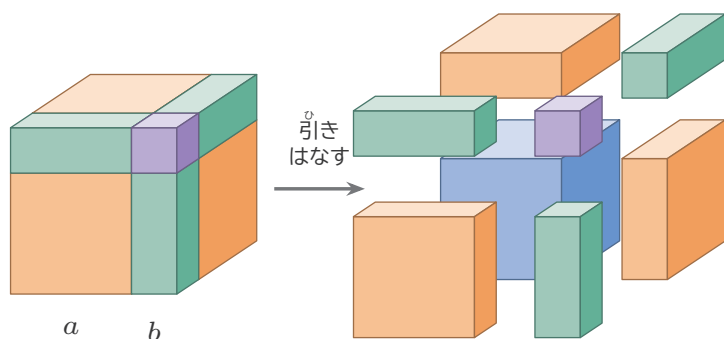


図5 左：1辺 $a + b$ の立方体。右：色ごとにひきはなした形（5-4 の図と同じ色分け）

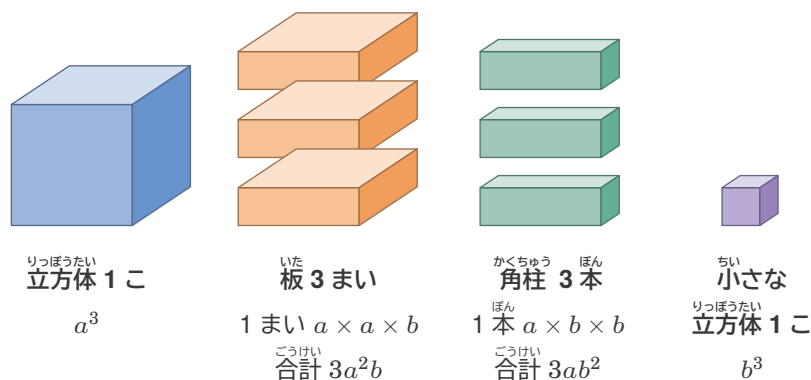


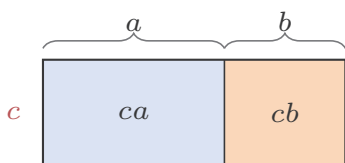
図6 種類ごとに並べた。板が3まい、角柱が3本あるのが、式の「3」

青い立方体 a^3 、うすい板（オレンジ）が3まいで $3a^2b$ 、細い角柱（緑）が3本で $3ab^2$ 、小さな立方体（紫）が b^3 です。表で求めた式と、ぴったり同じです。5-4では、この図を使って、 x^3 の微分のきまりを確かめます。

6 共通因数でくくる：展開の逆

展開は、かっこをはずす計算でした。こんどは反対に、かっこを作ります。

分配法則 $c(a + b) = ca + cb$ を、右から左へ読みます。 $ca + cb$ のどちらの項にも c がかかっているのです、 c を外に出して $c(a + b)$ とまとめられます。どの項にもかかっている数や文字を**共通因数**といい、それを外に出すことを「くくる」といいます。



面積 ca と cb の2まいの長方形は、たての長さ c が同じです。だから横にならべてくつければ、たて $c \cdot$ 横 $a + b$ の1まいの長方形になります。同じたての長さが、**共通因数**です。

12でくくる

$12x^2 - 96x + 144$ は、どの項も12でわりきれます。 $96 = 12 \times 8$ 、 $144 = 12 \times 12$ だからです。項ごとに「12 × 何か」の形にしてから、12を外に出します。

$$\begin{aligned} 12x^2 - 96x + 144 &= 12 \times x^2 - 12 \times 8x + 12 \times 12 \\ &= 12(x^2 - 8x + 12) \end{aligned}$$

確かめは展開です。 $12(x^2 - 8x + 12)$ のかっこをはずすと、もとの式にもどります。5-7では、このように12でくくってから計算を進めます。

文字でもくくれる

$2x^2 - 8x$ は、 $2x^2 = 2x \times x$ 、 $8x = 2x \times 4$ なので、どちらの項にも $2x$ がかかっています。 $2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$ です。数だけの2でくくって $2(x^2 - 4x)$ としてもまちがいではありませんが、かっこの中にまだ x がのこっています。**共通因数**は、できるだけ全部くくり出します。

展開を逆に読むと：因数分解の入口

道具 4 の展開

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$$

を、右から左へ読むと、 $x^2 + 7x + 10$ は $(x+2)(x+5)$ と書けることになりま
す。和が7、積が10の2つの数(2と5)が見つければ、かっこのかけ算にも
どせます。このように、多項式をかけ算の形に直すことを因数分解といいます。
くわしくは3-10で、2次方程式を解くときに学びます。

7 どんな x でも成り立つ等式：恒等式

2-11では、 $a+b=b+a$ や $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ のように、文字を
使って「どんな数でも成り立つきまり」を1行で書きました。この章で作った展
開の式も、じつは同じなかまです。ここでは、それを方程式とくらべて、はっき
りさせます。

1 数を入れて、左と右をくらべる

展開した式 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ の x に、いろいろな数を入れて、「=」の
左(左辺)と右(右辺)を別々に計算します(2-13)。

x	0	1	2	-1	0.5
左辺 $(x+1)^2$	1	4	9	0	2.25
右辺 $x^2 + 2x + 1$	1	4	9	0	2.25
左右は？	同じ	同じ	同じ	同じ	同じ

表4 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 。どの x を入れても、左右が同じ値になる。

たとえば $x = 2$ なら、左辺は $(2+1)^2 = 3^2 = 9$ 、右辺は $2^2 + 2 \times 2 + 1$
で、 $4 + 4 + 1 = 9$ です。 $x = 0.5$ なら、左辺は $1.5^2 = 2.25$ 、右辺は
 $0.25 + 1 + 1 = 2.25$ です。

2 方程式だと、どうなる？

こんどは $(x+1)^2 = 4$ で、同じことをします。

x	0	1	2	-1	0.5	-3
左辺 $(x+1)^2$	1	4	9	0	2.25	4
右辺 4	4	4	4	4	4	4
左右は？	ちがう	おなじ	ちがう	ちがう	ちがう	おなじ

表5 $(x+1)^2 = 4$ 。左右が同じになるのは、 $x = 1$ と $x = -3$ のときだけ。

同じになるのは、 $x = 1$ と $x = -3$ のときだけです。2乗して4になる数は2と-2 (2-8) なので、 $x+1 = 2$ か $x+1 = -2$ 、つまり $x = 1$ か $x = -3$ で、ほかにはありません。

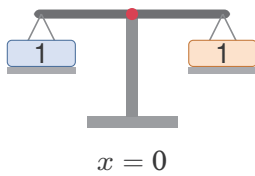
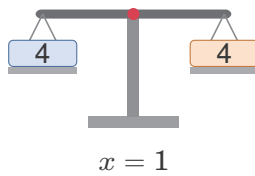
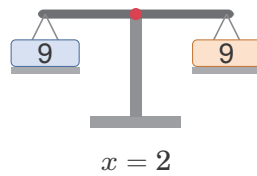
3 名前をつける

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ のように、文字にどんな数を入れても成り立つ等式を、恒等式といいます。「恒」は「いつも変わらない」という意味です。 $(x+1)^2 = 4$ のように、 x の値によって、成り立ったり成り立たなかったりする等式は、2-16で学んだ方程式です。 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 5$ のように、成り立つ x が1つもない方程式もあります（展開すると $1 = 5$ になってしまう。3-6の、平行な2直線の「解なし」と同じ）。

4 天びんで見る

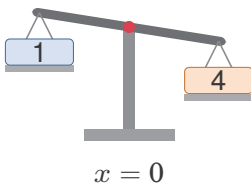
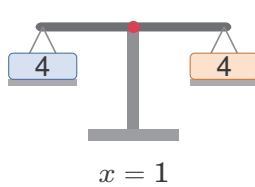
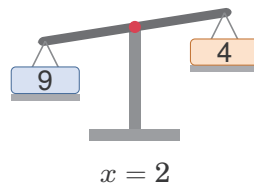
等式は天びんでした (2-14)。左の皿に左辺の値、右の皿に右辺の値の重さをのせます。 x を変えると、のせる重さが変わります。

恒等式 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$



いつも
つり合う

方程式 $(x+1)^2 = 4$



$x = 1$ と
 $x = -3$
でだけ

図7 左の皿（青）が左辺、右の皿（オレンジ）が右辺。恒等式は、 x を変えてもずっとつり合う。

恒等式の天びんは、 x をどんなに変えても、いつもまっすぐです。左右の重さが、いつもいっしょに同じだけ変わるからです。方程式の天びんは、 $x = 1$ （と $x = -3$ ）のときだけつり合い、ほかの x ではかたむきます。

5 グラフで見る

左辺と右辺を、それぞれ y として2本のグラフにかくと、ちがいがもっとはっきりします。

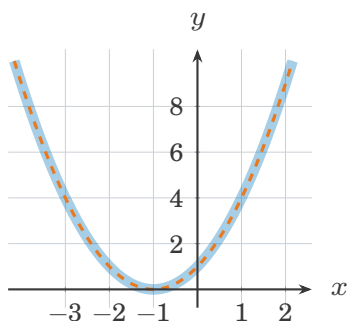
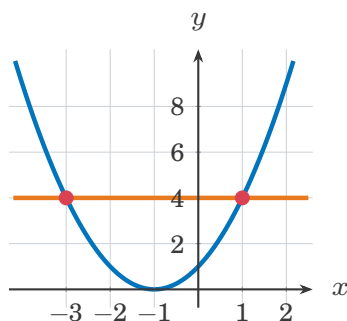


図8 $y = (x+1)^2$ (青) と $y = x^2 + 2x + 1$ (点線) は、ぴったり重なる
図9 $y = (x+1)^2$ と $y = 4$ が交わるのは2点だけ

恒等式では、2本のグラフがどこでもぴったり重なり、1本に見えます。左辺と右辺は、見た目がちがうだけで、同じ関数 (3-3) なのです。方程式では、2本のグラフは交わる点 (赤) でだけ出あいます (3-6 で見た「交点」と同じ)。

たいせつ

恒等式：文字にどんな数を入れても成り立つ等式。

(例) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

方程式： x の値によって、成り立ったり成り立たなかったりする等式。成り立つ x がないこともある (3-6 の平行な2直線)。

(例) $(x+1)^2 = 4$

恒等式かどうかを調べるには、数を入れて1つでも合わない x があれば「恒等式ではない」とわかります。でも、いくつかの x で合っただけでは、たまたまかもしれません。恒等式だと言いきるには、展開して左右がまったく同じ式になることを確かめます。

8 係数を比べる

恒等式を使うと、わからない数を決めることができます。次の問題を考えましょう。

$x^2 + 6x + 10 = (x+p)^2 + q$ が恒等式になるような、数 p と q は？

この形は、あとで平方完成（道具 10）に使います。

1 右边を展開する

$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$ （道具 3 の $(a + b)^2$ で、 $a = x$ 、 $b = p$ ）なので、

$$(x + p)^2 + q = x^2 + 2px + (p^2 + q)$$

x にかかっている数は $2p$ 、数だけの項は $p^2 + q$ です。

2 同じ次数の項どうしを比べる

左辺と右辺を、次数ごとに上下にならべます。

	x^2 の係数	x の係数	数だけの項
左辺	1	6	10
右辺	1	$2p$	$p^2 + q$

表 6 次数ごとに係数を比べる

恒等式になるのは、左右がまったく同じ式になるとき、つまり同じ次数どうしの係数がそれぞれ等しいときです。

- x の係数を比べて $2p = 6$ 。だから $p = 3$ 。
- 数だけの項を比べて $p^2 + q = 10$ 。ここに $p = 3$ を入れて $9 + q = 10$ 。だから $q = 1$ 。

だから

$$x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

です。右边を展開すると $x^2 + 6x + 9 + 1$ で、たしかに左辺と同じです。このように、恒等式の両辺で同じ次数の係数を等しいとおいて、わからない数を求める方法を、**係数を比べる**（係数比較）といいます。

3 なぜ比べてよいの？

「係数が等しければ同じ式」は当たり前です。では反対に、「どんな x でも等しいなら、係数も等しい」と言えるでしょうか。1次式で確かめます。

$ax + b = a'x + b'$ が、どんな x でも成り立つとします (a' は「エー・ダッシュ」^よと読み、 a とは別の数です)。右辺を左へ移項すると (2-14)、

$$(a - a')x + (b - b') = 0 \quad \text{がどんな } x \text{ でも成り立つ}$$

数を入れて

どんな x でもよいので、計算の楽な数を入れます。 $x = 0$ を入れると、 $(a - a') \times 0 + (b - b') = 0$ なので $b - b' = 0$ 、つまり $b = b'$ です。すると式は $(a - a')x = 0$ になります。ここに $x = 1$ を入れると $a - a' = 0$ 、つまり $a = a'$ です。

グラフで

$y = (a - a')x + (b - b')$ は、傾き $a - a'$ 、切片 $b - b'$ の直線です (3-5)。それがどこでも $y = 0$ なら、直線は x 軸そのものです。 x 軸は傾きが0、切片も0なので、 $a - a' = 0$ 、 $b - b' = 0$ です。

2次式でも同じです。 $Ax^2 + Bx + C = 0$ がどんな x でも成り立つとき、 $x = 0$ で $C = 0$ 。 $x = 1$ で $A + B = 0$ 、 $x = -1$ で $A - B = 0$ 。この2つをたすと $2A = 0$ なので $A = 0$ 、すると $B = 0$ です (3-6 の加減法)。だから、両辺の差の係数はどれも0で、係数はそれぞれ等しくなります。

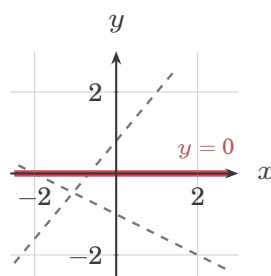


図10 どこでも $y = 0$ になる直線は、 x 軸 (赤) だけ。点線は傾きや切片が0でない直線

コラム 方程式では、係数を比べてはいけない

$3x + 1 = x + 5$ は方程式で、 $x = 2$ のときだけ成り立ちます ($3 \times 2 + 1 = 7$ 、 $2 + 5 = 7$)。もし係数を比べると「 $3 = 1$ 」となって、おかしいことになります。係数を比べてよいのは、どんな x でも成り立つ恒等式のときだけです。問題に「恒等式になるように」「どんな x でも成り立つように」と書いてあるかを、まず確かめましょう。

9 数を代入して係数を決める

恒等式なら、どんな x を入れても成り立ちます。この性質を、わからない数を決めるのに使う方法もあります。

$5x + 1 = A(x + 1) + B(x - 1)$ が恒等式になるような、数 A と B は？

方法1：都合のよい x を入れる

右辺には A と B の2つがあって、このままでは1つに決まりません。そこで、どちらか1つが消えるような x を選びます。

$x = 1$ を入れる $x - 1 = 0$ になるので、 B の項が消えます。

$$5 \times 1 + 1 = A(1 + 1) + B(1 - 1)$$

左は6、右は $2A + B \times 0 = 2A$ なので、 $6 = 2A$ 。だから $A = 3$ です。

$x = -1$ を入れる $x + 1 = 0$ になるので、 A の項が消えます。

$$5 \times (-1) + 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 1)$$

左は-4、右は $A \times 0 - 2B = -2B$ なので、 $-4 = -2B$ 。だから $B = 2$ です。

$A = 3$ 、 $B = 2$ です。確かめに、選ばなかった $x = 2$ を入れると、左は $5 \times 2 + 1 = 11$ 、右は $3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$ で合います。

好きな x を入れてよいのは、これが恒等式だからです。 $x = 1$ でも $x = -1$ でも $x = 2$ でも、同じ $A \cdot B$ で成り立たなければなりません。だから、都合のよい x で求めた $A \cdot B$ が、そのまま答えになります。

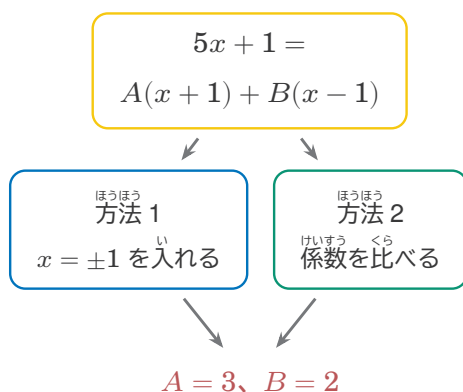
方法2：展開して係数を比べる

右辺を展開して、 x の項と数だけの項に整理します。

$$\begin{aligned} A(x+1) + B(x-1) &= Ax + A + Bx - B \\ &= (A+B)x + (A-B) \end{aligned}$$

左辺 $5x + 1$ と係数を比べると、 $A + B = 5$ 、 $A - B = 1$ です。これは連立方程式です (3-6)。2つの式をたすと $2A = 6$ で $A = 3$ 。 $A + B = 5$ に代入して $B = 2$ です。

2つの方法で、同じ $A = 3$ 、 $B = 2$ が出ました。方法1は計算が短く、方法2は「なぜその答えか」がよく見えます。どちらで求めても、もう片方で確かめると安心です。



この形は、分数の式を分ける計算 (部分分数分解) で、そのまま使います。この章の終わりのほう (252 ページ) で、やってみます。

せいかくに言う

なぜ、都合のよい2つの x だけで決めてよいの？

① $5x + 1$ も $A(x + 1) + B(x - 1)$ も1次式です。1次式どうしは、ちがう2つの x で値が合えば、すべての x で合います。2つの差のグラフは直線で、2点で0になる直線は x 軸しかないからです (道具8のわけ)。

② 部分分数分解 (252 ページ) では、はじめに両辺に分母をかけて (分母をはらって)、分数のない恒等式にしてから x を代入します。だから、もとの分数の分母を0にする x (この例では $x = 1$ や $x = -1$) を入れてもかまいません。

10 平方完成：正方形をつくる

道具 8 で、 $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$ になることを、係数を比べて求めました。このように、2 次式を「(かっこ) の 2 乗 + 数」の形に直すことを平方完成といいます (平方は 2 乗のこと)。こんどは面積の図で、なぜ $p = 3$ になるのかを見てみましょう。

1 $x^2 + 6x$ を図にする

x^2 は 1 辺 x の正方形、 $6x$ はたて $x \cdot$ 横 6 の長方形です (図 11 の左)。

2 長方形を半分に切って、2 辺にはりつける

$6x$ の長方形を、横 3 ずつの 2 まい ($3x$ と $3x$) に切り、1 まいを正方形の右に、もう 1 まいを下にはりつけます (図 11 のまん中)。

3 欠けた角をうめる

右下に、1 辺 3 の正方形の形の欠けがあります。ここに $3 \times 3 = 9$ をうめると、1 辺 $x + 3$ の大きな正方形が完成します (図 11 の右)。うめた 9 は、本当はないものなので、あとで返します。

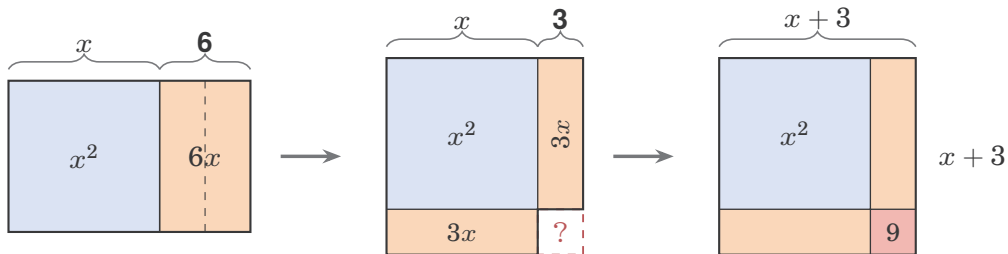


図 11 $x^2 + 6x$ に 9 をたすと、1 辺 $x + 3$ の正方形になる

図から、 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ です。だから $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ 。これに 10 をたすと、

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 10 &= (x + 3)^2 - 9 + 10 \\ &= (x + 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

係数を比べた答え（道具8）と同じになりました。3は「 x の係数6の半分」で、9はその2乗です。長方形を半分に切って2辺にはったから半分、欠けた角が正方形だから2乗なのです。

たいせつ

平方完成の手順： $x^2 + bx + c$ は、 x の係数 b の半분을 p として、

$$x^2 + bx + c = (x + p)^2 - p^2 + c$$

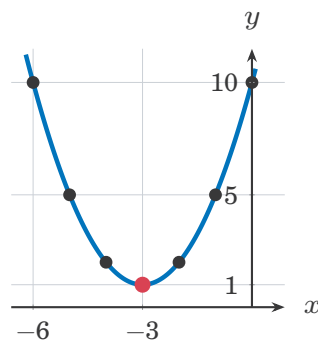
（ $(x + p)^2$ を作るためにたした p^2 を、すぐにひいて返す）

平方完成すると、いちばん小さい値が見える

$(x + 3)^2$ は2乗なので、0かプラスです。

マイナスの数も2乗すればプラスになるからです（2・2）。だから $(x + 3)^2 + 1$ は、いつも1以上です。ちょうど1になるのは、 $(x + 3)^2 = 0$ 、つまり $x = -3$ のときだけです。

表とグラフ（赤い点が $(-3, 1)$ ）でも、 $x = -3$ でいちばん小さな1になり、そこから左右に同じように大きくなっています。



x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	10	5	2	1	2	5	10

表を作って調べるだけでは、 -3.1 や -2.9 のほうが小さいかもしれない、という心配がのこります。平方完成した式なら、どの x でも1より小さくならないことが、はっきり言えます。

x^2 の係数が1でないとき

$2x^2 - 8x + 5$ のように x^2 に数がかかっているときは、はじめに x^2 と x の項を、その数でくくります（道具6）。

① 2でくくる： $2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5$

② かけこの中を平方完成する（ -4 の半分は -2 ）： $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$
 だから $2(x^2 - 4x) + 5 = 2\{(x - 2)^2 - 4\} + 5$

③ かけこをはずす（分配法則）： $2(x - 2)^2 - 8 + 5 = 2(x - 2)^2 - 3$

波かけこ $\{ \}$ は、かけこの外がわにつけるかけこです。 $2 \times (-4) = -8$ をわすれないようにします。

② はてな？ の答え：ボールのいちばん高い点

$h = 20t - 5t^2$ を、 t^2 の項を先にして $-5t^2 + 20t$ と書き、 -5 でくくります（ $-5 \times t^2 = -5t^2$ 、 $-5 \times (-4t) = 20t$ ）。

① -5 でくくる： $h = -5(t^2 - 4t)$

② かけこの中を平方完成する： $h = -5\{(t - 2)^2 - 4\}$

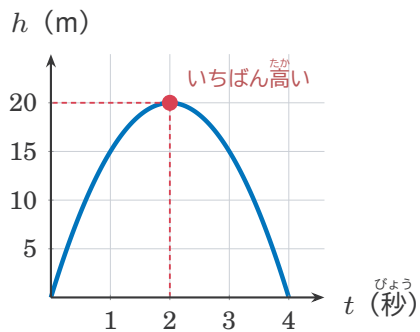
③ かけこをはずす（ $-5 \times (-4) = 20$ ）： $h = -5(t - 2)^2 + 20$

順番を入れかえると、はてな？ の $h = 20 - 5(t - 2)^2$ です。展開して確かめると、

$$20 - 5(t^2 - 4t + 4) = 20t - 5t^2$$

で、たしかに同じ式（恒等式）です。

$(t - 2)^2$ は 0 かプラスなので、 $5(t - 2)^2$ も 0 かプラスです。20 からそれをひいた h は、20 より大きくなれません。 h がちょうど 20 になるのは $t = 2$ のときだけです。だから、いちばん高いのは 2 秒後で、高さ 20 m です。1.9 秒も 2.1 秒も、 $20 - 5 \times 0.1^2 = 19.95$ で、20 より低くなります。



このように、式の形を変えると、もとの形では見えなかったことが見えてきます。グラフのいちばん高い点・低い点のことは、3-9 でくわしく学びます。5-7 では、同じ答えを微分で求めます。

🔍 もっと知りたい ★★★

3-16 への予告：ばねの実験に、いちばんよい直線を引く

おもりを x 個つるしたときのばねののび y [cm] をはかると、(1, 2.0)、(2, 4.3)、(3, 5.8) でした。点は直線にぴったりはのりません (2-6 のずれ)。そこで、直線 $y = kx$ からのずれ $y - kx$ を 2 乗してたした S が、いちばん小さくなる k を選びます (なぜ 2 乗するかは 3-16 で)。

$$S = (2.0 - k)^2 + (4.3 - 2k)^2 + (5.8 - 3k)^2$$

1 つずつ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ で展開します。

$$(2.0 - k)^2 = 4 - 4k + k^2$$

$$(4.3 - 2k)^2 = 18.49 - 17.2k + 4k^2$$

$$(5.8 - 3k)^2 = 33.64 - 34.8k + 9k^2$$

同類項をまとめると $S = 14k^2 - 56k + 56.13$ 。14 でくくって平方完成すると、

$$S = 14(k^2 - 4k) + 56.13 = 14(k - 2)^2 + 0.13$$

$14(k - 2)^2$ は 0 かプラスなので、 S がいちばん小さくなるのは $k = 2$ のときです。だから、このばねは「おもり 1 個で 2 cm のびる」と決められます。実験からばね定数を決めるこの方法 (最小二乗法) は、3-16 でくわしく学びます。

🔍 もっと知りたい ★★★

係数の並び：1・2・1、1・3・3・1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の係数は 1・2・

1、 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ は 1・

3・3・1 です。右のように、上の 2 つの数を

たして下の数を作ると、 $(a+b)^4$ の係数 1・

4・6・4・1 も作れます。この三角形をパス

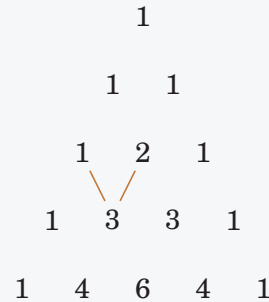
カルの三角形といい、3-17 で、コインの表・

裏の出方を数えるのに使います。

3 つの和の 2 乗

$(a+b+c)^2$ は、1 辺 $a+b+c$ の正方形を 9 つに分けて考えます。 a^2 、 b^2 、 c^2 が 1 まいずつ、 ab 、 bc 、 ca が 2 まいずつで、

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$



📖 この章で出てきたことば

単項式・多項式 数と文字のかけ算だけの式が単項式。いくつかの項の和が多項式。

次数 かけ合わせた文字の個数。 $3a^2b$ は 3 次。多項式はいちばん大きい項の次数。

2 次式 いちばん大きい次数が 2 の多項式。 $x^2 + 6x + 10$ など。

展開 かっこのある式をかけ算して、かっこのない多項式にすること。

共通因数・<くる どの項にもかかっている数や文字。それを外に出すことが「<くる」。

恒等式 文字にどんな数を入れても成り立つ等式。

係数を比べる 恒等式の両辺で、同じ次数の係数を等しいとおいて、わからない数を求めること。

平方完成 2 次式を「(かっこ) の 2 乗 + 数」の形にすること。

例題でたしかめよう

例題1 単項式のかけ算

次の計算をしましょう。答えの次数も答えましょう。

$$(1) 3a^2b \times 2ab \quad (2) (-4x) \times 5x^2 \quad (3) (2x)^2$$

考え方 $\times$ を全部書いて、数は数どうし、同じ文字は同じ文字どうしですとめます。符号は数といっしょに計算します。

しき (1) $3 \times 2 \times a \times a \times a \times b \times b = 6a^3b^2$

(2) $(-4) \times 5 \times x \times x \times x = -20x^3$

(3) $2x \times 2x = 2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

こたえ (1) $6a^3b^2$ 、5次 (2) $-20x^3$ 、3次 (3) $4x^2$ 、2次

例題2 かっこ×かっこの展開

次の式を展開しましょう。

$$(1) (x+3)(y+2) \quad (2) (2x+1)(x-3)$$

考え方 全部の組み合わせ ($2 \times 2 = 4$ 組) をかけてたします。(2) は $x-3 = x + (-3)$ と見て、最後に同類項をまとめます。

しき (1) $x \times y + x \times 2 + 3 \times y + 3 \times 2 = xy + 2x + 3y + 6$

(2) $2x \times x + 2x \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)$

$$= 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

こたえ (1) $xy + 2x + 3y + 6$ (2) $2x^2 - 5x - 3$

じぶんでとこう 1

計算をし、次数も答えましょう。

(1) $4xy \times 3x$

(2) $(-2a) \times 3ab$

(3) $(3x)^2$

じぶんでとこう 2

展開しましょう。

(1) $(a + 4)(b + 1)$

(2) $(3x - 2)(x + 4)$

例題 3 よく使う展開の形

次の式を展開しましょう。

(1) $(x + 4)^2$ (2) $(12 - 2x)^2$ (3) $(x + 5)(x - 5)$ (4) $(x - 3)(x + 5)$

考え方 どれも「全部の組み合わせ」でできますが、道具 4 の表の形を使うと早く書けます。(2) は $a = 12$ 、 $b = 2x$ の $(a - b)^2$ 、(4) は $a = -3$ 、 $b = 5$ の $(x + a)(x + b)$ です。

しき (1) $x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

(2) $12^2 - 2 \times 12 \times 2x + (2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2$

(3) $x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

(4) 和は $-3 + 5 = 2$ 、積は $(-3) \times 5 = -15$ 。だから $x^2 + 2x - 15$

こたえ (1) $x^2 + 8x + 16$ (2) $144 - 48x + 4x^2$

(3) $x^2 - 25$ (4) $x^2 + 2x - 15$

例題 4 展開で、くふうして計算する

くふうして計算しましょう。

(1) 102^2 (2) 98^2 (3) 101×99 (4) 1.1^2

考え方 100 や 1 に近い数を、「100 + 小さい数」「1 + 小さい数」と見て、展開の形を使います。

しき (1) $(100 + 2)^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

(2) $(100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

(3) $(100 + 1)(100 - 1) = 10000 - 1 = 9999$

(4) $(1 + 0.1)^2 = 1 + 0.2 + 0.01 = 1.21$

こたえ (1) 10404 (2) 9604 (3) 9999 (4) 1.21

じぶんでこう 3

展開しましょう。

(1) $(x + 6)^2$ (2) $(10 - 2x)^2$

(3) $(x + 7)(x - 7)$

(4) $(x + 4)(x - 6)$

じぶんでこう 4

くふうして計算しましょう。

(1) 103^2 (2) 99^2

(3) 52×48 (4) 1.2^2

例題5 共通因数でくくる

次の式を、共通因数でくくみましょう。

(1) $12x^2 - 96x + 144$ (2) $2x^2 - 8x$ (3) $3x^2 - 3$

考え方 どの項にもかかっている数や文字を見つけ、項ごとに「共通因数×何か」の形にしてから外に出します。最後に展開して確かめます。

しき (1) $12 \times x^2 - 12 \times 8x + 12 \times 12 = 12(x^2 - 8x + 12)$

(2) $2x \times x - 2x \times 4 = 2x(x - 4)$

(3) $3 \times x^2 - 3 \times 1 = 3(x^2 - 1)$

こたえ (1) $12(x^2 - 8x + 12)$ (2) $2x(x - 4)$ (3) $3(x^2 - 1)$

例題6 恒等式か、方程式か

次の等式は、恒等式ですか、方程式ですか。方程式なら、成り立つ x も求めましょう。

(1) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ (2) $(x + 2)^2 = x^2 + 4$

考え方 はじめに $x = 0, 1$ などを入れて、合わない x がないか調べます。そのあと左辺を展開して、右辺とくらべます。

しき (1) 左辺を展開すると $x^2 + 4x + 4$ 。右辺とまったく同じ

(2) $x = 1$ なら、左辺は9、右辺は5で、ちがう

左辺を展開して $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4$

両辺から $x^2 + 4$ をひいて $4x = 0$ 。だから $x = 0$

こたえ (1) 恒等式 (2) 方程式。成り立つのは $x = 0$ のときだけ

じぶんでとこう5

きょうつういんすう
共通因数でくくりましょう。

(1) $6x^2 + 18x - 24$

(2) $5t^2 - 20t$ (3) $4x^2 - 4$

じぶんでとこう6

こうとうしき ほうていしき ほうていしき
恒等式か、方程式か。方程式なら

x も求めましょう。

(1) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

(2) $(x - 3)^2 = x^2 - 9$

れいだい けいすう くら かず き
例題7 係数を比べて、数を決める

つぎ とうしき こうとうしき
次の等式が恒等式になるように、数を決めましょう。

(1) $x^2 + 8x + 20 = (x + p)^2 + q$ (2) $3x + 7 = a(x + 2) + b$

かんが かつ う へん てんかい おな じ すう けいすう ひと
考え方 右辺を展開して、同じ次数の係数どうしを等しいとおきます。

しき (1) 右辺を展開すると $x^2 + 2px + p^2 + q$

x の係数を比べて $2p = 8$ 。だから $p = 4$

かず こう くら
数の項を比べて $p^2 + q = 20$ 。 $16 + q = 20$ だから $q = 4$

(2) 右辺を展開すると $ax + 2a + b$

x の係数を比べて $a = 3$

かず こう くら
数の項を比べて $2a + b = 7$ 。 $6 + b = 7$ だから $b = 1$

こたえ (1) $p = 4$ 、 $q = 4$ (2) $a = 3$ 、 $b = 1$

 例題 8 数を代入して、数を決める

$x + 7 = A(x + 3) + B(x - 1)$ が恒等式になるように、数 A 、 B を決めましょう。係数を比べる方法でも確かめましょう。

考え方 $x = 1$ なら $x - 1 = 0$ で B が消えます。 $x = -3$ なら $x + 3 = 0$ で A が消えます。

しき $x = 1$ を入れる： $1 + 7 = A \times 4 + B \times 0$

$$8 = 4A \text{ なので } A = 2$$

$x = -3$ を入れる： $-3 + 7 = A \times 0 + B \times (-4)$

$$4 = -4B \text{ なので } B = -1$$

確かめ：右辺を展開すると $(A + B)x + (3A - B)$

$A + B = 2 - 1 = 1$ 、 $3A - B = 6 + 1 = 7$ で、左辺 $x + 7$ と合う

こたえ $A = 2$ 、 $B = -1$

 じぶんでとこう 7

恒等式になるように決めましょう。

(1) $x^2 + 10x + 30 =$

$$(x + p)^2 + q$$

(2) $4x + 5 = a(x + 1) + b$

 じぶんでとこう 8

次の式が恒等式になるように A 、 B を決め、係数を比べる方法でも確かめましょう。

$$6x + 4 = A(x + 2) + B(x - 2)$$



例題 9

平方完成して、いちばん小さい値を求める

次の式を平方完成しましょう。(1) は、いちばん小さい値と、そのときの x も求めましょう。

(1) $x^2 + 4x + 7$ (2) $x^2 - 6x + 5$ (3) $x^2 + 3x + 1$

考え方

x の係数の半分の p として $(x + p)^2$ を作り、たした p^2 をひいて返します。(3) は、半分数になります。

しき

(1) 4 の半分は 2。 $(x + 2)^2 - 4 + 7 = (x + 2)^2 + 3$

$(x + 2)^2$ は 0 かプラスなので、 $x = -2$ のときいちばん小さい

(2) -6 の半分は -3。 $(x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$

(3) 3 の半分は $\frac{3}{2}$ 、その 2 乗は $\frac{9}{4}$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

こたえ

(1) $(x + 2)^2 + 3$ 。 $x = -2$ のときいちばん小さく、3

(2) $(x - 3)^2 - 4$ (3) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$



じぶんでとこう 9

平方完成しましょう。(1) は、いちばん小さい値と、そのときの x も求めましょう。

(1) $x^2 + 8x + 10$

(2) $x^2 - 10x + 30$

(3) $x^2 + 5x + 2$

例題 10 x^2 の係数が 1 でない平方完成と、ボールの最高点 さいこうてん

(1) $2x^2 - 8x + 5$ を平方完成しましょう。

(2) 高さ 1m の所から 10m/s で真上に投げたボールの高さは、
 $h = 10t - 5t^2 + 1$ (m) です。いちばん高くなるのは何秒後で、何 m
 ですか。

かんが かんた 考え方 x^2 (t^2) の係数で x^2 と x の項をくくり、かつこの中を平方完成
 します。

しき (1) $2(x^2 - 4x) + 5 = 2\{(x - 2)^2 - 4\} + 5$
 $= 2(x - 2)^2 - 8 + 5 = 2(x - 2)^2 - 3$

(2) $h = -5(t^2 - 2t) + 1 = -5\{(t - 1)^2 - 1\} + 1$
 $= -5(t - 1)^2 + 5 + 1 = -5(t - 1)^2 + 6$

$5(t - 1)^2$ は 0 かプラス。6 からそれをひくので、
 h は $t = 1$ のときにいちばん大きく 6

こたえ (1) $2(x - 2)^2 - 3$ (2) 1 秒後に 6m

じぶんどこう 10

(1) $3x^2 + 12x + 7$ を平方完成しましょう。

(2) 高さ 2m の所から 10m/s で真上に投げたボールの高さは
 $h = 10t - 5t^2 + 2$ (m) です。いちばん高くなるのは何秒後で、何 m
 ですか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

$(1+h)^2$ のまん中^{なか}をわすれる

✗ $(1+h)^2 = 1+h^2$

○ $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$

$h=0.1$ なら $1.1^2=1.21$ ですが、 $1+0.1^2=1.01$ で合いません。正方形^{せいほうけい}の図^{けいず} (図2) のオレンジの長方形^{ちやうほうけい} 2 まい^ぬ $2h$ が抜けています。

⚠ まちがえやすいところ

$(a+b)(a-b)$ の符号^{ふごう}

✗ $(x+3)(x-3) = x^2+9$

○ $(x+3)(x-3) = x^2-9$

最後の組み合わせ^{さいごくあ}は $3 \times (-3) = -9$ です。プラス×マイナスはマイナスです (2-2)。 $x=1$ で確かめると、 $4 \times (-2) = -8$ 、 $1-9 = -8$ です。

⚠ まちがえやすいところ

「 $x=1$ を入れた^いから、 $x=1$ のときだけの話^{はなし}？」

✗ $x=1$ を入れて求めた^{もと} $A=3$ は、 $x=1$ のときだけ正しい^{ただ}

○ 恒等式^{こうとうしき}なので、 $A=3$ 、 $B=2$ はどの x でも正しい^{ただ}

$x=1$ は B を消^けすために選^{えら}んだだけ。 $x=10$ でも、左^{ひだり}は 51、右^{みぎ}は $33+18=51$ です。

⚠ まちがえやすいところ

平方完成で、たした数を返す

✗ $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 10$

○ $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 - 9 + 10 = (x + 3)^2 + 1$

$(x + 3)^2$ を展開すると $x^2 + 6x + 9$ で、9 が多すぎます。うめた角の 9 (図 11 の赤) をひいて返します。

🔗 物理・工学ではこう使う

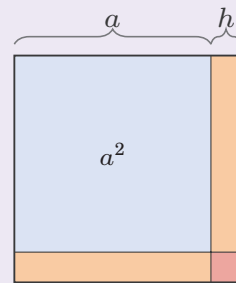
熱でふくらむ鉄の板

鉄は、温度が 1°C 上がるごとに、1 m あたり約 0.012 mm のびます。1 辺 1000 mm の正方形の鉄板が 50°C あたたまると、1 辺が 0.6 mm のびます ($0.012 \times 50 = 0.6$)。ふえる面積は、 $(a + h)^2 - a^2 = 2ah + h^2$ の $a = 1000$ 、 $h = 0.6$ で、

$$2 \times 1000 \times 0.6 + 0.6^2 = 1200 + 0.36 \text{ (mm}^2\text{)}$$

です。 h^2 の 0.36 は、1200 にくらべてとても小さいので、ほとんど $2ah$ だけで計算できます。

橋やレールのつなぎ目にすき間をあけておく大きさは、このような計算で決めます (5-8 の「小さいあいだは、かけ算で近似」につながります)。



ぶんすう わ ぶ ぶんぶんすうぶんかい 分数を分ける：部分分数分解

道具 7~9 を全部使うと、分数の式を、かんたんな分数の和や差に分けられます。第 9 巻で機械の動きを調べるときに使う計算です。

1 かず ぶんすう み 数の分数で見る

通分すると (2-4)、 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ です。6 は 2×3 なので、 $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 。同
じように、 $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ です。分母が
け算の分数が、2 つの分数のひき算に分
れました。

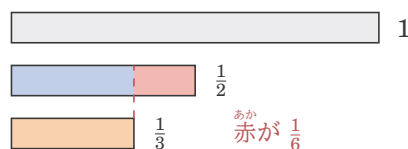


図 12 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2 も じ しき かず 文字の式で：わからない数を A 、 B とおく

$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ を、分母が $x+1$ と $x+2$ の 2 つの分数に分けます。分子は
わからないので A 、 B とおき、

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

がどんな x でも成り立つ (恒等式になる) ように A 、 B を決めます。両辺に
 $(x+1)(x+2)$ をかけて分母をはらうと (2-14)、左辺は 1、右辺は約分されて
 $A(x+2)$ と $B(x+1)$ になります。

$$1 = A(x+2) + B(x+1) \quad (\text{分数のない恒等式})$$

方法 1：係数を比べる (道具 8) 右辺 $= (A+B)x + (2A+B)$ 、左辺 $= 0x + 1$
なので、 $A+B=0$ 、 $2A+B=1$ 。2 つめから 1 つめをひいて $A=1$ (3-6)、
だから $B=-1$ 。

方法 2：数を代入する (道具 9) $x=-1$ で B の項が消えて $1=A \times 1$ 、 $A=1$ 。
 $x=-2$ で A の項が消えて $1=B \times (-1)$ 、 $B=-1$ (分母をはらった式なの
で、 $x=-1$ 、 -2 を入れてよい。道具 9 のせいかくに言う②)。

2通りとも $A = 1$ 、 $B = -1$ なので、

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

このように分数の式を分けることを**部分分数分解**といいます。右の表で確かめると、 $x = 1$ の行は①そのものです。

x	左辺	右辺
0	$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{20}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

例題 11 部分分数分解

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ が恒等式になるように A 、 B を決め、 $\frac{1}{x(x+1)}$ を部分分数分解しましょう。

考え方 分母をはらってから数を代入し、係数を比べて確かめます。

しき 両辺に $x(x+1)$ をかける： $1 = A(x+1) + Bx$

$x = 0$ を入れる： $1 = A \times 1 + B \times 0$ なので $A = 1$

$x = -1$ を入れる： $1 = A \times 0 + B \times (-1)$ なので $B = -1$

確かめ：右辺 $= (A+B)x + A$ 。 $A+B=0$ 、 $A=1$ で合う

こたえ $A = 1$ 、 $B = -1$ 。 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

じぶんでこう 11

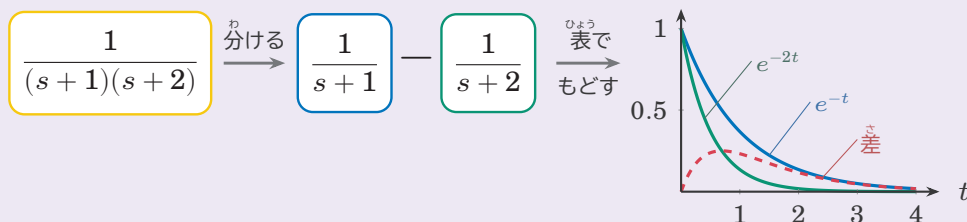
$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ が恒等式になるように A 、 B を決めて部分分数分解し、係数を比べる方法でも確かめましょう。

物理・工学ではこう使う

制御工学：分けると、動きが読める

機械を思いどおりに動かす計算（制御）では、ラプラス変換で、動きを s という文字の分数の式にします（ s とラプラス変換は第9巻で学びます）。

$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ のままでは動きがわかりませんが、②と同じ計算で分けると、1つずつは表で引ける形で、「すぐ落ち着く動き」（倍々でへる指数関数、3-11. 5-14 の e で e^{-t} 、 e^{-2t} と書く）にもどせます。全体は、その差です（9-7）。



しょうまつもんだい
章末問題

3-8 のまとめ

基本



1 次の計算をしましょう（例題1）。(1) $5a \times (-2ab)$ (2) $(-3x)^2$

2 次の式を展開しましょう（例題2・例題3）。

(1) $(x+2)(y-5)$ (2) $(2x-1)(x+3)$ (3) $(x-5)^2$

(4) $(6-2x)^2$ (5) $(t+5)(t-3)$ (6) $(x+9)(x-9)$

3 くふうして計算しましょう（例題4）。(1) 201^2 (2) 1.05^2 (3)

31×29

4 きょうつういんすう 共通因数でくくりましょう (れいだい 例題 5)。 (1) $8x^2 - 24x + 16$ (2) $3x^2 + 15x$

5 つぎ 次の等式は、こうとうしき 恒等式ですか、ほうていしき 方程式ですか。ほうていしき 方程式なら、な た 成り立つ x も もと 求めましょう (れいだい 例題 6)。 (1) $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$ (2) $(x+1)^2 = x^2 + 1$

6 つぎ 次の式を平方完成し、いちばん小さい値と、そのときの x を もと 求めましょう (れいだい 例題 9)。 (1) $x^2 - 4x + 7$ (2) $x^2 + 2x - 3$

チャレンジ ★★

7 $7x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$ が こうとうしき 恒等式になるように、 A, B を決めましょう。かず 数を代入する ほうほう 方法と、けいすう 係数を くら 比べる ほうほう 方法の両方で求めましょう (れいだい 例題 7)。
・ れいだい 例題 8)。

8 まうえ 真上に投げたボールの高さが $h = 30t - 5t^2$ (m) のとき、へいほうかんせい 平方完成して、いちばん たか 高くなる じ とき 時刻と たか 高さを もと 求めましょう (れいだい 例題 10)。

9 $2x^2 + 12x + 13$ を へいほうかんせい 平方完成し、いちばん ちい 小さい あた 値を もと 求めましょう (れいだい 例題 10)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ しき かっこのある式を展開し、めんせき 面積の図で説明できる。 → 221 ページ
- ☐ こうとうしき 恒等式の係数を、2 通りの方法で決められる。 → 229 ページ
- ☐ へいほうかんせい 平方完成して、いちばん ちい 小さい・おお 大きい値を よ 読める。 → 237 ページ



ミナ

しき 式の形を変えると、み 見えることが変わるね。つぎ 次の章では、へいほうかんせい 平方完成から ほうぶつせん 放物線 よ のてっぺんを読むよ。

第2部 曲がったグラフ

★★～★★★★

3-9

ほうぶつせん
放物線と $y = ax^2$

道しるべ この章の前に 2-13 2-15 3-5 3-8 この章の先に 3-10 3-16 5-1 5-2

この章でできるようになること

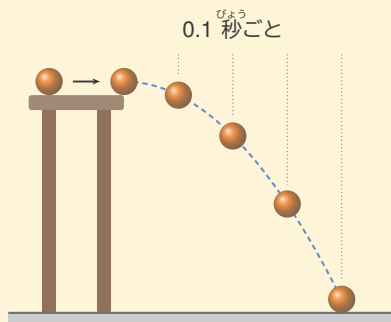
- ★★ 表から「 y は x の2乗に比例する」を見つけ、 $y = ax^2$ の式とグラフ(放物線)に表せる。
- ★★ a の符号や大きさとグラフの形の関係、変化の割合が一定でないことを説明できる。
- ★★★ 平方完成で放物線の頂点を求め、範囲があるときの最大・最小を求められる。

? はてな?

机の上を転がってきたボールが、はしか
ら飛び出して、床に落ちました。0.1秒
ごとにとった写真を重ねると、右の図の
ようになりました。

ボールは、まっすぐ下には落ちません。
ななめの直線にもなりません。きれいに
曲がった線をえがいています。

この曲線は、どんな形なのでしょう。式
で書けるのでしょうか。



△ やってみよう 写真から、ボールの位置を読もう

はてな？ の写真に、10 cm ごとの目もりの方眼をかさねて、ボールのまん中の位置を読みとりました。「横」は机のはしから右へ進んだ長さ、「下がった長さ」は机のはしの高さから下がった長さです。

飛び出してから時間 t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4
横 x (m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8
下がった長さ y (m)	0	0.05	0.20	0.45	0.80

- 横 x は、0.1 秒ごとに何 m ずつふえているかな？
- 時間 t が 0.1 秒から 0.2 秒へ 2 倍、0.3 秒へ 3 倍、0.4 秒へ 4 倍になると、下がった長さ y は何倍になるかな？
- 2-13 の「落ちる距離」の式 $5t^2$ に、 $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ を入れて計算し、表の y とくらべよう（電卓を使ってよい）。

①の横は、0.1 秒ごとに 0.2 m ずつ、同じだけふえています。1 秒あたりにすると $0.2 \div 0.1 = 2$ で、2 m/s の一定の速さです。横の動きは、時間に比例してします (2-15)。

②の下がった長さは、0.05 の 4 倍が 0.20、9 倍が 0.45、16 倍が 0.80 です。時間が 2 倍で 4 倍、3 倍で 9 倍、4 倍で 16 倍。2 倍・3 倍・4 倍にはなっていません。

③では、たとえば $5 \times 0.3^2 = 5 \times 0.09 = 0.45$ で、表とぴったり合います。下がった長さは、2-13 で作った「落ちる距離」 $5t^2$ そのものです。

横は「比例」、たては「2 乗に比例」。この 2 つを組み合わせると、ボールの通り道の曲線が決まります。この章で、その曲線の正体をつきとめましょう。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

2-15 $y = ax^2$ の形を「 y は x の 2 乗に比例する」という。 x が 2 倍になると、 y は $2 \times 2 = 4$ 倍。

2-13 落ちる距離は $5t^2$ (m)。 t に $1 + h$ を入れるときは、かっこごとに入れて $5(1 + h)^2$ 。

3-2 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y の所。マイナスなら左へ・下へ。

3-5 変化の割合 = y の変化量 $\div x$ の変化量。1 次関数 $y = ax + b$ では、いつも a 。

3-8 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。平方完成： $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$ 。



ソラ

横はまっすぐ、たては 2 乗。2 つを合わせると、どんな線になるんだろう？

すうがく 数学の道具

1 2 乗に比例する： $y = ax^2$

やってみようの下がった長さ y が、時間 t とどんな関係にあるか、表で調べます。比例なら、 $y \div t$ が一定になるはずでした (2-15)。計算してみると、次の表の 4 行めのように、0.5、1、1.5、2 とふえていきます。一定ではないので、比例ではありません。

そこで、 t のかわりに t^2 ($t \times t$) でわってみます (5 行め)。

時間 t (s)	0.1	0.2	0.3	0.4
t^2 ($t \times t$)	0.01	0.04	0.09	0.16
下がった長さ y (m)	0.05	0.20	0.45	0.80
$y \div t$	0.5	1	1.5	2
$y \div t^2$	5	5	5	5

表1 $y \div t$ はふえていくが、 $y \div t^2$ はいつも 5。

たとえば $t = 0.3$ では、 $0.45 \div 0.09 = 5$ です。 $y \div t^2$ は、どの時間でも 5 になりました。 y は t^2 に比例していて、 $y = 5t^2$ と書けます。

このように、 y が x^2 に比例するとき、「 y は x の **2 乗に比例する**」といい、式は

$$y = ax^2$$

と書けます。 a を**比例定数**といいます。比例定数は、 $y = ax^2$ の両辺を x^2 でわって (2-14)、 $a = \frac{y}{x^2}$ で求められます (x が 0 のときはわれないので、0 でない x を使います)。落ちる距離の 5 は、地球の重力で、1 秒ごとに約 10 m/s ずつ速くなることから出てきた数でした (2-13。くわしくは 9.8 m/s²、5-5)。

なぜ、2 倍で 4 倍になるの？ その 1：式で

$y = ax^2$ の x を 2 倍の $2x$ にして、かっごとに入れます (2-13)。

$$a(2x)^2 = a \times 2x \times 2x = 4 \times ax^2$$

もとの ax^2 の 4 倍です。2 が 2 回かけられるので、 $2 \times 2 = 4$ 倍になるのです。3 倍なら $3 \times 3 = 9$ 倍、4 倍なら $4 \times 4 = 16$ 倍です。 a がどんな数でも同じです。

なぜ、2倍で4倍になるの？ その2：正方形の面積で

1辺が x の正方形の面積は、 $x \times x = x^2$

です。面積は、1辺の2乗に比例します

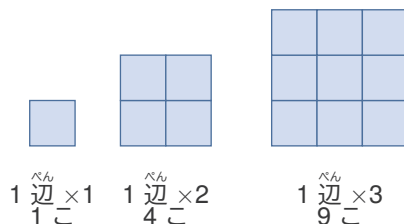
($y = x^2$ 、比例定数は1)。1辺を2倍にす

ると、右の図のように、もとの正方形が

たてに2つ、横に2つで、 $2 \times 2 = 4$ こ入

ります。1辺を3倍にすると、 $3 \times 3 = 9$

こです。



比例とくらべる

同じ x の値で、比例 $y = 2x$ と、2乗に比例 $y = 2x^2$ をくらべてみましょう。

x	1	2	3	4
$y = 2x$ (比例)	2	4	6	8
$y = 2x^2$ (2乗に比例)	2	8	18	32

表2 x が1から4へ4倍になると、 $2x$ は4倍、 $2x^2$ は16倍。

$x = 1$ では同じ2ですが、 x が大きくなるほど、2乗に比例するほうがずっと速くふえます。 $x = 4$ では、 $2 \times 4^2 = 2 \times 16 = 32$ です。

2 グラフは「放物線」

いちばんかんたんな $y = x^2$ (比例定数1)のグラフをかきます。 x には、マイナスの数も入れます。マイナスの数の2乗は、 $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ のようにプラスです (2-2：マイナス×マイナスはプラス)。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

表3 $y = x^2$ の表。0をはさんで、同じ数が左右にならぶ。

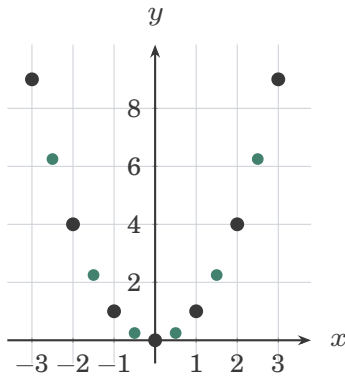


図1 黒は表の点。緑は $x = \pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5$ の点。

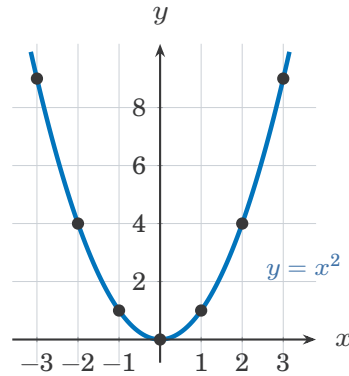
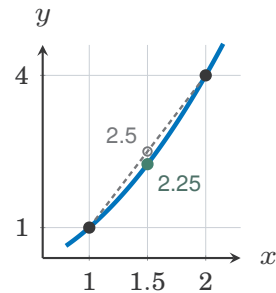


図2 点を、なめらかな曲線でつなぐ。

表の点（黒）をかいたら、 $x = 0.5, 1.5$ などのあいだの点（緑）も計算してかいてみます。たとえば $1.5^2 = 2.25$ です。点をふやすほど、点はなめらかな曲線の上にならびます。

なぜ、おれ線でつながないの？

点 $(1, 1)$ と $(2, 4)$ を直線でつなぐと、まん中の $x = 1.5$ では、高さが 1 と 4 のまん中の $(1 + 4) \div 2 = 2.5$ になります。でも、本当の y は $1.5^2 = 2.25$ で、直線より少し下です。 $y = x^2$ のグラフは、点と点のあいだで、直線より下をとって曲がっています。だから、おれ線ではなく、なめらかな曲線でつなぎます。



このような形の曲線を、**放物線**といいます。「物を放ったときにえがく線」という意味の名前です。はてな？ のボールの通り道も、じつは放物線です（274 ページで確かめます）。英語では parabola（パラボラ）といいます。

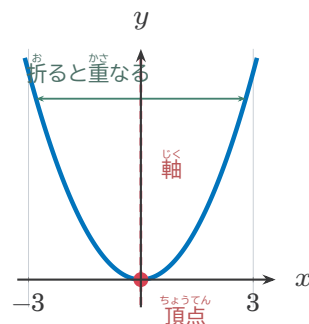
放物線の形の特ちょう

1 左右対称

$x = 3$ と $x = -3$ は、どちらも $y = 9$ です。2乗すると、符号のちがいが消えるからです。だから、グラフを y 軸で折ると、左右がぴったり重なります。このように、折って重なる形を線対称な形といいます。

2 軸

折り目になる直線を、放物線の軸といいます。 $y = x^2$ の軸は y 軸 ($x = 0$ の直線) です。



3 頂点

放物線と軸の交わる点を、放物線の頂点といいます。 $y = x^2$ の頂点は原点 $(0, 0)$ で、グラフのいちばん低い点です。

どんな数も、2乗すると0か、0より大きくなります (2-8)。だから、 $y = x^2$ のグラフは、原点のほかは、ぜんぶ x 軸より上にあります。

たいせつ

放物線にかく手順

- ① 頂点と、その左右の点を3つずつくらい計算して、表にする。
- ② 点を方眼にかく。左右対称になっているか確かめる。
- ③ 点を、なめらかな曲線でつなぐ。頂点のまわりは、とがらせずに丸かく。
- ④ 線の先は、点の外まで少しのばしてよい (式がそのまま続くとき)。

3 a の符号と大きさで、形が変わる

比例定数 a を変えると、放物線の形はどう変わるでしょう。 $a = 2, 1, \frac{1}{2}$ の3つで表を作ります。

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	0.5	0	0.5	2

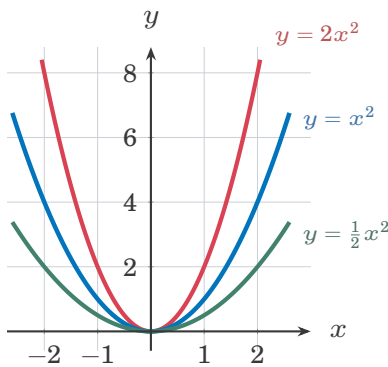


図3 a が大きいほど、細い形になる。

どれも、原点が頂点で、 y 軸が軸です。 $x = 2$ のときを見ると、 y は $2 \times 4 = 8$ 、 $1 \times 4 = 4$ 、 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ です。同じ x でくらべると、 y は a に比例しています。 a が大きいほど、同じ横の位置で高くなるので、放物線はたてに引きのばされて、細い形になります。 a が小さいほど、平たく開いた形になります。

a がマイナスのとき

$y = -x^2$ の表を作ると、 $y = x^2$ の数に、すべてマイナスがつきます。 $x = 2$ なら $-(2^2) = -4$ です (2乗を先に計算してから、マイナスをつけます。 $(-2)^2$ とはちがいます。2-12)。

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	-0.5	0	-0.5	-2

どの点も、 $y = x^2$ の点を x 軸で折り返した所にきます。だから、 $y = -x^2$ のグラフは、 $y = x^2$ を上下にひっくり返した形になります。頂点の原点が、こんどはいちばん高い点です。 a がプラスのときは、谷のような上に開いた形、マイナスのときは、山のような下に開いた形です。

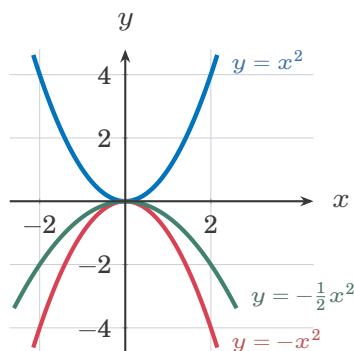


図4 a がマイナスなら、下に開いた形。

たいせつ

$y = ax^2$ のグラフは、原点を頂点とし、 y 軸を軸とする放物線。

$a > 0$ なら上に開いた形（頂点がいちばん低い）。 $a < 0$ なら下に開いた形（頂点がいちばん高い）。

a の大きさ（符号をのぞいた大きさ）が大きいほど、細い形になる。

4 変化の割合は、一定ではない

1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は、どこでくらべても a で一定でした(3-5)。だからグラフは直線です。 $y = ax^2$ ではどうでしょう。落ちるボール $y = 5x^2$ (x は時間 [s]、 y は落ちた距離 [m]) で調べます。

x (s)	0	1	2	3
$y = 5x^2$ (m)	0	5	20	45

x が1ずつふえるたびに、 y の変化量は $5 - 0 = 5$ 、 $20 - 5 = 15$ 、 $45 - 20 = 25$ です。 x の変化量はどれも1なので、変化の割合は5、15、25で、どんどん大きくなります。 x が0から3までの全体では、

$$(y \text{ の変化量}) \div (x \text{ の変化量}) = (45 - 0) \div (3 - 0) = \frac{45}{3} = 15$$

です。変化の割合は、どこからどこまでをくらべるかで変わり、一定ではありません。

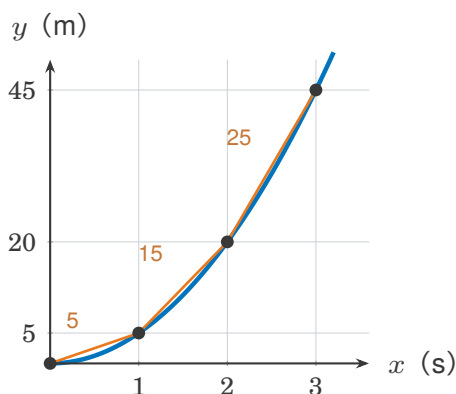


図5 オレンジの線の傾きが変化の割合。

グラフで見ると、変化の割合は、2点を結ぶ直線（オレンジ）の傾きです（3-5）。右へ行くほど、オレンジの線は急になります。放物線がだんだん急になっていくのは、このためです。 x が時間、 y が位置なので、これは x - t グラフ（3-4）と同じ形です。オレンジの線の傾きは、その1秒間の平均の速さ（5 m/s、15 m/s、25 m/s）を表します（3-5）。

あいだを短くしていく

こんどは、 x が1から $1+h$ まで変わるときの変化の割合を、文字のまま計算してみます。 h は「1からどれだけ進んだか」を表す数で、1、0.5、0.1 など、いろいろな数が入ります。

1 $x = 1 + h$ のときの y を求める

$y = 5x^2$ の x に、 $1+h$ をかっごとに入れます（2-13）。 $(1+h)^2$ は、展開すると $1+2h+h^2$ です（3-8: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の a が1、 b が h ）。

$$5(1+h)^2 = 5(1+2h+h^2) = 5 + 10h + 5h^2$$

2 y の変化量を求める

$x = 1$ のときの y は $5 \times 1^2 = 5$ です。あと一まえて、

$$(5 + 10h + 5h^2) - 5 = 10h + 5h^2$$

3 x の変化量 h でわる

x の変化量は $(1+h) - 1 = h$ です。1つずつ h でわります（2-12）。

$$\frac{10h + 5h^2}{h} = \frac{10h}{h} + \frac{5h^2}{h} = 10 + 5h$$

確かめてみましょう。 $h = 1$ (1 から 2 まで) なら $10 + 5 \times 1 = 15$ で、上で求めた 15 と合います。 h を小さくしていくと、次のようになります。

h	1	0.5	0.1	0.01
変化の割合 $10 + 5h$	15	12.5	10.5	10.05

表4 h を小さくすると、変化の割合は 10 にかぎりなく近づく。

あいだを短くするほど、変化の割合は 10 に近づいていきます。これは、「ちょうど 1 秒のときの、その瞬間の速さ」が 10 m/s であることを表しています。第 5 巻の 5-1・5-2 で、この考えを使って「瞬間の速さ」を求め、それが微分になります。

もっと知りたい ★★

1 秒ごとに落ちる距離は、5、15、25、35、...

落ちるボールが、はじめの 1 秒、次の 1 秒、その次の 1 秒...に落ちる距離は、5、15、25、35 m で、 5×1 、 5×3 、 5×5 、 5×7 です。1、3、5、7 と、奇数が並びます。400 年ほど前に、イタリアのガリレオが、坂を転がる球で見つけたきまりです。

なぜ奇数になるかは、展開で説明できます (3-8)。 n 秒から $n + 1$ 秒までに落ちる距離は

$$5(n + 1)^2 - 5n^2 = 5(n^2 + 2n + 1) - 5n^2 = 5(2n + 1)$$

です。 $2n + 1$ は、 $n = 0, 1, 2, 3$ で 1、3、5、7 と、いつも奇数です。

5 放物線を動かす： $y = a(x - p)^2 + q$

投げ上げたボールのグラフは、頂点が原点にはありません。頂点がほかの所に
ある放物線は、どんな式になるのでしょうか。 $y = x^2$ のグラフを、上下や左右に動かして考えます。

上に動かす： $y = x^2 + 2$

$y = x^2$ のどの y にも 2 をたすと、 $y = x^2 + 2$ です。

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = x^2 + 2$	6	3	2	3	6

どの点も、ちょうど 2 だけ上にきます。だから、グラフは $y = x^2$ を上へ 2 動かした放物線で、頂点は $(0, 2)$ です。 $y = x^2 - 3$ なら、下へ 3 動かした形です。

右に動かす： $y = (x - 2)^2$

こんどは、 x から 2 をひいてから 2 乗します。表を作ってみましょう。

x	-1	0	1	2	3	4	5
$x - 2$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

表 5 9、4、1、0、1、4、9 の並びが、 $x = 2$ を中心にしている。

y の数の並びは、 $y = x^2$ の表 (260 ページ) と同じ 9、4、1、0、1、4、9 です。ただし、0 になるのは $x = 0$ ではなく、 $x - 2 = 0$ になる $x = 2$ のときです。 $x = 3$ のときの y は、 $y = x^2$ の $x = 1$ のときと同じ 1 です。どの y の値も、 $y = x^2$ より右へ 2 だけずれた所に出てきます。

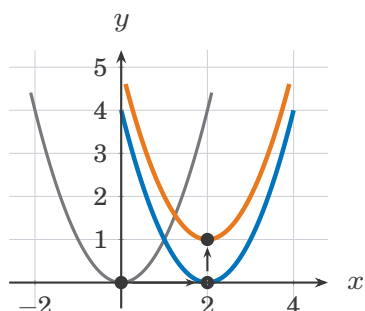


図6 灰色 $y = x^2$ 、青 $y = (x-2)^2$ 、オレンジ $y = (x-2)^2 + 1$ 。

だから、 $y = (x-2)^2$ のグラフは、 $y = x^2$ (灰色) を右へ2動かした放物線 (青) です。頂点は $(2, 0)$ 、軸は $x = 2$ の直線です。

「ひく2」なのに右へ？ $x-2$ が0になるのは、 x が2のときです。もとの頂点の役わりを、 $x=2$ がしているのです。 $y = (x+3)^2$ なら、 $x+3=0$ になる $x = -3$ が頂点なので、左へ3動かした形です。

右へも上へも動かす

$y = (x-2)^2 + 1$ は、 $y = (x-2)^2$ を、さらに上へ1動かした放物線 (オレンジ) です。頂点は $(2, 1)$ です。

$y = ax^2$ のときも同じです。まとめると、次のようになります。

たいせつ

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを

右へ p 、上へ q 動かした放物線。頂点は (p, q) 、軸は直線 $x = p$ 。

p がマイナスなら左へ、 q がマイナスなら下へ動かす。

たとえば $y = -2(x+1)^2 + 4$ は、 $x+1 = x - (-1)$ なので $p = -1$ 、 $q = 4$ です。 $y = -2x^2$ を左へ1、上へ4動かした、下に開いた放物線で、頂点 $(-1, 4)$ がいちばん高い点です。

2次関数

$y = (x-2)^2 + 1$ のかっこをはずすと (3-8)、

$$y = (x^2 - 4x + 4) + 1 = x^2 - 4x + 5$$

です。 $x^2 - 4x + 5$ のように、いちばん高い次数が2の式を2次式といいます(3-8)。 y が x の2次式で表される関数を、2次関数といいます。2次関数のグラフは、いつも放物線です。

では、反対に $y = x^2 - 4x + 5$ を見せられたら、頂点はどうやって見つけばよいでしょう。それが次の平方完成です。

6 平方完成で、頂点を見つける

3-8 で、 $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$ のように、2次式を「(かっこ)の2乗 + 数」の形に直しました。これを平方完成といいました。この形は、まさに $y = a(x - p)^2 + q$ の形です。

例 $y = x^2 + 6x + 10$ の頂点

3-8 のやり方を、もう一度1行ずつ書きます。

1 x の係数の半分を見つける

x の係数は6で、その半分は3です。 $(x + 3)^2$ を展開すると $x^2 + 6x + 9$ になり、 $x^2 + 6x$ の部分がそろからです。

2 9 をたして、9 をひく

+10 の前に、9 をたして9 をひきます。

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

9 をたしてすぐ9 をひいたので、式の値は変わっていません。

3 頂点を読む

$y = (x + 3)^2 + 1$ は、 $(x - (-3))^2 + 1$ なので、頂点は $(-3, 1)$ です。

なぜ、そこが頂点（いちばん低い点）なの？

理由は2つの方法で確かめられます。

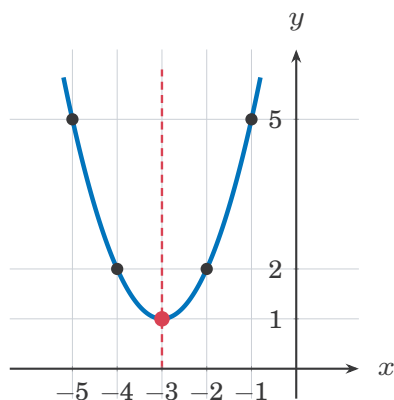
その1：2乗は0より小さくならない。

$(x+3)^2$ は、どんな x でも0以上です。
0になるのは、 $x+3=0$ の $x=-3$ のときだけです。だから $y=(x+3)^2+1$ は、いつも1以上で、ちょうど1になるのは $x=-3$ のときです。

その2：表で確かめる。

もとの式 $y=x^2+6x+10$ に数を入れると、右の表のように、 $x=-3$ の1がいちばん小さく、左右に同じ数になります。

x	$x^2+6x+10$
-5	$25-30+10=5$
-4	$16-24+10=2$
-3	$9-18+10=1$
-2	$4-12+10=2$
-1	$1-6+10=5$



グラフにすると、頂点 $(-3, 1)$ (赤) がいちばん低い点で、軸は直線 $x=-3$ (赤い点線) です。 $y=x^2$ を左へ3、上へ1動かした放物線です。式を見ただけでは頂点がわからなくても、平方完成すれば、計算でわかるのです。

図7 $y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$

x^2 の係数が 1 でないとき：投げ上げたボール

ボールを真上に、20 m/s の速さで投げ上げます（空気の抵抗は考えません）。もし重力がなければ、ボールは同じ速さで上がりつづけ、 t 秒後には $20t$ m の高さにいるはずですが（道のり＝速さ×時間）。でも、重力があるので、ボールはその高さから、落ちる距離の $5t^2$ m だけ下にきます（2-13）。だから、 t 秒後の高さ y [m] は、

$$y = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t$$

です。 t に 0 から 4 まですを入れると、高さは右の表のようになります。2 秒のときの 20 m がいちばん高そうです。

t (s)	$20t - 5t^2$ (m)
0	$0 - 0 = 0$
1	$20 - 5 = 15$
2	$40 - 20 = 20$
3	$60 - 45 = 15$
4	$80 - 80 = 0$

平方完成で確かめましょう。 t^2 の前に -5 がついているので、1 つ手順がふえます。

① t^2 の係数 -5 でくくる

$-5t^2 + 20t$ の 2 つの項を、どちらも -5 でわった形にします（3-8：共通因数でくくる）。

$$-5t^2 + 20t = -5(t^2 - 4t)$$

確かめ：かっこをはずすと $-5 \times t^2 = -5t^2$ 、 $-5 \times (-4t) = 20t$ で、もともどります。

② かっこのなかを平方完成する

t の係数 -4 の半分は -2 です。 $(t - 2)^2 = t^2 - 4t + 4$ なので、4 をたして 4 をひきます。

$$t^2 - 4t = t^2 - 4t + 4 - 4 = (t - 2)^2 - 4$$

3 もとの式にもどす

②の結果を、①のかっこのなかに入れます。

$$y = -5\{(t-2)^2 - 4\} = -5(t-2)^2 + (-5) \times (-4) = -5(t-2)^2 + 20$$

-5 を、 $(t-2)^2$ にも -4 にもかけるのを忘れないようにします（分配法則、2-12）。

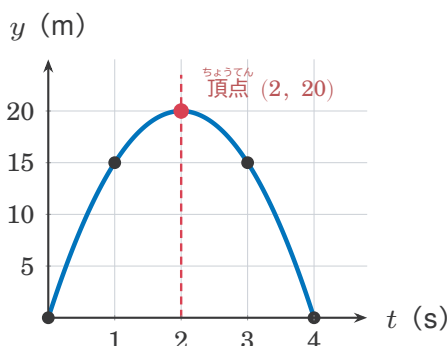


図8 $y = -5(t-2)^2 + 20$ のグラフ。

$y = -5(t-2)^2 + 20$ は、頂点が $(2, 20)$ の、下に開いた放物線です。 $(t-2)^2$ は0以上なので、それに-5をかけた $-5(t-2)^2$ は0以下です。だから y は20をこえず、ちょうど20になるのは $t=2$ のときです。ボールは、投げてから2秒後に、いちばん高い20mに届きます。表で見た答えと合いました。

注意：このグラフは、ボールの通り道ではない

真上に投げたボールは、まっすぐ上がって、まっすぐ下りてきます。上のグラフが山の形なのは、横軸が「時刻」だからです。ボールが横に動いているわけではないです。

7 範囲があるときの、最大と最小

x の範囲（変域、3-1）が決まっているときは、グラフのうち、その範囲の部分だけを見ます。いちばん大きい y の値を最大値、いちばん小さい値を最小値といいます。

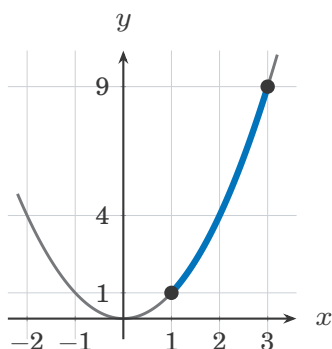


図9 $1 \leq x \leq 3$ のとき。最大9、最小1。

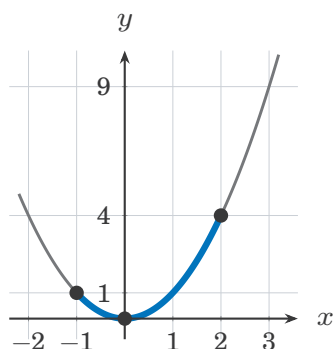


図10 $-1 \leq x \leq 2$ のとき。最大4、最小0。

$y = x^2$ で、 $1 \leq x \leq 3$ のとき (左の図)

この範囲には、頂点 $x = 0$ が入っていません。 x が1から3へふえると、 y は1から9へ、ずっとふえます。だから、最小値は $x = 1$ のときの1、最大値は $x = 3$ のときの9です。

$y = x^2$ で、 $-1 \leq x \leq 2$ のとき (右の図)

こんどは、頂点 $x = 0$ が範囲の中に入ります。下がってから上がるので、いちばん低いのは頂点で、最小値は0です。いちばん高いのは、はしのどちらかです。 $x = -1$ では1、 $x = 2$ では4なので、最大値は $x = 2$ のときの4です。 $x = -1$ のときの1を最小値だと思ってしまわないように注意しましょう。

たいせつ

範囲があるときの最大・最小は、次の順にさがす。

- ① 頂点が範囲の中にあるかを見る。
- ② 範囲のはしの2つの値と、(中にあれば) 頂点の値を計算する。
- ③ その中で、いちばん大きいのが最大値、いちばん小さいのが最小値。

8 はてな？ の答え：横は比例、たては2乗に比例

【はてな？】のボールにもどりましょう。やってみようの表から、2つのことがわかりました。

- 横は、 2 m/s の一定の速さで進む： $x = 2t$
(飛び出したあと、横にはおす力も引く力もはたらかないので、横の速さは変わりません。空気の抵抗は考えません。)

- たては、落ちるボールと同じに下がる： $y = 5t^2$

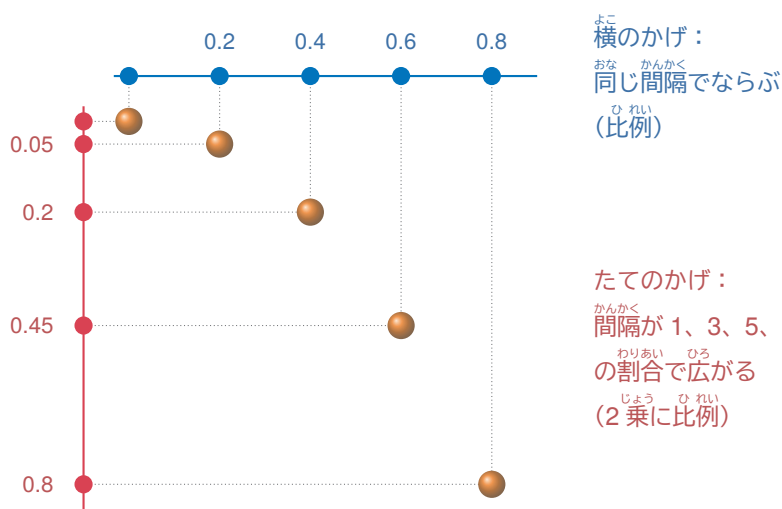


図 11 ボールの位置を、上（青）と左（赤）にうつした「かけ」。数の単位は m。

ボールの位置を、真上と真横から見た「かけ」に分けてみましょう。上のかげ（青）は、同じ間隔でならびます。左のかげ（赤）は、0.05、0.2、0.45、0.8 と、間隔がだんだん広がります。2つのかけを合わせた点が、ボールの位置です。

この2つの式から t を消して、 x と y だけの関係にします。

1 $x = 2t$ から、 t を x の式で表す

両辺を2でわると (2-14)、 $t = \frac{x}{2}$ です。「横に x [m] 進んだのは、 $\frac{x}{2}$ 秒後」という意味です。

2 $y = 5t^2$ の t に、かっこごとに入れる

t のところに $\frac{x}{2}$ を入れます (2-13)。分数の 2 乗は、分子も分母も 2 乗します。

$$y = 5 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 5 \times \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4}x^2 = 1.25x^2$$

3 表で確かめる

表の x を入れてみます。

$$x = 0.4 \text{ のとき } 1.25 \times 0.4^2 = 1.25 \times 0.16 = 0.2$$

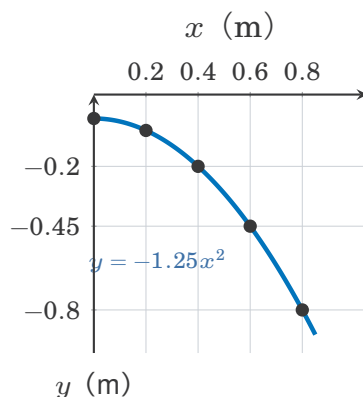
$$x = 0.8 \text{ のとき } 1.25 \times 0.8^2 = 1.25 \times 0.64 = 0.8$$

どちらも、表の下がった長さと同じです。表の $y \div x^2$ も、 $0.05 \div 0.04 = 1.25$ 、 $0.20 \div 0.16 = 1.25$ 、… と、いつも 1.25 です。

下がった長さ y は、横 x の 2 乗に比例し

ています。だから、ボールの通り道は放物線です。

図では下向きを+にしましたが、上向きを+にすると (+の向きは自分で決めてよい。3-2)、通り道は $y = -1.25x^2$ で、下を開いた放物線の右半分になります。机を飛び出した所が、放物線の頂点です。その瞬間、ボールは真横に動いていて、上にも下にも動いていないからです。



② はてな? の答え：ボールが横に一定の速さで進みながら、2 乗に比例して落ちていくので、通り道は放物線になります。ななめ上に投げたときも、横は一定の速さ、たては投げ上げと同じ式になるので、通り道はやはり放物線です。そのときは、山の頂点が、ボールのいちばん高い所になります。

この章で出てきたことば

2乗に比例 $y = ax^2$ の関係。 $a = \frac{y}{x^2}$ が比例定数。 x が2倍で y は4倍。

放物線 $y = ax^2$ や2次関数のグラフの形。物を放ったときの通り道の形。

軸・頂点 放物線を折って重なる折り目の直線が軸。軸と放物線の交わる点が頂点。

2次関数 y が x の2次式で表される関数。グラフは放物線。

最大値・最小値 範囲の中で、いちばん大きい値・いちばん小さい値。

例題でたしかめよう

例題1 2乗に比例する式を作る

y は x の2乗に比例し、 $x = 2$ のとき $y = 12$ です。 y を x の式で表し、 $x = 5$ のときと $x = -1$ のときの y を求めましょう。

考え方 2乗に比例するので、 $y = ax^2$ の形です。比例定数は $a = \frac{y}{x^2}$ で求めます。

しき $a = \frac{12}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$ わかっている $x = 2$ 、 $y = 12$ を使う
だから $y = 3x^2$

$x = 5$ のとき $y = 3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$ 、 $x = -1$ のとき
 $y = 3 \times (-1)^2 = 3$

こたえ $y = 3x^2$ 。 $x = 5$ のとき $y = 75$ 、 $x = -1$ のとき $y = 3$
(確かめ： x が2から4へ2倍なら、 y は $3 \times 16 = 48$ で、12の4倍。)

例題 2 表を作って、グラフをかく

次の関数について、 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ のときの y を求めて表にし、グラフをノートにかきましょう。

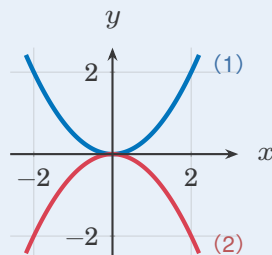
(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ (2) $y = -\frac{1}{2}x^2$

考え方 x の 2 乗を先に計算してから、 a をかけます。(2) は、(1) の y にマイナスをつけた値になります。

しき (1) $x = 2$ のとき $\frac{1}{2} \times 2^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
 $x = -1$ のとき $\frac{1}{2} \times (-1)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = 0.5$
(2) $x = 2$ のとき $-\frac{1}{2} \times 4 = -2$
 $x = -1$ のとき $-\frac{1}{2} \times 1 = -0.5$

ほかの x も同じ。 $x = 2$ と $x = -2$ は、同じ y になる。

x	-2	-1	0	1	2
(1) y	2	0.5	0	0.5	2
(2) y	-2	-0.5	0	-0.5	-2



こたえ 表と図のとおり。(1) は上に開いた放物線、(2) は下に開いた放物線で、どちらも頂点は原点、軸は y 軸。(2) は (1) を x 軸で折り返した形。

じぶんでところ1

y は x の2乗に比例し、 $x = 3$ のとき $y = 18$ です。 y を x の式で表し、 $x = 4$ のときと $x = -2$ のときの y を求めましょう。

じぶんでところ2

次の関数について、 $x = -2$ 、 -1 、 0 、 1 、 2 のときの y を求めて表にし、グラフをノートにかきましょう。

$$(1) y = \frac{1}{4}x^2$$

$$(2) y = -2x^2$$

例題3 変化の割合

$y = 2x^2$ について、次の変化の割合を求めましょう。

(1) x が1から3まで (2) x が1から $1+h$ まで

考え方 変化の割合 = y の変化量 $\div$ x の変化量 (3-5)。(2) は、 $1+h$ をかっこと入れ、 $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$ (3-8) を使います。

しき (1) $x = 1$ で $y = 2$ 、 $x = 3$ で $y = 2 \times 9 = 18$

$$\frac{18 - 2}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8$$

(2) $2(1+h)^2 = 2(1 + 2h + h^2) = 2 + 4h + 2h^2$

y の変化量は $(2 + 4h + 2h^2) - 2 = 4h + 2h^2$ 、 x の変化量は h

$$\frac{4h + 2h^2}{h} = \frac{4h}{h} + \frac{2h^2}{h} = 4 + 2h$$

確かめ： $h = 2$ なら $4 + 2 \times 2 = 8$ で、(1) と合う。

こたえ (1) 8 (2) $4 + 2h$

例題 4 頂点と軸を読む

次の放物線の頂点と軸を答え、上に開くか下に開くかを答えましょう。

(1) $y = (x - 3)^2 + 2$ (2) $y = -2(x + 1)^2 + 4$

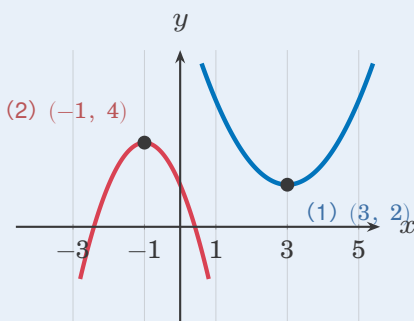
考え方 $y = a(x - p)^2 + q$ の形とくらべて、 p と q を読みます。 $x + 1$ は $x - (-1)$ と見ます。開き方は a の符号で決まります。

しき (1) $a = 1$ 、 $p = 3$ 、 $q = 2$

(2) $x + 1 = x - (-1)$ なので、 $a = -2$ 、 $p = -1$ 、 $q = 4$

こたえ (1) 頂点 (3, 2)、軸は直線 $x = 3$ 、上に開く

(2) 頂点 (-1, 4)、軸は直線 $x = -1$ 、下に開く



(1) は $y = x^2$ を右へ 3、上へ 2 動かした形 (青)。(2) は $y = -x^2$ を左へ 1、上へ 4 動かした形 (赤)で、頂点がいちばん高い点です。

じぶんでこう 3

$y = 3x^2$ について、次の変化の割合を求めましょう。

(1) x が 2 から 4 まで

(2) x が 2 から $2 + h$ まで

じぶんでこう 4

次の放物線の頂点と軸を答え、上に開くか下に開くかを答えましょう。

(1) $y = (x - 1)^2 - 5$

(2) $y = 3(x + 2)^2 - 1$

例題5 平方完成して頂点を求める

次の放物線の頂点を求めましょう。

(1) $y = x^2 - 4x + 7$ (2) $y = -5t^2 + 30t$

考え方 (1) x の係数 -4 の半分の -2 を使い、 $(x - 2)^2$ を作ります。

(2) 先に t^2 の係数 -5 でくくってから、かっこの中を平方完成します。

しき (1) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ なので、4 をたして 4 をひく

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

(2) $-5t^2 + 30t = -5(t^2 - 6t)$ -5 でくくる

$$t^2 - 6t = t^2 - 6t + 9 - 9 = (t - 3)^2 - 9 \quad -6 \text{ の半分は } -3$$

$$y = -5\{(t - 3)^2 - 9\} = -5(t - 3)^2 + 45 \quad -5 \times (-9) = 45$$

こたえ (1) 頂点 $(2, 3)$ (2) 頂点 $(3, 45)$

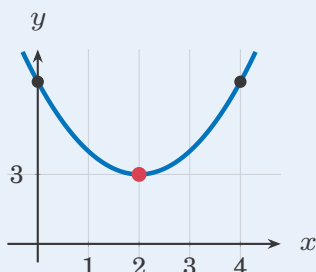


図12 (1) $y = (x - 2)^2 + 3$ 。 $x = 0$ で 7 (もとの式の7と合う)。

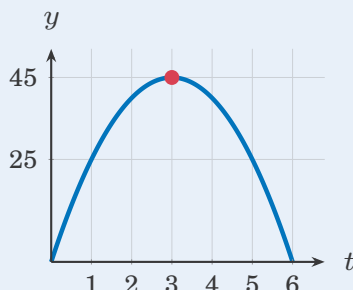


図13 (2) $y = -5(t - 3)^2 + 45$ 。
30 m/s で真上に投げたボールは、3 秒後に最高点 45 m に届く。

例題 6 範囲があるときの最大と最小

次の関数の最大値と最小値を求めましょう。

(1) $y = x^2$ ($1 \leq x \leq 3$)

(2) $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

(3) $y = -5(t-2)^2 + 20$ ($0 \leq t \leq 3$)

考え方 頂点^{ちやうてん}が範囲^{はん い}の中にあるかを見てから、はしの値^{あたい}と頂点^{ちやうてん}の値^{あたい}をくらべます。

しき (1) 頂点^{ちやうてん} $x = 0$ は範囲^{はん い}の外^{そと}。 $x = 1$ で 1、 $x = 3$ で 9

(2) 頂点^{ちやうてん} $x = 0$ は範囲^{はん い}の中で $y = 0$ 。 $x = -1$ で 1、 $x = 2$ で 4

(3) 頂点^{ちやうてん} $t = 2$ は範囲^{はん い}の中で $y = 20$ 。

$$t = 0 \text{ で } -5 \times 4 + 20 = 0, \quad t = 3 \text{ で } -5 \times 1 + 20 = 15$$

こたえ (1) 最大値^{さいだい ち} 9 ($x = 3$)、最小値^{さいしやう ち} 1 ($x = 1$)

(2) 最大値^{さいだい ち} 4 ($x = 2$)、最小値^{さいしやう ち} 0 ($x = 0$)

(3) 最大値^{さいだい ち} 20 ($t = 2$)、最小値^{さいしやう ち} 0 ($t = 0$)

じぶんでこう 5

次の放物線^{ほうぶつせん}の頂点^{ちやうてん}を求めましょう。

(1) $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $y = -5t^2 + 10t$

じぶんでこう 6

次の関数^{かんすう}の最大値^{さいだい ち}と最小値^{さいしやう ち}を求めましょう。

(1) $y = 2x^2$ ($1 \leq x \leq 2$)

(2) $y = 2x^2$ ($-3 \leq x \leq 1$)

(3) $y = -5(t-1)^2 + 5$
($0 \leq t \leq 1.5$)

 例題 7 横に投げたボールの通り道

高さ 1.25 m の台のはしから、ボールを 5 m/s の速さで真横に投げ出しました。横に x [m] 進んだときに、台の高さから y [m] 下がっているとします。(1) y を x の式で表しましょう。(2) 0.5 秒後に床に着きました。台のはしから何 m 先に着きましたか。式で確かめましょう。

考え方 横は一定の速さなので $x = 5t$ 、たては $y = 5t^2$ 。 $x = 5t$ から t を x の式で表し、 $y = 5t^2$ にかっこごとに入れます。

しき (1) $x = 5t$ の両辺を 5 でわって、 $t = \frac{x}{5}$

$$y = 5 \left(\frac{x}{5} \right)^2 = 5 \times \frac{x^2}{25} = \frac{1}{5} x^2 = 0.2x^2$$

(2) $x = 5 \times 0.5 = 2.5$ 確かめ: $0.2 \times 2.5^2 = 0.2 \times 6.25 = 1.25$

こたえ (1) $y = 0.2x^2$ (2) 2.5 m 先 (下がった長さが台の高さ 1.25 m と合う)

 じぶんでこう 7

高い台のはしから、ボールを 10 m/s の速さで真横に投げ出しました。横に x [m] 進んだときに y [m] 下がっているととして、(1) y を x の式で表しましょう。(2) 0.4 秒後には、横に何 m 進み、何 m 下がっていますか。(1) の式でも確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

2乗に比例でも「2倍で2倍」?

✗ $y = 5x^2$ で x を2倍にすると、 y も2倍

○ x を2倍にすると、 y は $2 \times 2 = 4$ 倍

x が2回かけられているので、2倍も2回かかります。 $x = 1$ で5、 $x = 2$ で20です。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスの x の2乗

✗ $y = x^2$ で $x = -3$ のとき、 $y = -9$

○ $y = (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

マイナス×マイナスはプラスです (2-2)。だから放物線は左右対称になります。

⚠ まちがえやすいところ

頂点の符号を逆にする

✗ $y = (x - 2)^2 + 1$ の頂点は $(-2, 1)$

○ $x - 2 = 0$ になる $x = 2$ が頂点なので、 $(2, 1)$

「かつこの中が0になる x 」が頂点の x 座標です。 $y = (x + 2)^2 + 1$ なら $(-2, 1)$ です。

⚠ まちがえやすいところ

範囲の最小を、はしの値にしてしまう

✗ $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最小値は、はしの $x = -1$ のときの 1

○ 頂点 $x = 0$ が範囲の中にあるので、最小値は 0

頂点が範囲の中にあるかを、先に確かめましょう。グラフをかくと、まちがえません。

⚠ まちがえやすいところ

変化の割合を $y \div x$ で計算する

$y = 2x^2$ で、 x が 1 から 3 まで変わるときの変化の割合は？

✗ $x = 3$ のとき $y = 18$ なので、 $18 \div 3 = 6$

○ $\frac{18 - 2}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8$

変化の割合は「変化量」どうしのわり算です (3-5)。 y も x も、あと一まえをしてからわります。

⚠ まちがえやすいところ

平方完成で、くった数をかけ忘れる

✗ $-5(t^2 - 4t) = -5\{(t - 2)^2 - 4\} = -5(t - 2)^2 - 4$

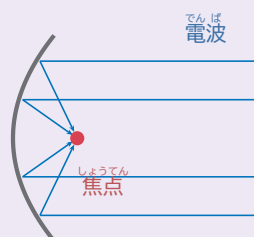
○ $-5\{(t - 2)^2 - 4\} = -5(t - 2)^2 + 20$

-5 は、かつこの中の -4 にもかかります。 $-5 \times (-4) = 20$ です。 $t = 0$ を入れて、もとの式 (0) と合うか確かめましょう。

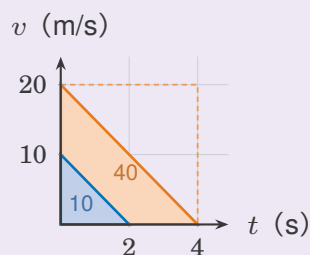
ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

パラボラアンテナ

衛星放送のアンテナの皿は、放物線を軸のまわりに回した形をしています。約 3 万 6000 km はなれた人工衛星からの電波は、ほとんど平行にやってきます。軸に平行に入ってきた電波は、皿で反射すると、すべて 1 つの点（焦点）に集まります。そこに受信する部品を置くと、弱い電波を強めて受けとれるのです。パラボラは、放物線 (parabola) のことです。



止まるまでの距離は、速さの 2 乗に比例
ブレーキをかけると、車は 1 秒ごとに同じだけおそくなります（ぬれた道路で約 5 m/s ずつ）。10 m/s なら 2 秒、20 m/s なら 4 秒で止まります。止まるまでの距離は、 v - t グラフの三角形の面積です (2-3)。この三角形は、同じ形を 2 つ合わせると長方形（点線）になるので、面積は長方形（底辺×高さ）の半分です (4-5 でくわしく)。速さが 2 倍なら、底辺（時間）も高さ（速さ）も 2 倍で、面積は 4 倍です。10 m/s（時速 36 km）で 10 m なら、20 m/s（時速 72 km）では 40 m です。スピードの出しすぎが危ないのは、このためです。



ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

うんどう エネルギーも、はやさの2乗に比例

うご 動いている物は、ほかの物をおしたり、こわしたりする力をもっています。これを運動エネルギーといい、質量 m [kg]、速さ v [m/s] の物では $\frac{1}{2}mv^2$ [J (ジュール)] です。 $\frac{1}{2}$ は、上のブレーキの三角形の「÷2」と同じ所から出てきます（物理シリーズでくわしく）。速さが2倍なら、エネルギーは4倍。だから、車の衝突は、速さが2倍になると、こわれ方がずっと大きくなります。

ふんすい みず
噴水の水

ふんすい 噴水のノズルから、ななめ上にふき出した水の水の1つぶ1つぶは、横には一定の速さで、たてには投げ上げと同じに動きます。だから、水の線は放物線をえがきます。ノズルの向きを変えると、放物線の高さや遠くまで届く長さが変わります。同じ速さでふき出すとき、いちばん遠くまで届くのは、ななめ45°に向けたときです（空気の抵抗がないとき）。

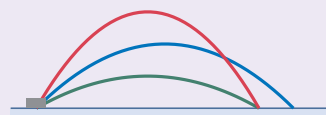
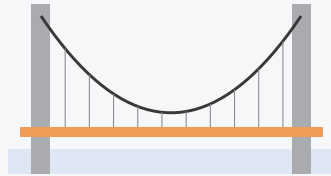


図14 赤 60°、青 45°、緑 30°。

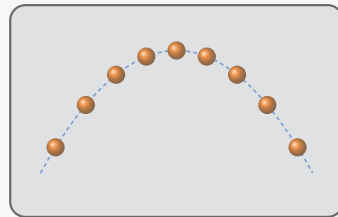
コラム つり橋のケーブルは、放物線

つり橋では、太いケーブルから、たくさんのつり下げ用のロープで、道路（橋げた）をつり下げています。道路の重さが、横の長さあたり同じだけかかると、ケーブルはちょうど放物線の形になります。設計する人は、この放物線の式を使って、ケーブルの長さや、かかる力を計算します。ケーブルだけをぶら下げたときの形（くさりの形）は、放物線によく似ていますが、少しちがう曲線になります。これは第5巻の先で学ぶ曲線です。



コラム スマホで、放物線をつかまえよう

家族や友達に、ボールを山なりに投げてもらい、スマホで横から動画をとります。動画をコマ送りにして、同じ時間ごとのボールの位置を、画面の上で記録します（画面の座標は、 y が下向きของ 것이が多いので注意。3-2）。いちばん高い所を頂点にして、横 x と、頂点から下がった長さ y を表にし、表計算で $y \div x^2$ を計算すると、どの点でもだいたい同じ数になります。ボールの通り道が、 $y = ax^2$ の放物線だとわかります。ずれた点に、どの放物線がいちばん合うかを求める方法は、3-16 で学びます。





しょうまつもんだい
章末問題

3-9 のまとめ

きほん
基本



1 y は x の 2 乗に比例し、 $x = 3$ のとき $y = 27$ です。 y を x の式で表し、 $x = -2$ のときの y を求めましょう。

2 次の関数について、 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ のときの y を求めて表にし、グラフをノートにかきましょう。

$$(1) y = \frac{1}{4}x^2 \quad (2) y = -x^2$$

3 $y = 4x^2$ について、次の変化の割合を求めましょう。

(1) x が 1 から 3 まで (2) x が 1 から $1+h$ まで

4 次の放物線の頂点と軸を答え、上に開くか下に開くかを答えましょう。

$$(1) y = (x+4)^2 - 1 \quad (2) y = -3(x-2)^2 + 5$$

5 次の放物線の頂点を、平方完成して求めましょう。

$$(1) y = x^2 - 6x + 5 \quad (2) y = -5t^2 + 40t$$

6 $y = x^2$ の最大値と最小値を求めましょう。

$$(1) 2 \leq x \leq 4 \quad (2) -3 \leq x \leq 1$$

チャレンジ



7 30 m/s の速さで真上に投げ上げたボールの、 t 秒後の高さは $y = 30t - 5t^2$ (m) です。(1) 平方完成して、ボールが最も高くなる時刻と高さを求めましょう。(2) $1 \leq t \leq 4$ のあいだの、高さの最大値と最小値を求めましょう。

8 高さ 0.8 m の机のはしから、ボールが 1 m/s で真横に飛び出しました。横に x [m] 進んだときに y [m] 下がっているとして、(1) y を x の式で表しましょう。(2) 0.4 秒後に床に着きました。机のはしから何 m 先ですか。(1) の式で、下がった長さが 0.8 m になることを確かめましょう。

9 落ちるボールの、落ちはじめてから x 秒間に落ちる距離は $y = 5x^2$ (m) です。(1) 2 秒から 3 秒までの 1 秒間の平均の速さ (変化の割合) を求めましょう。(2) 2 秒から $2 + h$ 秒までの変化の割合を求め、 $h = 0.1$ のときの値を計算しましょう。

10 ぬれた道路で、車が止まるまでにブレーキで進む距離は、速さの 2 乗に比例します。速さ 10 m/s のとき 10 m でした。(1) 速さを v [m/s]、距離を y [m] として、 y を v の式で表しましょう。(2) 30 m/s (時速 108 km) のときの距離を求めましょう。速さが 3 倍なので、距離は何倍ですか。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 2 乗に比例を見つけ、 $y = ax^2$ の式とグラフにできる。

→ 258 ページ

☐ a とグラフの形の関係や、変化の割合を説明できる。

→ 263 ページ

☐ 平方完成で頂点を、範囲から最大・最小を求められる。

→ 269 ページ



デルタ

投げ上げたボールは 2 秒後に 20 m。では、15 m の高さを通るのは何秒後かな？ 次の章で、2 次方程式を解いて求めよう。

第2部 曲がったグラフ

★★～★★★★

3-10

ボールはいつその高さに
届く？ : 2次方程式

この章の先に 2-8 2-16 3-8 3-9 この章の先に 5-5 5-7 5-11 6-12

この章でできるようになること

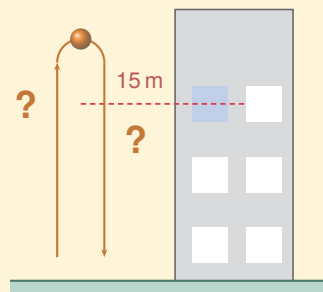
- ★★ $x^2 = k$ の形や、因数分解（くくる・和と積・ $x^2 - a^2$ ）を使って、2次方程式を解ける。
- ★★★ 平方完成から解の公式を作り、どんな2次方程式でも解ける。
 $\sqrt{\quad}$ の計算ができる。
- ★★★ 解の個数を判別式とグラフで判断し、場面に合う解を選ぶ。

? はてな?

3-9で、20 m/s の速さで真上に投げたボールの、 t 秒後の高さは $y = 20t - 5t^2$ (m) で、2 秒後にいちばん高い 20 m に届くことがわかりました。

では、地面から 15 m の高さにある窓の前を、ボールが通るのは、何秒後でしょう。

答えは、1 つだけかな?



△ やってみよう 表で、ボールの高さをさがそう

$y = 20t - 5t^2$ に、 $t = 0, 0.5, 1, \dots, 4$ を入れて、高さを表にしました
(電卓で確かめよう)。

t (s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y (m)	0	8.75	15	18.75	20	18.75	15	8.75	0

- ① 高さが 15 m になるのは、何秒後と何秒後かな？
- ② 高さが 20 m になるのは？ 25 m になるのは？
- ③ 高さが 10 m になるのは、何秒後かな？ 表から見つかるかな？

①は、1 秒後と 3 秒後です。1 秒後は上がっていくとちゅう（上り）、3 秒後は下りてくるとちゅう（下り）です。答えは 2 つありました。

②の 20 m は、いちばん高い 2 秒後の 1 回だけです。25 m には、一度も届きません。

③の 10 m は、表にありません。0.5 秒 (8.75 m) と 1 秒 (15 m) のあいだのどこかと、3 秒と 3.5 秒のあいだのどこかです。表をどんなに細かくしても、ぴったりの時刻は見つからないかもしれません。

表でさがすのではなく、式を計算して時刻を求める方法がほしくなりますね。それが、この章で学ぶ「2 次方程式を解く」ことです。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-8** 2乗して9になる数は、3と-3の2つ。 $\sqrt{9}$ は、そのうちの正のほうの3。
- 2-16** 方程式は、両辺に同じことをして（移項して）、 $x = \dots$ の形にして解く。
- 3-8** $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 、 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。共通因数でくくる： $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 。
- 3-8** 平方完成： $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ （-4の半分の-2を使う）。
- 3-9** $y = -5t^2 + 20t = -5(t-2)^2 + 20$ は、頂点（2, 20）の、下に開いた放物線。



ミナ

表にない時刻も、式から計算で出せたら、どんな高さでもわかるね。

すうがく 数学の道具

1 x^2 のある方程式：2次方程式

？はてな？ の問いを、式にしてみましょう。高さ $20t - 5t^2$ が15になる t を求めるので、

$$20t - 5t^2 = 15$$

という方程式になります。2-16の方程式とちがって、 t^2 （ $t \times t$ ）の項があります。

この式を、あとで解きやすい形に直しておきます。2-14の天びんのように、両辺に同じことをしても、等式はなりたったままです。

1 右辺を 0 にする

両辺から 15 をひきます (移項、2-16)。左辺は、次数の大きい順にならべかえます。

$$-5t^2 + 20t - 15 = 0$$

2 t^2 の係数を 1 にする

両辺を -5 でわります。左辺は、項を 1 つずつ -5 でわります (2-12)。右辺は $0 \div (-5) = 0$ です。

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$-5t^2 \div (-5) = t^2$ 、 $20t \div (-5) = -4t$ 、 $-15 \div (-5) = 3$ です。符号が全部入れかわることに注意しましょう。

やってみようで見つけた $t = 1$ と $t = 3$ を、左辺の $t^2 - 4t + 3$ に入れて確かめます (右の表)。 $t = 1$ なら $1 - 4 + 3 = 0$ 、 $t = 3$ なら $9 - 12 + 3 = 0$ で、どちらも右辺の 0 と等しくなり、方程式がなりたちます。 $t = 2$ では $4 - 8 + 3 = -1$ で、なりたちません。

t	$t^2 - 4t + 3$
0	$0 - 0 + 3 = 3$
1	$1 - 4 + 3 = 0$
2	$4 - 8 + 3 = -1$
3	$9 - 12 + 3 = 0$
4	$16 - 16 + 3 = 3$

$t^2 - 4t + 3 = 0$ のように、文字の 2 乗の項があって、それより大きい次数の項がない方程式を、**2 次方程式**といいます。「2 次」は、文字を 2 回かけた項がある、という意味です (2-16 で「 t^2 のある方程式は 2 次方程式で、3-10 で学ぶ」と予告していました)。

方程式をなりたさせる文字の値を、方程式の**解**といいます。2 次方程式には、解が 2 つあることがよくあります。解をすべて求めることを、方程式を**解く**といいます。一般に、2 次方程式は

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない数})$$

の形にまとめられます。 a が0だと x^2 の項が消えて、1次方程式になってしまふからです。

② 2乗して k になる数： $x^2 = k$

いちばんかんたんな2次方程式から始めましょう。ボールを落とすと、 t 秒間に落ちる距離は $5t^2$ m でした (2-13)。20 m 落ちるのは何秒後でしょう。

$$5t^2 = 20$$

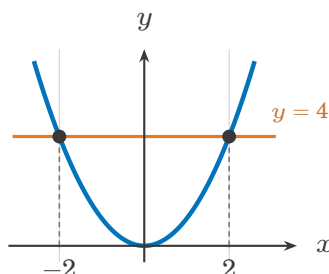
両辺を5でわると、 $t^2 = 4$ です。2乗して4になる数をさがします。 $2^2 = 4$ ですが、 $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ も4です (2-8)。だから、

$$t = 2 \quad \text{または} \quad t = -2$$

の2つが解です。この2つを、まとめて $t = \pm 2$ と書きます。

グラフで見ると

$y = x^2$ のグラフ (3-9) と、高さ4の横の直線 $y = 4$ をかくと、2か所で交わります。交わる点の x が、 $x^2 = 4$ の解の2と-2です。放物線が左右対称なので、交わる点も、0から同じ距離の左右に1つずつあります。

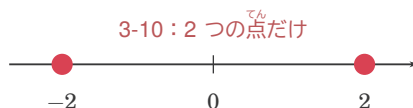


この「 $\pm$ 」は、2-6の「 $\pm$ 」とちがう

2-6では、50.0 cm $\pm$ 0.1 cm のように、 $\pm$ を「49.9 から 50.1 までの、どこかにある」という**ずれのはば**に使いました。あいだの数も、ぜんぶふくみます。



ここの $t = \pm 2$ は、「2 と -2 の**ちょうど2つの数**」という意味です。あいだの1や0は解ではありません。同じ記号でも、使う場面で意味が変わります。



場面^{ばめん}に合う解^{かい}をえらぶ

ボールは、落^おとしはじめた $t = 0$ より後の時刻^{じこく}で考えています。 $t = -2$ は「2 秒前^{びょうまえ}」なので、この場面^{ばめん}には合^あいません。答え^{こた}は 2 秒後^{びょうご}です。方程式^{ほうていしき}を解^といたら、解^{かい}が場面^{ばめん}に合^あうかを、いつも確^{たし}かめましょう。

k がいろいろな数^{かず}のとき

- $x^2 = 7$: 2 乗^{じょう}して 7 になる整数^{せいしゅう}はありません。2-8 の $\sqrt{\quad}$ を使^{つか}って、 $x = \pm\sqrt{7}$ と書^かきます ($\sqrt{7}$ は約^{やく} 2.65)。
- $x^2 = 0$: 2 乗^{じょう}して 0 になる数^{かず}は 0 だけなので、解^{かい}は $x = 0$ の 1 つです。
- $x^2 = -4$: 正^{せい}の数^{かず}も負^ふの数^{かず}も、2 乗^{じょう}するとプラスになります。だから、2 乗^{じょう}して -4 になる数^{かず}は、この巻^{かん}で学^{まな}ぶ数^{かず}の中^{なか}にはありません。解^{かい}はありません (このような数^{かず}は 6-8 で新^{あた}しく考^{かんが}えます)。

かっこの 2 乗^{じょう}のとき : $(x - 2)^2 = 9$

$x - 2$ を、1 つの箱^{はこ} (2-11) と見^みます。箱^{はこ}の中身^{なかみ}を 2 乗^{じょう}すると 9 になるので、箱^{はこ}の中身^{なかみ}は 3 か -3 です。

$$x - 2 = \pm 3$$

$x - 2 = 3$ なら $x = 5$ 、 $x - 2 = -3$ なら $x = -1$ です (両^{りょう}辺^{へん}に 2 をたす)。確^{たし}かめると、 $x = 5$ のとき $(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$ 、 $x = -1$ のとき $(-1 - 2)^2 = (-3)^2 = 9$ で、どちらもなりたちます。この「かっこの 2 乗^{じょう} = 数^{かず}」の形^{かたち}は、あとで平方^{へいほう}完^{かん}成^{せい}で解^とくときに、もう一^{いち}度^ど使^{つか}います。

たいせつ

$x^2 = k$ の解^{かい} ($k > 0$) は、 $x = \pm\sqrt{k}$ ($\sqrt{k}$ と $-\sqrt{k}$ の 2 つ)。

$k = 0$ なら $x = 0$ だけ。 $k < 0$ なら解^{かい}はない。

3 かけて0なら、どちらかが0

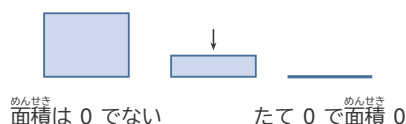
次の□と△に入る数を考えます。

$$\square \times \triangle = 0$$

□が3なら、 $3 \times \triangle = 0$ なので、△は $0 \div 3 = 0$ です。□が-5でも、△は0です。□も△も0でない数なら、かけ算の答えは0になりません(2-2: 正の数や負の数どうしをかけても、0にはならない)。だから、かけて0になるのは、□と△の少なくともどちらか一方が0のときだけです。

面積でも考えられる

かけ算は、長方形の面積でした(1-12)。面積が0の長方形は、たてか横の長さが0で、ぺちゃんこにつぶれた形です。たても横も0でなければ、面積は必ず0より大きくなります。



このきまりを使うと、かけ算の形をした方程式が解けます。

$$x(x-2) = 0$$

x と $x-2$ をかけて0なので、 $x=0$ か、 $x-2=0$ のどちらかです。 $x-2=0$ なら $x=2$ です。だから、解は $x=0$ と $x=2$ で、まとめて「 $x=0, 2$ 」と書きます。確かめ： $x=2$ なら $2 \times (2-2) = 2 \times 0 = 0$ です。

0のときだけのきまり

$(x-1)(x-3) = 3$ を、「 $x-1=3$ か $x-3=3$ 」として $x=4, 6$ としてはいけません。 $x=6$ を入れると $5 \times 3 = 15$ で、3になりません。かけて3になる組は、 $1 \times 3, 3 \times 1, 0.5 \times 6, \dots$ といくらでもあるので、1つにしばれないのです。「どちらかが決まる」のは、答えが0のときだけです。

□	△	□×△
1	3	3
3	1	3
0.5	6	3
-1	-3	3

たいせつ

$A \times B = 0$ なら、 $A = 0$ または $B = 0$ 。(答えが 0 のときだけ使える)

4 かけ算の形に直す：因数分解

3-8 で、かっこをはずす「展開」を学びました。たとえば

$$(t-1)(t-3) = t^2 - 3t - t + 3 = t^2 - 4t + 3$$

です。この式を、右から左へ読んでみましょう。 $t^2 - 4t + 3$ は $(t-1)(t-3)$ と、かけ算の形に書けます。かけ算の形になれば、「かけて 0 なら、どちらかが 0」(296 ページ) が使えます。

$t^2 - 4t + 3$ のような和の形の式を、 $(t-1)(t-3)$ のようなかけ算の形に直すことを、**因数分解**といいます。かけ算を作っている 1 つ 1 つの式 ($t-1$ や $t-3$) を、**因数**といいます。 $12 = 2 \times 6$ と、数をかけ算に分けると同じ考えです。

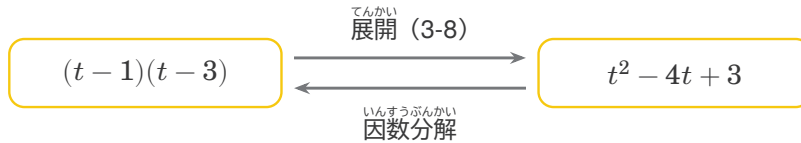


図 1 因数分解は、展開の逆。

因数分解のしかたを、4 つに分けて、1 つずつ見ていきましょう。

その 1：共通因数でくくる

3-8 で学んだ「共通因数でくくる」も、因数分解です。どの項にも同じ文字や数がふくまれていたら、それをかっこの外に出します (分配法則の逆、2-12)。

$$x^2 - 2x = x \times x - 2 \times x = x(x-2)$$

$$3t^2 - 6t = 3t \times t - 3t \times 2 = 3t(t-2)$$

$$3x^2 - 3 = 3 \times x^2 - 3 \times 1 = 3(x^2 - 1)$$

1行めは、 x^2 にも $2x$ にも x がふくまれているので、 x でくくりました。2行めは、 $3x$ でくくりました。

その2：和と積で、2つの数をさがす

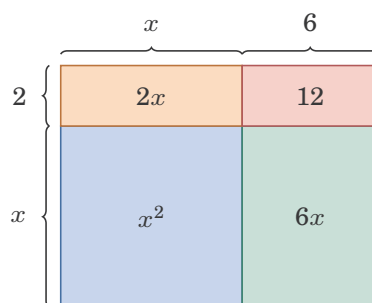
3-8の展開の公式

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

を、右から左へ読みます。 $x^2 + \boxed{\text{和}}x + \boxed{\text{積}}$ の形なら、たして x の係数、かけて定数項になる2つの数 a, b をさがせば、 $(x+a)(x+b)$ と因数分解できます。

面積図で見ると

$(x+2)(x+6)$ は、たて $x+2$ 、横 $x+6$ の長方形の面積です。右の図のように4つに分けると、 $x^2, 6x, 2x, 12$ の4つの部分になり、たすと $x^2 + 8x + 12$ です。 x の係数の8は $2+6$ (和)、12は 2×6 (積) です。反対に、 $x^2 + 8x + 12$ を長方形にならべるには、たして8、かけて12の2つの数を見つければよいのです。



例 $x^2 - 8x + 12$ たして -8 、かけて12になる2つの数をさがします。かけて12になる整数の組を、ぜんぶ書き出して、たした数を調べます。

かけて12の 組	1と12	2と6	3と4	-1と -12	-2と -6	-3と -4
たした数	13	8	7	-13	-8	-7

表1 和が -8 、積が12になるのは、 -2 と -6 。

和が -8 、積が 12 になる2つの数は -2 と -6 なので、

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

です。確かめに展開すると、 $x^2 - 6x - 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$ で、もとにもどります。

例 $t^2 + 2t - 15$ かけて -15 、たして 2 になる2つの数をさがします。かけてマイナスになるのは、プラスとマイナスの組です。

かけて -15 の組	1と -15	-1 と 15	3と -5	-3 と 5
たした数	-14	14	-2	2

5 と -3 なので、 $t^2 + 2t - 15 = (t + 5)(t - 3)$ です。確かめに展開すると、

$$(t + 5)(t - 3) = t^2 - 3t + 5t - 15 = t^2 + 2t - 15$$

で、もとにもどります。

🔍 もっと知りたい ★★

符号のヒント

かけた数(積)がプラスなら、2つの数は同じ符号です。そのとき、たした数(和)がプラスなら2つともプラス、マイナスなら2つともマイナスです。積がマイナスなら、2つの数はちがう符号で、大ききの大きいほうが、和と同じ符号になります。ヒントでしぼってから、表で確かめると早く見つかります。

その3: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

3-8の $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を右から左へ読むと、「2乗ひく2乗」は、和と差のかけ算に因数分解できます。

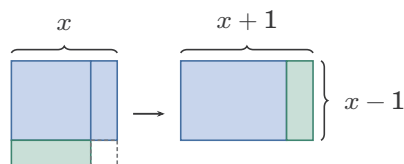
$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1), \quad x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

和と積でも、同じ答えになる

$x^2 - 1$ は、 $x^2 + 0x - 1$ と見ることができます。たして0、かけて-1の2つの数は、1と-1です。だから $(x+1)(x-1)$ 。その2の方法でも、同じ答えが出ます。

面積図で見ると

1辺 x の正方形から、1辺1の正方形を切りとると（右の図の左）、残りは $x^2 - 1$ です。下の細い部分（たて1、横 $x-1$ ）を、右のはしに立ててつなぐと、たて $x-1$ 、横 $x+1$ の長方形になります。



その4：くくってから、さらに因数分解

くくったあと、かっこの中がさらに因数分解できることがあります。

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

$$12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$$

2行めは、どの項も12でわれるので、先に12でくくりました。かっこの中は、和が-8、積が12の形です。大きな数のままさがすより、ずっと楽になります。

たいせつ

因数分解の手順

- ① どの項にも共通な数や文字があれば、くくる。
- ② 「2乗ひく2乗」なら、 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ 。
- ③ $x^2 + \boxed{\text{和}}x + \boxed{\text{積}}$ なら、たして和・かけて積の2つの数をさがす。
- ④ 展開して、もとの式にもどるか確かめる。

5 因数分解で 2 次方程式を解く

道具がそろいました。はてな？ の方程式を解きましょう。

1 右边を 0 にして、整理する

292 ページと同じように、移項して両辺を -5 でわります。

$$20t - 5t^2 = 15 \quad \text{より} \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

2 左辺を因数分解する

たして -4 、かけて 3 の 2 つの数は -1 と -3 です。

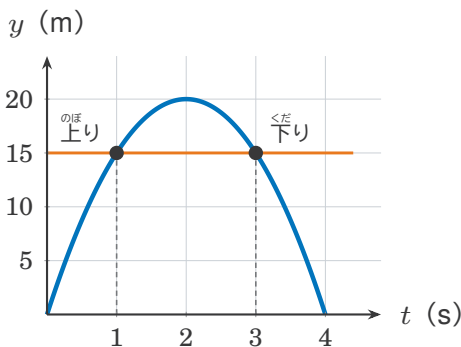
$$(t - 1)(t - 3) = 0$$

3 かけて 0 なら、どちらかが 0

$t - 1 = 0$ か $t - 3 = 0$ なので、 $t = 1, 3$ です。

4 場面に合うかを確認める

どちらも 0 より後の時刻で、ボールが地面にもどる 4 秒後より前なので、場面に合います。



？ はてな？ の答え：ボールが高さ 15 m の窓の前を通るのは、1 秒後と 3 秒後です。1 秒後は上りで、3 秒後は下りです。

グラフでは、放物線と、高さ 15 の直線（オレンジ）が 2 か所で交わります。放物線は頂点（2 秒）をはさんで左右対称なので、2 つの時刻も 2 秒から同じ 1 秒ずつはなれています。答えが 2 つ出るのは、上りと下りがあるからです。

たいせつ

2 次方程式を因数分解で解く手順

- ① 移項して、右辺を0にする。 ② 左辺を因数分解する。
③ かけて0なら、どちらかが0。 ④ 場面に合う解が確かめる。

6 因数分解できないときは、平方完成で解く

やってみようの③、「高さ10mになるのは何秒後？」にもどります。

$$20t - 5t^2 = 10 \quad \text{より} \quad t^2 - 4t + 2 = 0$$

たして-4、かけて2になる整数の組をさがすと、1と2(和3)、-1と-2(和-3)しかなく、見つかりません。整数ではうまく因数分解できないのです。

そこで、 $3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9$ の平方完成を使います。「(かっこ)の2乗=数」の形にすれば、 $x^2 = k$ (294 ページ) と同じように解けるからです。

1 平方完成する

t の係数 -4 の半分は -2。 $(t - 2)^2 = t^2 - 4t + 4$ なので、4 をたして4 をひきます。

$$t^2 - 4t + 2 = t^2 - 4t + 4 - 4 + 2 = (t - 2)^2 - 2$$

2 「かっこの2乗=数」の形にする

方程式は $(t - 2)^2 - 2 = 0$ になります。両辺に2をたして、

$$(t - 2)^2 = 2$$

3 $\pm\sqrt{\quad}$ をとる

$t - 2$ は、2乗して2になる数なので、 $\sqrt{2}$ か $-\sqrt{2}$ です。

$$t - 2 = \pm\sqrt{2} \quad \text{だから} \quad t = 2 \pm \sqrt{2}$$

4 数の大きさを確かめる

$\sqrt{2}$ は約 1.414 (2-8) なので、 $2 - \sqrt{2}$ は約 0.59、 $2 + \sqrt{2}$ は約 3.41 です。やってみようの表で見た「0.5 と 1 のあいだ」「3 と 3.5 のあいだ」に、ぴったり合います。電卓で $t = 0.586$ を入れると、 $20 \times 0.586 - 5 \times 0.586^2$ は約 10.0 です。

ボールは、約 0.59 秒後 (上り) と約 3.41 秒後 (下り) に、高さ 10m を通ります。平方完成を使えば、因数分解できない 2 次方程式も解けるのです。

7 $\sqrt{\quad}$ のついた数の計算

平方完成や、次の解の公式で解くと、答えに $\sqrt{\quad}$ がよく出てきます。 $\sqrt{\quad}$ の数を、かんたんな形に直す方法を 2 つ学びましょう。

$\sqrt{\quad}$ の中を小さくする: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

2-8 で、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ のように、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ がなりたつことを確かめました。これを反対に使います。12 を「2 乗の数 $\times$ ほかの数」に分けると、 $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ です。

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

電卓で確かめると、 $\sqrt{12} = 3.4641 \dots$ 、 $2 \times \sqrt{3} = 2 \times 1.7320 \dots = 3.4641 \dots$ で、同じです。 $\sqrt{\quad}$ の中は、できるだけ小さい整数にしておくと、大きさが見やすく、計算もしやすくなります。

中の数を、 $4 = 2^2$ 、 $9 = 3^2$ 、 $16 = 4^2$ 、 $25 = 5^2 \dots$ でわれるか調べるのがコツです。 $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ です。

分母の $\sqrt{\quad}$ をなくす： $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は、 $1 \div 1.41421 \dots$ で、手で計算するのは大変です。そこで、分母と分子に同じ $\sqrt{2}$ をかけます。分母と分子に同じ数をかけても、分数の大きさは変わりません (2-4)。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

分母の $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ が2になるのは、 $\sqrt{2}$ が「2乗すると2になる数」だからです。これなら、

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.41421 \dots \div 2 = 0.70710 \dots$$

と、かんたんに計算できます。分母の $\sqrt{\quad}$ をなくすことを、分母の**有理化**といいます。($\sqrt{2}$ のような数は無理数、整数や分数は有理数でした。2-9)

⑧ どんな2次方程式も解ける：解の公式

302 ページの平方完成の手順は、どんな2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ にも使えます。数の例 (左) と、文字のまま (右) とを、ならべて計算してみましょう。
左の例は $2x^2 + 3x - 1 = 0$ で、 $a = 2$ 、 $b = 3$ 、 $c = -1$ です。

すること	$2x^2 + 3x - 1 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
① 両辺を a でわる	$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
② 数の項を右辺へ	$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
③ x の係数の半分の2乗を、両辺にたす	$+ \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	$+ \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

③で、左辺は「(かっこ) の2乗」の形にまとまる準備ができました。続けます。

すること	$2x^2 + 3x - 1 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
④ 左辺を (かっこ) の 2 乗にする	$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
⑤ $\pm\sqrt{\quad}$ をとる	$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
⑥ 移項する	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

表2 平方完成の手順を、文字のまま進める。

1 行ずつ、なぜそうなるかを確かめます。

- ①: x^2 の係数を 1 にするためです。a は 0 でないので、わってかまいません。
- ③: x の係数 $\frac{3}{2}$ の半分は $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{b}{a}$ の半分は $\frac{b}{2a}$ です (3-8 の平方完成と同じ)。
- ④の右辺: 左は $\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = \frac{8}{16} + \frac{9}{16} = \frac{17}{16}$ 。右は、 $-\frac{c}{a} = -\frac{4ac}{4a^2}$ と分母をそろえて (通分、2-4)、 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 。
- ⑤: 分母の $\sqrt{16} = 4$ 、 $\sqrt{4a^2} = 2a$ です (a がマイナスのときも、 $\pm$ が両方の符号をふくむので、同じ式になります)。

こうしてできた式を、2 次方程式の解の公式といいます。

たいせつ

解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解は } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

覚えていなくても、平方完成の手順をたどれば、いつでも作り直せます。

はてな？ の方程式でも確かめる

$t^2 - 4t + 3 = 0$ は、 $a = 1$ 、 $b = -4$ 、 $c = 3$ です。 $-b = -(-4) = 4$ 、 $b^2 = (-4)^2 = 16$ に注意して入れると、

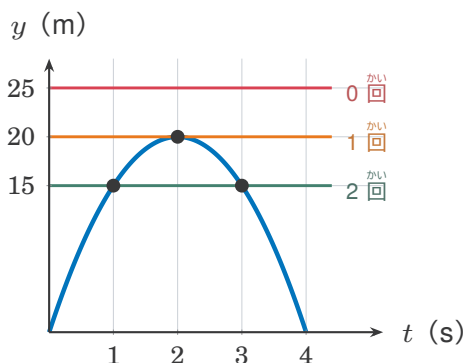
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

＋のほうが $\frac{6}{2} = 3$ 、－のほうが $\frac{2}{2} = 1$ で、因数分解で求めた1と3に合います。因数分解できるときは因数分解のほうが早く、できないときは解の公式を使います。

9 解が2つ・1つ・ない：判別式

やってみようの②を、式で考えます。高さ15 m、20 m、25 mになる時刻の方程式は、次のようになります（どれも、両辺から高さをひいて－5でわった）。

高さ	方程式	平方完成	$b^2 - 4ac$	解
15 m	$t^2 - 4t + 3 = 0$	$(t - 2)^2 = 1$	$16 - 12 = 4$	2つ (1, 3)
20 m	$t^2 - 4t + 4 = 0$	$(t - 2)^2 = 0$	$16 - 16 = 0$	1つ (2)
25 m	$t^2 - 4t + 5 = 0$	$(t - 2)^2 = -1$	$16 - 20 = -4$	ない



平方完成すると、右辺が「プラス」なら $\pm\sqrt{\quad}$ で解が2つ、「0」なら $t - 2 = 0$ だけで1つ、「マイナス」なら2乗してマイナスになる数はないので、解はありません（294 ページ）。グラフでは、横の直線が放物線と2回交わる・1回だけふれる・交わらない、に対応します。

解の公式の $\sqrt{\quad}$ の中にある $b^2 - 4ac$ も、同じ符号になっています。 $b^2 - 4ac$ を見るだけで、解の個数がわかるのです。 $b^2 - 4ac$ を、2次方程式の判別式とい、 D で表します。

たいせつ

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の判別式 } D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$ なら解は2つ。 $D = 0$ なら解は1つ。 $D < 0$ なら解はない。

「ボールがその高さに届くか」は、判別式の符号で判定できます。 $D \geq 0$ なら届き、 $D < 0$ なら届きません。第 6 巻の 6-12 では、この判別式で「ばねにつるしたおもりが、ゆれながら止まるか、ゆれずに止まるか」を判定します。

と 解から、因数分解の形を作る

$ax^2 + bx + c = 0$ の解が 2 つあるとき、その解を α (アルファ)、 β (ベータ) と書くことがよくあります。解が α 、 β なら、左辺は

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できます。 $x = \alpha$ を入れると $x - \alpha = 0$ で、右辺が 0 になるからです。たとえば $2x^2 - 8x + 6 = 0$ の解は 1 と 3 (両辺を 2 でわると $x^2 - 4x + 3 = 0$) なので、 $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 1)(x - 3)$ です。グラフ $y = 2x^2 - 8x + 6$ は、 x 軸と $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ の 2 点で交わります。

記号カード

初めて出た章 3-10

 α, β

読み方 アルファ、ベータ
意味 ギリシャ文字。2 次方程式の 2 つの解によく使う。
英語 alpha, beta

記号カード

初めて出た章 3-10

 D

読み方 ディー
意味 判別式 $b^2 - 4ac$ 。解の個数ができる。
英語 discriminant

⑩ 式がプラスになるのは、どこ?

ボールが 15 m より高い所にいるのは、何秒後から何秒後まででしょう。高さ y から 15 をひいた $y - 15$ が、プラスになる時刻をさがします。

$$y - 15 = -5t^2 + 20t - 15 = -5(t^2 - 4t + 3) = -5(t - 1)(t - 3)$$

-5 、 $t - 1$ 、 $t - 3$ の 3 つのかけ算です。それぞれの符号を表にすると、かけ算の符号がわかります (2-2)。5-7 で使う表と同じ形です。

t	$t < 1$	1	$1 < t < 3$	3	$t > 3$
-5	-	-	-	-	-
$t - 1$	-	0	+	+	+
$t - 3$	-	-	-	0	+
$y - 15$	-	0	+	0	-

たとえば $1 < t < 3$ では、 $(-) \times (+) \times (-) = (+)$ です。数を入れて確かめると、 $t = 2$ で $-5 \times 1 \times (-1) = 5$ で、たしかにプラスです（高さ 20 m は 15 m より 5 m 高い）。

だから、ボールが 15 m より高いのは、1 秒後から 3 秒後までのあいだです。グラフで、放物線がオレンジの直線より上にある部分です（301 ページの図）。このように、不等号のついた 2 次の式（ $y - 15 > 0$ など）を考えることを、高校では「2 次不等式」として学びます。

この章で出てきたことば

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a は 0 でない) の形にまとめられる方程式。

解 方程式をなりたたせる文字の値。2 次方程式の解は、2 つ・1 つ・なしのどれか。

因数分解・因数 和の形の式を、かけ算の形に直すこと。かけ算を作る 1 つ 1 つの式が因数。

解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。平方完成から作る。

判別式 $D = b^2 - 4ac$ 。プラスなら解 2 つ、0 なら 1 つ、マイナスならない。

有理化 分母と分子に同じ $\sqrt{\quad}$ をかけて、分母の $\sqrt{\quad}$ をなくすこと。

例題でたしかめよう

例題 1 $x^2 = k$ の形の方程式

次の方程式を解きましょう。(3) は時刻 t 秒なので、場面に合う解を答えましょう。

(1) $x^2 = 25$ (2) $x^2 = 7$ (3) $5t^2 = 45$ (4) $(x-2)^2 = 9$

考え方 2 乗して k になる数は、 $\sqrt{k}$ と $-\sqrt{k}$ の 2 つ。(3) は先に両辺を 5 でわります。(4) は $x-2$ を 1 つの箱と見ます。

- しき** (1) $5^2 = 25$ 、 $(-5)^2 = 25$ だから $x = \pm 5$
 (2) 2 乗して 7 になる整数はないので $x = \pm\sqrt{7}$
 (3) 両辺を 5 でわって $t^2 = 9$ 。 $t = \pm 3$ 。時刻は 0 より後なので $t = 3$
 (4) $x-2 = \pm 3$ 。 $x-2 = 3$ から $x = 5$ 、 $x-2 = -3$ から $x = -1$

こたえ (1) $x = \pm 5$ (2) $x = \pm\sqrt{7}$ (3) 3 秒後 (4) $x = 5, -1$

例題 2 かけて 0 なら、どちらかが 0

次の方程式を解きましょう。

(1) $x(x-2) = 0$ (2) $(t+5)(t-3) = 0$

考え方 かけて 0 なので、どちらかのかけこ (因数) が 0 です。それぞれを 0 とおいた 1 次方程式を解きます。

- しき** (1) $x = 0$ または $x-2 = 0$ 。 $x-2 = 0$ から $x = 2$
 (2) $t+5 = 0$ または $t-3 = 0$ 。 $t = -5$ または $t = 3$
 確かめ: (2) で $t = -5$ なら $0 \times (-8) = 0$ 、 $t = 3$ なら $8 \times 0 = 0$

こたえ (1) $x = 0, 2$ (2) $t = -5, 3$

じぶんでところ1

次の方程式を解きましょう。(3)

は時刻 t 秒です。

(1) $x^2 = 49$ (2) $x^2 = 10$

(3) $5t^2 = 80$ (4) $(x+1)^2 = 16$

じぶんでところ2

次の方程式を解きましょう。

(1) $x(x+4) = 0$

(2) $(x-1)(x-6) = 0$

例題3 共通因数でくくって解く

次の方程式を解きましょう。

(1) $x^2 - 2x = 0$ (2) $3t^2 - 6t = 0$

かんが 考えた

両辺を x でわらずに (318 ページ)、共通因数でくくってかけ算の形にします。

しき (1) $x(x-2) = 0$ 。 $x = 0$ または $x - 2 = 0$

(2) $3t(t-2) = 0$ 。 3 は 0 でないので、 $t = 0$ または $t - 2 = 0$

こたえ (1) $x = 0, 2$ (2) $t = 0, 2$

じぶんでところ3

次の方程式を解きましょう。

(1) $x^2 - x = 0$

(2) $5t^2 - 20t = 0$

例題 4 和と積で因数分解する

次の式を因数分解しましょう。

(1) $x^2 + 7x + 12$ (2) $x^2 - 8x + 12$ (3) $t^2 + 2t - 15$ (4) $x^2 - 2x - 8$

考え方 たして x の係数、かけて定数項になる 2 つの数をさがします。
積の符号から、2 つの数の符号をしぼります。

- しき** (1) 積も和もプラス → 2 つともプラス。3 と 4
(2) 積がプラス、和がマイナス → 2 つともマイナス。−2 と −6
(3) 積がマイナス → ちがう符号。和がプラス → 大きいほうがプラス。5 と −3
(4) 積がマイナス → ちがう符号。和がマイナス → 大きいほうがマイナス。−4 と 2

こたえ (1) $(x + 3)(x + 4)$ (2) $(x - 2)(x - 6)$ (3) $(t + 5)(t - 3)$
(4) $(x - 4)(x + 2)$
(確かめ: (4) を展開すると $x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$ 。)

じぶんでこう 4

次の式を因数分解しましょう。

(1) $x^2 + 6x + 8$ (2) $x^2 - 5x + 6$
(3) $t^2 + 3t - 10$ (4) $x^2 - x - 12$

例題5 $x^2 - a^2$ と、くくってから因数分解

次の式を因数分解しましょう。

(1) $x^2 - 1$ (2) $3x^2 - 3$ (3) $12x^2 - 96x + 144$

考え方 まず、共通因数でくくれないかを見ます。次に「2乗ひく2乗」か「和と積」の形かを見ます。

しき (1) $x^2 - 1^2$ なので $(x+1)(x-1)$

(2) 3でくくって $3(x^2 - 1)$ 。かっこの中は(1)と同じ

(3) 12でくくって $12(x^2 - 8x + 12)$ 。和が-8、積が12の2つの数は-2と-6

こたえ (1) $(x+1)(x-1)$ (2) $3(x+1)(x-1)$ (3) $12(x-2)(x-6)$

例題6 因数分解で2次方程式を解く

次の方程式を解きましょう。(2)(3)は時刻 t 秒($t > 0$)です。

(1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (2) $t^2 = 15 - 2t$ (3) $20t - 5t^2 = 15$

考え方 移項して右辺を0にしてから、左辺を因数分解します。最後に、場面に合う解をえらびます。

しき (1) $(x-2)(x-6) = 0$ より $x = 2, 6$

(2) $2t$ と -15 を左辺に移項して $t^2 + 2t - 15 = 0$

$(t+5)(t-3) = 0$ より $t = -5, 3$ 。 $t > 0$ なので $t = 3$

(3) 移項して $-5t^2 + 20t - 15 = 0$ 。両辺を-5でわって $t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0$ より $t = 1, 3$ 。どちらも場面に合う

こたえ (1) $x = 2, 6$ (2) 3秒後 (3) 1秒後と3秒後

じぶんでとこう 5

つぎ しき いんすうぶんかい
次の式を因数分解しましょう。

(1) $x^2 - 9$ (2) $2x^2 - 8$

(3) $3t^2 - 12t + 9$

じぶんでとこう 6

つぎ ほうていしき かい
次の方程式を解きましょう。(2)

(3) は時刻 t 秒 ($t > 0$) です。

(1) $x^2 + x - 6 = 0$

(2) $t^2 = 8 - 2t$

(3) $25t - 5t^2 = 20$

例題 7 平方完成で解く

つぎ ほうていしき かい
次の方程式を解きましょう。(2) は時刻 t 秒で、約 何秒かも答えましょ
う ($\sqrt{2}$ は約 1.41)。

(1) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (2) $20t - 5t^2 = 10$

かんが かんた **考え方** せいすう わ せき み
整数の和と積では見つからないので、平方完成して「(かっこ)
の 2 乗 = 数」の形にします。

しき (1) $x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = 0$ より $(x - 2)^2 - 3 = 0$ 、 $(x - 2)^2 = 3$

$x - 2 = \pm\sqrt{3}$ より $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(2) 移項して -5 でわると $t^2 - 4t + 2 = 0$

$(t - 2)^2 - 2 = 0$ より $(t - 2)^2 = 2$ 、 $t - 2 = \pm\sqrt{2}$ 、 $t = 2 \pm \sqrt{2}$

$2 - 1.41 = 0.59$ 、 $2 + 1.41 = 3.41$

こたえ (1) $x = 2 \pm \sqrt{3}$ (2) $t = 2 \pm \sqrt{2}$ (約 0.59 秒後と約 3.41 秒後)

例題8 $\sqrt{\quad}$ の計算

次の数を、(1) (2) は $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい整数に、(3) (4) は分母を有理化しましょう。

(1) $\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{18}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

考え方 (1) (2) は「2乗の数×ほかの数」に分けます。(3) (4) は分母と分子に同じ $\sqrt{\quad}$ をかけます。

しき (1) $\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$
 (3) $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

こたえ (1) $2\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $2\sqrt{3}$

(4) は、最後に分母の3と分子の6を約分しました。電卓で確かめると、 $6 \div 1.732 \dots = 3.464 \dots$ 、 $2 \times 1.732 \dots = 3.464 \dots$ で合います。

じぶんでとこう7

次の方程式を解きましょう。(2) は時刻 t 秒で、約何秒かも答えましょう ($\sqrt{3}$ は約 1.73)。

(1) $x^2 + 6x + 4 = 0$

(2) $20t - 5t^2 = 5$

じぶんでとこう8

(1) (2) は $\sqrt{\quad}$ の中を小さく、(3) (4) は分母を有理化しましょう。

(1) $\sqrt{8}$ (2) $\sqrt{27}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

 例題 9 解の公式で解く

つぎ ほうていしき、かい こうしき かい
次の方程式を、解の公式で解きましょう。

(1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ (2) $x^2 - 6x + 4 = 0$

かんが かんが **考え方** a, b, c を符号ごと読みとって、公式に入れます。 $\sqrt{\quad}$ の中が小さくできるときは小さくし、約分できるときは約分します。

しき (1) $a = 2, b = 3, c = -1$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(2) $a = 1, b = -6, c = 4$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

($\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 。分子の 6 も $2\sqrt{5}$ も 2 でわれる)

こたえ (1) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (2) $x = 3 \pm \sqrt{5}$

 じぶんでこう 9

つぎ ほうていしき、かい こうしき かい
次の方程式を、解の公式で解きましょう。

(1) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(2) $x^2 - 2x - 2 = 0$

例題 10 判別式で、解の個数を調べる

次の2次方程式の解の個数を、判別式で調べましょう。(4)は答えも求めましょう。

(1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (3) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(4) 10 m/s で真上に投げたボールの高さは $y = 10t - 5t^2$ (m) です。6 m の高さに届きますか。

考え方 $D = b^2 - 4ac$ の符号を調べます。(4)は $10t - 5t^2 = 6$ を $ax^2 + bx + c = 0$ の形にします。

しき (1) $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

(2) $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$

(3) $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

(4) 移項して $-5t^2 + 10t - 6 = 0$ 。

両辺に -1 をかけて $5t^2 - 10t + 6 = 0$

$D = (-10)^2 - 4 \times 5 \times 6 = 100 - 120 = -20 < 0$

こたえ (1) 2つ (2) 1つ (3) ない (4) 解がないので届かない

((4): 平方完成すると $y = -5(t - 1)^2 + 5$ で、最高点は 5 m。6 m には届かないことと合う。)

じぶんでとこう 10

解の個数を判別式で調べましょう。

(1) $2x^2 + 3x + 2 = 0$ (2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(3) $x^2 + x - 1 = 0$

(4) 20 m/s で真上に投げたボール ($y = 20t - 5t^2$) は、18 m の高さに届きますか。

例題 11 式がプラスになるところ

(1) $(x-1)(x-3)$ がプラスになる x と、マイナスになる x の範囲を答えましょう。

(2) 20 m/s で真上に投げたボール ($y = 20t - 5t^2$) が、15 m より高い所にいるのは、何秒後から何秒後までですか。

考え方 因数ごとの符号を表にして、かけ算の符号を調べます。(2) は $y - 15$ を因数分解します。

しき (1) $x < 1$ では $(-) \times (-) = (+)$ 、 $1 < x < 3$ では $(+) \times (-) = (-)$ 、 $x > 3$ では $(+) \times (+) = (+)$

$$(2) y - 15 = -5t^2 + 20t - 15 = -5(t-1)(t-3)$$

$1 < t < 3$ では $(-) \times (+) \times (-) = (+)$ なので、 $y - 15$ がプラス

こたえ (1) プラスは $x < 1$ と $x > 3$ 、マイナスは $1 < x < 3$ (2) 1 秒後から 3 秒後まで

じぶんでこう 11

(1) $(x+2)(x-4)$ がプラスになる x と、マイナスになる x の範囲を答えましょう。(2) 25 m/s で真上に投げたボール ($y = 25t - 5t^2$) が、20 m より高い所にいるのは、何秒後から何秒後までですか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

両辺を x でわってしまう

$x^2 = 2x$ を解くと?

✗ 両辺を x でわって、 $x = 2$

○ $x^2 - 2x = 0$ 、 $x(x - 2) = 0$ で、 $x = 0, 2$

$x = 0$ のとき、0 でわることになるので、わってはいけません。 $x = 0$ を入れると $0 = 0$ でなりたつのに、わると、この解が消えてしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

-3^2 と $(-3)^2$

$x = -3$ が $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解か、確かめると?

✗ $-3^2 + 2 \times (-3) - 3 = -9 - 6 - 3 = -18$ で、解ではない

○ $(-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ で、解である

x にマイナスの数を入れるときは、かっこごとに入れます (2-13)。 -3^2 は「3 の 2 乗にマイナスをつけた数」で -9 です。

⚠ まちがえやすいところ

かけて 0 の解の符号

✕ $(x-2)(x-6)=0$ だから、 $x=-2, -6$

○ $x-2=0$ から $x=2$ 、 $x-6=0$ から $x=6$

「かつこの中が 0 になる x 」が解です。答えを入れて、かつこの中が 0 になるか確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

0 でないのに「どちらか」を使う

✕ $(x-1)(x-3)=3$ だから、 $x-1=3$ または $x-3=3$

○ 展開して $x^2-4x+3=3$ 、 $x^2-4x=0$ 、 $x(x-4)=0$ で $x=0, 4$
「どちらかが決まる」のは、かけて 0 のときだけです。先に右辺を 0 にしましょう。

⚠ まちがえやすいところ

解を 1 つだけ答える

✕ $x^2=9$ だから、 $x=3$

○ $x=\pm 3$ (3 と -3)

$(-3)^2=9$ も忘れずに。場面に合わない解をすてるのは、両方を出してからです。

⚠ まちがえやすいところ

解の公式で、 b の符号をまちがえる

$x^2 - 4x + 1 = 0$ を解の公式で解くと？

✗ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{-16 - 4}}{2}$

○ $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$b = -4$ なので、 $-b = -(-4) = 4$ 、 $b^2 = (-4)^2 = 16$ です。 b は符号ごと読みとり、かっこをつけて入れましょう。

🔗 物理・工学ではこう使う

家のコンセントの $\sqrt{2}$

家のコンセントの電気（交流）は、電圧が

1秒に50回または60回、プラスとマイナスに入れかわっています。「100V」という

のは、ずっと同じ向きに流れる電気（直流）

の100Vと同じ働きをする、という意味の

値（実効値）です。いちばん高い所の電圧

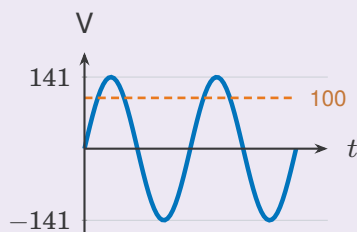
は、その $\sqrt{2}$ 倍の $100\sqrt{2}$ 、約141Vありま

す。反対に、実効値は最大値に $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

（約0.707）をかけた値です。電気的设计で

は、有理化した $\frac{\sqrt{2}}{2}$ が毎日のように出てき

ます。



ぶつり とうがく つか
物理・工学ではこう使う

くるま と はや
車が止まれる速さ

運転する人が危ないと気づいてからブレーキをふむまで、約 1 秒かかります（反応時間）。そのあいだ、車は同じ速さで進みます（空走距離）。ブレーキがききはじめると、ぬれた道路では 1 秒ごとに約 5 m/s ずつおそくなり、3-9 で見たように、速さの 2 乗に比例する距離で止まります（制動距離）。速さを v [m/s] とすると、止まるまでの距離 d [m] は

$$d = v \times 1 + \frac{v^2}{10}$$

です（ v^2 を 10 でわるのは、三角形の面積 $v \times \frac{v}{2}$ だから。 $\frac{v}{2}$ はブレーキをかけてから止まるまでの時間）。

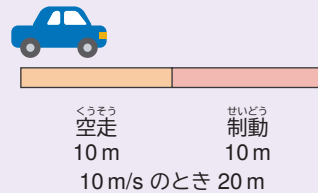
「20 m 先に人がいるとき、止まれるのは何 m/s までか」を考えます。 $d = 20$ とおくと、

$$v + \frac{v^2}{10} = 20$$

という 2 次方程式です。両辺に 10 をかけて $10v + v^2 = 200$ 、移項して $v^2 + 10v - 200 = 0$ 。和が 10、積が -200 の 2 つの数は 20 と -10 なので、 $(v + 20)(v - 10) = 0$ 。速さはプラスなので $v = 10$ です。

$$10 \text{ m/s} \times 3600 \text{ s/h} \div 1000 \text{ m/km} = 36 \text{ km/h}$$

時速 36 km までなら、20 m で止まります。

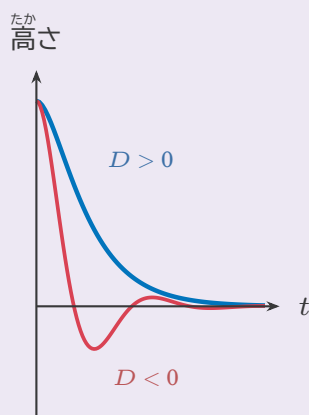


ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

ゆれるか、ゆれないか：特性方程式 (6-12 へ)

車のタイヤの近くには、ばねと、ゆれを止める部品（ダンパー）がついています。でこぼこを通ったあと、車体がいつまでもゆれていたら、乗り心地がよくありません。

第6巻では、車体の動きを表す式から、たとえば $s^2 + 3s + 2 = 0$ や $s^2 + 2s + 5 = 0$ のような2次方程式（特性方程式）が出てきます。1つめは $(s + 1)(s + 2) = 0$ で解が2つあり（ $D = 9 - 8 = 1 > 0$ ）、車体はゆれずに、ゆっくりもとの高さにもどります。2つめは $D = 4 - 20 = -16 < 0$ で、この巻の数の中に解がなく、車体はゆれながらもどります。判別式の符号が、乗り心地を決めているのです。ゆれずに、いちばん早くもとにもどるのは、ちょうど $D = 0$ のときです。実際の車は、乗り心地のために、ほんの少しだけゆれる（ D が少しマイナスの）ように設計することが多いのです。



△ やってみよう 表計算で、2 次方程式の解をさがそう

302 ページで、高さ 10 m を通る時刻は $t = 2 \pm \sqrt{2}$ (約 0.59 秒と約 3.41 秒) と求めました。表計算 (2-18) で、この答えを確かめてみましょう。

	A	B
1	時刻 t	高さ
2	0	$=20 \cdot A^2 - 5 \cdot A^2 \cdot 2$
3	$=A^2 + 0.1$	(上をコピー)

- 1 A 列に 0 から 4 まで 0.1 ずつふる時刻を作り、B 列に高さの式を下へコピーしよう。
- 2 高さが 10 をまたぐ所をさがそう。0.5 秒では 8.75、0.6 秒では 10.2 なので、解は 0.5 と 0.6 のあいだにある。
- 3 その間を、こんどは 0.01 ずつにして調べよう。0.58 秒で 9.918、0.59 秒で 10.0595 になる。 $2 - \sqrt{2} = 0.5857 \dots$ は、たしかにそのあいだにあるかな？ 3.41 秒のほうも調べよう。

表計算では、間をどんどん細かくすれば、解にいくらでも近づけます。答えがきれいな形にならない方程式でも、この方法なら解の近くの値がわかります (コンピュータで方程式を解くときの考え方の 1 つです)。



しょうまつもんだい
章末問題

3-10 のまとめ

きほん
基本



1 つぎ ほうていしき かい
次の方程式を解きましょう。

(1) $x^2 = 36$ (2) $x^2 = 5$ (3) $(x - 3)^2 = 4$

2 つぎ しき いんすうぶんかい
次の式を因数分解しましょう。

(1) $x^2 + 5x + 6$ (2) $x^2 - 7x + 10$ (3) $x^2 + x - 12$

(4) $x^2 - 16$ (5) $2x^2 - 18$ (6) $x^2 - 6x$

3 つぎ ほうていしき かい
次の方程式を解きましょう。

(1) $x^2 - 3x = 0$ (2) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (3) $t^2 + t - 6 = 0$

4 つぎ ほうていしき かい
次の方程式を解きましょう。(1) は平方完成で、(2) は解の公式で。

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (2) $2x^2 + x - 2 = 0$

5 (1) (2) は $\sqrt{\quad}$ の中を小さく、(3) は分母を有理化しましょう。

(1) $\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{45}$ (3) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

6 つぎ し ほうていしき かい こすう はんべつしき しら
次の2次方程式の解の個数を、判別式で調べましょう。

(1) $x^2 + 2x + 3 = 0$ (2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ (3) $x^2 - 3x - 1 = 0$

チャレンジ



7 30 m/s で真上に投げたボールの、 t 秒後の高さは $y = 30t - 5t^2$ (m) です。(1) 高さ 25 m を通るのは何秒後ですか。(2) 25 m より高い所にいるのは、何秒後から何秒後までですか。(3) 地面にもどるのは何秒後ですか。

8 止まるまでの距離が $d = v + \frac{v^2}{10}$ (m) の車があります (v は速度 [m/s])。

60 m で止まれる速度は何 m/s ですか。時速何 km ですか (321 ページの物理・工学ではこう使うと同じ手順で、両辺に 10 をかけてから移項しよう)。

9 20 m/s で真上に投げたボール ($y = 20t - 5t^2$) は、21 m の高さに届きますか。判別式を使って答え、そのわけを 3-9 の最高点でも確かめましょう。

10 30 m/s で真上に投げたボール ($y = 30t - 5t^2$) が、高さ 30 m を通るのは何秒後ですか。平方完成で解き、約何秒かも答えましょう ($\sqrt{3}$ は約 1.73)。

✓ ふりかえり できるようになったかな?

- ☐ $x^2 = k$ の形や因数分解で、2 次方程式を解ける。 → 297 ページ
- ☐ 解の公式を作り、 $\sqrt{\quad}$ の計算をして解ける。 → 304 ページ
- ☐ 判別式で解の個数を調べ、場面に合う解を選ぶ。 → 306 ページ



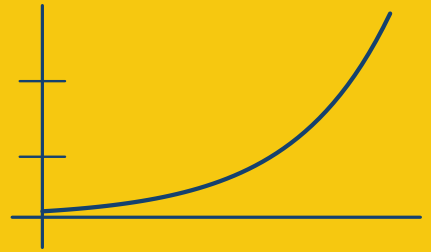
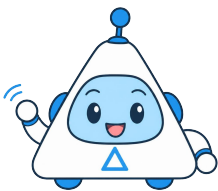
デルタ

答えが 2 つ出たら、どちらも場面に合うか確かめよう。次の章では、倍々でふえる量のグラフを見ていくよ。

ばいばい 倍々とけた



- ? ^{ばいばい}倍々でふえると、どれくらい^{おお}大きくなる？
- ? ^{はんぶん}半分、^{はんぶん}半分とへっていく^{りょう}量は、いつ0になる？
- ? ^{おと}音の^{おお}大きさの「デシベル」は、^{なに}何を^{かぞ}数えている？



^{ばいばい}倍々でふえる^{りょう}量は、あつという^ま間にととも^{おお}大きくなるよ。そんな^{りょう}量は「けたがいくつか」で^{かぞ}数えると、^み見やすくなるよ。

この部^ぶで学^{まな}ぶこと

3-11

指数関数^{しすうかんすう}：いまある量^{りょう}に比例^{ひれい}してふえる・へる

×2 ★★☆☆★ P.328

倍々^{はいばい}でふえると、あっという間^まに大き^{おお}くなる

3-12

対数^{たいすう}：けた^{かぞ}を数^{どう}える道具^ぐ

×2 ★★☆☆★ P.358

音^{おと}の大きさ^{おお}の「デシベル」は、けた^{かぞ}の数^{かた}え方

この部^ぶを読^よむと…

指数関数^{しすうかんすう}と対数^{たいすう}を使^{つか}って、ふえる・へる量^{りょう}を計算^{けいさん}し、けた^{かた}のちがう量^{りょう}を1つのグラフにかけるようになります。第5巻^{だいご}の e と、第9巻^{だいきゅう}の制御^{せいぎよ}につながります。

第3部 倍々とけた

★★～★★★★

3-11

指数関数：いまある量に 比例してふえる・へる

この章の先に 2-7 2-12 2-18 3-3 3-5 この章の先に 3-12 5-14 5-18 6-4

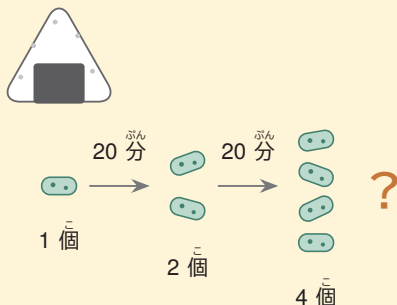
この章でできるようになること

- ★★ 「ふえる量が、いまある量に比例する」変化を表にして、指数関数の式とグラフに表せる。
- ★★ 指数のきまり $a^{x+h} = a^x \times a^h$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $a^0 = 1$ を使って計算できる。
- ★★★ $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ のわけがわかり、半減期や整数でない指数を電卓で計算できる。

? はてな?

朝 8 時に作ったおにぎりに、細菌が 1 個ついていました。この細菌は、あたところでは、20 分ごとに 1 個が 2 個に分かれます。

お昼の 12 時には、細菌は何個になっているかな? 夕方 6 時には? 1 個が 2 個になるだけなら、たいしたこととはなさそうだけれど……。



ふえ方^{かた}には、「同じ数^{かず}ずつ」（3-5 の 1 次関数^{じ かんすう}）と「同じ倍^{ばい}ずつ」があります。
この章^{しょう}では、「同じ倍^{ばい}ずつ」ふえる・へる量^{りょう}を調べます。細菌^{さいきん}、お湯^ゆの冷め方^{かた}、放^{ほう}射線^{しゃせん}が、このなかまです。

△ やってみよう「100 個^こずつ」と「2 倍^{ばい}ずつ」、どっちが多い^{おお}？

表計算^{ひょうけいさん}で、2 つのふえ方^{かた}をくらべます（2-18）。どちらも、はじめは 1 個^こです。B 列^{れつ}は「20 分^{ぶん}ごとに 2 倍^{ばい}」、C 列^{れつ}は「20 分^{ぶん}ごとに 100 個^こずつふえる」です。

- ① 2 行目^{ぎょうめ}に、はじめのようすを入れよう^い：A2 に 0、B2 に 1、C2 に 1。
- ② 3 行目^{ぎょうめ}に、1 つ上^{うへ}の行^{ぎょう}を使う式^{つか しき}を入れよう^い：A3 に $=A2+1$ 、B3 に $=B2*2$ 、C3 に $=C2+100$ 。
- ③ 3 行目^{ぎょうめ}を選んで、14 行目^{ぎょうめ}まで下^{した}へコピーしよう。
- ④ B 列^{れつ}と C 列^{れつ}をくらべよう。B 列^{れつ}が C 列^{れつ}をぬくのは何回^{なんかい}目かな？

	A	B	C
1	回 ^{かい}	2 倍 ^{ばい} ずつ	100 ずつ
2	0	1	1
3	$=A2+1$	$=B2*2$	$=C2+100$
4	$=A3+1$	$=B3*2$	$=C3+100$

A 列^{れつ}の「回^{かい}」は、20 分^{ぶん}が何回^{なんかい}たったかです。1 回^{かい}で 20 分^{ぶん}、3 回^{かい}で 60 分^{ぶん}（1 時間^{じ かん}）です。＊はかけ算^{さん}の記号^{きごう}です（2-18）。

結果^{けっ 果}は次のようになります。上^{うへ}の行^{ぎょう}の答え^{こた}を使って、下^{した}の行^{ぎょう}を計算^{けいさん}しています（2-18 のリレー）。

かい 回 (20 ぶんごと)	0	1	2	3	4	5	6
B : 2 倍ずつ	1	2	4	8	16	32	64
C : 100 ずつ	1	101	201	301	401	501	601
かい 回 (20 ぶんごと)	7	8	9	10	11	12	
B : 2 倍ずつ	128	256	512	1024	2048	4096	
C : 100 ずつ	701	801	901	1001	1101	1201	

ひょう 表1 10 回目 (200 分後) で、B 列が C 列をぬく。

はじめのうちは、「100 個ずつ」のほうが、ずっと多くふえます。6 回目でも、B は 64 個、C は 601 個です。ところが、10 回目で B は 1024 個になり、C の 1001 個をぬきます。そこから先は、差がどんどん開きます。12 回目には、B が 4096 個、C は 1201 個です。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-7 同じ数を何回もかけるのが累乗。 $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ 。 $2^{10} = 1024$ は、ほぼ 1000。
- 2-12 $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (かけ算は指数をたす)。 $x^0 = 1$ 、 $x^{-1} = \frac{1}{x}$ 、 $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
- 2-5 10% ふえる = もとの 1 倍 + 0.1 倍 = 1.1 倍。 20% へる = 0.8 倍。
- 2-8 $\sqrt{2}$ は、2 乗すると 2 になる正の数。 $\sqrt{2} = 1.414 \dots$ 、 $\sqrt{9} = 3$
- 3-5 1 次関数 $y = ax + b$ は、 x が 1 ふえるごとに、 y がいつも同じ a だけふえる。



ソラ

はじめは「100 個ずつ」の楽勝だと思ったのに、途中で一気にぬかれた！ 倍々って、どうしてこんなに強いのか？

すうがく どうぐ
数学の道具

① ふえる量が、いまある量に比例する

やってみようの表で、1 回ごとに「いくつふえたか」を調べます。ふえた数は、あとーまえ（2-3）で求めます。

かい 回	0	1	2	3	4	5
C : 100 ずつ	1	101	201	301	401	501
C ふえた数		100	100	100	100	100
B : 2 倍ずつ	1	2	4	8	16	32
B ふえた数		1	2	4	8	16

表2 Cは毎回100 ずつ。Bのふえた数は、毎回ちがう。

Cは、毎回同じ100 ずつふえています。3-5 で学んだ1 次関数と同じで、変化の割合がいつも同じです。

Bのふえた数は、1、2、4、8、16 と、毎回ちがいます。でも、よく見ると、ふえた数は、ふえる前にあった数と同じです。たとえば、3 回目の8 個から4 回目の16 個へは、8 個ふえています。8 個の細菌が、それぞれ2 つに分かれたからです。

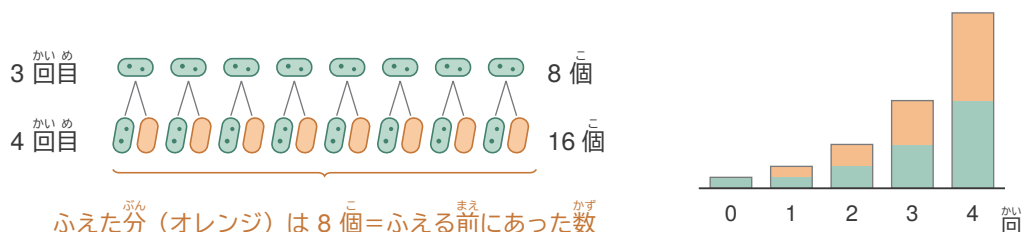


図1 左：8 個がそれぞれ2 つに分かれると、8 個ふえる。右：棒のオレンジの部分（ふえた分）は、前の棒と同じ高さ。

そこで、「ふえた数÷ふえる前の数」を計算してみます。2-15 で、 $y \div x$ がいつも同じなら、 y は x に比例すると学びました。

ふえる前の数 (いまある量)	1	2	4	8	16
ふえた数 (ふえる量)	1	2	4	8	16
ふえる量 ÷ いまある量	1	1	1	1	1

表3 わり算の答えがいつも1。ふえる量は、いまある量に比例している。

わり算の答えは、いつも1です。つまり、**ふえる量は、いまある量に比例しています**（比例定数は1）。たくさんあるほど、たくさんふえます。だから、倍々のふえ方は、数が大きくなるほど、ふえ方が速くなるのです。やってみようでBがCをぬいたのは、このためです。

① もう1つの例：利息がつく貯金

1年ごとに、いまある金額の10%の利息（ふえる分）がつく貯金に、10000円を預けたとします。利息は、いまある金額の0.1倍です（10% = 0.1。2-5）。

年	0	1	2	3
いまある金額 (円)	10000	11000	12100	13310
その年につく利息 (円)	1000	1100	1210	
利息 ÷ いまある金額	0.1	0.1	0.1	

表4 利息は、いまある金額に比例する（比例定数0.1）。

1年目の利息は、 $10000 \times 0.1 = 1000$ 円です。2年目は、11000 円に利息がつくので、 $11000 \times 0.1 = 1100$ 円です。利息にも利息がつくので、利息は毎年すこしずつ大きくなります。

いまある金額を1倍として、それに0.1倍の利息をたすので、1年たつと $1 + 0.1 = 1.1$ 倍になります（図2）。

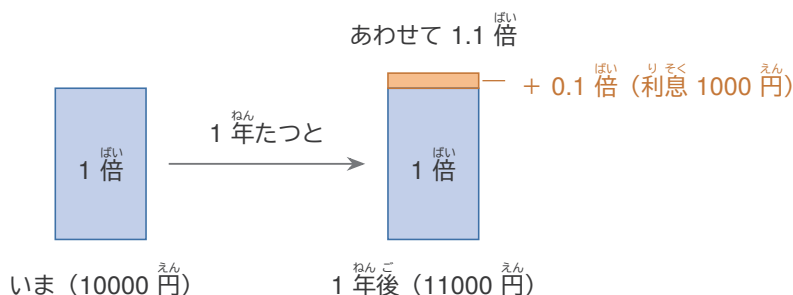


図 2 いまある金額 (1 倍) に、その 0.1 倍の利息がつくと、1.1 倍になる。

だから、表は次のように、1.1 を何回もかけて作れます。

$$10000 \times 1.1 = 11000, \quad 11000 \times 1.1 = 12100, \quad 12100 \times 1.1 = 13310$$

3 年後は、10000 に 1.1 を 3 回かけたので、 $10000 \times 1.1^3 = 13310$ 円です (2-7 の累乗)。

2 きまりにする

2 つの例を並べると、同じしくみが見えます。

	ふえる量は、いまある量の	1 回ごとに	x 回後
細菌 (はじめ 1)	1 倍	$1 + 1 = 2$ 倍	1×2^x
貯金 (はじめ 10000)	0.1 倍	$1 + 0.1 = 1.1$ 倍	10000×1.1^x

表 5 ふえる量がいまある量の k 倍なら、1 回ごとに $(1 + k)$ 倍になる。

1 回ごとにかける数 (倍率) を a とすると、

- 1 回たつと、はじめの量の a 倍。
- 2 回たつと、そのまた a 倍なので、 $a \times a = a^2$ 倍。
- x 回たつと、 a を x 回かけるので、 a^x 倍。

$$(x \text{ 回後の量}) = (\text{はじめの量}) \times a^x$$

へるときも同じです。毎回、いまある量の 0.2 倍がへるなら、1 回ごとに $1 - 0.2 = 0.8$ 倍になります。へる量が、いまある量に比例しているのです。

3 はてな？ の答え

② はてな？ の細菌は、20 分ごとに 2 倍です。8 時から 12 時までは 4 h です。分に直すと (2-10)、

$$4 \text{ h} \times 60 \text{ min/h} = 240 \text{ min}$$

20 分が $240 \div 20 = 12$ 回あるので、 $1 \times 2^{12} = 4096$ 個です。

夕方 6 時 (18 時) までは 10 h、つまり 600 min です。 $600 \div 20 = 30$ 回なので、

$$1 \times 2^{30} = 1073741824$$

約 10 億 7000 万個です。日本の人口 (約 1 億 2000 万人) の約 9 倍です。実際には、栄養が足りなくなったり、温度が低かったりして、いつまでも倍々ではふえません。それでも、食べ物をあたたかい所に長く置いてはいけないわけが、数でよくわかります。

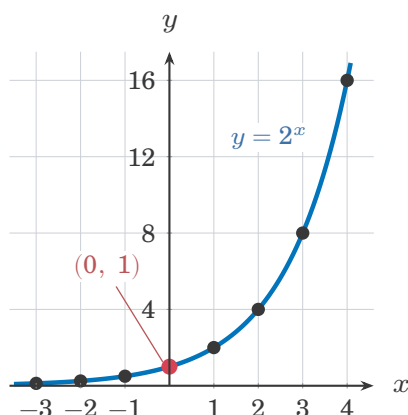
2 指数関数 $y = a^x$ のグラフ

細菌の数を y 個、20 分が何回たったかを x とすると、はじめが 1 個なので $y = 2^x$ です。 x を 1 つ決めると y が 1 つ決まるので、 y は x の関数です (3-3)。

ここからは、 y を「 $x = 0$ のときの量の何倍か」と読みます。すると、 x がマイナスのときも考えられます。 $x = -1$ は「1 回前」、つまり 20 分前です。20 分で 2 倍になって $x = 0$ の量になったのだから、20 分前の量は、その半分の $\frac{1}{2}$ 倍です。2-12 の $2^{-1} = \frac{1}{2}$ と合っています。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
しょうすう 小数	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

表 6 x が 1 ふえるごとに y は 2 倍。1 へるごとに $\frac{1}{2}$ 倍。



表の点をかき、なめらかな線をつな
ぎました (3-4)。\$x\$ が整数でない所の
値は、⑤で決めます。

- ① \$x = 0\$ で \$y = 1\$。点 \$(0, 1)\$ を
とおる。
- ② 右へ行くほど、急に上がる。
- ③ 左へ行くと、\$x\$ 軸に近づくが、
くっつかない。何回半分にして
も、0 にはならないから。
- ④ \$y\$ はいつも 0 より大きい。

\$y = 2^x\$ のように、指数の所に変数 \$x\$ がある関数を、**指数関数**といいます。一
般には \$y = a^x\$ と書きます。\$a\$ は 1 回ごとにかけ数 (倍率) で、正の数です。

\$x^2\$ と \$2^x\$ はちがう \$y = x^2\$ は「\$x\$ を 2 回かける」、\$y = 2^x\$ は「2 を \$x\$ 回かけ
る」です。くらべてみましょう。

\$x\$	1	2	3	4	5	10	20
\$x^2\$	1	4	9	16	25	100	400
\$2^x\$	2	4	8	16	32	1024	1048576

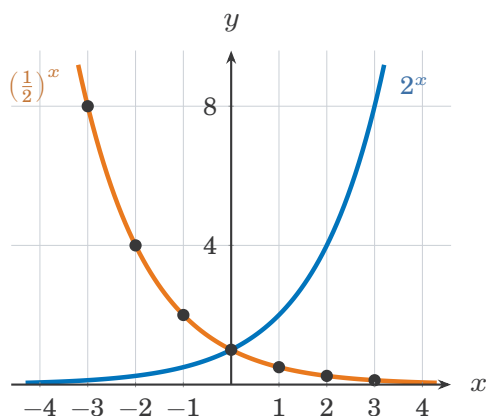
表7 \$x = 4\$ までは同じくらい。そこから先は、\$2^x\$ がけたちがいにおお
きくなる。

\$x = 20\$ では、\$x^2\$ は 400 なのに、\$2^x\$ は約 100 万です。\$x^3\$ や \$x^{10}\$ とくらべて
も、\$x\$ を大きくしていくと、いつかはかならず \$2^x\$ のほうが大きくなります。

① へる指数関数：\$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\$

こんどは、1 回ごとに半分になる量です。\$a = \frac{1}{2}\$ なので、\$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\$ です。

\$x\$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
\$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625



グラフ（オレンジ）は、右へ行くほど下がり、 x 軸に近づいていきます。 2^x のグラフ（青）を、 y 軸で左右に折り返した形です。表を見ると、 2^x の表を右から読んだものになっています。

a が 1 より大きければ、1 回ごとに大きくなるので、グラフは右上がりです。 a が 0 と 1 のあいだなら、1 回ごとに小さくなるので、グラフは右下がりです。 $a = 1$ なら、何回かけても 1 のままです。

2 「ひき算が一定」と「わり算が一定」

1 次関数と指数関数のちがいを、表で確かめます。 x を 1 ずつふやして、となりどうしの y を、ひき算とわり算でくらべます。

x	0	1	2	3	
$y = 2x + 1$ (1 次関数)	1	3	5	7	
つぎ次の $y -$ 前の y		2	2	2	一定
$y = 2^x$ (指数関数)	1	2	4	8	
つぎ次の $y \div$ 前の y		2	2	2	一定

表 8 1 次関数はひき算が一定。指数関数はわり算が一定。

指数関数のひき算（変化の割合）は、1、2、4 と一定ではありません。グラフがまっすぐでなく、だんだん急になるのはこのためです。はかったデータが指数関数かどうかは、となりどうしのわり算が一定かで見分けられます。

3 指数のきまり

2-12 で、 $x^m \times x^n = x^{m+n}$ を学びました。指数関数では、指数の所が変数です。そこで、指数のきまりを、細菌の時間の話で読みなおします。ここからは、 a は正の数とします。

1 $a^{x+h} = a^x \times a^h$: 続けて進むと、倍率はかけ算

細菌が3回分かれて $2^3 = 8$ 倍になり、そのあと、さらに1回分かれたとします。全部で $3 + 1 = 4$ 回なので 2^{3+1} 倍です。いっぽう、8倍になったものがさらに2倍になったので、 $2^3 \times 2^1$ 倍とも言えます。

$$2^{3+1} = \underbrace{\boxed{2} \boxed{2} \boxed{2}}_{3 \text{ 回}} \times \boxed{2}_{1 \text{ 回}} = 2^3 \times 2^1 = 8 \times 2 = 16$$

図3 2を3回かけてから、さらに1回かける。全部で4回。

$2^4 = 16$ と、たしかに同じです。 x 回分かれたあと、さらに h 回分かれても同じように考えられるので、

$$a^{x+h} = a^x \times a^h$$

これは2-12の $x^m \times x^n = x^{m+n}$ の文字をかえて、右と左を入れかえたものです。「時間を続けて進めると、倍率はかけ算になる」と読めます。5-14では、このきまりを使って指数関数を微分します。

2 $(a^m)^n = a^{mn}$: 倍率をくり返すと、指数はかけ算

20分ごとに2倍の細菌は、1時間（20分が3回）で $2^3 = 8$ 倍になります。2時間では、8倍が2回なので $(2^3)^2$ 倍です。2を何回かけたかを数えると、

$$(2^3)^2 = \underbrace{\boxed{2} \boxed{2} \boxed{2}}_{2^3 \text{ (1時間目)}} \times \underbrace{\boxed{2} \boxed{2} \boxed{2}}_{2^3 \text{ (2時間目)}} = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$$

図4 3回のまとまりが2つ。2を $3 \times 2 = 6$ 回かけている。

$8 \times 8 = 64$ で、たしかに 2^6 です。指数は「たす」のではなく「かける」ことに注意しましょう ($2^{3+2} = 32$ ではありません)。

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2-7 のもっと知りたいの $(10^2)^3 = 10^6$ と同じきまりです。

3 $a^0 = 1$: 0 回かけると、はじめのまま

0 回分かれた (まだ分かれていない) 細菌は、はじめの 1 倍のままです。だから $2^0 = 1$ です。①のきまりからも確かめられます。 $a^{0+h} = a^0 \times a^h$ で、左は $0+h=h$ なので a^h です。

$$a^h = a^0 \times a^h$$

a^h に a^0 をかけても a^h のままなので、 $a^0 = 1$ です。2-12 で表のならびから決めた $x^0 = 1$ と、同じ答えになりました。

4 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$: さかのぼると、わり算

x 回進んでから、 x 回もどると、はじめにもどります。①のきまりで計算すると、

$$a^x \times a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$$

a^{-x} は、 a^x にかけて 1 になる数です。だから、

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

です。2-12 で学んだ $x^{-1} = \frac{1}{x}$ のつづきです。たとえば、 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ は、3 回前 (1 時間前) の量がいまの $\frac{1}{8}$ だったことを表します。

4 半分ずつへる：半減期

病院の検査では、弱い放射線を出す薬を使うことがあります。よく使われるテクネチウム 99m という物質は、6 時間ごとに半分にへります。だから、検査が終わると体の中からすぐに少なくなります。

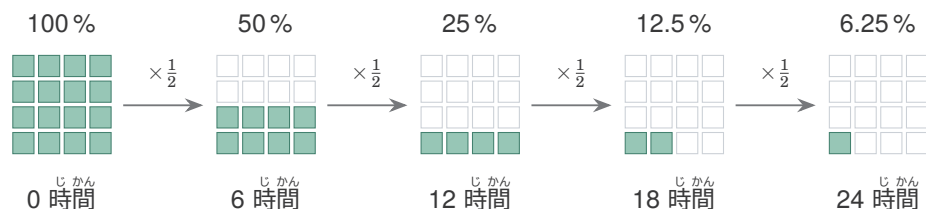


図5 6 時間ごとに、のこっている量（緑のマス）が半分になる。

時間 (h)	0	6	12	18	24
半分になった回数	0	1	2	3	4
のこっている量 (%)	100	50	25	12.5	6.25

表9 6 時間ごとに $\frac{1}{2}$ 倍。24 時間で $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 。

このように、量が半分になるまでの時間を半減期といいます。テクネチウム 99m の半減期は 6 時間です。100 % から 50 % までも 6 時間、50 % から 25 % までも 6 時間です。はじめの量がいくらでも、半分になる時間は同じです。

なぜ、いつも同じ時間で半分？ この物質の原子は、1 つ 1 つが、同じ時間のうちに同じ見こみで、別の原子に変わります。だから、原子がたくさんあるほど、たくさん変わります。へる量が、いまある量に比例するのです。数学の道具の①で見たとおり、そういう量は、同じ時間ごとに同じ倍率で変わります。

1 式にする： $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

半減期を T 、たった時間を t とします。半分になった回数は、「 t の中に T がいくつあるか」なので、 $t \div T = \frac{t}{T}$ 回です。たとえば、24 時間の中には 6 時間が $\frac{24}{6} = 4$ つあるので、4 回半分になっています。

$$(\text{のこっている量}) = (\text{はじめの量}) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

t と T は同じ単位（ここでは時間）にそろえます。

では、3 時間後は何 % でしょう。3 時間は半減期の半分なので、

$$\frac{t}{T} = \frac{3}{6} = 0.5$$

です。「 $\frac{1}{2}$ を 0.5 回かける」とは、どういうことでしょうか。

100 % と 50 % のまん中の 75 %（図 6 の赤い点）と考えたくなります。でも、グラフは直線ではなく、曲がっています。⑤で、本当の値（青い丸）を求めます。

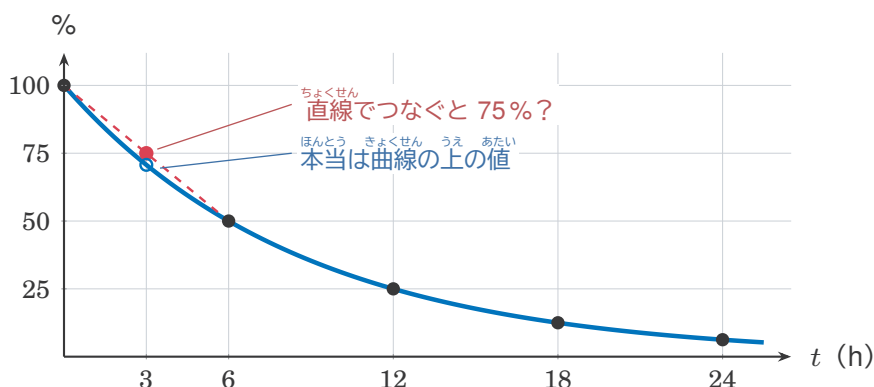


図 6 半減期 6 時間の物質。3 時間後は、赤い点（75 %）ではなく、曲線の上の青い丸。

5 分数の指数： $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

指数が整数なら、「何回かけるか」でした。0.5 回かけることはできません。そこで、これまでのきまりがそのまま成り立つように、分数の指数の意味を決めます（2-7 で、0 乗やマイナスの指数を決めたのと同じやり方です）。ここでは 2 通りで考えます。

1 ひょう かんが 表で考える

細菌の数 $y = 2^x$ を、 x を 0.5 ずつ進めた表にします。 $x = 0.5$ は「20 分の半分の 10 分たったとき」です。

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 2^x$	1	?	2	?	4

Diagram showing the relationship between x and $y = 2^x$. Blue arrows labeled $\times 2$ connect $x=0 \rightarrow 1$ and $x=1 \rightarrow 2$. Orange arrows labeled $\times r$ connect $x=0 \rightarrow 0.5$, $x=0.5 \rightarrow 1$, $x=1 \rightarrow 1.5$, and $x=1.5 \rightarrow 2$.

図 7 x が 0.5 進むごとに、同じ倍率 r をかける。 r を 2 回かけると 2 倍。

指数関数は、 x が同じだけ進むと、いつも同じ倍率になるのです (②)。 x が 0.5 進むときの倍率を r とします。

- ① $x = 0$ から $x = 1$ へは、0.5 ずつ 2 回進むので、 r を 2 回かけます。
- ② いっぽう、 $x = 0$ から 1 へは 2 倍です。だから $r \times r = 2$ 。
- ③ 2 乗すると 2 になる正の数は $\sqrt{2} = 1.414 \dots$ (2-8)。だから $r = \sqrt{2}$ です。

$x = 0.5$ の値は $1 \times r = \sqrt{2}$ なので、 $2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ です。10 分後には、細菌は約 1.41 倍になっています。1.5 倍ではありません。

2 し すう 指数のきまりで考える

③の②のきまり $(a^m)^n = a^{mn}$ が、分数の指数でも成り立つとします。 $x^{\frac{1}{2}}$ を 2 乗すると、

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2} \times 2} = x^1 = x$$

$x^{\frac{1}{2}}$ は「2 乗すると x になる数」です。それは $\sqrt{x}$ です (2-8。正の数のほうにします。 a^x はいつも正だからです)。③の①の $a^{x+h} = a^x \times a^h$ でも、 $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^1 = x$ で、同じことがわかります。

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2つめの式は、③の④の $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ を使いました。たとえば、

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}, \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \dots$$

表で考えても、きまりで考えても、同じ答えになりました。電卓の x^y のキー（表計算なら $=2^{0.5}$ ）で $2^{0.5}$ を計算すると、 $\sqrt{2}$ のキーと同じ 1.414213562 がでます。

$\sqrt{x}$ を $x^{\frac{1}{2}}$ と書けると、 $\sqrt{\quad}$ も「指数のなかま」になります。5-6・5-8では、この書き方で $\sqrt{x}$ を微分します。

記号カード

初めて出た章 3-11

$$x^{\frac{1}{2}}$$

読み方 エックスの2分の1
乗
意味 $\sqrt{x}$ のこと。分数の指数
英語 x to the one-half

3 半減期の半分の時間では

④の3時間後にもどります。のこっている量は

$$100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 100 \times \frac{1}{2^{0.5}} = 100 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{100}{1.414} = 70.7$$

で、約 70.7% です。75% ではありません。確かめてみましょう。3時間ごとに0.707倍なら、6時間では $0.707 \times 0.707 = 0.4998 \dots$ で、ちゃんと約半分になります。もし75%だとすると、6時間で $0.75 \times 0.75 = 0.5625$ 倍になってしまい、半分より多くのこります。図6で、青い丸が曲線の上にあることを確かめましょう。

もっと知りたい ★★★

3乗するともとにもどる数： $x^{\frac{1}{3}}$

同じように考えると、 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3} \times 3} = x$ なので、 $x^{\frac{1}{3}}$ は「3乗すると x になる数」です。たとえば $2 \times 2 \times 2 = 8$ なので $8^{\frac{1}{3}} = 2$ 、 $10 \times 10 \times 10 = 1000$

なので $1000^{\frac{1}{3}} = 10$ です。体積が 1000 cm^3 (1 L) の立方体の 1 辺は、 $1000^{\frac{1}{3}} = 10$ で 10 cm です。

6 整数でない指数を、電卓で計算する

$2^{1.5}$ を求めます。1.5 は $1 + 0.5$ なので、③の①のきまりで 2 つに分けられます。

$$2^{1.5} = 2^{1+0.5} = 2^1 \times 2^{0.5} = 2 \times 1.414 = 2.828$$

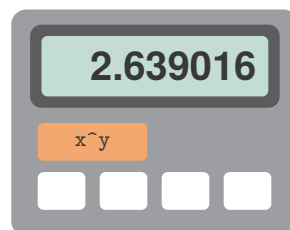
電卓で「 $2 \text{ x}^y 1.5 =$ 」と押すと、2.828427… が出ます。同じ答えです。

$2^{1.4}$ はどうでしょう。1.4 は $\frac{14}{10}$ なので、③の②のきまりで

$$(2^{1.4})^{10} = 2^{1.4 \times 10} = 2^{14} = 16384$$

です。 $2^{1.4}$ は「10 乗すると 16384 になる数」です。

手で求めるのはたいへんですが、電卓なら「 $2 \text{ x}^y 1.4 =$ 」で 2.639015… とすぐに出ます。表計算では $=2^{1.4}$ と書きます。



こうして、 x がどんな数でも 2^x の値が決まります。②のグラフの点と点のあいだを、なめらかな線でつないでよいのは、このためです。

せいかくに言うと

指数が分数でない数 ($\sqrt{2}$ や π のように、小数がどこまでも続く数。2-9) のときは、その数にかぎりなく近い分数の指数で計算した値が近づく先として、 a^x を決めます。

また、 a がマイナスだと、 $(-2)^{\frac{1}{2}}$ (2 乗して -2 になる数) のように決められない値が出てくるので、指数関数 a^x では a を正の数にします。

コラム 米1粒から始める「倍々のほうび」

豊臣秀吉に仕えた曾呂利新左衛門は、ほうびに「1
日目は米1粒、2日目は2粒、3日目は4粒と、前
の日の2倍ずつ、30日間ください」とたのんだ、と
いう話が伝わっています。1日目が $2^0 = 1$ 粒なの
で、 n 日目は 2^{n-1} 粒です。30日目の1日分だけ
で $2^{29} = 536870912$ 粒。米は1kgで約5万粒な
ので、 $536870912 \div 50000$ で約10700kg、つまり
約11トンにもなります。



たいせつ

ふえる（へる）量が、いまある量に比例するとき：

$$(x \text{ 回後の量}) = (\text{はじめの量}) \times a^x \quad (a \text{ は1回ごとの倍率})$$

$y = a^x : a > 1$ ならふえる、 $0 < a < 1$ ならへる。点 $(0, 1)$ を通り、 y はいつも正。

$$a^{x+h} = a^x \times a^h, (a^m)^n = a^{mn}, a^0 = 1, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{半減期 } T : (\text{のこっている量}) = (\text{はじめの量}) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

この章で出てきたことば

指数関数 $y = a^x$ のように、指数の所に変数がある関数。倍々でふえる・へる量を表す。

半減期 量が半分になるまでの時間。はじめの量がいくらでも同じ。

分数の指数 $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ のように、指数のきまりが成り立つように決めた累乗。

例題でたしかめよう

例題 1 倍々でふえる量

30 分ごとに 2 倍にふえる細菌が、はじめに 3000 個います。

(1) 3 時間後には何個になりますか。

(2) はじめて 100 万個をこえるのは、何時間何分後ですか。

考え方 30 分が何回あるかを数えて、2 をその回数だけかけます (①)。

(2) は表を作って、100 万をこえる所をさがします。

しき (1) $3 \text{ h} \times 60 \text{ min/h} = 180 \text{ min}$ 。 $180 \div 30 = 6$ 回

$$3000 \times 2^6 = 3000 \times 64 = 192000$$

(2) 6 回で 192000。続けて 2 倍していく

7 回 : 384000、8 回 : 768000、9 回 : 1536000

9 回目ではじめてこえる。 $30 \times 9 = 270$ で 270 min

$270 \text{ min} \div 60 \text{ min/h} = 4.5 \text{ h}$ 。 0.5 時間は 30 分

こたえ (1) 192000 個 (2) 4 時間 30 分後

じぶんでとこう 1

20 分ごとに 2 倍にふえる細菌が、はじめに 500 個います。(1) 2 時間後には何個になりますか。(2) はじめて 10 万個をこえるのは、何時間何分後ですか。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

表 10 よく使う 2 の累乗。右へ 1 つ進むごとに 2 倍。 $2^{10} = 1024$ は、ほぼ 1000。

例題2 割合でふえる・へる

(1) 1年ごとに、いまある金額の10%の利息がつく貯金に、10000円を預けました。3年後はいくらですか。

(2) 200万円の車の値段が、1年ごとに、そのときの値段の20%ずつ下がります。2年後は何万円ですか。

考え方 10%ふえる = $1 + 0.1 = 1.1$ 倍、20%へる = $1 - 0.2 = 0.8$ 倍です (2-5)。それを年数だけかけます (①)。

しき (1) $1.1^3 = 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1.21 \times 1.1 = 1.331$

$$10000 \times 1.331 = 13310$$

$$(2) 0.8^2 = 0.8 \times 0.8 = 0.64$$

$$200 \times 0.64 = 128$$

こたえ (1) 13310円 (2) 128万円

(1) で「毎年1000円ずつ」と考えると13000円です。ちがいの310円は、利息についての利息です。

じぶんでこう2

(1) 1年ごとに、いまある金額の5%の利息がつく貯金に、40000円を預けました。2年後はいくらですか。(2) 10万円のパソコンの値段が、1年ごとに、そのときの値段の10%ずつ下がります。3年後は何円ですか。

例題 3 指数のきまりを使う

次の数を求めましょう。(5) は 2^x を使って表しましょう。

(1) 3^{2+1} を $3^2 \times 3^1$ に分けて (2) $(2^2)^3$ (3) 5^0 (4) 2^{-3} (5) 2^{x+3}

考え方 ③の 4 つのきまりを使います。(2) は指数をかけ算、(5) は $a^{x+h} = a^x \times a^h$ で $h = 3$ です。

しき (1) $3^{2+1} = 3^2 \times 3^1 = 9 \times 3 = 27$ (確かめ: $3^3 = 27$)

(2) $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$ (確かめ: $4^3 = 64$)

(3) $5^0 = 1$ (4) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(5) $2^{x+3} = 2^x \times 2^3 = 8 \times 2^x$

こたえ (1) 27 (2) 64 (3) 1 (4) $\frac{1}{8}$ (5) 8×2^x

(5) は、「 x 回目から、さらに 3 回進むと、いつでも 8 倍になる」という意味です。20 分ごとに 2 倍の細菌なら、いつから数えても、1 時間後には 8 倍です。

じぶんでこう 3

次の数を求めましょう。(5) は 3^x を使って表しましょう。(1) 2^{4+1} を $2^4 \times 2^1$ に分けて (2) $(3^2)^2$ (3) 10^0 (4) 10^{-2} (5) 3^{x+2}

例題4 半減期

セシウム 137 という物質の半減期は 30 年です。

(1) 90 年後には、はじめの何分の 1 になりますか。

(2) はじめの $\frac{1}{16}$ になるのは、何年後ですか。

考え方 半分になる回数は $\frac{t}{T}$ (④)。(2) は、 $\frac{1}{2}$ を何回かけると $\frac{1}{16}$ になるかを考えます。

しき (1) $\frac{90}{30} = 3$ 回。 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

(2) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ なので、 $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 。4 回

$30 \times 4 = 120$

こたえ (1) $\frac{1}{8}$ (2) 120 年後

じぶんでとこう4

テクネチウム 99m の半減期は 6 時間です。(1) 30 時間後には、はじめの何分の 1 になりますか。(2) はじめの $\frac{1}{8}$ になるのは、何時間後ですか。

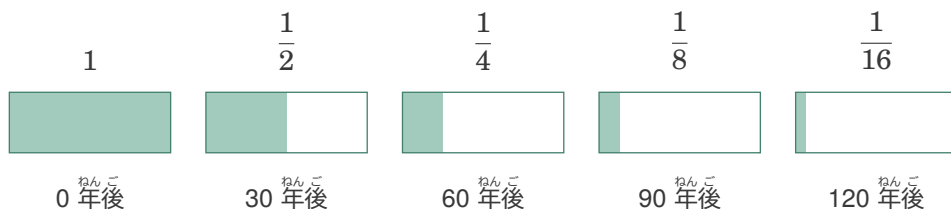


図8 セシウム 137 は、30 年ごとに半分。何回半分になったかは $\frac{t}{T}$ で数える。

例題 5 分数の指数

つぎ かず もと
次の数を求めましょう。

(1) $9^{\frac{1}{2}}$ (2) $16^{-\frac{1}{2}}$ (3) $4^{1.5}$ (4) $100^{\frac{1}{2}}$

かんが 考え方 $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 、 $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (⑤)。(3) は $1.5 = 1 + 0.5$ とわけて、
 $a^{x+h} = a^x \times a^h$ をつか使います。

しき (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ 3 を 2 乗すると 9

(2) $16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

(3) $4^{1.5} = 4^{1+0.5} = 4^1 \times 4^{0.5} = 4 \times \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$

(4) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

こたえ (1) 3 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 8 (4) 10

じぶんでこう 5

つぎ かず もと
次の数を求めましょう。(1) $25^{\frac{1}{2}}$ (2) $9^{-\frac{1}{2}}$ (3) $9^{1.5}$ (4) $10000^{\frac{1}{2}}$

れいだい 例題 5 の (3) を、⑤の表の考え方でも確かめましょう。 4^x は、 x が 1 進むと 4 倍です。 x が 0.5 進むときの倍率は、2 回かけて 4 になる数なので、 $\sqrt{4} = 2$ です。

x	0	0.5	1	1.5	2
4^x	1	2	4	8	16

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

図 9 x が 0.5 進むごとに 2 倍。 $x = 1.5$ では $4^{1.5} = 8$ で、例題 5 の (3) と同じ。

例題6 半減期の途中

半減期が6時間の物質が、はじめに400mgあります。(1)9時間後と、
(2)15時間後には、約何mgのこっていますか。 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$
を使いましょう。

考え方 半分になる回数 $\frac{t}{T}$ が1.5や2.5になります。整数の部分と0.5に分けます(③の①)。

しき (1) $\frac{9}{6} = 1.5$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.5} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 0.5 \times 0.707$
 $400 \times 0.5 \times 0.707 = 200 \times 0.707 = 141.4$
 (2) $\frac{15}{6} = 2.5$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 0.25 \times 0.707$
 $400 \times 0.25 \times 0.707 = 100 \times 0.707 = 70.7$

こたえ (1) 約141mg (2) 約70.7mg

(1)の答えは、6時間後の200mgと12時間後の100mgのあいだにあります。まん中の150mgより少し少ないのは、グラフが下にふくらんだ曲線だからです。

じぶんでとこう6

セシウム137(半減期30年)が、はじめに2000gあります。(1)15年後と、(2)45年後には、約何gのこっていますか。 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 0.707$ を使いましょう。

例題 7 整数でない指数と電卓

(1) $3^{1.5}$ を、③のきまりと $\sqrt{3} = 1.732$ を使って求め、電卓で確かめましょう。

(2) 空気を、熱がにげないように急におしちぢめると、圧力 p と体積 V のあいだに「 $pV^{1.4}$ が一定」という関係があります。はじめの圧力と体積をどちらも 1 として（はじめの何倍かで表す）、体積を急に 0.5 にすると、圧力は何倍になりますか。電卓で $0.5^{1.4} = 0.379$ を求めて使いましょう。

考え方 (2) はじめの $pV^{1.4}$ は、 $1 \times 1^{1.4} = 1$ です（1 は何回かけても 1）。おしちぢめたあとも、 $pV^{1.4}$ は 1 のままです。

しき (1) $3^{1.5} = 3^1 \times 3^{0.5} = 3 \times \sqrt{3} = 3 \times 1.732 = 5.196$

電卓：「 $3 \times \sqrt{1.5} =$ 」で 5.196152...

(2) $p \times 0.5^{1.4} = 1$ より $p \times 0.379 = 1$

両辺を 0.379 でわって (2-14)、 $p = \frac{1}{0.379} = 2.638 \dots$

こたえ (1) 約 5.196 (2) 約 2.64 倍

ゆっくりおしちぢめて温度が変わらないときは、 pV が一定（3-7 のボイルの法則）なので、体積を半分にすると圧力は 2 倍です。急におしちぢめると、空気の温度が上がるので、圧力は 2 倍より大きくなります。

じぶんでこうしよ

(1) $5^{1.5}$ を、③のきまりと $\sqrt{5} = 2.236$ を使って求めましょう。(2) 例題の (2) と同じ空気を、急に体積 0.25 までおしちぢめると、圧力は約何倍になりますか。電卓で $0.25^{1.4} = 0.1436$ を求めて使いましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

かけ算なのに、指数をかける

✕ $2^3 \times 2^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

○ $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

2を3回かけて、さらに2回かけるので、全部で5回です ($8 \times 4 = 32$)。
指数をかけるのは $(2^3)^2$ のときです。

⚠ まちがえやすいところ

かつこの累乗なのに、指数をたす

✕ $(2^3)^2 = 2^{3+2} = 2^5$

○ $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$

$2^3 = 8$ を2回かけるので $8 \times 8 = 64$ 。3回のまとまりが2つで、2を6回かけています。

⚠ まちがえやすいところ

10% ずつ3年で、30% ふえる?

✕ 毎年10% ずつふえるので、3年で30% ふえて1.3倍

○ $1.1^3 = 1.331$ で、約33% ふえる

2年目からは、ふえた分にも10% がつきます。たし算ではなく、1.1 のかけ算をくり返します。

⚠ まちがえやすいところ

はんげん き はんぶん し かん
半減期の半分の時間で、 $\frac{3}{4}$ のころ？

✕ 3 時間後（半減期 6 時間の半分）は、100 % と 50 % のまん中で 75 %

○ $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ で、約 70.7 %

75 % が 2 回だと $0.75 \times 0.75 = 0.5625$ で、半分になりません。グラフは直線ではなく曲線です。

⚠ まちがえやすいところ

ぶん じょう
2 分の 1 乗を、2 でわる

✕ $9^{\frac{1}{2}} = 9 \div 2 = 4.5$

○ $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$x^{\frac{1}{2}}$ は「2 乗すると x になる数」です。 $4.5 \times 4.5 = 20.25$ で、9 になりません。 $4^{\frac{1}{2}} = 2$ は $4 \div 2$ と偶然同じなので、気をつけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

し すう かげ
マイナスの指数で、マイナスの数になる？

✕ $2^{-3} = -8$

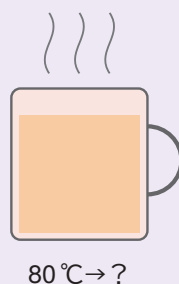
○ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

し すう かげ
指数のマイナスは「わる」ことを表します（2-7）。指数関数の値は、いつも正の数です（②のグラフ）。

物理・工学ではこう使う

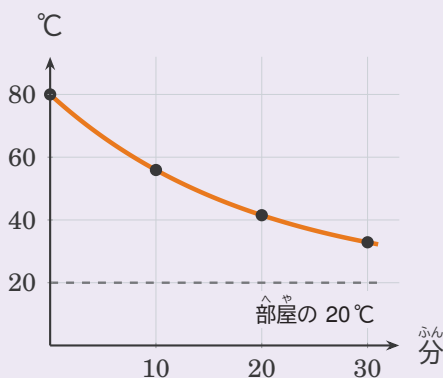
冷めるお湯：部屋との温度の差が、同じ割合でへる

80℃のお湯を、20℃の部屋に置きます。お湯は、部屋との温度の差が大きいほど速く冷めます。冷める速さ（へる量）が、いまある温度の差に比例するのです。だから、温度の差は、同じ時間ごとに同じ倍率でへります。あるマグカップでは、差が1分ごとに0.95倍になりました。



時間 (分)	0	1	2	3	5	10	20
温度の差 (℃)	60	57	54.2	51.4	46.4	35.9	21.5
お湯の温度 (℃)	80	77	74.2	71.4	66.4	55.9	41.5

表11 差は 60×0.95^t 。お湯の温度は、それに部屋の20℃をたしたもの。



はじめの1分で3℃下がりますが、10分後からの1分では、約1.8℃しか下がりません。差が小さくなるほど、ゆっくり冷めるのです。温度を1分ごとのとびとびでなく、いつでも使える1つの式で書くには、5-14で学ぶふしぎな数を使います(5-18・6-4)。

ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

ディーゼルエンジン：火花なしで燃える

トラックなどのディーゼルエンジンは、シリンダー（つつ）の中の空気を、ピストンで体積が約 $\frac{1}{16}$ になるまで急におしちぢめます。 **例題 7** と

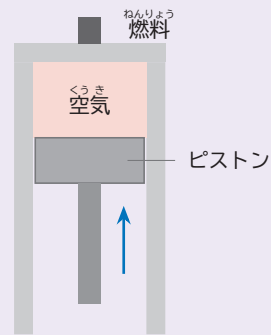
同じように「 $pV^{1.4}$ が一定」で計算します。電卓で $\left(\frac{1}{16}\right)^{1.4} = 0.0625^{1.4} = 0.0206$ なので、

$$p \times 0.0206 = 1 \quad \text{より} \quad p = \frac{1}{0.0206} = 48.5 \dots$$

圧力は約 49 倍になります（実際は熱が少しにげるので、これより小さめ）。ゆっくりなら 16 倍です。温度も同じような計算（くわしくは物理シリーズ『熱学』）で求められ、約 640℃になります。実際は熱がにげるので少し低めですが、軽油がひとりでに燃えだす温度（約 250℃）よりずっと高い温度です。そこに燃料の軽油をふきこむと、火花がなくても燃えだします。

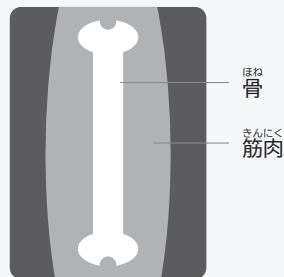
だいがく たね
大学への種

さいきん ゆ ほうしゃせん でん き かい ろ 細菌・お湯・放射線・電気の回路（コンデンサーにためた電気を抵抗に流すと、電圧は同じ時間ごとに同じ割合でへる）は、どれも「変わる速さが、いまある量に比例する」しくみです。この「しくみ」を式にしたものが微分方程式で、その答えが指数関数になります（5-14・6-4）。



コラム X線写真で、骨が白くうつるわけ

X線は、物の中を進むと、同じ厚さを通るごとに同じ割合で弱くなります。水に近い筋肉などでは、約3~4cm進むごとにおよそ半分になります。骨では、約1cmでおよそ半分です。たとえば骨を4cm通ると、 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ まで弱くなります。骨の後ろにはX線があまり届かないので、フィルムが黒くならず、白くうつるのです。



X線写真(足)



しょうまつもんだい 章末問題

3-11 のまとめ

基本



- 20分ごとに2倍にふえる細菌が、はじめに100個います。(1) 2時間後には何個になりますか。(2) はじめて1万個をこえるのは、何時間何分後ですか。
- (1) 1年ごとに、いまある金額の4%の利息がつく貯金に、50000円を預けました。2年後はいくらですか。(2) 80万円の機械の値打ちが、1年ごとに、そのときの25%ずつ下がります。2年後は何万円ですか。
- 次の数を求めましょう。(5) は 5^x を使って表しましょう。
(1) 2^{5+1} を $2^5 \times 2^1$ に分けて (2) $(2^3)^3$ (3) 8^0 (4) 3^{-2} (5) 5^{x+1}
- 炭素14の半減期は約5730年です。(1) 17190年後には、はじめの何分の1になりますか。(2) はじめの $\frac{1}{4}$ になるのは何年後ですか。
- 次の数を求めましょう。(1) $36^{\frac{1}{2}}$ (2) $25^{-\frac{1}{2}}$ (3) $4^{2.5}$ (4) $16^{1.5}$

- 6 半減期が6時間の物質が、はじめに800mgあります。(1)3時間後と、(2)9時間後には、約何mgのこっていますか。 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 0.707$ を使いましょう。

チャレンジ ★★

- 7 1時間ごとに2倍にふえる細菌が、はじめに1000個います。1時間30分後には約何個になりますか。 $\sqrt{2} = 1.414$ を使い、一の位まで答えましょう。

- 8 ガソリンエンジンでは、シリンダーの空気（とガソリンの霧）を、体積が約 $\frac{1}{10}$ になるまで急におしちぢめます。 $pV^{1.4}$ が一定として、はじめの圧力と体積を1とすると、圧力は約何倍になりますか。電卓で $0.1^{1.4}$ を求めて、小数第1位まで答えましょう。

- 9 ある町の人口は、1年ごとに、そのときの人口の2%ずつへっています。10年後の人口は、いまの約何%ですか。電卓を使い、小数第1位まで答えましょう（20%へると考えるのは、まちがいです）。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 「ふえる量が、いまある量に比例する」変化を、表・式・グラフにで
きる。 → 331 ページ
- ☐ 指数のきまり $a^{x+h} = a^x \times a^h$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $a^0 = 1$ を使える。
 → 337 ページ
- ☐ $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ のわけを説明できる。 → 340 ページ



デルタ

倍々は、はじめはゆっくりでも、あとで一気に大きくなるね。次の章では反対に、「何回かけたら、その数になるか」を求める対数を学ぼう。

第3部 倍々とけた

★★～★★★★

3-12

対数：けたを数える道具

道しるべ この章の前に 2-7 2-8 3-11 この章の先に 3-16 5-14 9-8

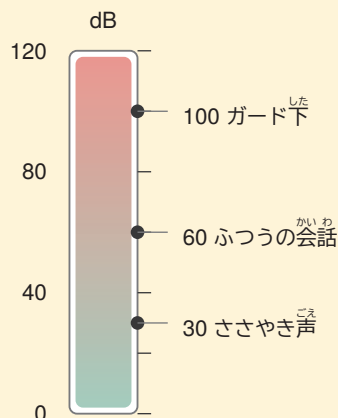
この章でできるようになること

- ★★ 「10を何乗すると、その数になるか」でけたを数え、 $\log_a b$ の意味を説明できる。
- ★★★ 対数のきまり（かけ算がたし算になる）を、指数のきまりから作って使える。
- ★★★ 片対数グラフやデシベルで、倍々になる量を直線やたし算であつかえる。

? はてな？

音の大きさは、デシベル（dB）という単位で表します。ささやき声は約30 dB、ふつうの会話は約60 dB、電車が通るときのガード下は約100 dBです。

60 dBの会話の音の強さは、30 dBのささやき声の2倍かな？ じつは、もっとずっと大きくちがいます。何倍ちがうのでしょうか。



この章では、「10を何回かけたか」で数の大きさを表す道具、対数を作ります。3-11の指数を、反対から見る道具です。

△ やってみよう 10 を何乗すると 2 になる？

電卓の x^y のキー（表計算なら $=10^{0.5}$ のような式）を使います。

- 1 $10^0 = 1$ 、 $10^1 = 10$ です。2 は 1 と 10 のあいだなので、指数は 0 と 1 のあいだにありそうです。
- 2 $10^{0.5}$ を計算しよう。2 より大きいかな、小さいかな？
- 3 指数を 0.4、0.3、0.31……と変えて、2 にいちばん近くなる指数を、小数第 3 位までさがそう。
- 4 同じように、10 を何乗すると 3 になるかもさがそう。

結果は次のようになります。2-8 で、2 乗ではさんで $\sqrt{2}$ に近づいたのと同じやり方です。

指数 x	0.5	0.4	0.3	0.31	0.301	0.302
10^x	3.162	2.512	1.995	2.042	1.9999	2.004

表 1 $10^{0.3}$ は 2 より少し小さく、 $10^{0.31}$ は少し大きい。 $10^{0.301}$ がいちばん 2 に近い。

2 は、10 の約 0.301 乗です。同じようにさがすと、3 は 10 の約 0.477 乗です ($10^{0.477} = 2.999 \dots$)。

🔄 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-7** $1000 = 10^3$ (0 が 3 つ)、 $0.01 = 10^{-2}$ 。10 倍するごとに、10 の指数が 1 ふえる。
- 2-8** 2 乗して 2 に近い数を、はさみながら少しずつさがした ($\sqrt{2} = 1.414 \dots$)。
- 3-11** $a^{x+h} = a^x \times a^h$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $a^0 = 1$ 、 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- 3-11** $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 。指数関数 $y = 2^x$ のグラフは右上がり、 y はいつも正。

すうがく 数学の道具

① けたを数える：10を何乗するか

大きな数や小さな数は、10を何乗したもので表すと、大きさがすぐにわかります(2-7)。

かず 数	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
10の累乗で	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
10を何乗するか	-2	-1	0	1	2	3	4

表2 10倍するごとに、「10を何乗するか」は1ずつふえる。

1000は0が3つで4けた、10000は0が4つで5けたです。「10を何乗するか」は、整数なら数のけた数より1小さい数で、けたを数えていることになります。

では、2や3や2560のように、10の累乗でない数はどうでしょう。やってみようで、2は10の約0.301乗、3は10の約0.477乗とわかりました。図1のように、2本の目もりを並べるとわかりやすくなります。

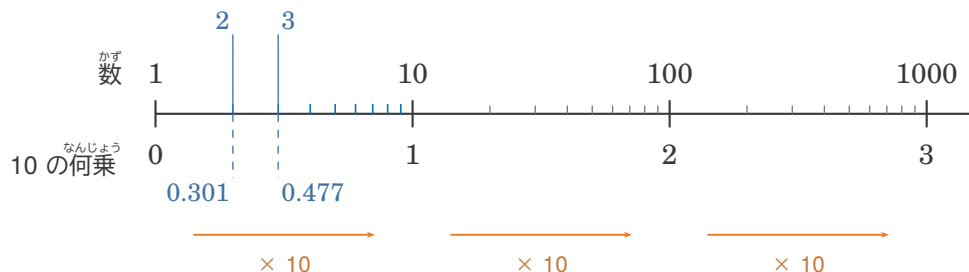


図1 上は数、下は「10の何乗か」。10倍するごとに、同じ長さ(1目もり)だけ右へ進む。

上の目もりは、10倍するごとに同じ長さだけ進みます。かけ算が、長さのたし算になっているのです。この目もりを対数目もりといいます。

1 名前と記号をつける

「10 を何乗すると b になるか」を表す数を、 $\log_{10} b$ と書き、「ログ・十・ビー」と読みます。たとえば、

$$\log_{10} 1000 = 3, \quad \log_{10} 0.01 = -2$$

$$\log_{10} 2 = 0.301 \dots, \quad \log_{10} 3 = 0.477 \dots$$

このような数を常用対数といいます。常用対数は、10 を省いて $\log 2$ と書くことも多く、電卓の $\log$ のキー（表計算なら $=\text{LOG10}(2)$ ）で求められます。

2 けたの数がわかる

2560 のけたを考えます。1000 < 2560 < 10000 なので、図 1 の目もりでは 3 と 4 のあいだです。電卓で $\log_{10} 2560 = 3.408 \dots$ です。

① $\log_{10} b$ が 3 以上 4 未満なら、 b は $10^3 = 1000$ 以上、 $10^4 = 10000$ 未満。

② 1000 以上 10000 未満の整数は、4 けた。

③ つまり、 $(\log_{10} b \text{ の整数の部分}) + 1$ が、 b のけたの数です。

常用対数は、まさに「けたを数える道具」です。

2 $\log_a b$: a を何乗すると b になるか

10 のかわりに、ほかの数を使うこともできます。3-11 の細菌は、20 分ごとに 2 倍になりました。32 倍になるのは何回分かれたときでしょう。 $2^5 = 32$ なので、5 回です。「2 を何乗すると 32 になるか」の答えの 5 を、

$$\log_2 32 = 5$$

と書きます。一般に、「 a を何乗すると b になるか」を表す数を $\log_a b$ と書き、 a を底といいます。このような数を、まとめて対数といいます。3-11 の指数関数 $y = a^x$ の a も、底とよびます。

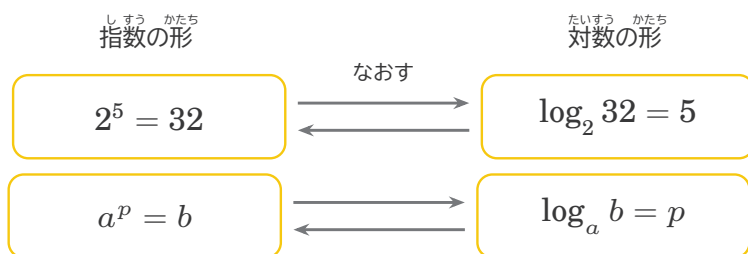


図2 同じことを、2つの形で書く。指数の形の右肩の数（指数）が、対数の答えになる。

たいすう 対数	かんが かんた しすう かたち 考え方（指数の形）	こた 答え
$\log_2 8$	$2^{\square} = 8$ 。 $2 \times 2 \times 2 = 8$	3
$\log_3 9$	$3^{\square} = 9$ 。 $3 \times 3 = 9$	2
$\log_{10} 0.01$	$10^{\square} = 0.01 = \frac{1}{100}$	-2
$\log_2 \frac{1}{2}$	$2^{\square} = \frac{1}{2}$ 。 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ (3-11)	-1
$\log_4 2$	$4^{\square} = 2$ 。 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ (3-11)	$\frac{1}{2}$
$\log_5 1$	$5^{\square} = 1$ 。 $5^0 = 1$	0
$\log_7 7$	$7^{\square} = 7$ 。 $7^1 = 7$	1

表3 対数は、指数の形になおして、□に入る数をさがせば求められる。

最後の2つから、どんな底 a でも $\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a a = 1$ です。0 乗すると1、1 乗するとそのままだからです。

① $a^{\log_a b} = b$

$\log_a b$ は「 a を何乗すると b になるか」の答えでした。だから、 a を $\log_a b$ 乗すると、ちゃんと b になります。

$a^{\log_a b} = b$

たとえば $2^{\log_2 32} = 2^5 = 32$, $10^{\log_{10} 2} = 10^{0.301} = 2$

当たり前に見えますが、⑥で、グラフの傾きから倍率を読むときに、この見方を使います。

2 対数にできる数・できない数

3-11 で見たように、底 a が正の数なら、 a^p は p がどんな数でも正の数です。だから、 $\log_a 0$ や $\log_a (-4)$ のように、0 やマイナスの数の対数はありません。2 を何乗しても、0 やマイナスにはならないからです。また、底は 1 でない正の数にします。1 は何乗しても 1 なので、「1 を何乗すると 5 か」には答えがないからです。

$\log$ は、対数を表す英語 logarithm (ログリズム) の頭の 3 文字です。底 a は、 $\log$ の右下に小さく書きます。

記号カード

初めて出た章 3-12

 $\log_a b$

読み方 ログ・エー・ビー
意味 a を何乗すると b になるかを表す数 (対数)。 a が底
英語 logarithm

3 かけ算が、たし算になる

2 の累乗と、その対数 $\log_2$ を並べてみます。

b	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

表 4 $4 \times 8 = 32$ のとき、対数は $2 + 3 = 5$ 。

$4 \times 8 = 32$ です。それぞれの対数を見ると、4 は 2、8 は 3、32 は 5 です。 $2 + 3 = 5$ になっています。 $8 \times 16 = 128$ でも、 $3 + 4 = 7$ です。かけ算の答えの対数は、対数どうしのたし算になっています。

① なぜたし算になるのか (指数のきまりから作る)

$\log_a b = p, \log_a c = q$ とします。指数の形になおすと、 $b = a^p, c = a^q$ です (図2)。

① かけると、 $bc = a^p \times a^q$ 。

② 3-11 の $a^{x+h} = a^x \times a^h$ で、 $a^p \times a^q = a^{p+q}$ 。だから $bc = a^{p+q}$ 。

③ これを対数の形になおすと、 $\log_a(bc) = p + q$ 。 p と q をもとにもどすと、

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

「かけ算は指数をたす」(3-11) を、対数のことばで言いなおしたものです。

電卓で確かめる 常用対数でも成り立ちます。 $6 = 2 \times 3$ なので、

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.301 + 0.477 = 0.778$$

電卓で $\log_{10} 6$ を計算すると 0.778151... です。たしかに合っています。

② 累乗は、かけ算になる

$b^3 = b \times b \times b$ なので、①のきまりを2回使うと、

$$\log_a(b^3) = \log_a b + \log_a b + \log_a b = 3 \log_a b$$

です。3でなくても同じです。 $\log_a b = p$ とすると $b = a^p$ で、3-11 の $(a^m)^n = a^{mn}$ から、

$$b^r = (a^p)^r = a^{pr}$$

なので、 $\log_a(b^r) = pr = r \log_a b$ です。 r は分数やマイナスでもかまいません。

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

たとえば、 $\log_{10} 2^{10} = 10 \times \log_{10} 2 = 10 \times 0.301 = 3.01$ です。 2^{10} は10の約3.01乗で、1000より少し大きい数です。たしかに $2^{10} = 1024$ でした (2-7)。

3 $r = -1$ のとき：逆数の対数と、わり算

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$ (3-11) なので、 $r = -1$ として

$$\log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 2^{-1} = -1 \times \log_{10} 2 = -0.301$$

です。確かめると、 $10^{-0.301} = \frac{1}{10^{0.301}} = \frac{1}{2}$ です。わり算は「逆数をかける」ことなので (2-4)、①と合わせて、

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \left(b \times \frac{1}{c} \right) = \log_a b + \log_a \frac{1}{c} = \log_a b - \log_a c$$

たとえば、 $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.301 = 0.699$ です。

コラム 計算尺：長さをたして、かけ算をする

電卓がなかったころ、技術者は計算尺というものさしでかけ算をしました。

図 1 の対数目もりを 2 本用意し、ずらして長さをたします。2 × 3 なら、

- ① 下のものさしの 1 を、上のものさしの 2 に合わせる ($\log 2$ の長さだけずらす)。
- ② 下のものさしの 3 の真上を読む。 $\log 2 + \log 3 = \log 6$ なので、6 の目もりがある。

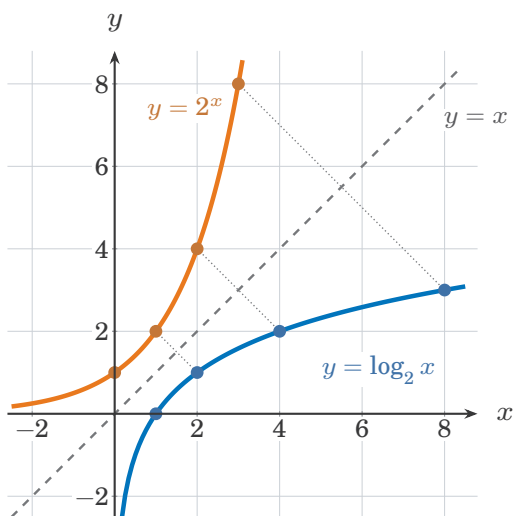


4 $y = \log_2 x$ のグラフ：指数関数を折り返す

$y = \log_2 x$ は、 x を決めると y が 1 つ決まる関数です (3-3)。表を作ります。対数の形を指数の形になおすと、 $y = \log_2 x$ は $x = 2^y$ と同じです。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

3-11 の $y = 2^x$ の表 ($x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ で $y = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$) とくらべると、 x と y の行が入れかわっています。だから、 $y = 2^x$ のグラフの点 (2, 4) は、 $y = \log_2 x$ では点 (4, 2) になります。



オレンジの点と青の点を結ぶ点線は、どれも直線 $y = x$ (灰色の点線) と直角に交わり、そのまん中が $y = x$ の上にあります。たとえば (2, 4) と (4, 2) のまん中は (3, 3) です。

だから、紙を $y = x$ で折ると、2 つのグラフはぴったり重なります。

たいせつ

$y = \log_a x$ のグラフは、 $y = a^x$ のグラフを、直線 $y = x$ で折り返したものの。

グラフから、 $y = \log_2 x$ の性質が読みとれます。

- ① 点 (1, 0) を通る ($\log_2 1 = 0$)。 $y = 2^x$ が (0, 1) を通るのを折り返したものの。
- ② x は正の数のところにしかない (②の「0 やマイナスの対数はない」)。
- ③ 右上がりだが、とてもゆっくり上がる。 $x = 1024$ でも、 y はやっと 10。

倍々で急にふえる指数関数を折り返したので、対数は、とてもゆっくりふえる関数になるのです。

もっと知りたい ★★★

逆関数

$y = 2^x$ は「回数 x から倍率 y を出す箱」、 $y = \log_2 x$ は「倍率 x から回数 y を出す箱」です（3-3 の入れると出てくる箱）。このように、入れるものと出てくるものを入れかえた関数を逆関数といいます。逆関数のグラフは、いつも直線 $y = x$ で折り返した形です。5-14 では、この折り返しを使って、対数を微分します。

5 底を変える：電卓で $\log_2$ を求める

細菌が 1000 倍になるのは、何回分かれたときでしょう。答えは $\log_2 1000$ です。でも、電卓の $\log$ のキーは、底が 10 の常用対数です。そこで、常用対数にしておきます。

- 1 $\log_2 1000 = p$ とすると、指数の形で $2^p = 1000$ 。
- 2 両辺の常用対数をとる（等しい数は、対数も等しい）： $\log_{10} 2^p = \log_{10} 1000$ 。
- 3 左辺は③の②で $p \log_{10} 2$ 、右辺は 3。だから $p \times 0.301 = 3$ 。
- 4 両辺を 0.301 でわって（2-14）、 $p = \frac{3}{0.301} = 9.96 \dots$

約 9.97 回です。回数は整数なので、10 回目ではじめて 1000 倍をこえます。たしかに、 $2^9 = 512$ 、 $2^{10} = 1024$ です。

同じように考えると、どんな底でも、常用対数のわり算で求められます。

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

電卓には、 $\log$ のほかに、もう 1 つ対数のキーがあります。それは、5-14 で学ぶ「ふしぎな数」を底にした対数です。

6 倍々が直線に見える：片対数グラフ

細菌の数 $y = 2^x$ を、 $x = 0$ から 10 までふつうのグラフにかくと、図 3 のようになります。 y は 1 から 1024 まで変わるので、はじめのほうの点は横軸にくっついて、ちがいが読めません。

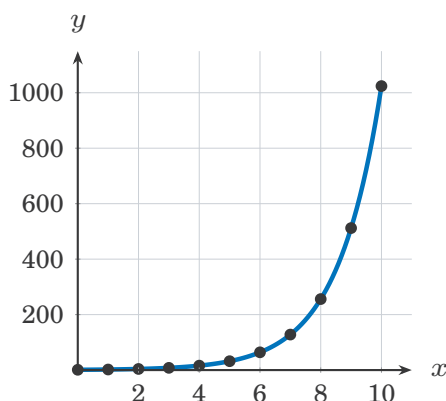


図 3 ふつうのグラフ

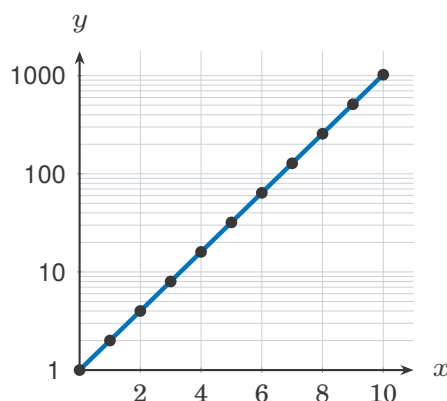


図 4 片対数グラフ

図 4 では、たて軸を図 1 の対数目もりにしました。1、10、100、1000 が同じ間かくで並び、そのあいだの細かい線は 2、3、…、9 倍の所です。このようなグラフを片対数グラフといいます。点が、まっすぐに並びました。

なぜ直線になるのか たて軸の位置は、 y そのものではなく $\log_{10} y$ です。 $y = 2^x$ の常用対数をとると、③の②のきまりで

$$\log_{10} y = \log_{10} 2^x = x \times \log_{10} 2 = 0.301x$$

$\log_{10} y$ は x の 1 次関数（比例）なので、グラフは傾き 0.301 の直線です（3-5）。表で確かめましょう。

x	0	1	2	3	4	5	10
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	1024
$\log_{10} y$	0	0.301	0.602	0.903	1.204	1.505	3.010

表 5 x が 1 ふえるごとに、 $\log_{10} y$ は 0.301 ずつふえる（ひき算が一定）。

3-11 で、指数関数は「わり算が一定」、1 次関数は「ひき算が一定」でした。対数をとると、かけ算がたし算になるので、「わり算が一定」が「ひき算が一定」に変わります。

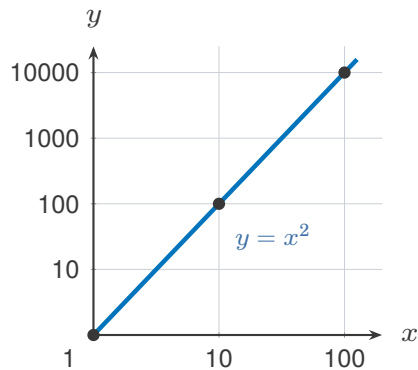
傾きから倍率がわかる 片対数グラフで直線の傾きが 0.301 なら、1 つ進むごとの倍率は $10^{0.301} = 2$ 倍です (②の $a^{\log_a b} = b$)。はかったデータを片対数グラフにかいて直線に並べば、その量は指数関数で変わっているとわかり、倍率も読めます (直線の引き方は 3-16)。

1 両対数グラフ：累乗の指数が傾きになる

横軸もたて軸も対数目もりにしたものを**両対数グラフ**といいます。正方形の 1 辺 x [cm] と面積 $y = x^2$ cm² をかいてみましょう。

x	1	10	100
$y = x^2$	1	100	10000
$\log_{10} x$	0	1	2
$\log_{10} y$	0	2	4

$\log_{10} x$ が 1 ふえると、 $\log_{10} y$ は 2 ふえる。



点は傾き 2 の直線に並びます。 $y = x^2$ の両辺の常用対数をとると、③の②のきまりで $\log_{10} y = 2 \log_{10} x$ になるからです。傾きの 2 は、 x^2 の指数の 2 です。振り子の周期は糸の長さの $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (乗) に比例するので (2-8)、両対数グラフでは傾き $\frac{1}{2}$ の直線です。はかったデータの傾きを読めば、「何乗に比例するか」がわかります。

7 比をけたで表す：デシベル

音の強さや電気の信号の強さは、とても広いはんいで変わります。人の耳は、ささやき声の約 10 億倍の強さの音まで聞けます。そこで、2 つの強さの比を、常用対数で「けた」として表します。

- ① 2つの強さ（電力やエネルギー）の比を求める。例：1000倍。
- ② その常用対数をとる。 $\log_{10} 1000 = 3$ 。これを3ベル（B）とよぶ。
- ③ ベルは大きすぎるので、10倍した数を使う。 $10 \times 3 = 30$ 。単位はデシベル（dB）。

「デシ」は「10分の1」という意味で、dL（デシリットル）のデシと同じです。1 dB は $\frac{1}{10}$ B なので、B の数を 10 倍すると dB の数になります。

$$(\text{デシベル}) = 10 \times \log_{10} (\text{強さの比})$$

B（ベル）は、電話を発明したベルの名前からとった単位です。dB の d は、デシ（10分の1）の頭文字です。

記号カード

初めて出た章 3-12

dB

読み方 デシベル
意味 強さの比を「10 × 常用対数」で表す単位。
10 倍で 10 dB
英語 decibel

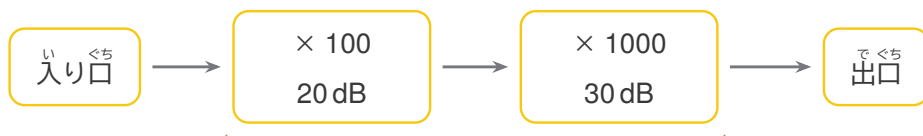
強さの比	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	1000	1000000
デシベル	-3	0	3	10	20	30	60

表6 2倍は $10 \times 0.301 = 3.01$ で約 3 dB。 $\frac{1}{2}$ は約 -3 dB。10 倍ごとに 10 dB ふえる。

【はてな？】の答え：ふつうの会話 60 dB とささやき声 30 dB の差は 30 dB です。 $30 \div 10 = 3$ で、常用対数が 3 なので、強さの比は $10^3 = 1000$ 倍です。2 倍どころではありません。ガード下の 100 dB は、ささやき声より 70 dB 大きいので $10^7 = 1000$ 万倍です。それでも耳には 1000 倍や 1000 万倍もうるさくは聞こえません。人の耳は、強さの「けた」に近い感じ方をするからです。デシベルは、耳の感じ方にも合った表し方なのです。

1 つなぐと、たし算

信号を大きくする装置（増幅器）を2つつなぎます。1つめが電力を100倍（20 dB）、2つめが1000倍（30 dB）にすると、全体では $100 \times 1000 = 100000$ 倍です。dBでは $20 + 30 = 50$ dBで、 $\log_{10} 100000 = 5$ 、 $10 \times 5 = 50$ と合います。かけ算がたし算になる（③の①）ので、倍率をかけるかわりに、dBをただで済みます。



全体： $100 \times 1000 = 100000$ 倍 $= 20 + 30 = 50$ dB

図5 倍率はかけ算、dBはたし算。

2 電圧のときは20倍する

抵抗に流れる電力は、電圧の2乗に比例します（電圧が2倍になると電流も2倍になり、電力は $2 \times 2 = 4$ 倍）。電圧の比が k なら、電力の比は k^2 です。③の②のきまりで、

$$10 \times \log_{10} k^2 = 10 \times 2 \log_{10} k = 20 \log_{10} k$$

だから、電圧の比からdBを求めるときは、常用対数を20倍します。電圧が10倍なら $20 \times 1 = 20$ dB（電力は100倍で、やはり20 dB）です。

コラム 地震のマグニチュード

地震のエネルギーの大きさを表すマグニチュードも、対数を使った数です。マグニチュードが1ふえると、エネルギーは $10^{1.5} = 31.6 \dots$ で約32倍、2ふえると $10^{1.5 \times 2} = 10^3$ で1000倍になります（3-11の整数でない指数と、 $(a^m)^n = a^{mn}$ ）。マグニチュード7の地震は、マグニチュード5の地震の約1000倍のエネルギーです。

たいせつ

$\log_a b$ は「 a を何乗すると b になるか」。

$a^p = b$ と $\log_a b = p$ は同じこと。 $a^{\log_a b} = b$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 、 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^k = k \log_a M$ ($a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$)

底が 10 でも 2 でも、どんな底 a でも成り立ちます。どれも指数のきまり

$a^p \times a^q = a^{p+q}$ (3-11) から、底が何でも同じ理由で出てくるからです (③

の b 、 c を M 、 N と書きました)。

底 2 で確かめ： $\log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5 = \log_2 32$ ($8 \times 4 = 32$)

$\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a a = 1$ $\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$

$y = \log_a x$ のグラフは、 $y = a^x$ を直線 $y = x$ で折り返したものの。

デシベル = $10 \times \log_{10}$ (電力の比) = $20 \times \log_{10}$ (電圧の比)

この章で出てきたことば

対数・底 $\log_a b$ 。 a を何乗すると b になるかを表す数。 a が底。

常用対数 底が 10 の対数。けたの数がわかる。電卓の $\log$ 。

片対数グラフ たて軸だけを対数目もりにしたグラフ。指数関数が直線になる。

デシベル (dB) 強さの比の常用対数を 10 倍した数。

コラム pH (ピーエイチ) も対数

水よう液の酸性の強さを表す pH は、水素イオンという粒の濃さの

常用対数に、マイナスをつけた数です。中性の水は pH 7、レモン汁

は約 pH 2 です。差が 5 なので、レモン汁の水素イオンの濃さは、中性の

水の約 $10^5 = 100000$ 倍です (マイナスがついているので、pH が小さい

ほど濃い)。

例題でたしかめよう

例題 1 指数の形になおして対数を求める

次の値を求めましょう。

- (1) $\log_2 32$ (2) $\log_3 81$ (3) $\log_{10} 0.001$ (4) $\log_2 \frac{1}{8}$ (5) $\log_9 3$
(6) $\log_5 1$

考え方 $\log_a b = \square$ を $a^\square = b$ になおし、 $\square$ に入る数をさがします (②)。

しき (1) $2^\square = 32$ 。 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ なので 5

(2) $3^\square = 81$ 。 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ なので 4

(3) $10^\square = 0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ なので -3

(4) $2^\square = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ なので -3

(5) $9^\square = 3$ 。 $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ (3-11) なので $\frac{1}{2}$

(6) $5^\square = 1$ 。 $5^0 = 1$ なので 0

こたえ (1) 5 (2) 4 (3) -3 (4) -3 (5) $\frac{1}{2}$ (6) 0

じぶんでこうし

次の値を求めましょう。(1) $\log_2 64$ (2) $\log_3 27$ (3) $\log_{10} 10000$
(4) $\log_2 \frac{1}{4}$ (5) $\log_4 2$ (6) $\log_7 1$

指数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^\square$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$3^\square$	3	9	27	81	243	729				
$5^\square$	5	25	125	625						

表 7 累乗の早見表。対数は、この表を下から上へ読めば求められる。

例題 2 対数のきまりで常用対数を求める

$\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、次の値を求めましょう。

(1) $\log_{10} 6$ (2) $\log_{10} 8$ (3) $\log_{10} 5$ (4) $\log_{10} 1.5$ (5) $\log_{10} 0.25$

考え方 2 と 3 と 10 のかけ算・わり算・累乗で表して、③のきまりを使います。 $\log_{10} 10 = 1$ です。

しき (1) $6 = 2 \times 3$ 。かけ算はたし算になる

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.301 + 0.477 = 0.778$$

(2) $8 = 2^3$ 。累乗はかけ算になる

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.301 = 0.903$$

(3) $5 = \frac{10}{2}$ 。わり算はひき算になる

$$\log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.301 = 0.699$$

(4) $1.5 = \frac{3}{2}$ 。わり算はひき算

$$\log_{10} 1.5 = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0.477 - 0.301 = 0.176$$

(5) $0.25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ 。累乗 ($r = -2$)

$$\log_{10} 0.25 = -2 \log_{10} 2 = -2 \times 0.301 = -0.602$$

こたえ (1) 0.778 (2) 0.903 (3) 0.699 (4) 0.176 (5) -0.602

じぶんでこう 2

$\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、次の値を求めましょう。

(1) $\log_{10} 12$ (2) $\log_{10} 9$ (3) $\log_{10} 20$ (4) $\log_{10} 0.5$

答えは電卓の $\log$ のキーで確かめられます。たとえば $\log_{10} 6 = 0.77815\dots$ 、 $\log_{10} 5 = 0.69897\dots$ で、小数第3位まで合っています。 $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ さえわかれば、2 と 3 と 10 のかけ算・わり算でできた数の対数は、すべて計算できるのです。

例題 3 けたの数を求める

$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 5 = 0.699$ を使って、(1) 2^{30} 、(2) 5^{10} が何けたの数を求めましょう。

考え方 常用対数を求め、その整数の部分に 1 をたします (①の②)。

しき (1) $\log_{10} 2^{30} = 30 \times 0.301 = 9.03$

9 以上 10 未満なので、 $10^9 \leq 2^{30} < 10^{10}$ 。10 けた

(2) $\log_{10} 5^{10} = 10 \times 0.699 = 6.99$

6 以上 7 未満なので、 $10^6 \leq 5^{10} < 10^7$ 。7 けた

こたえ (1) 10 けた (2) 7 けた

確かめ： $2^{30} = 1073741824$ (10 けた)、 $5^{10} = 9765625$ (7 けた) です。3-11 の **はてな?** の細菌の数は、10 けたの数だったのです。

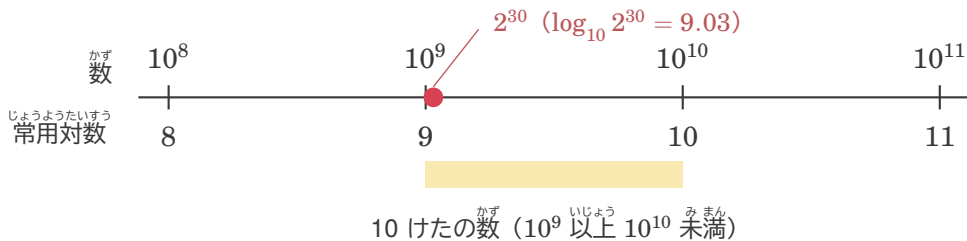


図 6 常用対数が 9 と 10 のあいだなら、10 けたの数。

じぶんでこう 3

$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、(1) 3^{20} 、(2) 2^{50} が何けたの数を求めましょう。

例題 4 何回で何倍をこえるか

- (1) 2倍ずつふえる細菌が、はじめて1000倍をこえるのは何回目ですか。
 (2) 1年ごとに1.5倍にふえる量が、はじめて10倍をこえるのは何年後ですか。
 (3) 半減期が6時間の物質(3-11)が、はじめて $\frac{1}{1000}$ 以下になるのは何時間後ですか。

$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 1.5 = 0.176$ (例題2の(4)) を使いましょう。

考え方 $a^n = k$ となる n は $\log_a k = \frac{\log_{10} k}{\log_{10} a}$ (⑤)。回数は整数なので、

小数になったら次の整数にします。

しき (1) $\log_2 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} = \frac{3}{0.301} = 9.96 \dots$

9回では $2^9 = 512$ 、10回で $2^{10} = 1024$ 。10回目

(2) $\log_{1.5} 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 1.5} = \frac{1}{0.176} = 5.68 \dots$

5年では $1.5^5 = 7.59 \dots$ 、6年で $1.5^6 = 11.39 \dots$ 。6年後

(3) n 回半分になると $\frac{1}{2^n}$ 。 $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1000}$ は $2^n \geq 1000$ と同じ

(1) から $n = 10$ 回。 $6 \times 10 = 60$

こたえ (1) 10回目 (2) 6年後 (3) 60時間後

じぶんでこう4

- (1) 3 倍ずつふえる量が、はじめて 10000 倍をこえるのは何回目ですか。
 (2) 1 年ごとに 1.2 倍にふえる量が、はじめて 2 倍をこえるのは何年後で
 ですか。(3) セシウム 137 (半減期 30 年) が、はじめの $\frac{1}{100}$ 以下になるの
 は何年後ですか。 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ 、 $\log_{10} 1.2 = 0.079$
 を使いましょう。

例題5 デシベル

- (1) 電力が 1000 倍になるのは何 dB ですか。(2) 電力が $\frac{1}{2}$ になるのは約何
 dB ですか。(3) 電圧が 10 倍になるのは何 dB ですか。(4) 20 dB と 30 dB
 の増幅器をつなぐと、全体は何 dB で、電力は何倍ですか。 $\log_{10} 2 = 0.301$
 を使いましょう。

かんが 考え方 電力は「 $10 \times$ 常用対数」、電圧は「 $20 \times$ 常用対数」(⑦)。つな
 ぐと dB はたし算です。

- しき** (1) $10 \times \log_{10} 1000 = 10 \times 3 = 30$
 (2) $10 \times \log_{10} \frac{1}{2} = 10 \times (-0.301) = -3.01$
 (3) $20 \times \log_{10} 10 = 20 \times 1 = 20$
 (4) $20 + 30 = 50$ 。 $50 \div 10 = 5$ なので $10^5 = 100000$

こたえ (1) 30 dB (2) 約 -3 dB (3) 20 dB (4) 50 dB、100000
 倍

じぶんでとこう5

(1) 電力が100倍になるのは何dBですか。(2) 電力が2倍になるのは約何dBですか。(3) 電圧が100倍になるのは何dBですか。(4) 10dBと20dBの増幅器をつなぐと、全体は何dBで、電力は何倍ですか。

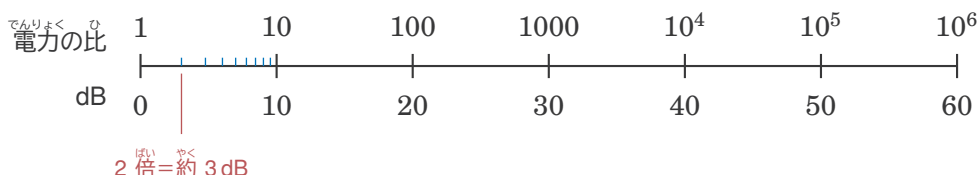


図7 dBは、電力の比を対数目もりで読んだもの。10倍ごとに10dB。

例題6 片対数グラフの傾きから倍率を読む

ある量 y を、1時間ごとにはかって片対数グラフにかくと、点が直線に並び、 $\log_{10} y$ は1時間ごとに0.477ずつふえていました。(1) y は1時間ごとに何倍になっていますか。(2) 3時間では何倍ですか。 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使いましょう。

考え方 $\log_{10} y$ が0.477ふえることは、 y が $10^{0.477}$ 倍になることです(③の①：かけ算がたし算)。 $a^{\log_a b} = b$ (②) を使います。

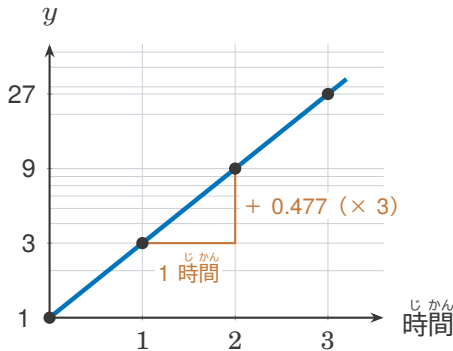
しき (1) $10^{0.477} = 10^{\log_{10} 3} = 3$

(2) 3時間で $0.477 \times 3 = 1.431$ ふえる。 $3 \times 3 \times 3 = 27$

こたえ (1) 3倍 (2) 27倍

じぶんでとこう 6

片対数グラフで、 $\log_{10} y$ が 1 日ごとに 0.699 ずつふえる直線になりました。
 (1) y は 1 日ごとに何倍になっていますか。(2) 2 日では何倍ですか。
 $\log_{10} 5 = 0.699$ を使いましょう。



例題 6 のように片対数グラフにかきました。たて軸の 1、3、9、27 は、同じ間かく (0.477 ずつ) で並んでいます。1 時間右へ進むと、直線 は 0.477 だけ上がり、 y は 3 倍になります。

例題 7 指数関数と対数のグラフ

(1) $y = 2^x$ のグラフは点 (5, 32) を通ります。 $y = \log_2 x$ のグラフは、どの点を通りますか。(2) $y = \log_3 x$ のグラフで、 $x = 9$ のときの y を求めましょう。

考え方 $y = \log_a x$ のグラフは、 $y = a^x$ のグラフを $y = x$ で折り返したものの。点の x と y が入れかわります (④)。

しき (1) (5, 32) の x と y を入れかえて (32, 5)。確かめ: $\log_2 32 = 5$

(2) $y = \log_3 9$ 。 $3^2 = 9$ なので $y = 2$

こたえ (1) 点 (32, 5) (2) $y = 2$

じぶんでとこう7

(1) $y = 3^x$ のグラフは点 $(4, 81)$ を通ります。 $y = \log_3 x$ のグラフは、どの点を通りますか。(2) $y = \log_2 x$ のグラフで、 $x = \frac{1}{8}$ のときの y を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

たし算の対数を、分けてしまう

✗ $\log(a + b) = \log a + \log b$

○ $\log(ab) = \log a + \log b$ 。 $\log(a + b)$ は、それ以上かんたんにならない
たとえば $\log_{10}(1 + 1) = \log_{10} 2 = 0.301$ ですが、
 $\log_{10} 1 + \log_{10} 1 = 0 + 0 = 0$ です。和になるのは、かけ算のとき
だけです。

⚠ まちがえやすいところ

対数を、わり算とまちがえる

✗ $\log_2 8 = 8 \div 2 = 4$

○ $2^3 = 8$ なので $\log_2 8 = 3$

$\log_a b$ は「 a を何乗すると b か」です。指数の形 $2^{\square} = 8$ になおして確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

るいじょう たいすう たいすう るいじょう
累乗の対数で、対数を累乗する

✕ $\log_{10} 2^3 = (\log_{10} 2)^3 = 0.301^3$

○ $\log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.301 = 0.903$

$2^3 = 8$ で、 $\log_{10} 8 = 0.903$ です。 0.301^3 は約 0.027 で、まったくちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

デシベルを、そのままたす

✕ 60 dB のスピーカー 2 台を同じ強さで鳴らすと、 $60 + 60 = 120$ dB

○ 強さが 2 倍になるので、 $60 + 3 = 63$ dB

強さの比が 2 倍なら、 10×0.301 で 3 dB ふえるだけです。dB をたしてよいのは、増幅器のように倍率をかけるときです。

⚠ まちがえやすいところ

0 やマイナスの数の対数

✕ $\log_2 0 = 0$

○ $\log_2 0$ はない (2 を何乗しても 0 にならない)

対数がゼロになるのは、 $\log_a 1 = 0$ です ($a^0 = 1$)。 $\log_a$ の中は、いつも正の数です。

⚠ まちがえやすいところ

逆数の対数を、対数の逆数にする

✗ $\log_{10} \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0.301} = 3.32 \dots$

○ $\log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 2^{-1} = -\log_{10} 2 = -0.301$

$\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので、10 の指数はマイナスです ($10^0 = 1$)。3.32 だと $10^{3.32}$ で 2000 より大きな数になってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

わり算の対数を、対数のわり算にする

✗ $\log_{10} \frac{6}{2} = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} = \frac{0.778}{0.301} = 2.58 \dots$

○ $\log_{10} \frac{6}{2} = \log_{10} 6 - \log_{10} 2 = 0.778 - 0.301 = 0.477$

$\frac{6}{2} = 3$ なので、答えは $\log_{10} 3 = 0.477$ のはずです。対数では、わり算はひき算になります。 $\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$ の形は、底を変えるとき (⑤) の式です。

⚠ まちがえやすいところ

対数目もりを、ふつうの目もりのように読む

✗ 片対数グラフで、1 と 10 の目もりのまん中は 5.5

○ まん中は $10^{0.5} = \sqrt{10} = 3.16 \dots$

対数目もりでは、位置が $\log_{10} y$ を表します。まん中は $\log_{10} y = 0.5$ の所です。5 の目もり (0.699) は、まん中より右 (上) にあります。

ぶつり 物理・工学ではこう使う

ダイオード：片対数グラフで直線になる電流

ダイオードは、電流を 1 方向にしか

流さない半導体の部品です (LED も

なかま)。電圧を少しずつ上げると、

電流は電圧が約 0.06 V (60 mV) 上

がるごとに約 10 倍になります (室温

で、理想に近いダイオードのとき)。

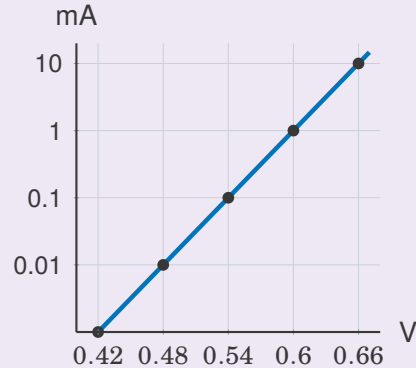
指数関数なので、ふつうのグラフで

は急に立ち上がって見えますが、片

対数グラフでは直線です。半導体の

設計では、この直線の傾きを読んで、

部品のよしあしを調べます。



0.06 V ごとに電流が 10 倍 (片対数)

ボード線図：機械や回路の「入ると出てくる」を dB で見る

スピーカーやモーターの制御では、ゆっくりから速くまで、いろいろな速

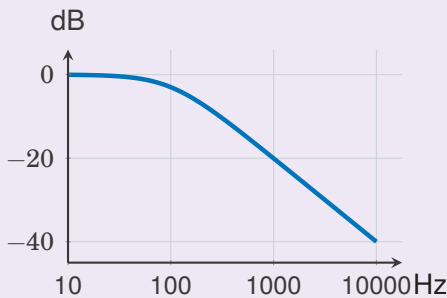
さでゆれる信号を入れて、出てくる信号が何倍になるかを調べます。横軸

にゆれの速さ (1 秒あたりのゆれの回数) を対数目もりで、たて軸に倍率

を dB でとったグラフをボード線図といいます。どちらの軸も「けた」で

見ているので、100 倍も 1000 倍もちがう範囲が 1 枚のグラフにおさま

り、装置をつないだときの倍率も、dB のたし算で求められます (9-8)。



抵抗とコンデンサーで作る、低い

音だけを通す回路のボード線図で

す。100 Hz (1 秒に 100 回のゆれ)

より高いと、ゆれの回数が 10 倍

になるごとに 20 dB (電圧は $\frac{1}{10}$)

ずつ下がり、直線になります。



しょうまつもんだい
章末問題

3-12 のまとめ

きほん
基本



- 1 次の値を求めましょう。(1) $\log_2 16$ (2) $\log_5 125$ (3) $\log_{10} 0.1$
(4) $\log_3 \frac{1}{9}$ (5) $\log_{16} 4$ (6) $\log_{10} 1$
- 2 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、次の値を求めましょう。
(1) $\log_{10} 18$ (2) $\log_{10} 16$ (3) $\log_{10} 50$ (4) $\log_{10} \frac{2}{3}$
- 3 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、(1) 2^{40} 、(2) 3^{30} が何けたの数かを求めましょう。
- 4 2 倍ずつふえる量が、はじめて 10 万倍をこえるのは何回目ですか。
 $\log_{10} 2 = 0.301$ を使しましょう。
- 5 (1) 電力が 10000 倍になるのは何 dB ですか。(2) 電圧が 1000 倍になるのは何 dB ですか。(3) 電力が $\frac{1}{2}$ になる部品を 2 つつなぐと、全体は約何 dB ですか。 $\log_{10} 2 = 0.301$ を使しましょう。
- 6 (1) $y = 2^x$ のグラフは点 (6, 64) を通ります。 $y = \log_2 x$ のグラフは、どの点を通りますか。(2) 片対数グラフで、 $\log_{10} y$ が 1 分ごとに 0.301 ずつふえる直線になりました。 y は 1 分ごとに何倍ですか。

チャレンジ



- 7 2^{100} は何けたの数ですか。 $\log_{10} 2 = 0.301$ を使しましょう。
- 8 工場の機械の音が 90 dB、静かな図書館が 40 dB でした。音の強さは何倍ちがいますか。

9 電圧を 10 倍にする増幅器と、電圧を 100 倍にする増幅器をつなぎました。
全体は何 dB ですか。また、入力と出力が同じ抵抗のとき、電力は何倍になりますか。

10 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ を使って、 $\log_2 3$ を小数第 2 位まで求めましょう。また、その意味を言いましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 10 を何乗するかでけたを数え、 $\log_a b$ の意味を説明できる。

→ 361 ページ

☐ 対数のきまりを、指数のきまりから作って使える。

→ 363 ページ

☐ 片対数グラフやデシベルを使える。

→ 368 ページ



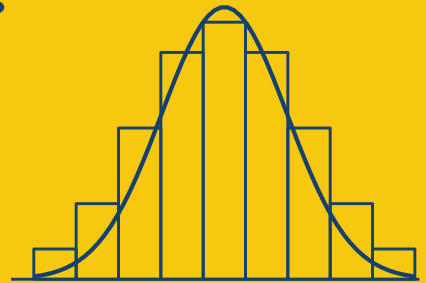
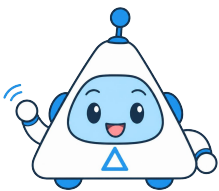
デルタ

かけ算をたし算に、倍々を直線に。対数は、大きさが何けたもちがうものを、1 つのものさしで見る道具だね。次の章からは、データのばらつきを調べるよ。

データと統計

4

- ? なんかい ほんとう あたい ちか
何回もはかると、本当の値に近づける？
- ? てん ちよくせん ひ
ずれた点に、どの直線を引けばいい？
- ? た かたち
サイコロをたくさん足すと、どんな形になる？



はかった数^{かず}はいつも少しずつずれるよ。そのずれ^{ひょう}を表とグラフにまとめ、「だいたいこのくらいずれる」を1つの数^{かず}で言う方法^{ほう}を学^{まな}ぶよ。

この部^ぶで学^{まな}ぶこと

3-13 データのちらばり：ヒストグラムと平均^{へいきん}  ★★★★★ **P.388**

なんかい ほんとう あたい ちか
何回もはかって、本当の値に近づこう

3-14 ばらつきを 1 つの数^{かず}で：標準偏差^{ひょうじゆんへんさ}  ★★★★★ **P.416**

「だいたいこのくらいずれる」を数で言う

3-15 2 つの量^{りょう}の関係^{かんけい}：散布図^{さんぷず}と相関^{そうかん}  ★★★★★ **P.442**

せ たか ひと あし はや
背の高い人は、足も速い？

3-16 データに直線^{ちよくせん}を引く^ひ：最小二乗法^{さいしやうにじやうほう}  ★★★★★ **P.474**

ずれがいちばん小さくなる線は、どれ？

3-17 偶然^{ぐうぜん}のばらつき：確率^{かくりつ}と正規分布^{せいき ぶん ぷ}  ★★★★★ **P.498**

サイコロをたくさん足すと、つりがねの形に

この部^ぶを読^よむと…

はかったデータから、平均^{へいきん}とばらつきを計算^{けいさん}し、点^{てん}にいちばん合う直線^{ちよくせん}を引けるようになります。計測^{けいそく}と品質^{ひんしつ}の管理^{かんり}、第 9 巻^{だい かん}の信号^{しんごう}の処理^{しゅり}につながります。

第4部 データと統計

★★

3-13

データのちらばり： ヒストグラムと平均

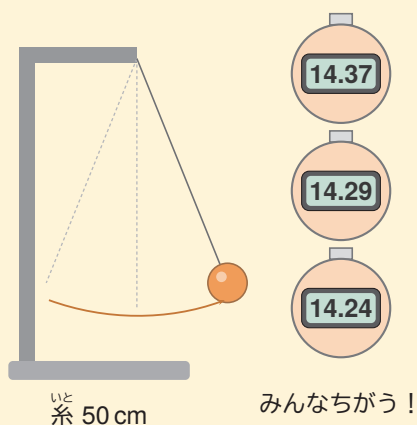
この章の先に 3-14 3-15 3-17
この章の前に 2-2 2-5 2-6 2-18 3-2

この章でできるようになること

- ★★ 何回もはかった値の平均を、 $\bar{x}$ を使って書き、求められる。
- ★★ 度数分布表とヒストグラムを作り、ちらばりのようすを読みとれる。
- ★★ 平均・中央値・最頻値・四分位数を求め、箱ひげ図をかける。

? はてな？

ふりがが 10 往復する時間を、クラスの 20 人が 1 回ずつ、ストップウォッチではかりました。同じふりこなのに、20 人の数はみんな少しずつちがいます。ほんとうの値に近づくには、どうすればいいのかな？ 1 回より 2 回、2 回より 20 回はかったほうが、近づくのかな？



△ やってみよう ふりこの10往復を、みんなではかろう

- 1 50 cm の糸の先におもりをつけてつるし、おもりを横に少し引いて、そっと手をはなそう。
- 2 ふりこがはしで止まったしゅん間にスタートをおし、10 往復したらストップをおそう。
- 3 1人1回ずつ、クラスの20人がはかって、表に書こう。
- 4 はじめの1人、2人、3人……と、数をふやしながら平均を計算しよう。

ソラさんのクラスがはかった結果です（単位は秒）。

ばんごう 番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
じかん 時間	14.37	14.29	14.24	14.12	14.21	14.17	14.33	14.15	14.22	14.19
ばんごう 番号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
じかん 時間	14.16	13.95	14.18	14.23	14.16	14.27	14.07	14.20	14.44	14.05

表1 ふりこの10往復の時間（秒）。20人が1回ずつはかった

🕒 おもいだそう この章で使う、前に学んだこと

- 2-6** 平均＝合計÷個数。合計を変えずに、でこぼこをならした数。はかった値にはずれがある。
- 2-2** 「以上」はその数をふくむ。「未満」はその数をふくまない。
- 2-5** 割合＝くらべる量÷もとにする量。割合の0.01が1%
- 3-2** x_1 は「エックス・いち」と読む。1つめの x という名前で、かけ算ではない。



ソラ

14.37 秒から 13.95 秒まで、ばらばらだ。20 こも数があると、どこを見ればいいのか、わからなくなるね。

▶ この章でやること

2-6 では、同じえんぴつを 10 人がはかると、読みが少しずつずれることを学び、ずれをならすために平均を求めました。この章では、たくさんの数を表やグラフにまとめて、「ちらばり」のようすを目で見えるようにします。

数学の道具

1 何回もはかって、平均する

20 人の数は、どれも正しくはかった数です。どれか 1 つを「正しい」と選ぶことはできません。そこで、2-6 と同じように、全部をならした平均を求めます。

▶ 20 こ全部の平均

20 この数を全部たすと、284.00 になります（電卓や表計算を使ってよい）。数は 20 こなので、20 でわります。

$$284.00 \div 20 = 14.20$$

平均は 14.20 秒です。

▶ くふう：14.00 をこえた部分だけをたす

20 この数は、ほとんどが「14. 何」です。そこで、2-6 のくふうと同じように、14.00 からどれだけはなれているかだけをたします。

$$14.37 - 14.00 = 0.37$$

$$13.95 - 14.00 = -0.05$$

13.95 は 14.00 より小さいので、はなれはマイナスの数になります（2-2）。

1～10	0.37	0.29	0.24	0.12	0.21	0.17	0.33	0.15	0.22	0.19
11～20	0.16	-0.05	0.18	0.23	0.16	0.27	0.07	0.20	0.44	0.05

表2 14.00 からのなれ（秒）。全部たすと 4.00

はなれを全部たすと 4.00 です。20 でわると、 $4.00 \div 20 = 0.20$ 。14.00 に 0.20 をたして 14.20。全部たしたときと同じ答えです。

なぜ同じになるの？ どの数も「14.00 + はなれ」です。14.00 は 20 こ全部にふくまれているので、ならしても 14.00 のまま残ります。ならす必要があるのは、はなれの部分だけなのです。このように計算を楽にするために決めた 14.00 のような数を、**仮の平均**といいます。

▶ はかる回数をふやすと、平均はどうなる？

はじめの 1 人だけ、2 人だけ、3 人だけ……と、人数をふやしながら平均を求めてみます。たとえば、はじめの 3 人なら、3 つをたして 3 でわります。

$$(14.37 + 14.29 + 14.24) \div 3 = 42.90 \div 3 = 14.30$$

このふりこは糸の長さが 50 cm なので、物理の式でくわしく計算すると、10 往復はおよそ 14.19 秒になります（式は物理シリーズで学びます）。これを「ほんとうの値」として、グラフにしてみましょう。

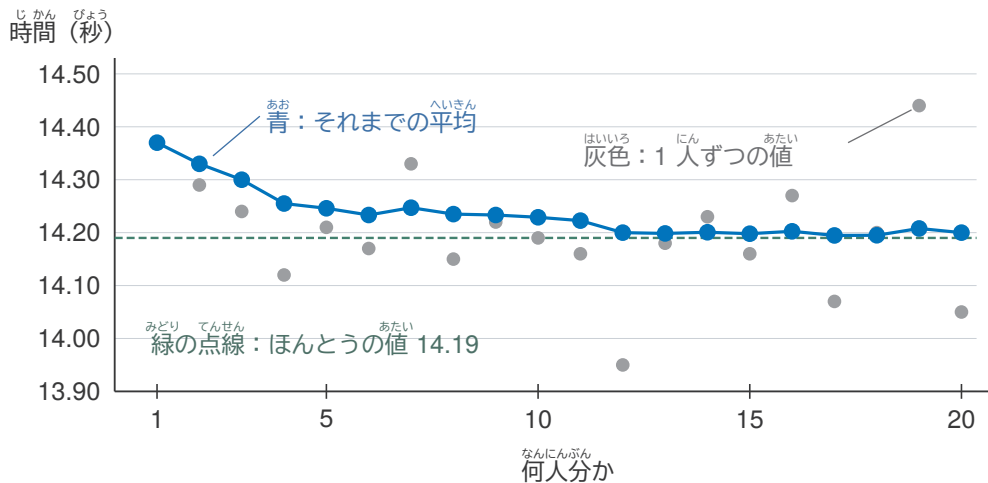


図 1 1 人ずつの値は上にも下にもちらばるが、人数をふやした平均は、ほんとうの値に近づいていく。

表にすると、次のようになります。

何人分か	1	2	3	4	5	10	15	20
合計 (秒)	14.37	28.66	42.90	57.02	71.23	142.29	212.97	284.00
平均 (秒)	14.37	14.33	14.30	14.255	14.246	14.229	14.198	14.20

表3 人数をふやしながら求めた平均 (小数第3位まで)

1人だけの14.37秒は、ほんとうの値から0.18秒もずれています。ところが、20人分の平均14.20秒のずれは、たった0.01秒です。

なぜ近づくの？ ストップウォッチをおすのがおくれたり早すぎたりするので、ずれは大きいほうにも小さいほうにも出ます。たくさん集めてなると、大きいほうのずれと小さいほうのずれが打ち消しあいます。数が多いほど、よく打ち消しあうので、平均はほんとうの値に近づくのです。

② はてな？ の答え：何回もはかって平均すると、ほんとうの値に近づけます。1回より2回、2回より20回のほうが、ふつうはよく近づきます。「何回はかると、どのくらい近づくか」は、3-14で数にします。

▶ 平均を文字で書く

はかった数に、1つめ、2つめ、……と番号をつけて、 x_1 、 x_2 、 x_3 、……と書きます (3-2の下つき文字)。いまのふりこなら、 $x_1 = 14.37$ 、 $x_2 = 14.29$ 、……、 $x_{20} = 14.05$ です。数の個数を n とすると、いちばん後ろは x_n です。

平均は「全部たして、個数でわる」のでした。これを文字で書くと、次のようになります。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$\bar{x}$ は「エックス・バー」と読み、「 x の平均」という意味です。文字の上の横線 (バー) が「ならした」というしるしです。「…」は、とちゅうを書くのを省いたしるしで、 x_3 から x_{n-1} までも全部たす、という意味です。

ふりこの 20 人分なら $n = 20$ で、

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}}{20} = \frac{284.00}{20} = 14.20$$

となります。 $\bar{x}$ は、これからの 3-14～3-16 でもずっと使います。記号カードで読み方と意味を確かめておきましょう。

記号カード

初めて出た章 3-13

$\bar{x}$

読み方 エックス・バー
意味 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均。合計を個数 n でわった値
英語 x bar (mean)

2 数を区切って数える：度数分布表

平均は便利ですが、1つの数にまとめると、「数がどのようにちらばっていたか」が見えなくなります。そこで、20 この数を数直線の上に点でかいてみましょう。同じ数が2つあるときは、点を上に積みみます。

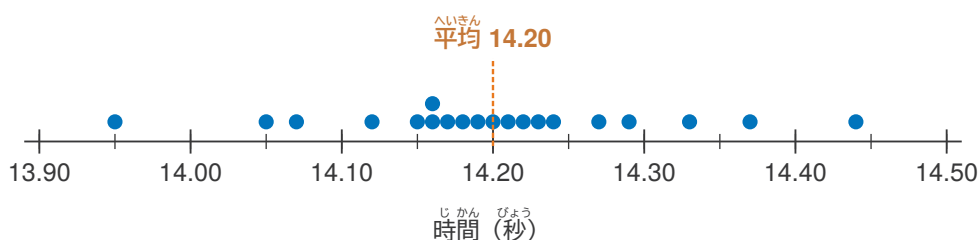


図2 1人の数を点1こでかいた図。14.16は2人いるので、点を積んだ。

点は、14.20のまわりに多く集まり、はなれるほど少なくなっています。でも、点がとびとびなので、「どのあたりに何人いるか」は、まだ読みとりにくいですね。そこで、数直線を0.1秒ごとの区間に区切って、区間ごとに人数を数えます。

区切り方と、境目の数

区間は、「13.90秒以上 14.00秒未満」「14.00秒以上 14.10秒未満」……のように決めます。以上はその数をふくみ、未満はふくみません(2-2)。だから、ちょうど境目の14.20は、「14.10以上 14.20未満」ではなく、「14.20以上

14.30 未満」に入ります。こう決めておけば、どの数も、かならずどれか1つの区間だけに入ります。

▶ 数え方：正の字

表の数を、番号の順に1つずつ見て、入る区間に「正」の字を1画ずつ書き足します（一→𠄎→下→𠄎→正）。正の字は5画なので、正1つで5人です。数えたら、表の数に印をつけていくと、数え忘れや2回数えを防げます。

時間 (秒)	数えた印	度数 (人)	相対度数	累積度数 (人)
13.90 以上 14.00 未満	一	1	0.05	1
14.00 以上 14.10 未満	𠄎	2	0.10	3
14.10 以上 14.20 未満	正 𠄎	7	0.35	10
14.20 以上 14.30 未満	正 𠄎	7	0.35	17
14.30 以上 14.40 未満	𠄎	2	0.10	19
14.40 以上 14.50 未満	一	1	0.05	20
合計		20	1.00	

表4 ふりこの20回の度数分布表。印は正の字を1画ずつ書いたもの

このように、数を区切った区間を階級、区間のはば（ここでは0.1秒）を階級のはば、それぞれの階級に入る数の個数を度数といいます。階級と度数をならべた表を、度数分布表といいます。「分布」は、「どこに、どれだけ分かれて散らばっているか」という意味です。

度数を全部たすと、 $1 + 2 + 7 + 7 + 2 + 1 = 20$ で、はかった回数と同じになります。数えまちがいがいないかを、この合計で確かめましょう。

▶ 相対度数：全体の何割か

1組は20人、学年全体は100人だったとします。「14.10以上14.20未満が7人」と「同じ階級が30人」では、どちらが多いといえるでしょう。全体の人数がちがうので、人数のままではくらべられません。

そこで、度数を全体の個数でわって、割合にします（2-5：割合＝くらべる量÷もとにする量）。

$$\text{相対度数} = \frac{\text{その階級の度数}}{\text{度数の合計}}$$

1組は $7 \div 20 = 0.35$ （35%）、学年は $30 \div 100 = 0.30$ （30%）。割合にすると、1組のほうがこの階級に多く集まっているとわかります。相対度数を全部たすと、かならず1（100%）になります。全体を、階級ごとに分けたただけだからです。

▶ 累積度数：上から積み上げる

「14.20秒未満だった人は何人？」と聞かれたら、14.20より下の階級の度数を全部たします。 $1 + 2 + 7 = 10$ で10人です。このように、いちばん小さい階級からその階級までの度数をたした数を、累積度数といいます。「累積」は「積み重ねる」という意味です。

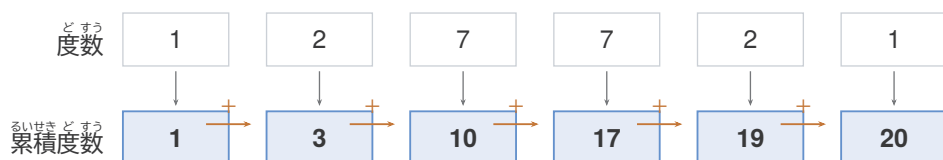


図3 累積度数は、1つ前の累積度数に、その階級の度数をたしてつくる。

累積度数の最後は、かならず度数の合計（20）になります。全部の階級をたしたことになるからです。

3 柱のグラフにする：ヒストグラム

度数分布表を、グラフにしてみましょう。横の軸に時間、たての軸に度数をとり、階級ごとに、はばが階級のはば、高さが度数の長方形をかきます。

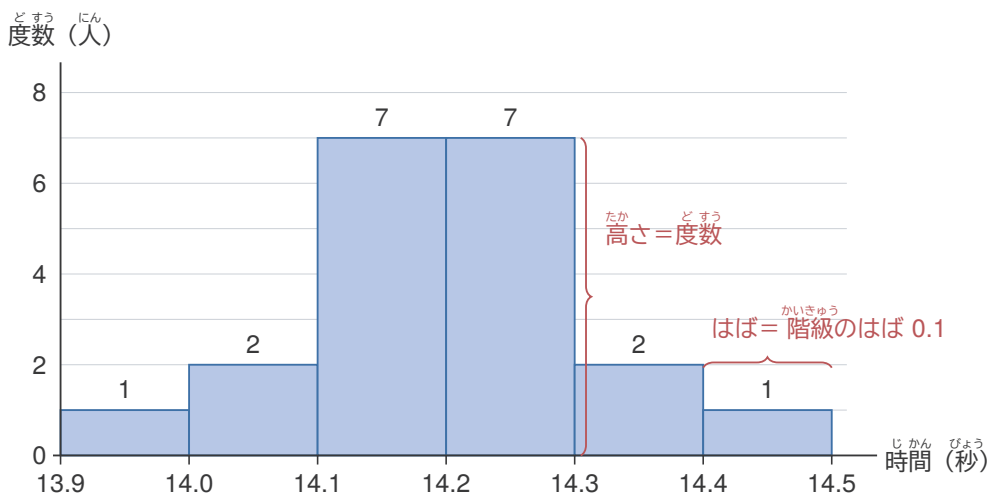


図4 ふりこの20回のヒストグラム。柱と柱のあいだはあけない。

このようなグラフをヒストグラム（柱状グラフ）といいます。表の数を読まなくても、「まん中がいちばん高く、左右にいくほど低い山の形」が、ひと目でわかります。

なぜ柱のあいだをあけないの？ 1-18などでかいた棒グラフは、「りんご」「みかん」のように別々のものの数をならべるので、棒をはなしてかきました。ヒストグラムの横の軸は、時間という一続きの数直線です。14.10秒と14.20秒のあいだにも時間はとぎれずにあるので、柱もすき間なくならべます。

面積で見ると、どの柱もはばが同じなので、柱の面積は度数に比例します（長方形の面積＝はば×高さ）。だから、柱の面積を見れば、どこに何人いるかがわかります。まん中の2本の面積を合わせると、全体の $14 \div 20 = 0.7$ 、つまり7割です。この「7割」は、3-14でもう一度出てきます。

▶ 度数折れ線で、2つの組をくらべる

隣の2組も、同じふりこを20回はかりました。ただし2組は、ふりこがはしで止まったときではなく、いちばん下を通るしゅん間にボタンをおしました。2組の度数は、小さい階級から順に0、1、8、10、1、0人でした。

2つのヒストグラムを重ねると、柱がかくれて見にくくなります。そこで、柱のかわりに、柱の上の辺のまん中の点を線で結びます。両はしには、度数が0の階級が1つずつあると考えて、線を横の軸まで下ろします。これを度数折れ線といいます。

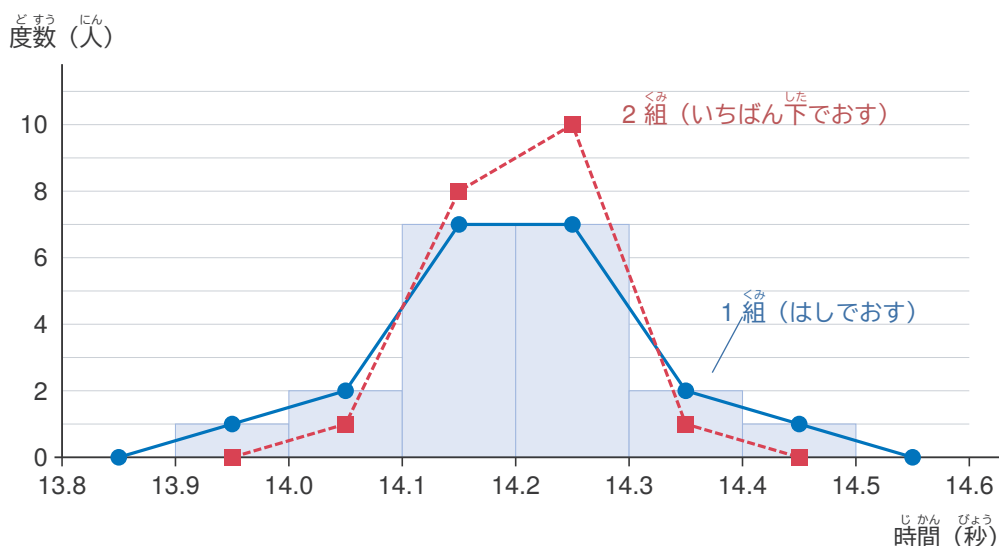


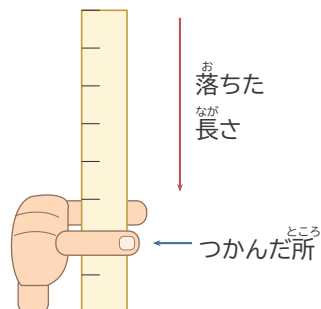
図5 1組（青の実線。うすい柱は1組のヒストグラム）と2組（赤の点線）の度数折れ線

2組の山は、1組より細くて高いですね。数が14.20のあたりに集まっています、ちらばりが小さいということです。ふりこは、はしではゆっくりになって止まるので、「どのしゅん間が止まった時か」がはっきりしません。いちばん下ではいちばん速く動くので、通りすぎるしゅん間がはっきりわかり、おすタイミングがそろいます。理科の実験でも、ふりこの時間は、いちばん下を通るときにはかります。

4 1つの数で代表させる：平均・中央値・最頻値

データ（集めた数）の全体を、1つの数で代表させる値を**代表値**といいます。平均は代表値の1つです。でも、平均がいつもいちばんよい代表とはかぎりません。次のデータで考えてみましょう。

ミナさんが、ものさしキャッチ（2-13）を12回しました。友だちがはなしたものさしを、ミナさんが指でつかみます。落ちた長さが短いほど、反応が速いということです。8回めは、よそ見をしてしまい、35 cm も落ちてしまいました。



かい 回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
なが 長さ (cm)	16	14	18	15	20	15	17	35	13	20	15	18

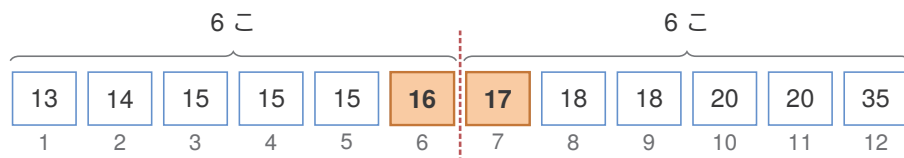
ひょう 表5 ものさしキャッチで落ちた長さ（12回）

▶ 平均

ごうけい 合計は216なので、 $\bar{x} = 216 \div 12 = 18$ で、へいきん 平均は18 cmです。ところが、12回のうち18 cmより短かったのは8回もあります。35 cmの1回が、平均をおおきいほうへひっぱっているのです。

▶ 中央値：小さい順にならべて、まん中

データを小さい順にならべかえます。



まん中は、6番めと7番めのあいだ。 $(16 + 17) \div 2 = 16.5$

ず 図6 小さい順にならべたデータ。下の灰色の数は、ならべた順番。

ならべたときにちょうどまん中にくる値を、**中央値**（メジアン）といいます。データが12こ（偶数）のときは、まん中の値が1つに決まりません。6番めと7

ばん 5番めのあいだがまん中なので、2つの値の平均をとって、 $(16 + 17) \div 2 = 16.5$ で、中央値は16.5 cmです。データが9こ（奇数）なら、まん中の5番めの値が、そのまま中央値です（前に4こ、後ろに4こ）。

▶ 最頻値と範囲

データの中で、いちばん多く出てくる値を最頻値（モード）といいます。「頻」は「たびたび」という意味です。15が3回でいちばん多いので、最頻値は15 cmです。度数分布表しかないときは、度数がいちばん大きい階級のまん中の値（階級値）を最頻値とします。

また、いちばん大きい値（最大値）からいちばん小さい値（最小値）をひいた差を、範囲（レンジ）といいます。 $35 - 13 = 22$ で、範囲は22 cmです。範囲は、データがどれだけの広さにちらばっているかを表します。

▶ 平均と中央値のちがいを、図で見る

数直線を長い板だと思い、データの数の所に、同じ重さのおもりを1こずつのせます。

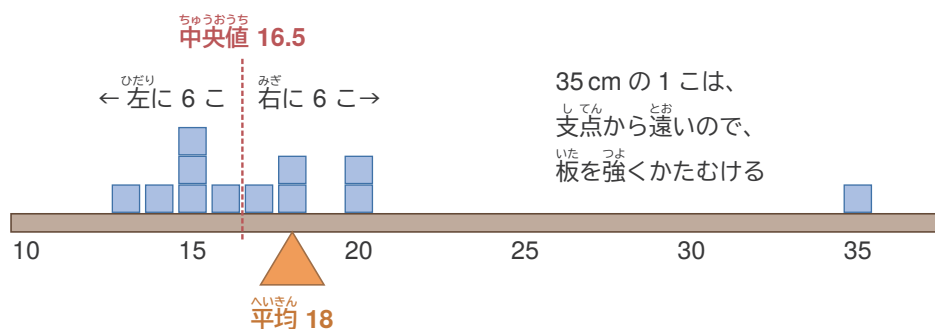


図7 平均は板がつり合う点。中央値は、左右のおもりの数が同じになる点。

平均は、この板がちょうどつり合う点（支点）にあたります。2-6 で見たように、平均より上の出っぱりと下のへこみが同じになる所だからです。てこ（理科）では、支点から遠いおもりほど板を強くかたむけます。だから、遠くにぽつんとある 35 cm につられて、つり合う点が右へずれるのです。

中央値は、左右のおもりの個数だけで決まります。35 が 100 になっても、右に 6 こあることは変わらないので、中央値は 16.5 のままです。

	12 回全部	35 をのぞいた 11 回
平均	$216 \div 12 = 18$	$181 \div 11 = 16.45 \dots$
中央値	$(16 + 17) \div 2 = 16.5$	6 番めの 16

表 6 1 つの大きさはなれた値で、平均は 1.5 以上動くが、中央値は 0.5 しか動かない

ミナさんの「ふだんの反応」を知りたいなら、よそ見の 1 回に引っぱられない中央値のほうが向いています。一方、ふりこのように、ずれが左右に同じくらい出るときは、平均と中央値はほぼ同じです（ふりこでは平均 14.20、中央値 14.195）。そのときは、全部の数を使ってならず平均を使います。

もっと知りたい ★★

度数分布表から平均を求める

元のデータがなく、度数分布表しかないときは、「その階級の数、みんな階級値だった」とみなして計算します。ふりこの表なら、階級値は 13.95、14.05、14.15、14.25、14.35、14.45 です。

$$13.95 \times 1 + 14.05 \times 2 + 14.15 \times 7 \\ + 14.25 \times 7 + 14.35 \times 2 + 14.45 \times 1 = 284.00$$

これを 20 でわると 14.20 で、元のデータの平均と（ここではたまたま同じになりました。ふつうは少しずれるので、およその平均と考えます。

5 4 つに分けて見る：四分位数と箱ひげ図

中央値は、データを前半と後半の 2 つに分ける値でした。それぞれの半分を、もう一度半分にすると、データは 4 つに分かれます。ものさしキャッチの 12 回で、順にやってみましょう。

- ① データを小さい順にならべ、中央値を求める。中央値は 16.5。
- ② 中央値より前の 6 こ (13、14、15、15、15、16) の中央値を求める。3 番めと 4 番めの平均で、 $(15 + 15) \div 2 = 15$ 。
- ③ 中央値より後ろの 6 こ (17、18、18、20、20、35) の中央値を求める。9 番めと 10 番めの平均で、 $(18 + 20) \div 2 = 19$ 。

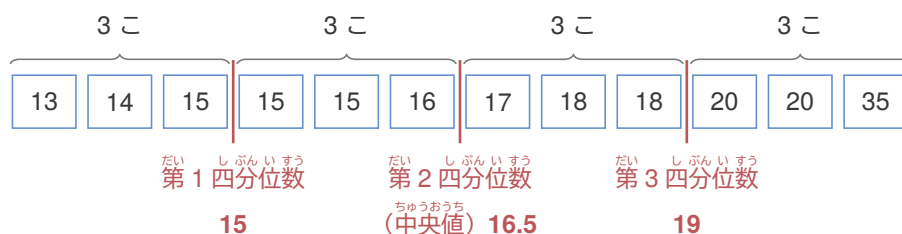


図 8 3 つの赤い線で、12 このデータが 3 こずつの 4 つの組に分かれる。

データを 4 等分する 3 つの値を四分位数といい、小さいほうから第 1 四分位数、第 2 四分位数 (中央値と同じ)、第 3 四分位数とよびます。「四分位」は「4 つに分けた位置」という意味です。

第 3 四分位数から第 1 四分位数をひいた差を、四分位範囲といいます。 $19 - 15 = 4$ で、4 cm です。まん中の半分 (6 こ) のデータが、4 cm のはばの中に入っているということです。範囲 (22) は 35 cm の 1 回で大きくなりましたが、四分位範囲は、はしの値にほとんど引っぱられません。

データが奇数こなら たとえば 11 こなら、中央値は 6 番めです。第 1 四分位数と第 3 四分位数は、中央値の 6 番めをのぞいた前の 5 こと後ろの 5 こで、それぞれの中央値 (3 番めと 9 番め) を求めます (この本では、中学校の教科書と同じこの約束にします)。

箱ひげ図をかく

最小値、第 1 四分位数、中央値、第 3 四分位数、最大値の 5 つの値を、1 つの図にまとめます。

- ① 数直線をかき、第 1 四分位数から第 3 四分位数までを長方形 (箱) でかく。
- ② 箱の中の中央値の所に、たての線を引く。

- 3 箱の左から最小値まで、右から最大値まで、線（ひげ）を引く。

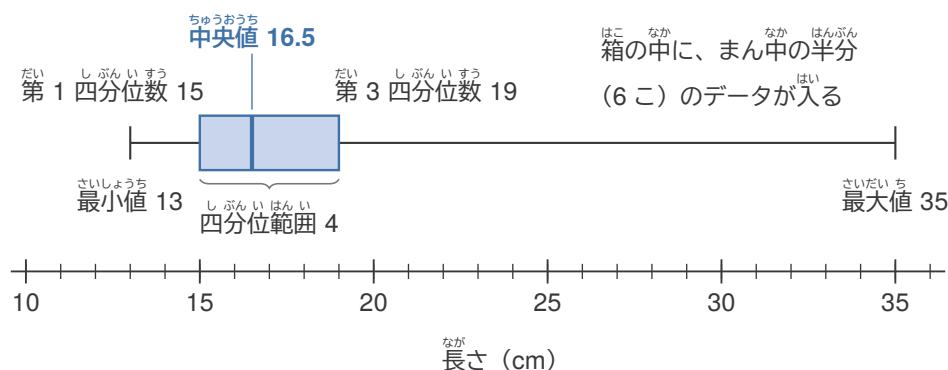


図9 ものさしキャッチの箱ひげ図。右のひげが長いのは、35が1つだけ遠くにあるから。

このような図を箱ひげ図といいます。箱もひげも、それぞれデータの4分の1ずつをふくんでいます。左のひげは短く、右のひげはとても長いですね。同じ3こずつのデータが、左では13から15のせまい所に、右では19から35の広い所にちらばっている、ということです。

▶ 外れ値

35のように、ほかのデータから大きくはなれた値を外れ値といいます。どこからを外れ値とするかは、次の約束がよく使われます。

$$\begin{aligned} & \text{第1四分位数} - \text{四分位範囲} \times 1.5 \text{ より小さい値} \\ & \text{第3四分位数} + \text{四分位範囲} \times 1.5 \text{ より大きい値} \end{aligned}$$

ものさしキャッチでは、四分位範囲が4なので、 $4 \times 1.5 = 6$ 。小さいほうは $15 - 6 = 9$ より小さい値、大きいほうは $19 + 6 = 25$ より大きい値が外れ値です。35は25より大きいので、外れ値です。

1.5はどこから来たの？ 1.5は、計算で出てくる数ではなく、「箱の長さの1.5倍より外にとび出たら、ほかとはちがうと考えよう」と人が決めた目安です。外れ値を見つけたら、すぐに消すのではなく、「よそ見をした」「書きまちがえた」のようなわけがないかを調べます（2-6の「ずれ」と「まちがい」）。

たいせつ

平均 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。何回もはかって平均すると、ほんとうの値に近づく。

度数分布表：階級ごとに度数を数える。相対度数＝度数÷合計。ヒストグラムは柱をすき間なく。

代表値：平均・中央値（まん中）・最頻値（いちばん多い）。外れ値に強いのは中央値。

四分位数でデータを4つに分けて、箱ひげ図にかく。

この章で出てきたことば

階級・度数 データを区切った区間。その区間に入るデータの個数。

相対度数・累積度数 度数÷合計。いちばん小さい階級からたした度数。

ヒストグラム・度数折れ線 度数を柱の高さにしたグラフ。柱の上のまん中を結んだ線。

中央値・最頻値・範囲 まん中の値。いちばん多い値。最大値－最小値。

四分位数・四分位範囲 データを4等分する3つの値。第3四分位数－第1四分位数。

外れ値 ほかから大きくはなれた値。箱から四分位範囲の1.5倍より外。



デルタ

代表値は3つもあるんだね。ヒストグラムや箱ひげ図でデータの形を見てから、どれを使うか選ぼう。

例題でたしかめよう

例題1 平均を $\bar{x}$ で求める

ばねに同じおもりをつるして、のびを5回はかると、8.3、8.1、8.4、8.2、8.5 cm でした。のびの平均 $\bar{x}$ を求めましょう。

考え方 $x_1 = 8.3$ 、……、 $x_5 = 8.5$ 、 $n = 5$ です。仮の平均を 8.0 にすると、小さな数のたし算ですみます。

しき ① 8.0 からののはなれ：0.3、0.1、0.4、0.2、0.5

② はなれの合計： $0.3 + 0.1 + 0.4 + 0.2 + 0.5 = 1.5$

③ はなれの平均： $1.5 \div 5 = 0.3$ 。④ $\bar{x} = 8.0 + 0.3 = 8.3$

確かめ：全部たすと 41.5。 $41.5 \div 5 = 8.3$ で同じ

こたえ 8.3 cm

じぶんでとこう1

水そうの水の温度を5回はかると、24.6、24.4、24.9、24.5、24.6 °C でした。仮の平均を 24.0 にして、平均 $\bar{x}$ を求めましょう。

例題 2 度数分布表を作る

ペットボトルロケットを 20 回とばした距離 (m) です。

23、31、27、35、29、18、26、33、28、24、30、21、27、38、25、29、22、32、26、36

(1) 階級のはばを 5 m (15 以上 20 未満から) にして、度数分布表を作りましょう。(2) 相対度数と累積度数を求めましょう。(3) 30 m 未満だったのは何回ですか。

考え方 順に 1 つずつ階級に入れて数えます。30 は「30 以上 35 未満」に入れます。

しき (1) (2) 右の表。相対度数は度数 ÷ 20

確かめ：度数の合計は 20 で、20 回と同じ。

(3) 25 以上 30 未満までの累積度数を読む。

距離 (m)	度数	相対 度数	累積 度数
15 以上 20 未満	1	0.05	1
20 以上 25 未満	4	0.20	5
25 以上 30 未満	8	0.40	13
30 以上 35 未満	4	0.20	17
35 以上 40 未満	3	0.15	20
合計	20	1.00	

こたえ (1) (2) 右上の表 (3) 13 回

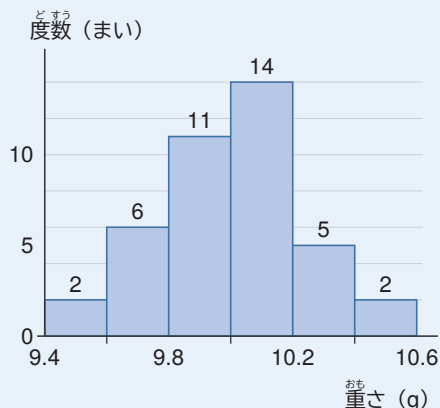
じぶんでこう 2

紙ひこうきを 20 回とばした距離 (m) です。階級のはばを 2 m (4 以上 6 未満から) にして、(1) 度数分布表 (2) 相対度数と累積度数 (3) 8 m 未満の回数を求めましょう。

7.2、9.5、8.1、5.4、10.3、8.8、6.6、9.0、7.9、11.2、8.4、6.0、9.7、7.5、8.0、12.4、9.1、10.9、8.6、10.0

例題3 ヒストグラムを読む

工場で焼いたクッキー 40 まいの重さのヒストグラムです。(1) 最頻値は何 g ですか。(2) 10.0 g 未満のクッキーは何まいで、全体の何 % ですか。(3) 中央値は、どの階級に入っていますか。



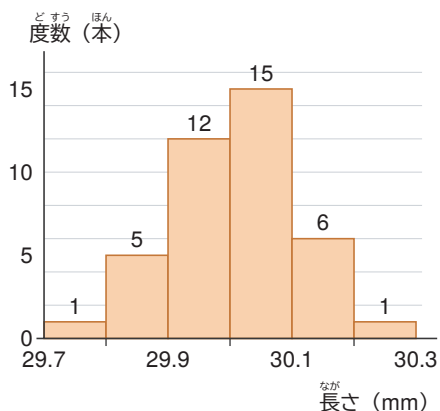
考え方 (3) は、軽い順で 20 番めと 21 番めがどの階級にあるかを、累積度数で調べます。

- しき** (1) いちばん高い柱の階級値： $(10.0 + 10.2) \div 2 = 10.1$
 (2) $2 + 6 + 11 = 19$ (まい)。 $19 \div 40 = 0.475$ で 47.5%
 (3) 累積度数は 2、8、19、33、……なので、
 20 番めから 33 番めまでが 10.0 以上 10.2 未満

こたえ (1) 10.1 g (2) 19 まい、47.5% (3) 10.0 g 以上 10.2 g 未満

じぶんでところ3

ボルト 40 本の長さのヒストグラムです。(1) 最頻値は何 mm? (2) 30.0 mm 未満は何本で、何 %? (3) 中央値はどの階級に入っている?



 例題 4 平均・中央値・最頻値・範囲

ソラさんがものさしキャッチを 9 回すると、落ちた長さは 17、14、18、15、34、16、15、18、15 cm でした。(1) 平均、中央値、最頻値、範囲を求めましょう。(2) 34 をのぞいた 8 回の平均を求めましょう。(3) ふだんの反応を表すには、平均と中央値のどちらがよいですか。

考え方 まず小さい順にならべます。9 こ (奇数) なので、中央値は 5 番めです。

しき ならべると 14、15、15、15、16、17、18、18、34

(1) 平均 $162 \div 9 = 18$

中央値 5 番めの 16

最頻値 15 (3 回でいちばん多い)

範囲 $34 - 14 = 20$

(2) $162 - 34 = 128$ 、 $128 \div 8 = 16$

(3) 34 が、平均を 18 まで引っばっている

中央値 16 は、34 に引っばられない

こたえ (1) 平均 18 cm、中央値 16 cm、最頻値 15 cm、範囲 20 cm (2) 16 cm (3) 中央値

 じぶんでとこう 4

ミナさんが反復横とびを 9 回すると、22、25、21、24、22、41、23、22、25 回でした (41 は数えまちがい)。(1) 平均、中央値、最頻値、範囲 (2) 41 をのぞいた 8 回の平均 (3) ふだんの記録を表すのは、平均と中央値のどちら？

例題5 四分位数と箱ひげ図

11本の乾電池で、ミニカーが止まるまで走った時間(分)です。四分位数を求めて、箱ひげ図をかきましょう。

12、8、14、10、7、17、8、12、11、5、9

考え方 11こ(奇数)なので、中央値は6番め。第1・第3四分位数は、6番めをのぞいた前の5こと後ろの5この、それぞれのまん中(3番めと9番め)です。

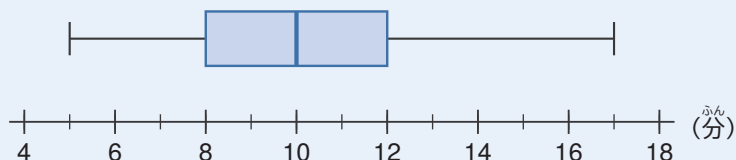
しき ならべると 5、7、8、8、9、10、11、12、12、14、17

中央値(第2四分位数): 6番めの10

第1四分位数: 5、7、8、8、9のまん中で8

第3四分位数: 11、12、12、14、17のまん中で12

最小値5、最大値17。四分位範囲は $12 - 8 = 4$



こたえ 第1四分位数8分、中央値10分、第3四分位数12分。箱ひげ図は上のとおり

じぶんでとこう5

11人の1週間の読書時間(時間)です。四分位数を求めて、箱ひげ図をノートにかきましょう。

21、16、25、19、18、23、30、20、17、22、24

例題 6 外れ値を見つける

温度センサーが8回はかった値（℃）です。外れ値はありますか。

24.6、24.8、24.5、24.7、26.9、24.6、24.4、24.7

考え方 8こ（偶数）なので、前の4こと後ろの4こに分けます。四分位範囲の1.5倍を、箱の両はしからのばした外が外れ値です。

しき ① ならべると 24.4、24.5、24.6、24.6 | 24.7、24.7、24.8、26.9

② 第1四分位数 $(24.5 + 24.6) \div 2 = 24.55$

第3四分位数 $(24.7 + 24.8) \div 2 = 24.75$

③ 四分位範囲 $24.75 - 24.55 = 0.2$ 、 $0.2 \times 1.5 = 0.3$

④ 小さいほうは $24.55 - 0.3 = 24.25$ より小さい値

大きいほうは $24.75 + 0.3 = 25.05$ より大きい値

⑤ 26.9は25.05より大きい。ほかの7こは24.25～25.05の中

こたえ 26.9℃が外れ値

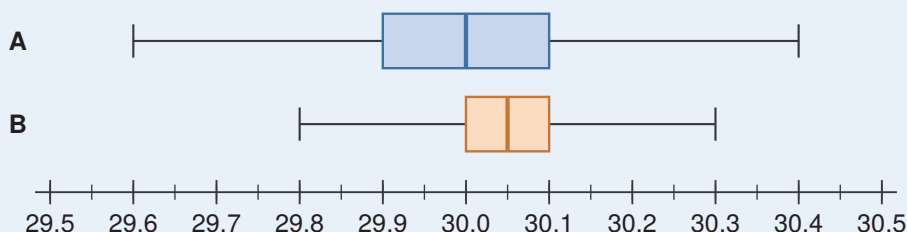
じぶんでとこう 6

機械で切った棒8本の長さ（cm）です。外れ値はありますか。

30.1、29.9、30.0、30.2、30.0、29.1、30.1、30.2

例題7 2つの箱ひげ図をくらべる

機械Aと機械Bで作ったピンの長さ(mm)の箱ひげ図です。(1) 範囲と四分位範囲を、それぞれ求めましょう。(2) 中央値が大きいのはどちらですか。(3) 長さがよくそろっているのは、どちらの機械ですか。



考え方 図から5つの値を読みます。A: 29.6、29.9、30.0、30.1、30.4。
B: 29.8、30.0、30.05、30.1、30.3。

しき (1) A 範囲 $30.4 - 29.6 = 0.8$ 、四分位範囲 $30.1 - 29.9 = 0.2$

B 範囲 $30.3 - 29.8 = 0.5$ 、四分位範囲 $30.1 - 30.0 = 0.1$

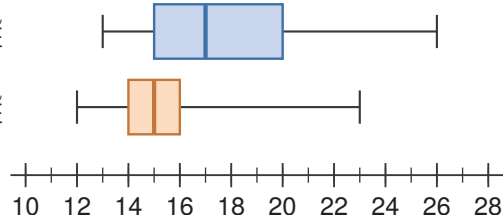
(2) A は 30.0、B は 30.05

(3) 範囲も四分位範囲も、B のほうが小さい

こたえ (1) A: 範囲 0.8 mm、四分位範囲 0.2 mm。B: 範囲 0.5 mm、四分位範囲 0.1 mm (2) B (3) B

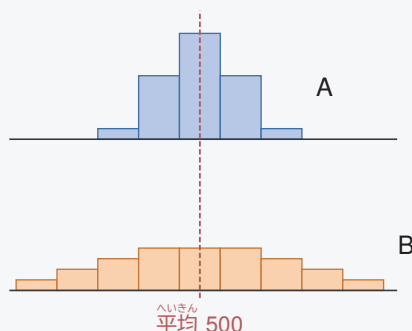
じぶんでとこう7

1班と2班のものさしキャッチ(cm)の箱ひげ図です。(1) 範囲と四分位範囲 (2) 中央値が大きいのは? (3) よくそろっているのは?



コラム 平均だけでは見えないもの

2つの機械で、ペットボトルに水を500mLずつ入れました。平均はどちらも500mLちょうどでした。でも、ヒストグラムをかくと、山のはばがまったくちがいます。Bの機械では、少なすぎたり多すぎたりするボトルがたくさん出ます。「ちらばりの大きさ」を1つのかずいほうほうをつくる方法で、3-14で作ります。



⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

ならべかえずに中央値を選ぶ

16、14、18、15、20の中央値は……

✗ まん中の3番めにある18

○ ならべかえて14、15、16、18、20。まん中は16

中央値は「大きさの順」でまん中の値です。はかった順番でまん中の値ではありません。

⚠ まちがえやすいところ

偶数こなのに、1つだけ選ぶ

12、15、17、20の中央値は……

✗ 15（または17）

○ $(15 + 17) \div 2 = 16$

4こ（偶数）のとき、まん中は2番めと3番めの間です。2つの平均をとります。

⚠️ まちがえやすいところ

境目の値を下の階級に入れる

階級が「14.10 以上 14.20 未満」

「14.20 以上 14.30 未満」のとき、

14.20 は……

✗ 14.10 以上 14.20 未満に入
れる

○ 14.20 以上 14.30 未満に入
れる

未満はその数をふくみません
(2-2)。14.20 は「14.20 未満」で
はないので、上の階級です。

⚠️ まちがえやすいところ

最頻値を、度数で答える

例題3 のクッキーの最頻値

は……

✗ 14 まい (いちばん高い柱
の度数)

○ 10.1 g (いちばん高い柱の
階級値)

最頻値は「いちばん多く出てくる
値」なので、重さ (g) で答えま
す。14 は、その値が何まいあっ
たかです。

🔍 コラム 表計算で代表値を求める

ものさしキャッチの 12 回を、表計算 (2-18) の B2 から B13 に入れると、
次の式で求められます。

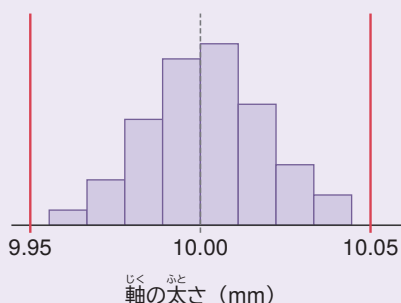
もと 求めるもの	い 入れる式	こた 答え
へいきん 平均	=AVERAGE(B2:B13)	18
ちゅうおうち 中央値	=MEDIAN(B2:B13)	16.5
だい 第3四分位数	=QUARTILE.INC(B2:B13,3)	18.5

第3四分位数は、この本の求め方では 19 でした。表計算は別の約束で計
算するので、少しちがう値になることがあります。どちらもまちがいは
ありません。

物理・工学ではこう使う

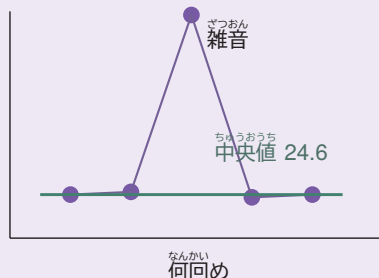
● 部品の寸法検査

工場では、作った軸の太さをはかって、ヒストグラムにします。山のまん中が決められた値（10.00 mm）にあるか、山のはばが許されるはば（赤い線のあいだ）に入っているかを見ます。山が左にずれてきたら、刃物がすり減ってきたなど、機械の調子が変わったしるしです。



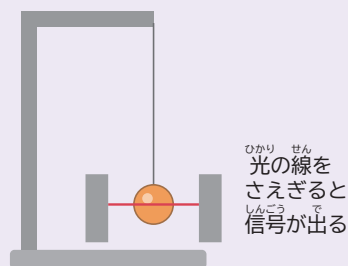
● センサーと中央値

温度センサーの値には、電気の雑音で、ときどき大きくとんだ値がまじります。24.6、24.7、31.2、24.5、24.6 °C の平均は 25.92 ですが、中央値は 24.6 です。最近の 5 回の中央値を表示するしくみ（メディアンフィルター）を使うと、とんだ値に引っぱられません。



● 光センサーでふりこをはかる

光の線をふりこがさえぎると、電気の信号が出るしくみ（光電ゲート）を、いちばん下に置きます。人の指のおくれないので、ちらばりは人がはかるときよりずっと小さくなり、ヒストグラムの山はとても細くなります。





しょうまつもんだい
章末問題

3-13 のまとめ

基本



1 ふりこの10往復を5回はかると、14.23、14.18、14.25、14.16、14.18秒でした。仮の平均を14.00にして、平均 $\bar{x}$ を求めましょう。

2 20人のハンドボール投げの記録(m)です。階級のはばを5m(10以上15未満から)にして、(1)度数分布表 (2)相対度数と累積度数 (3)20m未満の人数を求めましょう。

18、22、15、27、20、24、13、19、21、25、17、23、20、29、16、22、19、26、21、18

3 ものさしキャッチを9回すると、18、16、21、17、16、28、19、16、20cmでした。平均、中央値、最頻値、範囲を求めましょう。

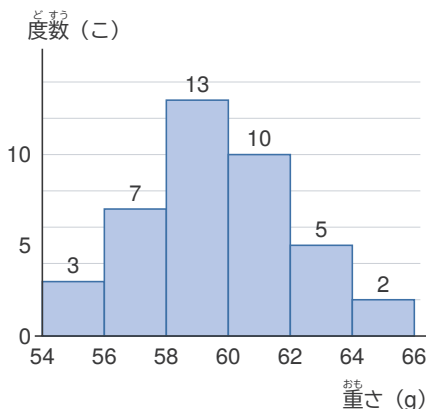
4 11日間の最高気温(°C)です。四分位数を求めて、箱ひげ図をノートにかきましょう。

28、31、25、30、27、33、29、26、32、30、24

5 電流センサーが8回はかった値(mA)です。外れ値はありますか。

52、50、51、49、50、58、51、50

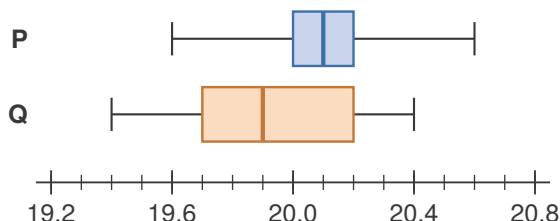
6 卵40個の重さのヒストグラムです。(1)最頻値は何gですか。(2)58g未満の卵は何個で、全体の何%ですか。(3)中央値はどの階級に入っていますか。



チャレンジ ★★

7 この乾電池の電圧 (V) をはかると、1.52、1.51、1.53、1.50、1.52、0.96、1.54 でした (0.96 は、使い終わった電池がまじっていた)。(1) 平均と中央値を求めましょう。(2) 0.96 をのぞいた 6 この平均を求めましょう。(3) 新しい電池の電圧を表すのに、平均と中央値のどちらがよいですか。

8 2 つの工場で作ったねじの長さ (mm) の箱ひげ図です。(1) 範囲と四分位範囲 (2) 中央値が大きいのは？ (3) 長さがよくそろっているのは？



9 同じ抵抗を、12 回はかった値 (Ω) です。(1) 平均、中央値、四分位数を求めましょう。(2) 外れ値はありますか。

99.8、100.1、100.0、99.9、100.2、100.0、99.7、100.1、100.0、99.9、100.3、100.0

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 何回もはかった値の平均を、 $\bar{x}$ を使って求められる。 → 390 ページ
- ☐ 度数分布表とヒストグラムを作り、読みとれる。 → 393 ページ
- ☐ 中央値・最頻値・四分位数を求め、箱ひげ図をかける。 → 398 ページ



ミナ

たくさんの数も、表や図にすると山の形が見えてくるね。山のはばを 1 つの数で言うのが、次の章だ！

第4部 データと統計

★★★

3-14

ばらつきを1つの数で： 標準偏差

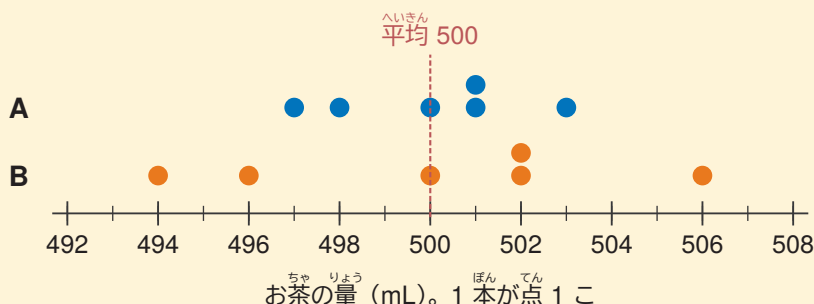
この章の先に 3-15 3-16 3-17 9-4
この章の前に 2-2 2-6 2-8 3-2 3-13

この章でできるようになること

- ★★★ 偏差（値 - 平均）を求め、偏差をたすと0になるわけを説明できる。
- ★★★ 分散と標準偏差 σ を求め、ばらつきのおおきさをくらべられる。
- ★★★ 「平均 $\pm \sigma$ にだいたい7割」と、何回もはかった平均のずれ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を説明できる。

? はてな？

工場で、2台の機械AとBが、ペットボトルにお茶を500mLずつ入れています。6本ずつはかると、平均はどちらもちょうど500mLでしたが、Bのほうがちらばっているようです。「Aは、だいたい何mLずれる」「Bは、だいたい何mLずれる」を、1つの数で言えるかな？



△ やってみよう ずれを全部たしてみよう

機械 A の 6 本の量 (mL) です。

なんぼん 何本め	1	2	3	4	5	6
りょう 量 (mL)	501	497	503	500	498	501
へいきん 平均とのちがい						

- 1 6本の平均が 500 mL になることを、計算で確かめよう。
- 2 それぞれの量から平均 500 をひいて、「平均とのちがい」をノートに書こう。平均より少ないときは、マイナスの数になるよ (2-2)。
- 3 「平均とのちがい」を 6 こ全部たしてみよう。
- 4 機械 B の 6 本 (502、506、496、500、494、502) でも、同じことをしよう。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 3-13** 平均 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。範囲 = 最大値 - 最小値
- 2-2** マイナス × マイナスはプラス。 $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
- 2-8** $\sqrt{\square}$ は、2 乗すると $\square$ になる正の数。 $\sqrt{16} = 4$ 、 $\sqrt{2} = 1.414 \dots$
- 3-2** 絶対値は 0 からの距離。 $|-3| = 3$ 、 $|3| = 3$
- 2-6** 「5.0 cm」は ± 0.05 cm のずれをふくむ。 $\pm$ はずれのはば。



ソラ

あれ？ A も B も、たすと 0 になっちゃった。B のほうがずれているはずなのに……。

▶ この章でやること

3-13では、データのちらばりを、ヒストグラムや箱ひげ図で目に見えるようにしました。この章では、「ちらばりの大きさ」を1つの数で表します。この数があると、「この機械は、だいたい2mLずれる」「このはかり方は、だいたい0.1秒ずれる」と、ずれの大きさを言えるようになります。



すうがく どうぐ 数学の道具

1 平均からのずれ：偏差

やってみようの②で求めた「平均とのちがい」を、**偏差**といいます。「偏」は「かたよる」、「差」は「ひき算の答え」という意味です。

$$\text{偏差} = \text{値} - \text{平均} \quad (\text{文字で書くと } x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots)$$

平均より大きい値の偏差はプラス、小さい値の偏差はマイナス、平均と同じ値の偏差は0です。機械Aで計算すると、次のようになります。

何本め	1	2	3	4	5	6	合計
量 (mL)	501	497	503	500	498	501	3000
偏差 (mL)	+1	-3	+3	0	-2	+1	0

表1 機械Aの偏差。501 - 500 = +1, 497 - 500 = -3, ……

偏差を数直線に矢印でかくと、平均から右へ出る矢印と、左へ出る矢印があります。

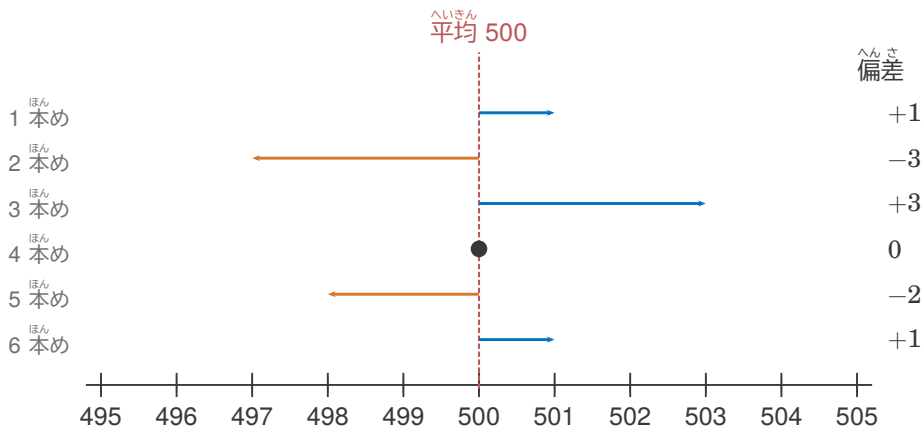


図1 青は平均より大きい（プラス）、だいたい小さい（マイナス）。4本めは平均ちょうど0。

偏差をたすと、いつも0になる

やってみようの③で、偏差を全部たすと、AもBも0になりました。たまたまではありません。どんなデータでも、偏差の合計はかならず0になります。そのわけを、2通りで見てみましょう。

わけ1：積み木で見る 2-6では、平均を「でこぼこをならした高さ」と考えました。偏差を棒にすると、平均より上の出っばりと、下のへこみに分かります。

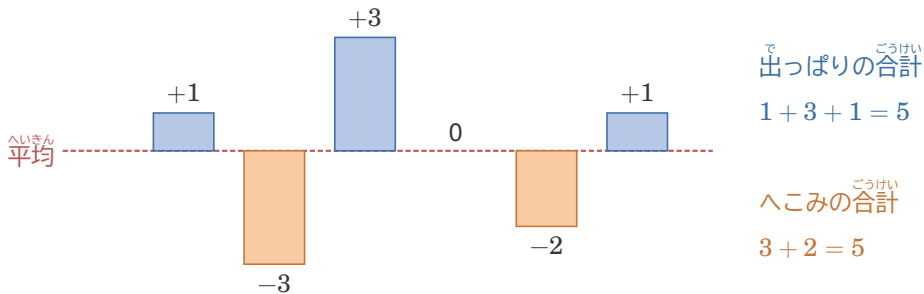


図2 平均の線より上の出っばりと、下のへこみは、同じ大きさ

出っばりを切り取ってへこみをうめると、ちょうどたいらになります。それが平均でした。だから、出っばりの合計（プラスの偏差の合計）と、へこみの合計（マイナスの偏差の合計）は同じ大きさです。たすと、 $5 + (-5) = 0$ です。

わけ2：式で見る 偏差を全部たした式を、値の部分と $\bar{x}$ の部分に分けて並べかえます（たし算とひき算は、順番を入れかえてよい。2-12）。

$$\begin{aligned} & (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}) \end{aligned}$$

$\bar{x}$ は n こあるので、うしろのかっこは $n\bar{x}$ です。また、平均の式

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

の両辺に n をかけると (2-14)、 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n\bar{x}$ です。だから、

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

機械 A で確かめると、 $3000 - 6 \times 500 = 3000 - 3000 = 0$ 。式のとおりです。

だから、どうなる？ 偏差をそのままたすと、ばらつきが大きくても小さくても、いつも 0 です。これでは、ばらつきの大きさを表せません。プラスとマイナスが打ち消しあってしまうのです。

② 2乗して平均し、 $\sqrt{\quad}$ でもどす：標準偏差

打ち消しあわないようにするには、マイナスをなくせばよいのです。その方法は2つあります。

▶ 方法1：絶対値にしてから平均する

絶対値は0からの距離なので、マイナスになりません (3-2)。 $|-3| = 3$ です。偏差の絶対値は、「平均から何 mL はなれているか」そのものです。

$$A \quad (1 + 3 + 3 + 0 + 2 + 1) \div 6 = 10 \div 6 = 1.66 \cdots$$

$$B \quad (2 + 6 + 4 + 0 + 6 + 2) \div 6 = 20 \div 6 = 3.33 \cdots$$

B のほうが2倍ばらついている、とわかります。

▶ 方法2：2乗してから平均する

マイナスの数も、2乗するとプラスになります(2-2)。 $(-3)^2 = 9$ です。機械Aの偏差を2乗して、平均します。

なんぼん 何本め	1	2	3	4	5	6	ごうけい 合計
へんさ 偏差	+1	-3	+3	0	-2	+1	0
へんさ 偏差の2乗	1	9	9	0	4	1	24

表2 $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ 、 $(-2)^2 = 4$ 。2乗すると、どれもプラスか0

$$(1 + 9 + 9 + 0 + 4 + 1) \div 6 = 24 \div 6 = 4$$

この「偏差の2乗の平均」を、分散といいます。機械Aの分散は4です。

▶ $\sqrt{\quad}$ で、もとの単位にもどす

分散の単位は何でしょう。偏差はmLなので、2乗すると「mL × mL」です。cm × cmが面積の単位cm²になるのと同じで、もとのmLとはちがう単位になってしまいました。分散の4は「4mLずれる」という意味ではありません。

そこで、2乗したのをもとにもどすために、 $\sqrt{\quad}$ をとります(2-8:2乗すると4になる正の数)。

$$\sqrt{4} = 2$$

これで単位がmLにもどり、「機械Aは、だいたい2mLずれる」と言えます。この数を標準偏差といい、ギリシャ文字の σ (シグマ)で表します。「標準」は「ふつうの、目安になる」という意味です。

▶ 図で見る：正方形をならす

偏差の2乗は、1辺が偏差の大きさの正方形の面積です。分散は、その面積をならした平均です。 σ は、面積が分散になる正方形の1辺です。

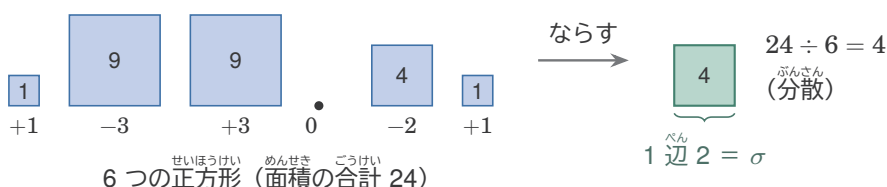


図3 正方形の中の数は面積（偏差の2乗）。ならした正方形の面積が分散、1辺が σ 。

▶ 機械Bでも計算する

Bの偏差は+2、+6、-4、0、-6、+2です。2乗すると4、36、16、0、36、4。

$$\text{分散} = (4 + 36 + 16 + 0 + 36 + 4) \div 6 = 96 \div 6 = 16, \quad \sigma = \sqrt{16} = 4$$

【?はてな?】の答え：機械Aは $\sigma = 2$ で「だいたい2mLずれる」、機械Bは $\sigma = 4$ で「だいたい4mLずれる」。Bのばらつきは、Aの2倍です。

たいせつ

標準偏差 σ の求め方

- ① 平均 $\bar{x}$ を求める
- ② 偏差（値 - 平均）を求める
- ③ 偏差を2乗する
- ④ 2乗の平均を求める（これが分散）
- ⑤ 分散の $\sqrt{\quad}$ をとる（これが σ ）

①～⑤を1つの式にまとめると、次のようになります。覚えなくても、①～⑤の順に計算すれば求められます。

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

σ は、ギリシャ文字のシグマの小文字です。同じシグマでも、大文字は第5巻(5-10)で「たし算をまとめて書く記号」として出てくる、別の意味の記号です。まぜないようにしましょう。

記号カード

初めて出た章 3-14

σ

読み方 シグマ
 意味 標準偏差。偏差の2乗の平均（分散）の $\sqrt{\quad}$ 。ばらつきの大きさ
 英語 sigma (standard deviation)

▶ 表計算で σ を求める

3-13 のふりこの20回（平均14.20秒）でも、①～⑤をしてみます。数が多
いので、表計算（2-18）を使います。

	A	B	C	D
1	番号	時間（秒）	偏差	偏差の2乗
2	1	14.37	0.17	0.0289
3	2	14.29	0.09	0.0081
4	3	14.24	0.04	0.0016
5	4	14.12	-0.08	0.0064
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
21	20	14.05	-0.15	0.0225
22		合計	0.00	0.2348
23			分散	0.01174
24			σ	0.108

表3 C2に=B2-14.20（偏差）、D2に=C2^2（2乗）と入れて下へコピー。D23は
=D22/20、D24は=SQRT(D23)

SQRTは $\sqrt{\quad}$ のことです。ふりこの σ は0.108秒、およそ0.11秒です。
=STDEV.P(B2:B21)と入れると、①～⑤を1回で計算してくれます（Pについ
ては、この章の最後の「せいかくに言うと」を見てください）。

▶ なぜ絶対値ではなく、2乗を使うの？

方法1の絶対値でも、ばらつきはくらべられました。それでも、理科や工学で
は、ふつう2乗を使う σ が使われます。

- 1 大きなずれを重く見る。** ずれが2倍になると、2乗は4倍になります。部
品づくりでは、小さなずれがたくさんあるより、とても大きなずれが1つ
あるほうがこまるので、それを大きく数えるのは理にかなっています。

② きまりがきれいに成り立つ。このあとの④⑤の「単位を変えたときのきまり」「何回もはかった平均のずれは $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 」は、2乗を使ったからこそ計算で

作れます。3-16の「ずれがいちばん小さくなる線」も、2乗を使うので平方完成(3-8)で求められます。

③ 場合分けがいらぬ。絶対値は「プラスならそのまま、マイナスならマイナスの記号をとる」と分けて考えますが、2乗はいつも同じ計算です。

③ 平均 $\pm\sigma$ の中に、だいたい7割

σ は「だいたいこのくらいずれる」という数でした。では、「だいたい」とは、どのくらいでしょう。ふりこの20回で調べます。平均は14.20秒、 σ はおおよそ0.11秒でした。

平均から σ だけ下と上は、

$$14.20 - 0.11 = 14.09, \quad 14.20 + 0.11 = 14.31$$

です。この範囲を「平均 $\pm\sigma$ 」と書きます。20回の点をかいて、この範囲に入る点を数えましょう。

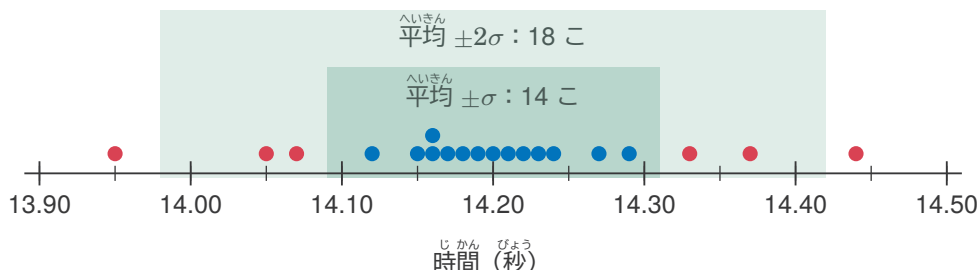


図4 青は平均 $\pm\sigma$ の中、赤は外。こい緑が平均 $\pm\sigma$ 、うすい緑が平均 $\pm 2\sigma$ 。

20のうち14こが、平均 $\pm\sigma$ の中に入っています。14 ÷ 20 = 0.7で、7割です。外にあるのは6こ(14.37、14.33、14.07、14.05、13.95、14.44)で、3割です。

ヒストグラムがつりがね形(まん中が高く、左右に同じように低くなる山)のデータでは、いつも、

平均 $\pm\sigma$ の中に、だいたい 7 割（くわしくは 68%）

が入ることが知られています。 $\pm 2\sigma$ まで広げると、だいたい 95% が入ります（ふりこでは 18 こで 90%。数を多くすると 95% に近づきます）。なぜ 68% や 95% になるのかは、3-17 の「正規分布」で学びます。

つりがね形でないときは？ 3-13 のものさしキャッチのように、1 つだけ大きくはなれた値があるデータや、山が左右どちらかにかたよったデータでは、7 割になるとはかぎりません。「だいたい 7 割」は、つりがね形のときの目安です。

▶ 2-6 の「 $\pm$ 」とのちがい

2-6 では、「5.0 cm」は ± 0.05 cm のずれをふくむ、と学びました。同じ「 $\pm$ 」でも、意味がちがいます。

	2-6 の $\pm$	この章の $\pm\sigma$
例	5.0 cm (± 0.05 cm)	14.20 秒 ± 0.11 秒 ($\pm\sigma$)
なに あらわ何を表す？	めもりを読むときの、いちばん大きいずれ	たくさんはかったときの、ふつうのずれ
なか はい中に入るのは？	ぜんぶ全部（はみ出さない）	だいたい 7 割（3 割ははみ出す）

表 4 同じ「 $\pm$ 」でも、どちらの意味かを書きそえる

実験のレポートや工業製品の説明書では、「 $\pm$ 」のうしろの数が何を表すかを書きそえます。

④ 単位を変えると、 σ はどうなる？

同じデータでも、単位を変えたり、全部に同じ数をたしたりすることがあります。そのとき、平均と σ がどうなるかを調べます。

▶ 全部に同じ数をたす

機械 A の 6 本に、あとから 10 mL ずつお茶を足したとします。

	1	2	3	4	5	6	へいきん 平均	σ
もと (mL)	501	497	503	500	498	501	500	2
へんさ 偏差	+1	-3	+3	0	-2	+1		
10 足す (mL)	511	507	513	510	508	511	510	2
へんさ 偏差	+1	-3	+3	0	-2	+1		

どの値も 10 ふえると、平均も 10 ふえて 510 になります。値も平均も 10 ずつふえたので、偏差 (値 - 平均) は変わりません。偏差が同じなので、 σ も 2 のままです。点の図でいうと、全体が右へ 10 動くだけで、ちらばり方は同じです。

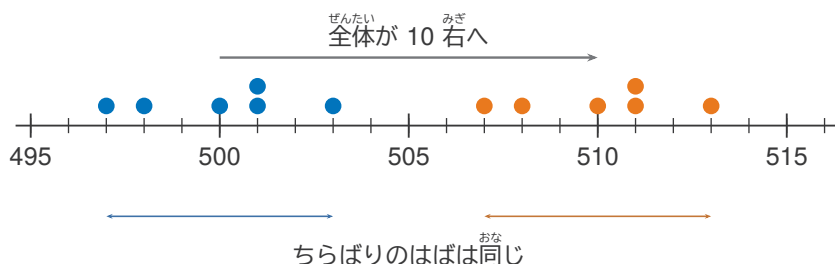


図5 全部に 10 をたすと、平均は 10 ふえるが、 σ は変わらない

▶ 単位を変える：cm から mm へ

5 本のくぎの長さを考えます。cm では 4.7、5.1、5.0、5.3、4.9 cm で、平均は 5.0 cm です。mm になおすと、10 mm/cm をかけて、47、51、50、53、49 mm になります (2-10)。

	へんさ 偏差					ぶんさん 分散	σ	
cm のとき	-0.3	+0.1	0	+0.3	-0.1	0.04	0.2	cm
mm のとき	-3	+1	0	+3	-1	4	2	mm

表5 cm の分散： $(0.09 + 0.01 + 0 + 0.09 + 0.01) \div 5 = 0.04$ 、 $\sigma = \sqrt{0.04} = 0.2$

mm にすると、どの値も 10 倍、平均も 10 倍 (50) なので、偏差も 10 倍になります。偏差を 2 乗すると $10 \times 10 = 100$ 倍なので、分散は 100 倍です (0.04

→ 4)。 $\sqrt{100} = 10$ なので、 σ は 10 倍にもどります (0.2 → 2)。長さそのものは変わっていないので、0.2 cm と 2 mm は同じずれです。

	平均	σ
全部に b をたす	b だけふえる	変わらない
全部を a 倍する ($a > 0$)	a 倍	a 倍 (分散は a^2 倍)

表 6 単位を変えたときのきまり。覚えなくても、偏差がどうなるかを考えれば作れる

5 何回もはかって平均すると、ずれは $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

3-13 では、何回もはかって平均すると、ほんとうの値に近づくことを見ました。では、平均のずれは、どのくらい小さくなるのでしょうか。いちばんかんたんな場合で、全部の場合を数えて調べます。

▶ いちばんかんたんなのはかり方

1 回はかるたびに、ほんとうの値より「1 大きい (+1)」か「1 小さい (-1)」かの、どちらかのずれが出るとします。どちらも同じくらい出ます。1 回だけのずれは +1 か -1 なので、2 乗はどちらも 1、平均も 1、 $\sigma = \sqrt{1} = 1$ です。

2 回はかって平均すると 2 回のずれの組み合わせは、次の 4 通りで、どれも同じくらい起こります。

1 回め	2 回め	2 回の平均のずれ	その 2 乗
+1	+1	$(+1 + 1) \div 2 = +1$	1
+1	-1	$(+1 - 1) \div 2 = 0$	0
-1	+1	$(-1 + 1) \div 2 = 0$	0
-1	-1	$(-1 - 1) \div 2 = -1$	1

表 7 平均すると、半分の場合でずれが打ち消しあって 0 になる

平均のずれの2乗をならすと $(1+0+0+1) \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。σは $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

で、約0.71です。1回のときの1より小さくなりました。

4回はかって平均すると 4回の組み合わせは $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通りです。

+1が何回出たかで分けて数えます。

+1の回数	並び方 (+は+1、-は-1)	通り	平均のずれ	その2乗
4	++++	1	+1	1
3	-++++, +-+++, ++-+-, ++++-	4	+0.5	0.25
2	++---, +-+-, +--+-, -++-, -+-+, --++	6	0	0
1	+----, -+---, ---+-, ----+	4	-0.5	0.25
0	-----	1	-1	1

表8 16通りの並び方。たとえば+1が3回なら、ずれの合計は $3-1=2$ 、平均は

$$2 \div 4 = 0.5$$

16通り全部の2乗をたすと、 $1 \times 1 + 0.25 \times 4 + 0 \times 6 + 0.25 \times 4 + 1 \times 1 = 4$ 。

ならすと $4 \div 16 = \frac{1}{4}$ で、σは $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ です。

何回の平均か (n)	1	2	4
平均のずれのσ	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (約0.71)	$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

表9 n回の平均のずれは、1回のずれを $\sqrt{n}$ でわった大きさ

2回なら $\sqrt{2}$ でわり、4回なら $\sqrt{4} = 2$ でわった大きさになっています。n回はかって平均すると、

$$\text{平均のずれ (平均の } \sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

になります。この本では全部の場合を数えて確かめましたが、ずれの出かたがどんな形でも成り立つことが知られています（この表の 1、4、6、4、1 は、3-17 のパスカルの三角形にも出てきます）。

▶ ほんとうのデータで確かめる

3-13 のふりこの 20 回を、はかった順に 4 回ずつ 5 組に分けて、組ごとに平均します。

くみ 組	1~4 かい 回め	5~8 かい 回め	9~12 かい 回め	13~16 かい 回め	17~20 かい 回め
4 かい へいきん 回の平均 (秒)	14.255	14.215	14.130	14.210	14.190

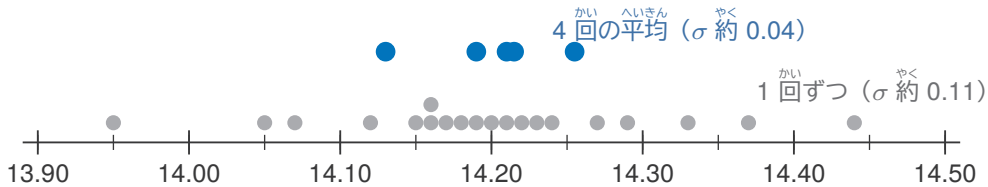


図 6 4 回ずつ平均した 5 つの点 (青) は、1 回ずつの点 (灰色) よりずっとまとまっている

5 つの平均の σ を計算すると、約 0.04 秒です。1 回ずつの σ (約 0.11 秒) よりずっと小さく、 $\frac{0.11}{\sqrt{4}} = 0.055$ と、だいたい合っています（組が 5 つしかないので、ぴったりにはなりません）。

▶ 3-13 のはてな？ に、数で答える

ふりこを 20 回はかった平均 14.20 秒のずれは、

$$\frac{\sigma}{\sqrt{20}} = \frac{0.108}{\sqrt{20}} = \frac{0.108}{4.47...} = 0.024...$$

で、およそ 0.02 秒です。だから、20 回の平均は「14.20 秒 $\pm$ 0.02 秒（平均の σ ）」と書けます。ほんとうの値 14.19 秒とのちがいは 0.01 秒で、このはばの中に入っています。

何回かはかるか (n)	1	4	9	16	25	100
$\sqrt{n}$	1	2	3	4	5	10
平均のずれ	σ	$\frac{\sigma}{2}$	$\frac{\sigma}{3}$	$\frac{\sigma}{4}$	$\frac{\sigma}{5}$	$\frac{\sigma}{10}$

表10 ずれを半分にするには4倍、10分の1にするには100倍の回数がある

ずれを半分にするのに、回数は2倍ではなく4倍もいります。だから、回数をふやすだけでなく、3-13の2組のように、はかり方をくふうして1回の σ を小さくすることも大切です。

せいかくに言うと

nでわるか、n-1でわるか

この章では、分散を「偏差の2乗の合計÷個数n」で求めました。ところが、大学の本や表計算では、nではなくn-1でわることもあります（表計算のSTDEV.Pはnでわり、STDEV.Sはn-1でわります）。

偏差は、データから計算した平均を使います。この平均は、そのデータにいちばんぴったり合うように決まっているので、ほんとうの値を使ったときより、偏差の2乗の合計が少し小さく出ます。その分をおぎなうために、1つ少ないn-1でわるのです。機械Aなら $24 \div 5 = 4.8$ 、 $\sqrt{4.8} = 2.19\cdots$ です。データが多ければ、nとn-1の差はほとんどなくなります。この本では、nでわる求め方を使います。

たいせつ

偏差 = 値 - 平均。偏差を全部たすと、かならず0。

分散 = 偏差の2乗の平均。標準偏差 $\sigma = \sqrt{\text{分散}}$ (もとの単位にもどる)。

つりがね形なら、平均 $\pm \sigma$ にだいたい7割、 $\pm 2\sigma$ にだいたい95%。

全部にbをたしても σ は同じ。a倍すると σ もa倍。

n回の平均のずれは $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

この章で出てきたことば

偏差 値 - 平均。平均からのずれ。たすと 0。

分散 偏差の 2 乗の平均。単位はもとの単位の 2 乗。

標準偏差 σ 分散の $\sqrt{\quad}$ 。「だいたいこのくらいずれる」を表す数。

平均 $\pm\sigma$ 平均より σ 小さい値から、 σ 大きい値までの範囲。

例題でたしかめよう

例題 1 偏差を求める

ばねに同じおもりをつるして、のびを 5 回はかると、42、45、40、44、39 mm でした。それぞれの偏差を求め、偏差の合計が 0 になることを確かめましょう。

考え方 まず平均を求めます。偏差は「値 - 平均」です。平均より小さい値の偏差はマイナスです。

しき ① 平均：42 + 45 + 40 + 44 + 39 = 210、210 ÷ 5 = 42

② 偏差：42 - 42 = 0、45 - 42 = +3、40 - 42 = -2

44 - 42 = +2、39 - 42 = -3

③ 合計：0 + 3 + (-2) + 2 + (-3) = 0

こたえ 偏差は 0、+3、-2、+2、-3 (mm)。合計は 0

じぶんでとこう 1

ペットボトルロケットを 5 回とばすと、63、58、61、66、57 m でした。それぞれの偏差を求め、合計が 0 になることを確かめましょう。

例題2 分散と標準偏差

5本のくぎの長さをはかると、51、47、50、53、49 mm でした。分散と標準偏差 σ を求めましょう。

考え方 ①平均→②偏差→③2乗→④平均(分散)→⑤ $\sqrt{\quad}$ (σ) の順に計算します。表にすると見やすくなります。

しき ① 平均: $(51 + 47 + 50 + 53 + 49) \div 5 = 250 \div 5 = 50$

長さ (mm)	51	47	50	53	49	合計
② 偏差	+1	-3	0	+3	-1	0
③ 偏差の2乗	1	9	0	9	1	20

④ 分散: $20 \div 5 = 4$

⑤ $\sigma = \sqrt{4} = 2$

こたえ 分散 4、標準偏差 2 mm

じぶんでとこう2

5回の記録が、26、14、20、22、18 点でした。分散と標準偏差 σ を求めましょう。

例題3 σ でばらつきをくらべる

2台のロボットカーXとYを5回ずつ走らせ、止まった所までの距離をはかりました。どちらのほうが、止まる所がそろっていますか。 σ をくらべましょう。

X: 6、8、7、9、5m Y: 3、10、7、11、4m

考え方 どちらも平均は7mです。 $\sqrt{\quad}$ が割り切れないときは、電卓の $\sqrt{\quad}$ キーを使います。

しき X 偏差 -1、+1、0、+2、-2。2乗の合計 $1+1+0+4+4=10$
分散 $10 \div 5 = 2$ 、 $\sigma = \sqrt{2} = 1.41\cdots$

Y 偏差 -4、+3、0、+4、-3。2乗の合計 $16+9+0+16+9=50$
分散 $50 \div 5 = 10$ 、 $\sigma = \sqrt{10} = 3.16\cdots$

こたえ Xのほうがそろっている (σ はX約1.4m、Y約3.2m)

じぶんでとこう3

2人が同じ的に5回ずつボールを投げ、的の点数を記録しました。 σ をくらべて、点数がそろっているほうを答えましょう。

P: 21、19、20、23、17点 Q: 25、15、20、18、22点

例題 4 平均 $\pm \sigma$ に入る数

ある乾電池でおもちゃを動かし、止まるまでの時間を 10 回はかりました。平均は 50 分、 σ は 3 分でした。(1) 平均 $\pm \sigma$ の範囲を求めましょう。(2) その範囲に入るのは何回で、全体の何 % ですか。

51、46、53、49、54、50、44、51、49、53 (分)

考え方 「平均 $\pm \sigma$ 」は、平均 $-\sigma$ から平均 $+\sigma$ までです。範囲のはしの値も中に入れて数えます。

しき (1) $50 - 3 = 47$ 、 $50 + 3 = 53$ で、47 分から 53 分まで

(2) 入るのは 51、53、49、50、51、49、53 の 7 回

入らないのは 46、54、44 の 3 回。 $7 \div 10 = 0.7$



こたえ (1) 47 分から 53 分まで (2) 7 回、70%

じぶんでとこう 4

10 回はかった値の平均は 20、 σ は 2 でした。(1) 平均 $\pm \sigma$ の範囲 (2) その範囲に入る回数と % を求めましょう。

19、22、17、21、23、19、17、22、21、19

例題5 単位を変えたときの平均と σ

5本のえんぴつの長さは15.1、14.7、15.0、15.3、14.9 cmで、平均は15.0 cm、 σ は0.2 cmです。(1) mmで表すと、平均と σ はどうなりますか。(2) どのえんぴつにも、長さ0.5 cmのキャップをつけた長さでは、どうなりますか。(3) mmで表してから5 mmのキャップをつけると、どうなりますか。

考え方 全部を10倍すると、偏差も10倍なので σ も10倍。全部に同じ数をたすと、偏差は変わらないので σ も変わりません。

しき (1) 10 mm/cm をかける。平均 $15.0 \times 10 = 150$ 、 σ $0.2 \times 10 = 2$
 (2) 平均 $15.0 + 0.5 = 15.5$ 、 σ は0.2のまま
 (3) (1) に5をたす。平均 $150 + 5 = 155$ 、 σ は2のまま

確かめ mmの偏差は+1、-3、0、+3、-1。分散は $20 \div 5 = 4$ 、 $\sigma = 2$ で合う。

こたえ (1) 平均 150 mm、 σ 2 mm (2) 平均 15.5 cm、 σ 0.2 cm (3) 平均 155 mm、 σ 2 mm

じぶんでこう5

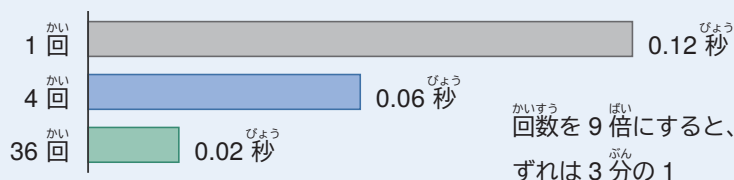
機械Aのお茶は、平均500 mL、 σ 2 mLでした。(1) Lで表すと、平均と σ は？(2) どのボトルにも10 mLずつ足すと？(3) Lで表してから0.01 Lずつ足すと？

例題 6 何回もはかった平均のずれ

ストップウォッチで1回はかるときの σ は0.12秒です。(1) 4回はかっ
て平均すると、平均のずれは何秒ですか。(2) 36回なら何秒ですか。(3)
平均のずれを0.03秒にするには、何回はかればよいですか。

考え方 ずれは $\sigma \div \sqrt{n}$ 。(3)は、 $\sqrt{n}$ が何になればよいかを先に考え
ます。

- しき** (1) $\sqrt{4} = 2$ なので、 $0.12 \div 2 = 0.06$
(2) $\sqrt{36} = 6$ なので、 $0.12 \div 6 = 0.02$
(3) 0.12を0.03にするには、 $0.12 \div 0.03 = 4$ でわればよい
 $\sqrt{n} = 4$ になる n は、 $4^2 = 16$



- こたえ** (1) 0.06秒 (2) 0.02秒 (3) 16回

じぶんでとこう 6

1回はかるときの σ が0.5gのはかりがあります。(1) 25回の平均のず
れは？(2) 100回なら？(3) 平均のずれを0.25gにするには何回？

コラム テストの「偏差値」も σ で決まる

模擬試験などで使われる「偏差値」は、自分の点の偏差が σ の何倍かを
使って、次のように決めた数です。

$$\text{偏差値} = 50 + 10 \times (\text{自分の点} - \text{平均}) \div \sigma$$

平均60点、 σ が10点のテストで80点なら、偏差は20で σ の2倍なので、
偏差値は $50 + 10 \times 2 = 70$ です。平均ちょうどなら50。点のちがいが
大きいテストでも小さいテストでも、「みんなの中でどのあたりにいるか」
を同じものさしでくらべられるように、 σ でわっているのです。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

偏差の合計で、ばらつきを見る

偏差の合計が0になったので
.....

✗ ばらつきはない

○ 偏差の合計は、いつも0
プラスとマイナスが打ち消しあ
うだけです。2乗して平均し、 σ
でくらべます。

⚠ まちがえやすいところ

マイナスの偏差を2乗する

偏差が-3のとき、2乗は.....

✗ $(-3)^2 = -9$

○ $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
マイナス×マイナスはプラスで
す(2-2)。2乗がマイナスになる
ことはありません。

⚠ まちがえやすいところ

分散を σ と思う

偏差の2乗の平均が4 (mLの2乗) のとき……

✗ $\sigma = 4 \text{ mL}$

○ $\sigma = \sqrt{4} = 2 \text{ mL}$

分散は単位も2乗になっています。 $\sqrt{\quad}$ をとって、もとの単位にもどします。

⚠ まちがえやすいところ

同じ数をたすと σ もふえる

平均500、 σ 2の全部に10をたすと……

✗ σ は $2 + 10 = 12$

○ σ は2のまま

値も平均も10ふえるので、偏差は変わりません。ちらばり方は同じです。

⚠ まちがえやすいところ

10倍すると σ は100倍

σ 0.2 cm を mm にすると……

✗ $0.2 \times 100 = 20 \text{ mm}$

○ $0.2 \times 10 = 2 \text{ mm}$

100倍になるのは分散です。 σ は $\sqrt{100} = 10$ 倍です。

⚠ まちがえやすいところ

平均のずれを n でわる

σ 0.12 秒で、4回の平均のずれは……

✗ $0.12 \div 4 = 0.03$

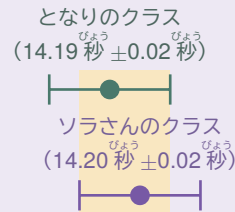
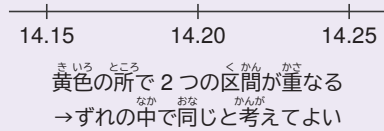
○ $0.12 \div \sqrt{4} = 0.06$

ずれは全部は打ち消しあいませ
ん。 n ではなく $\sqrt{n}$ でわります。

ぶつり こうがく つか
物理・工学ではこう使う

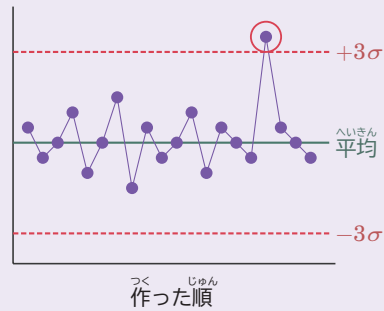
● 計測の不確かさ

理科や工学では、はかった結果を「14.20 秒 $\pm$ 0.02 秒」のように、ずれの目安（不確かさ）といっしょに書きます。ふつうは平均の σ ($\sigma \div \sqrt{n}$) を使います。これがあると、ほかの結果とくらべて「ちがう」のか「ずれの中と同じ」なのかを決められます。



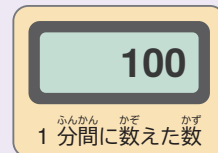
● 工場の品質管理

製品をはかった値を順に点でかき、平均と平均 $\pm 3\sigma$ の線を引いた管理図を使います。つりがね形なら、点が $\pm 3\sigma$ の外に出るのは1000回に3回ほどです。外に出たら、機械に何か起きたと考えると調べます。



● 放射線を数える

ガイガーカウンターは、放射線が1つ通るたびに1つ数えます。たまにしか起きないできごとを数えると、数えた数 N の σ はおよそ $\sqrt{N}$ です。1分で100なら ± 10 (10%)。10分で1000なら約 ± 32 で、1分あたり 100 ± 3.2 (3.2%)。長く数えるほどずれの割合が小さくなるのは、⑤と同じきまりです。





しょうまつもんだい
章末問題

3-14 のまとめ

きほん
基本



1 50m 走を 5 回はかると、8.4、8.1、8.3、8.0、8.2 秒でした。それぞれの偏差を求め、合計が 0 になることを確かめましょう。

2 5 回の記録が 33、27、30、31、29 でした。分散と標準偏差 σ を求めましょう。

3 2 つの温度計 S と T で、同じ部屋の温度を 5 回ずつはかりました。 σ をくらべて、値がそろっているほうを答えましょう。

S : 21、23、22、24、20 °C T : 22、22、22、21、23 °C

4 10 日間の通学時間は、平均 30 分、 σ 4 分でした。(1) 平均 $\pm \sigma$ の範囲 (2) その範囲に入る日数と % を求めましょう。

31、24、33、28、35、30、22、34、31、32 (分)

5 ボルトの長さは、平均 20.0 mm、 σ 0.3 mm でした。(1) cm で表すと、平均と σ は？ (2) どのボルトにも長さ 5 mm のナットをつけた長さでは？

6 1 回はかるときの σ が 0.8 g のはかりがあります。(1) 16 回の平均のずれは？ (2) 平均のずれを 0.1 g にするには何回？

チャレンジ



7 6 回はかった値が 12、8、14、11、9、12 でした。(1) 平均と σ を求めましょう。(2) 平均 $\pm \sigma$ に入るのは何回ですか。

8 温度センサーの値は、平均 20.0°C 、 $\sigma 0.5^{\circ}\text{C}$ でした。華氏 ($^{\circ}\text{F}$) は、摂氏を 1.8 倍して 32 をたした温度です ($3-3: F = 1.8C + 32$)。華氏で表すと、平均と σ はいくつですか。

9 ふりこの時間を、手でストップウォッチをおしてはかると 1 回の σ は 0.1 秒、光センサーではかると 0.004 秒でした。手ではかった平均のずれを、光センサー 1 回と同じ 0.004 秒にするには、手で何回はかればよいですか。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 偏差を求め、合計が 0 になるわけを説明できる。 → 418 ページ
- ☐ 分散と σ を求め、ばらつきをくらべられる。 → 420 ページ
- ☐ 平均 $\pm\sigma$ と $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の意味を説明できる。 → 424 ページ



デルタ

「だいたいこのくらいずれる」が σ で言えるようになったね。3-17 では、このつりがねの形がどこから来るのかを調べるよ。

第4部 データと統計

★★★

3-15

2つの量の関係： 散布図と相関

1 追しるべ この章のまえに 3-2 3-13 3-14 この章の先に 3-16 3-17 4-12

この章ですることができること

- ★★ 2つの量の表から散布図をかき、正の相関・負の相関・相関なしを見分けられる。
- ★★★ 偏差どうしの積の平均（共分散）を計算し、その符号の意味を説明できる。
- ★★★ 相関係数 r を求め、「相関があっても原因とはかぎらない」ことに気をつけて読める。

? はてな?

クラスの友だちを思い浮かべてみましょう。
背の高い人ほど、50m 走が速い気がしますか？

でも、背が低くても、とても速い人がいます。
背が高くても、走るのが苦手な人もいます。
「背の高さ」と「足の速さ」には、関係があるのでしょうか。あるとしたら、その関係の強さを、1つの数で言うことはできるでしょうか。



3-13・3-14では、クラス全員の身長のような、**1つの量の**ちらばりを調べました。平均(3-13)で「だいたいどのくらいか」を、標準偏差 σ (3-14)で「だいたいどのくらいずれるか」を、数で言えるようになりました。

この章では、**2つの量を組にして**調べます。「背が高い人ほど、タイムが短いかな?」のように、一方が大きいと、もう一方はどうなるか、という関係です。

2つの量の組は、表のままでは関係が見えにくいものです。そこで、まず点にしながらめます(3-2の座標)。それから、関係の強さを1つの数で表す方法を、1段ずつ作っていきます。

△ やってみよう 身長と50m走のタイムを、点にしよう

ソラさんのクラスの10人が、身長と50m走のタイムを記録しました。50m走のタイムは、**短いほど速い**ことに注意しましょう。

ひと 人	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
身長 (cm)	146	150	153	156	158	162	164	166	169	176
タイム (s)	8.5	8.6	8.9	8.2	7.8	8.2	8.2	8.8	8.1	7.7

表1 10人の身長と50m走のタイム(背の低い順にならべた)

- ① ノートに、横の軸を身長、たての軸をタイムにした方眼をかこう。横は145 cm から180 cm まで、たては7.5 s から9.0 s まであれば、全員がおさまります。
- ② 1人を1つの点でかこう。Aさんなら、横が146、たてが8.5の所です。
- ③ 10個の点は、どんな形に集まったかな? 背の高い人ほど、タイムは短い(速い)と言えそうかな?
- ④ 「背が高いのにタイムが長い人」や「背が低いのにタイムが短い人」は、だれかな?

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

2-2 負の数 $\times$ 負の数は正の数、負の数 $\times$ 正の数は負の数。 $(-2) \times (-3) = 6$ 、
 $(-2) \times 3 = -6$

3-2 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y の場所。 x 軸と y 軸で、平面は4つの
 区画に分かれる。

3-13 平均 $\bar{x}$ (エックス・バー) = (値の合計) $\div$ (値の個数)

3-14 偏差 = 値 - 平均。偏差の2乗の平均が分散。分散の $\sqrt{\quad}$ が標準偏差 σ (シ
 グマ) で、「だいたいのずれの大きさ」を表す。



ミナ

点をかいてみたら、なんとなく右下がりに見えたよ。でも「なんとなく」じゃなくて、数で言えたらいいな。

数学の道具

1 2つの量を点にする：散布図

表の1つの列は、1人分のデータです。1人について、身長とタイムの2つの
 数が組になっています。2つの数の組は、座標の点 (x, y) で表せます (3-2)。横
 の軸 (x) に身長、たての軸 (y) にタイムをとると、Aさんは点 $(146, 8.5)$ 、B
 さんは点 $(150, 8.6)$ です。10人分の点をかくと、図1のようになります。

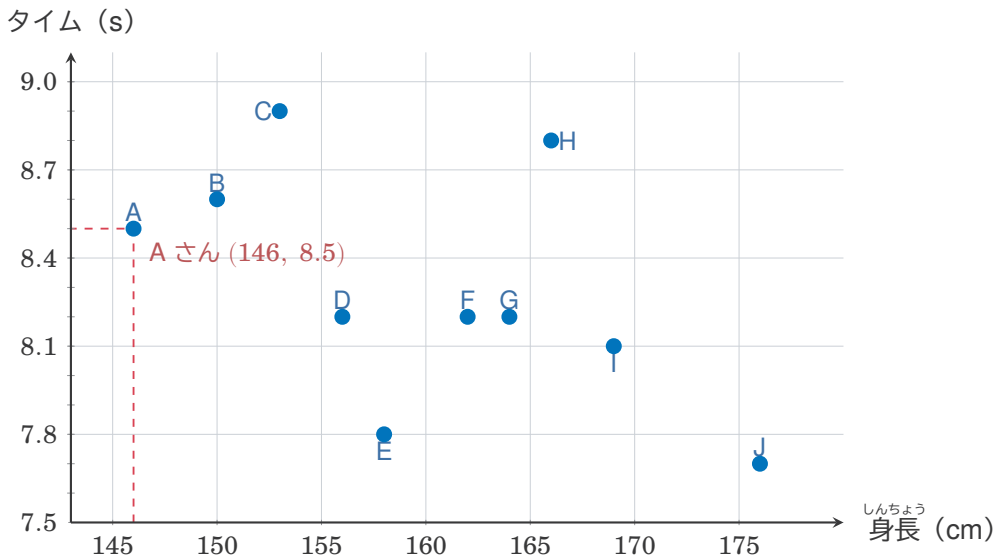


図1 身長とタイムの散布図。1つの点が1人。軸の目もりは、データのある所だけをとっている。

このように、2つの量の組を、1つずつ点にして表した図を**散布図**といいます。「散布」は「ばらまく」という意味です。点が、紙の上にばらまかれたように見えるからです。

目もりについて 横の軸を0 cm からかくと、点が右のはしに集まって、ちがいが見えなくなります。そこで、データのある145 cm から180 cm までだけをかいています(3-4の目もりの取り方)。たての軸も同じです。

何が見えるかな 点の集まりを、遠くからぼんやりながめてみましょう。左上から右下へ、帯のように広がっています。**全体として右下がり**です。背の高い人ほど、タイムが短い(速い)人が多いようです。

でも、点は1本の直線の上にぴったりのってはいません。Hさん(166 cm)は、背が高いのにタイムが8.8 sで、遅いほうです。Eさん(158 cm)は、背が低めなのに7.8 sで、2番めに速い人です。散布図からは、「全体としての様子」と「例外」の両方が見えます。全体としての様子を、**傾向**といいます。

② いっしょに増える・へる：相関

散布図の点の集まり方には、大きく分けて3つの形があります。図2を見ましょう。

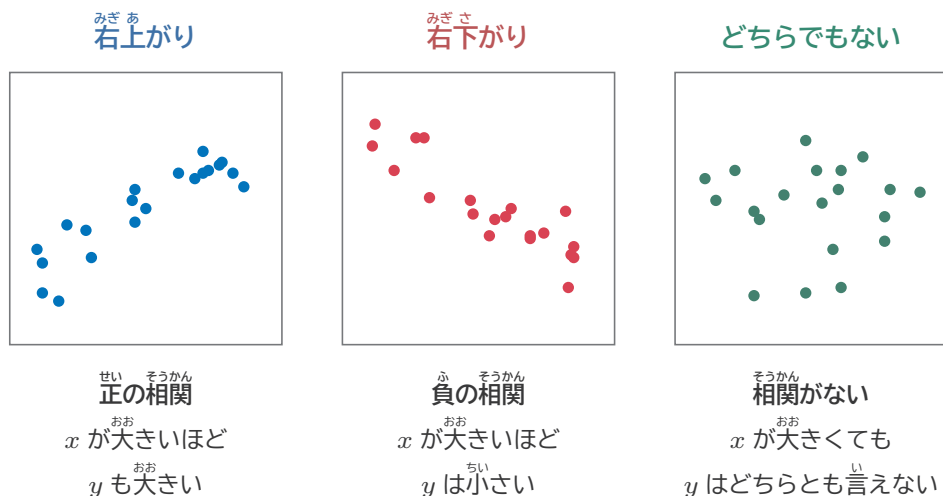


図2 散布図の3つの形。どれも、点は20個。

- 一方が大きいほど、もう一方も大きい傾向があるとき、2つの量には**正の相関**があるといえます。点の集まりは右上がりです。

例：身長と足の大きさ、夏の気温とアイスクリームの売れた数

- 一方が大きいほど、もう一方は小さい傾向があるとき、**負の相関**があるといえます。点の集まりは右下がりです。

例：冬の気温と、温かい飲み物の売れた数、身長と50m走のタイム（やってみよう）

- どちらの傾向もないとき、**相関がない**といえます。

例：身長と、誕生日の日にち（1から31までの数）

「相関」は、「たがいに関係しあう」という意味のことばです。「正の」「負の」は、2-2の正の数・負の数と同じで、「同じ向き」と「反対の向き」を表しています。

強い相関・弱い相関 同じ右上がりでも、点が1本の直線のまわりに細く集まっているときと、太い帯のようにばらけているときがあります（図3）。細く

あつ 集まっているほど、「一方がわかれば、もう一方がだいたいわかる」ので、**相関**が強いといいます。ばらけているときは、**相関が弱い**といいます。

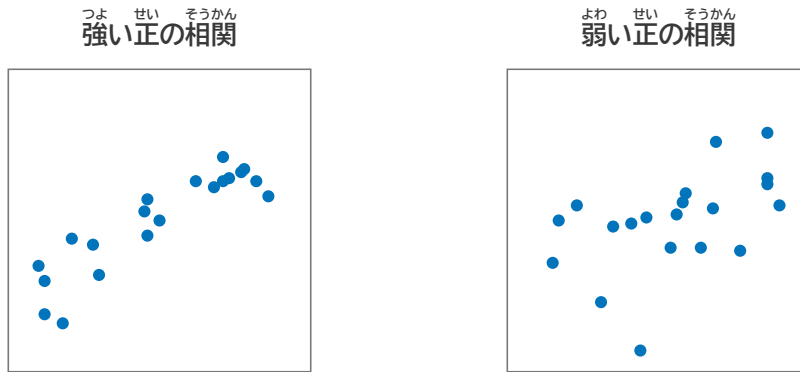


図3 どちらも右上がり。左は細い帯、右は太い帯。

② はてな？ の答え（その1）：やってみようの散布図は右下がりなので、身長とタイムには**負の相関**があります。タイムが短いほど速いので、「背の高い人ほど、足が速い傾向がある」と言えます。でも、帯はかなり太いので、強い相関ではなさそうです。

では、「どのくらい強い」かを、数で言うにはどうすればよいでしょう。見た目にたよると、困ったことが起きます。図4は、同じ10人のデータを、たての目もりだけ変えてかいたものです。

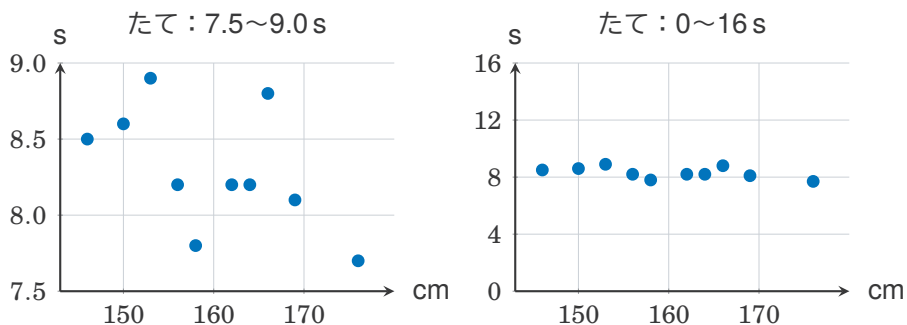


図4 同じデータでも、目もりの取り方で、点の帯の太さや傾きの見え方が変わる。

右の図では、点がほとんど横一列に見えます。目もりの取り方で見え方が変わるのでは、くらべられません（3-4のまちがえやすいところと同じです）。目もりの取り方によらない「強さの数」を、③と④で作しましょう。

③ 偏差をかけてたす：共分散

右上がりか右下がりかを、計算で決める方法を考えます。4つの段で進みます。

段1 平均の所に、たてと横の線を引く

身長しんちようの平均へいきんとタイムたいむの平均へいきんを求めます(3-13)。身長しんちようの合計ごうけいは

$$146 + 150 + 153 + 156 + 158 + 162 + 164 + 166 + 169 + 176 = 1600$$

なので、身長しんちようの平均へいきんは $\bar{x} = 1600 \div 10 = 160$ です。タイムたいむの合計ごうけいは

$$8.5 + 8.6 + 8.9 + 8.2 + 7.8 + 8.2 + 8.2 + 8.8 + 8.1 + 7.7 = 83.0$$

なので、タイムたいむの平均へいきんは $\bar{y} = 83.0 \div 10 = 8.3$ です。平均へいきんは、身長しんちようが **160 cm**、タイムたいむが **8.3 s** です。散布図さんぷずに、身長しんちよう 160 の所にたての線、タイム 8.3 の所に横の線を引きます(図5)。2本の線は、点(160, 8.3)で交わります。この点てんは、データの「まん中」にあたる点てんです。

2本の線ほんで、散布図さんぷずは4つの区画くわくに分かれます。3-2の、 x 軸じくと y 軸じくで分けた4つの区画くわくと同じ形かたちです。ちがうのは、原点げんてんのかわりに平均へいきんの点てんを中心ちゅうしんにしていることです。

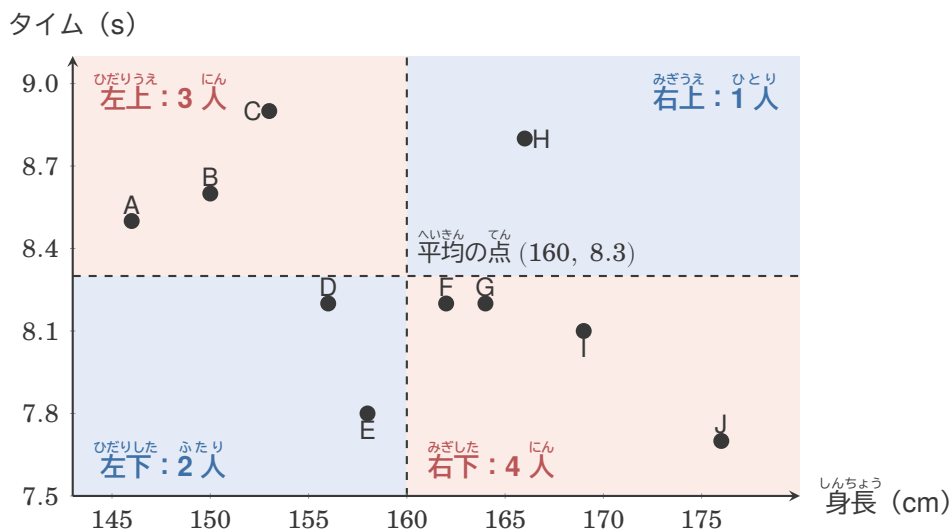


図5 平均の線で4つの区画に分ける。青の区画(右上・左下)と赤の区画(左上・右下)。

段2 区画ごとに、点の数を数える

右上がりの集まりなら、点は右上と左下に多くなります。背が高く、タイムも長い人、背が低く、タイムも短い人が多い、ということだからです。右下がりの集まりなら、点は左上と右下に多くなります。

数えると、右上が1人（H）、左下が2人（D、E）で、合わせて3人。左上が3人（A、B、C）、右下が4人（F、G、I、J）で、合わせて7人です。赤の区画のほうが多いので、右下がり、つまり負の相関だとわかります。

段3 区画を、偏差の符号で言いかえる

平均からのずれ、つまり偏差（3-14）を使います。身長しんちょうの偏差へんさを $x - \bar{x}$ 、タイムたいむの偏差へんさを $y - \bar{y}$ と書きます。たとえばAさんは、

$$x - \bar{x} = 146 - 160 = -14, \quad y - \bar{y} = 8.5 - 8.3 = 0.2$$

です。身長しんちょうの偏差へんさが負なら平均の線より左、正なら右です。タイムたいむの偏差へんさが負なら下、正なら上です。

2つの偏差へんさをかけ算さんすると、符号ふごうは図6

のようになります。右上は（正）×（正）で正です。左下は（負）×（負）で、これも正です（2-2）。左上と右下は、（負）×（正）や（正）×（負）なので負です。

つまり、偏差へんさの積せきが正なら青の区画、負なら赤の区画です。区画を見なくても、かけ算さんの符号ふごうだけで、どの区画かがわかります。

$(\text{負}) \times (\text{正})$ $= \text{負}$	$(\text{正}) \times (\text{正})$ $= \text{正}$
$(\text{負}) \times (\text{負})$ $= \text{正}$	$(\text{正}) \times (\text{負})$ $= \text{負}$

図6 2つの偏差へんさの積せきの符号ふごう

段4 数えるかわりに、偏差の積をたす

段2では、点の数を数えました。でも、数えるだけでは、平均へいきんの点てんのすぐそばの点も、ずっとはなれた点も、同じ「1人」です。はなれた点ほど、全体の傾向ぜんたい けいこうをはっきり表あらわしているの、大きく数おおえたいところです。

そこで、数えるかわりに、**偏差の積そのものをたします**。偏差の積は、平均の点とその点を向かい合う角にした長方形の面積です（図7）。はなれた点ほど、長方形は大きくなります。青の区画の長方形は正の面積、赤の区画の長方形は負の面積として、全部たし合わせるのです。

タイム (s)

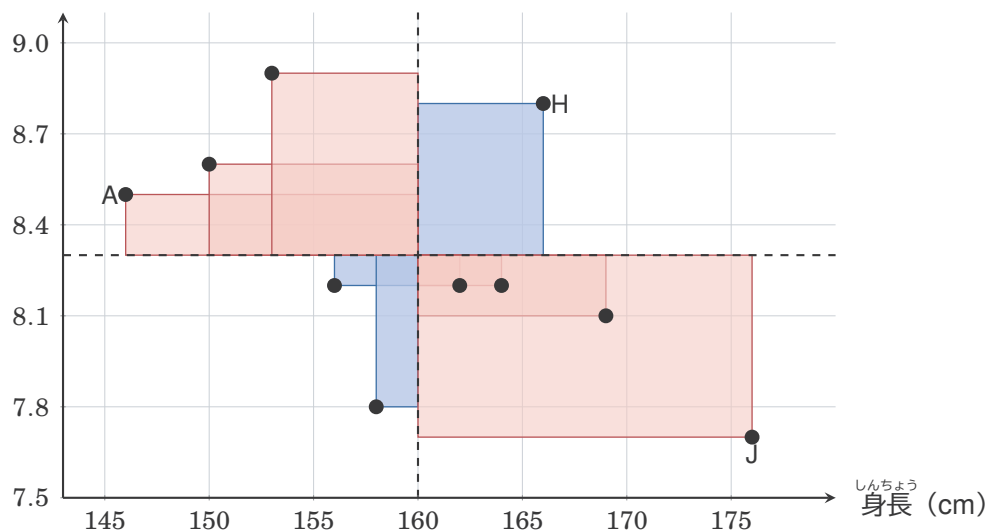


図7 偏差の積は、平均の点と、その人の点を向かい合う角にした長方形の面積。いちばん大きいのはJさんの長方形。

2人の長方形を計算してみよう Jさんの点は(176, 7.7)です。平均の点(160, 8.3)から、右へ $176 - 160 = 16$ 、下へ $8.3 - 7.7 = 0.6$ はなれています。偏差は、身長が16、タイムが -0.6 (下だからマイナス) なので、

$$16 \times (-0.6) = -9.6$$

です。横16、たて0.6の長方形の面積9.6に、「赤の区画だから負」の符号をつけた数になっています。

Hさんの点は(166, 8.8)で、平均の点から右へ6、上へ0.5です。偏差はどちらも正なので、

$$6 \times 0.5 = 3.0$$

で、青の区画の正の面積です。Jさんの長方形は、Hさんの長方形の3倍以上の大きさです。平均からはなれた人ほど、大きく数えられることがわかります。

10人全員の偏差の積を、表にして計算しましょう。

人	身長 x	タイム y	身長の偏差 $x - \bar{x}$	タイムの偏差 $y - \bar{y}$	偏差の積 $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
A	146	8.5	-14	0.2	-2.8
B	150	8.6	-10	0.3	-3.0
C	153	8.9	-7	0.6	-4.2
D	156	8.2	-4	-0.1	0.4
E	158	7.8	-2	-0.5	1.0
F	162	8.2	2	-0.1	-0.2
G	164	8.2	4	-0.1	-0.4
H	166	8.8	6	0.5	3.0
I	169	8.1	9	-0.2	-1.8
J	176	7.7	16	-0.6	-9.6
偏差の積の合計					-17.6

表2 偏差の積。青の区画の人は正、赤の区画の人は負になる。

合計は -17.6 です。人数が多いほど合計は大きくなってしまいますので、人数でわって、1人あたりの平均にします（平均を使うのは、3-13・3-14 と同じ考え方です）。

-17.6 ÷ 10 = -1.76

このように、2つの偏差の積の平均を、**共分散**といいます。この本では、 x と y の共分散を σ_{xy} （シグマ・エックス・ワイ）と書きます。下つきの xy は「 x と y の」という印で、かけ算ではありません（3-2の下つき文字）。

記号カード

初めて出た章 3-15

σ_{xy}

読み方 シグマ・エックス・ワイ
意味 x と y の共分散。偏差の積の平均。
英語 covariance

$$\sigma_{xy} = \{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\} \div n$$

x_1, y_1 は1人めの身長とタイム、 x_2, y_2 は2人めの身長とタイム、…、 n は人数です。「…」は「同じきまりで、とちゅうを省いた」という印です。

たいせつ

共分散が正 → 青の区画（右上・左下）が強い → 正の相関

共分散が負 → 赤の区画（左上・右下）が強い → 負の相関

共分散が0に近い → どちらでもない → 相関がない

やってみようのデータでは、共分散は -1.76 で負なので、負の相関です。段2で数えた結果と合っています。

「**共分散**」という名前のわけ 3-14の分散は、偏差の2乗、つまり「偏差×同じ偏差」の平均でした。共分散は、それを「 x の偏差× y の偏差」にかえたものです。「2つの量が共にどちららばっているか」を表す分散なので、共分散とよびます。 y のかわりに x 自身を入れると、 $(x - \bar{x})(x - \bar{x}) = (x - \bar{x})^2$ の平均で、ふつうの分散 σ_x^2 にもどります（ σ_x は x の標準偏差）。

4 単位によらない強さの数：相関係数

共分散で、正の相関か負の相関かはわかりました。でも、共分散には2つの困ったことがあります。

こま 困ったこと 1 たん い か かず か 単位を変えると、数が変わる

しんちよう 身長を、cm のかわりに mm ではかったとしましょう。1 cm は 10 mm なのので、

146 cm × 10 mm/cm = 1460 mm

のように、身長は全部 10 倍になります。平均も 10 倍の 1600 mm になるので、身長しんちようの偏差へん さも全部 10 倍ばいです（-14 cm は -140 mm）。すると、偏差へん さの積せきも 10 倍ばい、共分散きようぶんさんも 10 倍ばいの -17.6 になります。

	しんちよう 身長を cm ではかる	しんちよう 身長を mm ではかる
A さんの身長 <small>しんちよう</small> の偏差 <small>へん さ</small>	-14	-140 （10 倍 <small>ばい</small> ）
A さんの偏差 <small>へん さ</small> の積 <small>せき</small>	-14 × 0.2 = -2.8	-140 × 0.2 = -28 （10 倍 <small>ばい</small> ）
共分散 <small>きようぶんさん</small>	-1.76	-17.6 （10 倍 <small>ばい</small> ）

ひよう おな にん おな かんけい きようぶんさん ばい
表 3 同じ 10 人、同じ関係なのに、共分散は 10 倍になる。

おな にん おな かんけい たん い かず か
同じ 10 人の、同じ関係です。なのに、はかる単位で数が変わってしまいます。

こま 困ったこと 2 おお ちい 大きいのか小さいのか、わからない

-1.76 という数かずを見ても、それが強い相関つよ そうかんなのか弱い相関よわ そうかんなのか、判断はんだんできません。身長しんちようの偏差へん さは -14 や 16 のように大きく、タイムの偏差へん さは 0.2 や -0.6 のように小さいちいので、そもそも積せきの大きさの目安めやすがないからです。

かた かん こぶん かぞ
なおし方 「σ 何個分」で数える

2 つの困ったことは、どちらも「偏差へん さを、cm や s のような単位たん い かぞで数えている」ことから起きています。そこで、偏差へん さを、その量りよう ひようじゆんへんさの標準偏差 σ が何個分なん こぶん かぞかで数えなおします。σ は「その量りようのだいたいのずれ」でした（3-14）。σ を物差しもの さにすれば、身長しんちようもタイムも、同じ物差しおな もの さでくらべられます。

$$J \text{ さん} : 16 \div 8.7 = 1.84 \text{ (}\sigma_x \text{ の } 1.84 \text{ 個分)}$$



図8 身長^{しんちょう}の偏差^{へんさ}を、 σ_x (8.7 cm) を物差^{ものさ}しにして数^{かず}える。

身長^{しんちょう}の標準偏差^{ひょうじゆんへんさ} σ_x とタイムの標準偏差^{ひょうじゆんへんさ} σ_y を、3-14 のように計算^{けいさん}します。
 偏差^{へんさ}の2乗^{じよう}の平均^{へいぎん} (分散^{ぶんさん}) を求めて、 $\sqrt{\quad}$ をとります。身長^{しんちょう}の偏差^{へんさ}を1つずつ2乗^{じよう}してたすと (表2の身長^{しんちょう}の偏差^{へんさ}を使う)、

$$(-14)^2 + (-10)^2 + (-7)^2 + \dots + 16^2 = 196 + 100 + 49 + \dots + 256 = 758$$

です。10 でわって分散^{ぶんさん}は 75.8、 $\sqrt{\quad}$ をとって

$$\sigma_x = \sqrt{75.8} = 8.706 \dots$$

タイムも同じように、偏差^{へんさ}の2乗^{じよう}の合計^{ごうけい}は

$$0.2^2 + 0.3^2 + 0.6^2 + \dots + (-0.6)^2 = 0.04 + 0.09 + 0.36 + \dots + 0.36 = 1.42$$

です。10 でわって分散^{ぶんさん}は 0.142、 $\sqrt{\quad}$ をとって

$$\sigma_y = \sqrt{0.142} = 0.3768 \dots$$

身長^{しんちょう}は平均^{へいぎん}からだいたい 8.7 cm、タイムはだいたい 0.38 s ずれる、ということ
 です ($\sqrt{\quad}$ は電卓^{でんたく}で計算^{けいさん}します)。

それぞれの偏差^{へんさ}を σ でわってから (「 σ 何個分^{なん こぶん}か」に直^{なお}してから)、かけて平均^{へいぎん}
 します。身長^{しんちょう}の偏差^{へんさ}を a 、タイムの偏差^{へんさ}を b とすると、分数^{ぶんすう}のかけ算^{ざん} (2-4) で

$$\frac{a}{\sigma_x} \times \frac{b}{\sigma_y} = \frac{a \times b}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

です。1人^{ひとり}ずつ σ_x と σ_y でわるのは、偏差^{へんさ}の積^{せき}を最後^{さいご}にまとめて $\sigma_x \times \sigma_y$ でわるのと同じです。だから、

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{共分散} \div (x \text{ の標準偏差} \times y \text{ の標準偏差}))$$

となります。この r を相関係数^{そうかんけいすう}といい
ます。英語^{えいご}の correlation coefficient
の頭文字^{かしらもじ}です。分子^{ぶんし}と分母^{ぶんぼ}の単位^{たんい}が
同じ^{おな}なので ($\text{cm} \times \text{s}$ と $\text{cm} \times \text{s}$)、 r
には単位^{たんい}がありません。

記号カード

初めて出た章 3-15

r

読み方^{よみかた} アール
意味^{いみ} 相関係数^{そうかんけいすう}。共分散^{きょうぶんさん}
 $\div (\sigma_x \times \sigma_y)$ 。-1 から 1
まで。
英語^{えいご} correlation coefficient

やってみようのデータでは、

$$r = \frac{-1.76}{8.706 \times 0.3768} = \frac{-1.76}{3.280} = -0.536 \dots$$

で、およそ -0.54 です。

単位^{たんい}を変えても、 r は変わらない^{かわ} 身長^{しんちょう}を mm にすると、共分散^{きょうぶんさん}は 10 倍^{ばい}
-17.6 でした。でも、身長^{しんちょう}の標準偏差^{ひょうじゆんへんさ}も 10 倍^{ばい}の 87.06 mm になります。分子^{ぶんし}も
分母^{ぶんぼ}も 10 倍^{ばい}なので、 r は変わりません。

$$r = \frac{-17.6}{87.06 \times 0.3768} = \frac{-17.6}{32.80} = -0.536 \dots$$

これで、困^{こま}ったこと 1 が解決^{かいけつ}しました。

r は、-1 から 1 までの数^{かず} 困^{こま}ったこと 2 はどうでしょう。点^{てん}が右上がり^{みぎあ}
の直線^{ちよくせん}の上にぴったり^{うえ}のついているときを、計算^{けいさん}してみます。3 つの点^{てん} (1, 2)、
(2, 4)、(3, 6) は、どれも直線^{ちよくせん} $y = 2x$ の上^{うえ}にあります。

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	偏差 ^{へんさ} の積 ^{せき}	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	-1	-2	2	1	4
2	4	0	0	0	0	0
3	6	1	2	2	1	4
合計 ^{ごうけい}				4	2	8
3 でわる (平均 ^{へいきん})				$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

表 4 直線^{ちよくせん} $y = 2x$ の上^{うえ}の 3 点^{てん}。 $\bar{x} = 2$ 、 $\bar{y} = 4$

共分散は $\frac{4}{3}$ です。標準偏差は、電卓で

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165 \dots, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.633 \dots$$

で、 $\sigma_x \times \sigma_y = 1.333 \dots$ です。これは $\frac{4}{3}$ と同じ数です。だから

$$r = \frac{4}{3} \div \frac{4}{3} = 1$$

となります。 y の偏差が、いつも x の偏差のちょうど2倍だからです。右下がりの直線の上にぴったりのもっていれば、同じように計算して $r = -1$ になります。点が直線からずれるほど、 r は0に近づきます。 r は、いつも -1 以上 1 以下です（わけは、このあとの「もっと知りたい」）。

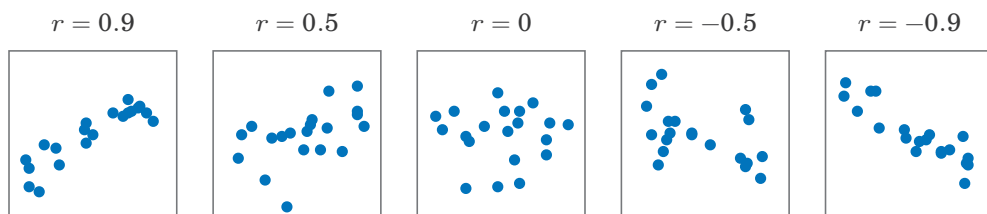


図9 相関係数 r と散布図の形。 r が1や -1 に近いほど、点は細い帯になる。

相関の強さは、 r の符号をとった大きさ（絶対値、3-2）で決めます。次の表は、よく使われる目安です。きっちりした決まりではありません。

r の絶対値 $ r $	相関の強さ（目安）
0.7 以上	強い相関がある
0.4 以上 0.7 未満	中くらいの相関がある
0.2 以上 0.4 未満	弱い相関がある
0.2 未満	ほとんど相関がない

表5 相関の強さの目安。符号（+か-か）は、向きを表す。

【? はてな?】 の答え（その2）：やってみようの相関係数は、 $r = -0.54$ でした。符号をとった大きさは0.54なので、中くらいの負の相関です。「背の高い人

ほど、足が速い傾向は、ある程度ある。でも、背の高さだけで足の速さが決まるわけではない」ということです。

表計算で求める

人数が多いと、手で計算するのは大変です。表計算（2-18）には、相関係数を求める命令 CORREL（コリレーション、英語で「相関」）があります。共分散は COVARIANCE.P、標準偏差は STDEV.P で求められます（.P は「人数 n でわる」という印です）。

	A	B	C
1	身長	タイム	
2	146	8.5	
3	150	8.6	
4	153	8.9	
5	156	8.2	
6	158	7.8	
7	162	8.2	
8	164	8.2	
9	166	8.8	
10	169	8.1	
11	176	7.7	
12		共分散	−1.76
13		相関係数	−0.536

表6 C12 に =COVARIANCE.P(A2:A11,B2:B11)、C13 に =CORREL(A2:A11,B2:B11) と入れる。

もっと知りたい ★★★

r が -1 以上 1 以下になるわけ

t をどんな数とします。それぞれの人について「 $t \times (x$ の偏差) + (y の偏差)」を作り、 2 乗して平均します。 2 乗は 0 以上なので、その平均も 0 以上です。展開して (3-8) まとめると、

$$\sigma_x^2 t^2 + 2\sigma_{xy} t + \sigma_y^2 \geq 0$$

が、どんな t でも成り立ちます。左辺は t の 2 次式なので、グラフは下に開かない放物線 (3-9) です。どんな t でも 0 以上ということは、放物線が t 軸より下に出ない、つまり t 軸と 2 点で交わらないということです。だから判別式 (3-10) は 0 以下で、

$$(2\sigma_{xy})^2 - 4\sigma_x^2 \sigma_y^2 \leq 0$$

これを 4 でわって整理すると、 $\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2$ 、つまり $r^2 \leq 1$ です。 2 乗して 1 以下の数なので、 r は -1 以上 1 以下です。

5 相関があっても、原因とはかぎらない

相関係数を使うときに、気をつけることが 3 つあります。

気をつけること 1 第3の量がかかっていることがある

ある町で毎日、アイスクリームの売れた数と、海や川での水の事故の数を記録しました。散布図をかくと、強い正の相関がありました。では、「アイスクリームを食べると、水の事故が起きやすくなる」のでしょうか。

そうではありません。暑い日ほどアイスはよく売れ、暑い日ほど泳ぎに行く人がふえるので事故もふえます。気温という第3の量が、両方を大きくしていたのです（図10）。アイスと事故のあいだには、直接の「原因と結果」の関係はありません。

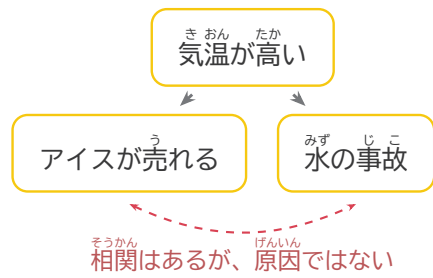


図10 気温が、両方を大きくしている。

一方がもう一方の原因になっている関係を、**因果関係**（原因と結果の関係）といいます。相関があっても、因果関係があるとはかぎりません。

？はてな？ の答え（その3）：身長と足の速さの相関も、「背が高いから速い」とは言いきれません。クラスの中でも、誕生日が早くて体の成長が進んでいる人は、背も高く、筋肉も強いかもしれません。運動部で練習している人もいます。かくれた量がいくつもありそうです。

き 気をつけること2 はなれた1つの点で、 r が大きく変わる

図11の左は、5つの点の散布図で、 $r = 0.14$ です。ほとんど相関がありません。ここに、ほかからずっとはなれた点を1つだけ加えると、右のように $r = 0.91$ になります。

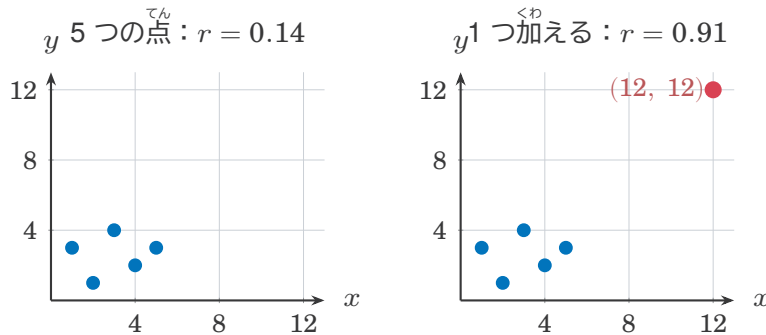


図11 はなれた点（外れ値、3-13）が1つあるだけで、 r は0.14から0.91になる。

はなれた点の偏差は、 x も y もとても大きいので、偏差の積（長方形の面積）がとても大きくなり、それだけで共分散を決めてしまうのです。 r だけを見ずに、

かならず散布図もかいて確かめましょう。はなれた点が、はかりまちがいでないかも調べます。

き 気をつけること 3 ま 曲がった関係は、 r では見えない

5つの点^{てん} $(-2, 4)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 4)$ は、どれも放物線^{ほうぶつせん} $y = x^2$ (3-9)の^{うえ}上にあります。 x がわかれば y はぴったり^き決まるので、とても強い^{つよ}関係^{かんけい}です。ところが、共分散^{きょうぶんさん}を計算^{けいさん}すると、

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$$

偏差^{へんさ}の積^{せき}は、 $(-2) \times 2$ 、 $(-1) \times (-1)$ 、 $0 \times (-2)$ 、 $1 \times (-1)$ 、 2×2 で、

$$(-4) + 1 + 0 + (-1) + 4 = 0$$

共分散^{きょうぶんさん}は0、 $r = 0$ です。左半分^{ひだりはんぶん}は右下がり^{みぎさ}、右半分^{みぎはんぶん}は右上がり^{みぎあ}で、正^{せい}と負^ふが打ち消^うし合^あったからです。 r が表^{あらわ}すのは、直線^{ちよくせん}にどれだけ近^{ちか}いかという関係^{かんけい}の強^{つよ}さです。 $r = 0$ でも、「関係^{かんけい}がない」とはかぎりません。

たいせつ

散布図^{さんぷず}：2つの量^{りょう}の組^{くみ}を点^{てん}にした図。右上がり^{みぎあ}は正^{せい}の相関^{そうかん}、右下がり^{みぎさ}は負^ふの相関^{そうかん}。

共分散^{きょうぶんさん} $\sigma_{xy} = (x \text{ の偏差 } \times y \text{ の偏差 }) \text{ の平均 }。$ 符号^{ふごう}が相関^{そうかん}の向^むきを表^{あらわ}す。

相関係数^{そうかんけいすう} $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ 。いつも $-1 \leq r \leq 1$ 。単位^{たんい}によらない。

相関^{そうかん}があっても、因果関係^{いんがかんけい}があるとはかぎらない。かならず散布図^{さんぷず}も見る。

この章で出てきたことば

散布図 2つの量の組を、1つずつ点にして表した図。

正の相関・負の相関 一方が大きいほど、もう一方も大きい（正）・小さい（負）傾向。

共分散 σ_{xy} x の偏差と y の偏差の積の平均。

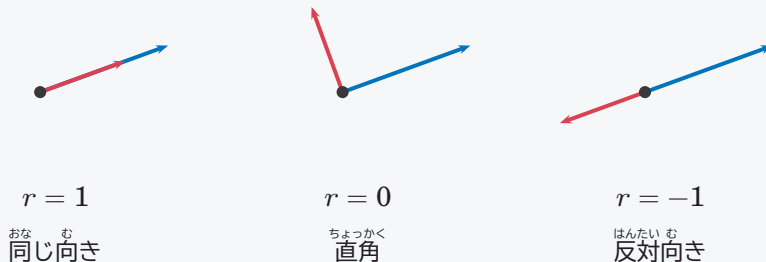
相関係数 r 共分散を $\sigma_x\sigma_y$ でわった数。-1から1まで。

因果関係 一方が原因で、もう一方が結果になっている関係。

もっと知りたい ★★★

相関係数は、2本の矢印の「向きのそろいぐあい」

10人の身長ひと しんちょうの偏差へんさ -14、-10、…、16を、10個の数の組こ かず くみと考えます。タイムかすの偏差へんさ 0.2、0.3、…、-0.6も、10個の数の組こ かず くみです。数の組は、向きと大きさをもつ矢印おお やじるし（ベクトル）と考えることができます（4-10・4-11）。すると r は、「身長しんちょうの矢印（青）とタイムかすの矢印（赤）が、どれだけ同じ向きを向いているか」を表す数になります。同じ向きなら $r = 1$ 、直角なら $r = 0$ 、反対向きなら $r = -1$ です。4-12では、これを「内積」という計算けいさんで学びます。



コラム 相関係数を考えた人たち

140年ほど前のイギリスで、ゴルトンという学者が、親の身長（父と母の平均）と、子どもがおとなになったときの身長の関係を調べました。たくさんの親子のデータを点にしてかくと、背の高い親の子どもほど、背が高い傾向がありました（図12は、そのようすを表した例です）。

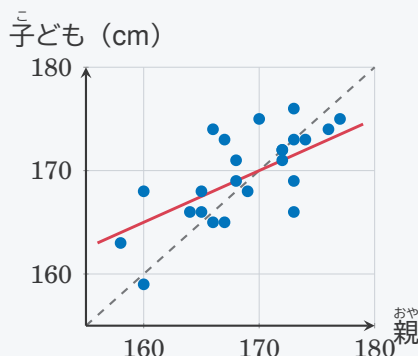


図12 点線は「親と同じ」。赤い線はそれよりゆるやか。

ゴルトンは、この「いっしょに変わる」ようすの強さを、1つの数で表そうと考えました。その考えを、なかまのピアソンが、この章の相関係数 r の式にまとめました（130年ほど前）。だから r は、「ピアソンの相関係数」ともよばれます。

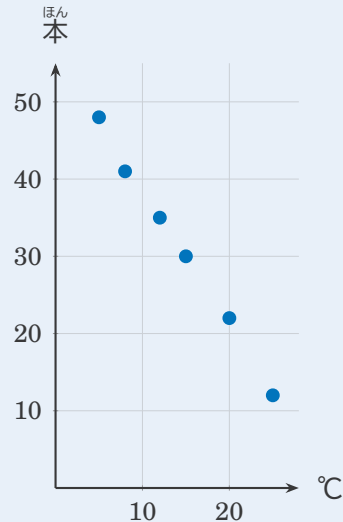
ゴルトンは、子どもの身長は親とぴったり同じにはならず、全体の平均のほうへもどる傾向があることも見つけました。図12で、点の集まりにそって引いた赤い線が、「親と同じ」の点線よりゆるやかなのはそのためです。この「もどる」という考えは、次の3-16で、データに直線を引くときの「回帰直線」という名前に残っています。

例題でたしかめよう

例題1 散布図をかいて、相関を読みとる

冬のある自動販売機で、6日間の昼の気温と、温かい飲み物の売れた本数を記録しました。散布図をかき、どんな相関があるかを答えましょう。

気温 (°C)	5	8	12	15	20	25
本数 (本)	48	41	35	30	22	12



考え方 横の軸に気温、たての軸に本数を取り、1日を1つの点にします。点の集まりが右上がりか右下がりか、細い帯か太い帯かを見ます。

しき 点 (5, 48)、(8, 41)、(12, 35)、(15, 30)、(20, 22)、(25, 12) をかく (散布図)。

点は右下がり、ほぼ1本の直線のまわりに細く集まっている。

こたえ 強い負の相関がある (気温が高い日ほど、売れる本数が少ない)

例題2 どの相関か、考える

つぎの2つの量には、正の相関・負の相関・相関がない、のどれがあると考えられますか。わけも答えましょう。

- (1) 自転車^{じてんしゃ}で同じ道^{おなじみち}を走るとき^{はし}の、速さ^{はや}と、かかる時間^{じかん}
- (2) 中学1年生^{ちゅうがくねんせい}の、身長^{しんちよう}と体重^{たいじゆう}
- (3) 中学1年生^{ちゅうがくねんせい}の、身長^{しんちよう}と、家^{いえ}から学校^{がっこう}までの道^{みち}のり

考え方 「一方^{いっぽう}が大きいと、もう一方^{もういっぽう}はどうなりやすいか」を考えます。そうなる傾向^{けいこう}があれば相関^{そうかん}があります。

- しき** (1) 速い^{はや}ほど、かかる時間^{じかん}は短い^{みじか} (反比例^{はんびれい}、2-15)。
 (2) 背^せの高い人^{たかいひと}ほど、体重^{たいじゆう}も重い^{おも}人が多い^{おおい}。
 (3) 背^せの高さ^{たか}と、家^{いえ}の場所^{ばしょ}は関係^{かんけい}がない。

こたえ (1) 負^ふの相関^{そうかん} (2) 正^{せい}の相関^{そうかん} (3) 相関^{そうかん}がない

じぶんでところ1

夏^{なつ}のある海^{うみ}の家^{いえ}で、6日間^{むいかかん}の昼^{ひる}の気温^{きおん}と、アイスクリーム^うの売^うれた数^{かず}を記録^{きろく}しました。(気温^{きおん}℃、売^うれた数^{かず})の組^{ぐみ}は、(18, 12)、(22, 20)、(25, 26)、(28, 31)、(30, 40)、(33, 44)です。散布^{さんぷ}図^ずをノートにかき、どんな相関^{そうかん}があるかを答え^{こた}ましょう。

じぶんでところ2

つぎの2つの量^{りよう}には、正^{せい}の相関^{そうかん}・負^ふの相関^{そうかん}・相関^{そうかん}がない、のどれがあると考え^{かんが}られますか。(1) 1日^{いちにち}に読書^{どくしょ}した時間^{じかん}と、その日^ひにゲームをした時間^{じかん} (自由^{じゆう}な時間^{じかん}は同じだ^{おな}けあるとする) (2) 家庭^{かてい}の1か^{げつ}月の電気^{でんき}の使用量^{しようりよう}と、電気料^{でんきりょう}金^{きん} (3) 出席番号^{しゅっせきばんごう}と、テストの点数^{てんすう}

例題3 相関と因果を見分ける

ある小学校で、1年生から6年生までの全員について、足の大きさと、読める漢字の数を調べると、強い正の相関がありました。「足が大きくなると、漢字がたくさん読めるようになる」と言えますか。

考え方 両方を大きくしている、第3の量がないかを考えます。

しき 学年が上がるほど、体が成長して足は大きくなる。

学年が上がるほど、習った漢字もふ

える。

「学年」が、両方を大きくしている

(矢印の図)。

こたえ 言えない。学年（年齢）という第3の量が、両方を大きくしているから。同じ学年の中だけで調べると、相関はほとんどなくなると考えられる

学年が上がる

足が大きい

漢字が多い

じぶんでこう3

ある国の町ごとに、消防車の数と、火事の数を見ると、正の相関がありました。「消防車がふえると、火事がふえる」と言えますか。両方を大きくしている第3の量を答えましょう。

例題4 共分散を求める

5人の身長 x [cm] と、足の大きさ y [cm] を調べました。共分散を求め、どんな相関があるかを答えましょう。

身長 x (cm)	150	155	160	165	170
足 y (cm)	22	23	25	24	26

考え方 ①平均を求める。②偏差を求める。③偏差の積を求める。④積の平均を求める。の順で、表にして計算します。

しき ① $\bar{x} = (150 + 155 + 160 + 165 + 170) \div 5 = 800 \div 5 = 160$

$\bar{y} = (22 + 23 + 25 + 24 + 26) \div 5 = 120 \div 5 = 24$

x	y	② $x - \bar{x}$	② $y - \bar{y}$	③ 偏差の積
150	22	-10	-2	20
155	23	-5	-1	5
160	25	0	1	0
165	24	5	0	0
170	26	10	2	20
合計				45

④ $\sigma_{xy} = 45 \div 5 = 9$ 正の数

こたえ 共分散は9。正なので、正の相関がある

じぶんでこう4

5つの組 (x, y) が、(2, 3)、(4, 4)、(6, 6)、(8, 9)、(10, 8) です。共分散を求め、どんな相関があるかを答えましょう。

例題5 相関係数を求める

別の5人の身長 x [cm] と、50m 走のタイム y [s] です。相関係数 r を、小数第2位まで求めましょう。 $\sqrt{\quad}$ は電卓で計算します。

身長 x (cm)	150	155	160	165	170
タイム y (s)	8.6	8.4	8.0	7.8	8.2

考え方 共分散のほかに、偏差の2乗も計算して、 σ_x と σ_y を求めます (3-14)。最後に、共分散を $\sigma_x \sigma_y$ でわります。

しき $\bar{x} = 800 \div 5 = 160$ 、 $\bar{y} = 41.0 \div 5 = 8.2$

$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	偏差の積	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
-10	0.4	-4	100	0.16
-5	0.2	-1	25	0.04
0	-0.2	0	0	0.04
5	-0.4	-2	25	0.16
10	0	0	100	0
合計		-7	250	0.40

$$\sigma_{xy} = -7 \div 5 = -1.4$$
$$\sigma_x = \sqrt{250 \div 5} = \sqrt{50} = 7.071 \dots$$
$$\sigma_y = \sqrt{0.40 \div 5} = \sqrt{0.08} = 0.2828 \dots$$
$$\sigma_x \sigma_y = 7.071 \times 0.2828 = 2.000 \quad (\text{電卓})$$
$$r = -1.4 \div 2.000 = -0.70$$

こたえ $r = -0.70$ (強い負の相関。 $|r| = 0.7$ は目安の「強い」のさかい目)

じぶんでとこう5

じぶんでとこう4の5つの組(2, 3)、(4, 4)、(6, 6)、(8, 9)、(10, 8)の相関係数 r を、小数第2位まで求めましょう。

例題6 単位を変えると、どうなる？

例題4の身長を、mmではかりなおします(足の大きさはcmのまま)。共分散と相関係数は、それぞれどうなりますか。**例題4**のデータの相関係数は $r = 0.9$ です。

考え方 10 mm/cm をかけるので、身長はどれも10倍です。平均も10倍なので、身長の偏差も10倍になります。

しき 身長の偏差は-100、-50、0、50、100(10倍)

偏差の積は200、50、0、0、200で合計450。 $\sigma_{xy} = 450 \div 5 = 90$ (10倍)

$$\sigma_x \text{ も 10 倍になるので、 } r = \frac{10 \times \sigma_{xy}}{10 \times \sigma_x \times \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

こたえ 共分散は10倍の90になる。相関係数は変わらず0.9

じぶんでとこう6

じぶんでとこう4・5の5つの組で、 y を全部100倍にします(y をm単位からcm単位にしたと考える)。共分散と相関係数は、それぞれいくつになりますか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

「速い」と「タイムが短い」の向き

身長と 50m 走のタイムで、背の高い人ほど速い傾向があるとき

✗ 背が高いほど速いので、正の相関

○ 背が高いほどタイムは短い（小さい）ので、負の相関

相関の正・負は、表に書いてある数が大きくなるか小さくなるかで決めます。「速い」はタイムの数が小さいことです。

⚠ まちがえやすいところ

平均をひかずにかける

✗ 共分散 = $(x \times y)$ の平均

○ 共分散 = $((x - \bar{x}) \times (y - \bar{y}))$ の平均

例題 4 で $x \times y$ の平均を計算すると、3849 になります。身長も足も

いつも正なので、積はいつも正です。これでは区画の符号がわかりません。

偏差（平均からのずれ）をかけるから、右上・左下が正、左上・右下が負になるのです。

⚠ まちがえやすいところ

分散でわってしまう

やってみようのデータで、相関係数を求めるとき

✕ $r = -1.76 \div (75.8 \times 0.142) = -1.76 \div 10.76 = -0.16$

○ $r = -1.76 \div (8.706 \times 0.3768) = -1.76 \div 3.280 = -0.54$

わるのは、分散（偏差の2乗の平均）ではなく、その $\sqrt{\quad}$ の標準偏差 σ です。分散でわると、 r が -1 から 1 までにおさまらなくなることもあります。

⚠ まちがえやすいところ

r の大きさをくらべるとき

✕ $r = -0.9$ は、 $r = 0.5$ より小さいので、弱い相関

○ $|r| = 0.9$ は $|r| = 0.5$ より大きいので、 $r = -0.9$ のほうが強い相関
符号は向きを、符号をとった大きさは強さを表します。

⚠ まちがえやすいところ

相関がある=原因? $r = 0$ =関係なし?

✕ 強い相関があるので、一方がもう一方の原因だ

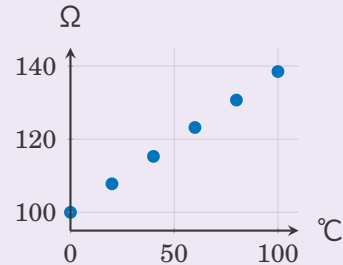
✕ $r = 0$ なので、2つの量には関係がない

○ 相関は因果関係とはかぎらない。 $r = 0$ でも、曲がった関係があることがある

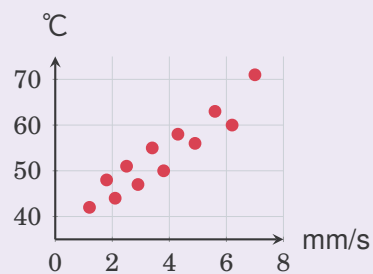
アイスと水の事故(⑤)、放物線の上の点(⑤)を思い出しましょう。

ぶつり 物理・工学ではこう使う

温度と電気抵抗：温度をはかるセンサー
 金属の電気抵抗 (2-15) は、温度が高いほど大きくなります。工場の温度計によく使われる白金の抵抗は、 0°C で 100Ω 、 1°C あがるごとに約 0.39Ω ずつふえます。温度を変えて抵抗をはかると、点は右上がりの直線にほぼぴったりのり、 r は 1.00 にとても近くなります。だから、抵抗をはかれば温度がわかるのです。



振動と温度：機械の健康診断
 工場のポンプやモーターには、ゆれの大きさ (振動) をはかるセンサーと、軸を支える部品 (軸受) の温度をはかるセンサーがついています。軸受がいたみ始めると、振動が大きくなり、こすれて温度も上がります。たくさんの機械のデータで散布図をかくと、正の相関が見えます (12 台で $r = 0.94$)。振動と温度がいっしょに上がっている機械は、こわれる前ぶれかもしれないので、早めに点検します。



物理・工学ではこう使う

気温と電気の使用量：あしたの電気を予想する

夏は、気温が高い日ほどエアコンを使うので、電気の使用量がふえます（正の相関）。電力会社は、天気予報の気温から、あしたの電気の使用量を予想して、発電所の運転を計画しています。相関を知っていると、一方から、もう一方を予想できるのです。どんな直線で予想すればよいかは、次の3-16で学びます。



章末問題

3-15 のまとめ

基本



1 6人の、1週間の家での勉強時間と、テストの点数です。散布図をノートにき、どんな相関があるかを答えましょう。

勉強時間 (時間)	2	4	5	7	8	10
点数 (点)	52	61	58	70	75	80

2 次の2つの量には、正の相関・負の相関・相関がない、のどれがあると考えられますか。(1) 走った道のりと、使ったエネルギー (2) 山の高さと、その気温 (同じ日の同じ時刻) (3) 生まれた月と、身長

3 5つの組 (x, y) が $(1, 9)$ 、 $(2, 7)$ 、 $(3, 6)$ 、 $(4, 4)$ 、 $(5, 4)$ です。共分散を求め、どんな相関があるかを答えましょう。

4 問題3の5つの組の相関係数 r を、小数第2位まで求めましょう。

5 ある2つの量 x 、 y の共分散は -1.5 、相関係数は -0.6 です。 x だけを全部10倍にすると、共分散と相関係数はいくつになりますか。

6 小学生の、1日の家での勉強時間と、むし歯の数のあいだに、正の相関がありました。「勉強するとむし歯になる」と言えますか。両方を大きくしている第3の量を考えましょう。

チャレンジ ★★★

7 4つの組 $(1, 4)$ 、 $(2, 7)$ 、 $(3, 10)$ 、 $(4, 13)$ の相関係数を求めましょう。点はどんな線の上にならんでいますか。

8 5つの組 $(1, 4)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(4, 1)$ 、 $(5, 4)$ の共分散を求めましょう。また、この5つの点はどんな式のグラフの上にありますか。「 x と y には関係がない」と言えますか。

9 5つの組 $(1, 2)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(4, 3)$ 、 $(5, 5)$ の相関係数 r を求め、相関の強さを表5の目安で答えましょう。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 散布図をかき、相関の向きと強さを見分けられる。 → 444 ページ
- ☐ 共分散を計算し、その符号の意味を説明できる。 → 448 ページ
- ☐ 相関係数 r を求め、相関と因果を区別できる。 → 452 ページ



デルタ

散布図の点に、いちばんよく合う直線を引いたら、片方からもう片方を予想できるね。次の章で、その直線の決め方を作るよ。

第4部 データと統計

★★★

3-16

データに直線を引く： 最小二乗法

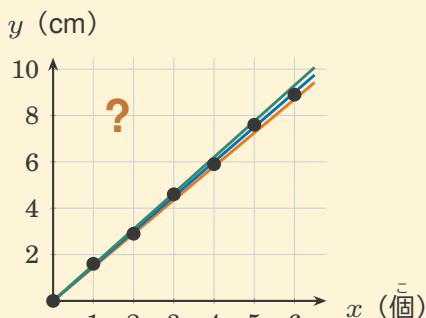
この章の先に 3-0 3-5 3-8 3-15 この章の先に 5-7 7-5

この章でできるようになること

- ★★★★ ずれ（残差）の2乗の和を計算して、どの直線がよく合うかをくらべられる。
- ★★★★ 原点を通る直線 $y = ax$ の a を、平方完成（3-8）で求められる。
- ★★★★ 直線 $y = ax + b$ の a と b を、共分散と分散から求め、残差で確かめられる。

? はてな？

3-0 で、ソラさんがはかったばねの点に、3本の直線を引きました。
 $y = 1.45x$ 、 $y = 1.5x$ 、 $y = 1.55x$ です。どの線も、点の近くを通ります。「目で見ても、だいたい」では、人によって引く線が変わってしまいます。だれが計算しても同じ1本に決まる、「いちばんよく合う直線」の決め方はあるでしょうか。3-0からの宿題です。



3-0では、ばねにおもりを下げて、のびをはかりました。表にして、点をかいて、定規で線を引くと、 $y = 1.5x$ という式ができました。でも、点は線の上にとびつたりしません。はかった数には、かならずずれがあるからです (2-6)。

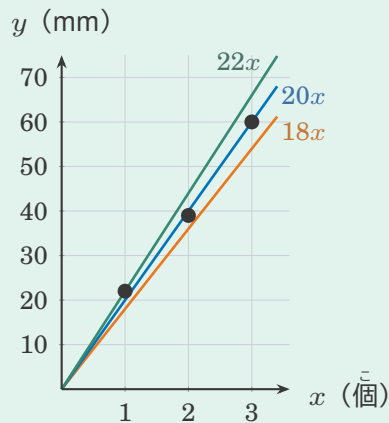
この章では、3-0の宿題に答えます。使う道具は3つです。ずれを2乗して数える考え方 (3-14の分散と同じ)、2次式の平方完成 (3-8)、そして共分散 (3-15) です。これまで学んだことが、1つにつながります。

△ やってみよう 線を引いて、ずれをはかろう

別のばね (ばね B) に、おもりを1個、2個、3個と下げて、のびを mm ではかりました。

おもり x (個)	1	2	3
のび y (mm)	22	39	60

- 1 方眼に3つの点をかこう。
- 2 3本の直線 $y = 18x$ 、 $y = 20x$ 、 $y = 22x$ を引こう。どれも原点を通ります。
- 3 それぞれの線について、点が線から上下にどれだけずれているかを、表にしよう。
- 4 どの線が、いちばんよく合っているかな? 「よく合う」を、数で言えるかな?



思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-0 ソラさんのばね：おもり 0~6 個で、のびは 0、1.6、2.9、4.6、5.9、7.6、8.9 cm。目で見て $y = 1.5x$ を引いた。

3-5 直線 $y = ax + b$ の a は傾き、 b は切片。点 (x_1, y_1) を通り傾き m の直線は $y - y_1 = m(x - x_1)$ 。

3-8 $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ 。平方完成： $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$ 。
3-8 の「もっと知りたい」では、点 $(1, 2.0)$ 、 $(2, 4.3)$ 、 $(3, 5.8)$ に $y = kx$ を引き、 $S = 14(k - 2)^2 + 0.13$ から $k = 2$ を決めた。

3-14 偏差 = 値 - 平均。偏差の 2 乗の平均が分散 σ^2 。

3-15 共分散 $\sigma_{xy} = (x \text{ の偏差} \times y \text{ の偏差}) \text{ の平均}$ 。



ソラ

3-0 では、線を引くたびに傾きが少しずつ変わったんだ。計算で 1 本に決まるなら、すっきりするね。

数学の道具

1 ずれを数で表す：残差と、その 2 乗の和

やってみようの線 $y = 20x$ で考えます。おもり 1 個のとき、線の上の値は $20 \times 1 = 20$ です。はかった値は 22 なので、点は線より $22 - 20 = 2$ だけ上にあります。このように、

$$\text{ずれ} = (\text{はかった値}) - (\text{線の値})$$

とします。点が線より上なら正、下なら負です。3 つの点のずれは、図 1 のようになります。

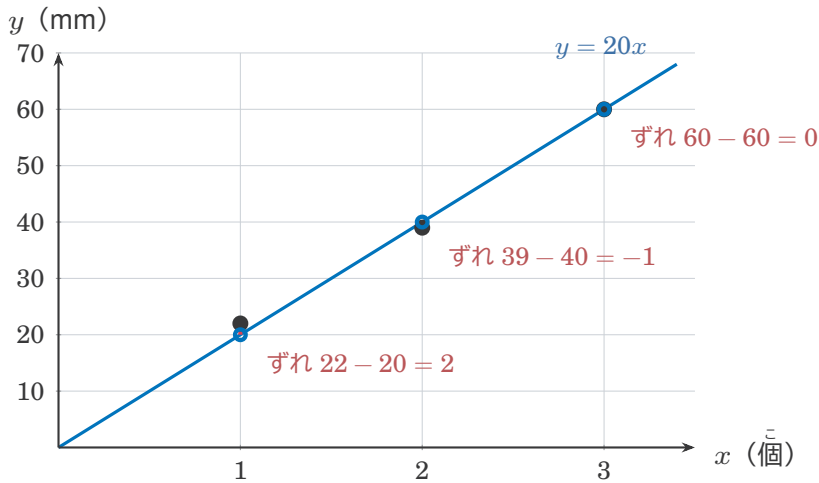


図1 黒い点ははかった値、白い丸は線の上の値。赤い線分がずれ。

なぜ、たてのずれ？ おもりの数 x は、自分で決めて下げるので、ずれはありません。ずれがあるのは、目もりを読んだのび y のほうです。だから、たての方向のずれを考えます。線からはみ出して残ったずれなので、これを残差ともいいます。

ためし1 ずれをそのままたすと？

$y = 20x$ のずれをたすと、 $2 + (-1) + 0 = 1$ です。小さいので、よく合っていそうです。でも、ずれをそのままたすやり方には、大きな落とし穴があります。図2を見ましょう。

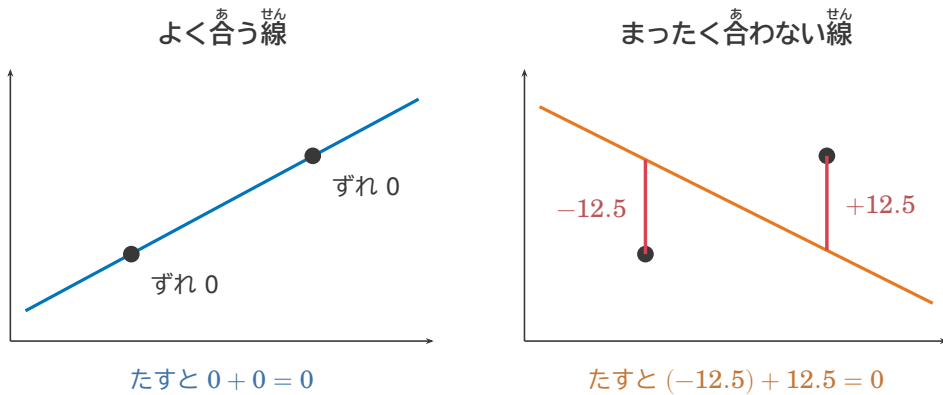


図2 ずれをそのままたすと、まったく合わない線でも0になることがある。

右の線は、点とは逆の向きにかたむいていて、まったく合っていません。それなのに、上へのずれ（+12.5）と下へのずれ（-12.5）が打ち消し合って、和は0になってしまいます。これでは、よい線と悪い線を見分けられません。

ためし2 ずれを2乗してからたす

そこで、3-14で分散を作ったときと同じように、**ずれを2乗してからたす**ます。2乗すると、負のずれも正になるので、打ち消し合いません。図2の右の線なら、 $(-12.5)^2 + 12.5^2 = 312.5$ と大きな数になり、「合っていない」ことがわかります。さらに、2乗すると大きなずれほどとても大きくなるので、1つの点から大きく外れた線は、きびしく評価されます。

この「ずれの2乗の和」を、この章では S と書くことにします。 S が小さいほど、線は点によく合っています。やってみようの3本の線で計算しましょう。

線	1個のずれ	2個のずれ	3個のずれ	S (2乗の和)
$y = 18x$	$22 - 18 = 4$	$39 - 36 = 3$	$60 - 54 = 6$	$16 + 9 + 36 = 61$
$y = 20x$	2	-1	0	$4 + 1 + 0 = 5$
$y = 22x$	$22 - 22 = 0$	$39 - 44 = -5$	$60 - 66 = -6$	$0 + 25 + 36 = 61$

表1 3本の線のずれと、ずれの2乗の和 S

3本の中では、 $S = 5$ の $y = 20x$ がいちばんよく合っています。では、 $y = 19.5x$ や $y = 20.3x$ のような線なら、もっと小さくなるかもしれません。 a をどんな数にしたら S がいちばん小さくなるかを、②で計算で決めます。

せいかくに言うと

ずれの大きさをくらべるには、2乗のかわりに、符号をとった大きさ（絶対値、3-2）をたす方法もあります。でも、絶対値の和をいちばん小さくする線は、かんたんな式では求められません。2乗の和なら、②・③のように平方完成で、ぴったり1つの答えが式で出せます。だから、ふつうは2乗の和を使います。

2 原点を通る直線 $y = ax$ ：平方完成で a を決める

ばねは、おもりが0個ならおのびも0です。だから、引く線は原点を通る $y = ax$ の形にします (2-15 の比例)。ばね B のデータで、 S がいちばん小さくなる a を、4つの段で求めましょう。

段1 いろいろな a で、 S を計算してみる

a を18から22まで1ずつ変えて、 S を計算します (計算のしかたは①の表と同じです)。

a	18	19	20	21	22
S	61	19	5	19	61

表2 a を変えたときの S

表を見ると、 $a = 20$ のまわりで S が左右対称に変わっています。グラフにすると、図3のように、上に開いた放物線 (3-9、谷の形) にならびます。いちばん低い点は、 $a = 20$ のあたりにありそうです。

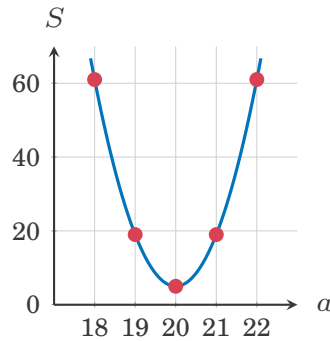


図3 いちばん低いのは $a = 20$ で、 $S = 5$ 。

段2 a を文字のまま、 S を式にする

1個めの点のずれは $22 - a \times 1$ です。その2乗を、3-8の式

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

で展開します。 $A = 22$ 、 $B = a \times 1$ と考えると、

$$(22 - a \times 1)^2 = 22^2 - 2 \times a \times (1 \times 22) + a^2 \times 1^2$$

どの点でも、 $(y - ax)^2 = y^2 - 2axy + a^2x^2$ の形です。 y^2 、 xy 、 x^2 を表にして、たてにたします。

x	y	x^2	xy	y^2
1	22	1	22	484
2	39	4	78	1521
3	60	9	180	3600
ごうけい 合計		14	280	5605

表3 S を式にするための表

3つの点の $(y - ax)^2$ をたすと、 a^2 の項・ a の項・数の項に分けて集められます。

$$S = (y^2 \text{ の和}) - 2a \times (xy \text{ の和}) + a^2 \times (x^2 \text{ の和})$$

表の合計を入れると、

$$\begin{aligned} S &= 5605 - 2a \times 280 + a^2 \times 14 \\ &= 14a^2 - 560a + 5605 \end{aligned}$$

S は a の2次式です。段1の表で、放物線の形にならんだのはこのためです。

段3 平方完成する (3-8)

a^2 の係数14で、 a をふくむ2つの項をくくります(3-8の「共通因数でくくる」)。

$$S = 14(a^2 - 40a) + 5605$$

かっこの中を平方完成します。 $a^2 - 40a$ は、 $(a - 20)^2 = a^2 - 40a + 400$ より400だけ小さいので、

$$a^2 - 40a = (a - 20)^2 - 400$$

これを入れて、

$$\begin{aligned} S &= 14\{(a-20)^2 - 400\} + 5605 \\ &= 14(a-20)^2 - 5600 + 5605 \\ &= 14(a-20)^2 + 5 \end{aligned}$$

いちばん小さくなるのはどこ？ $(a-20)^2$ は 2 乗なので、0 以上です。0 になるのは $a=20$ のときだけです。だから S は、 $a=20$ のときにいちばん小さく、そのときの値は $14 \times 0 + 5 = 5$ です。段 1 の表やグラフとぴったり合います。 $a=19.5$ なら $14 \times 0.25 + 5 = 8.5$ 、 $a=20.3$ なら $14 \times 0.09 + 5 = 6.26$ で、どちらも 5 より大きくなります。

段 4 いつでも使える形にする

段 2・段 3 を、どんなデータでもできるように文字で書きます。 x^2 の和を P 、 xy の和を Q 、 y^2 の和を R とすると、段 2 と同じように $S = Pa^2 - 2Qa + R$ です。段 3 と同じように平方完成すると、

$$\begin{aligned} S &= P\left(a^2 - \frac{2Q}{P}a\right) + R \\ &= P\left(a - \frac{Q}{P}\right)^2 + R - \frac{Q^2}{P} \end{aligned}$$

S がいちばん小さくなるのは、かつこの中が 0 になる $a = \frac{Q}{P}$ のときです。

たいせつ

原点を通る直線 $y = ax$ で、ずれの 2 乗の和をいちばん小さくする a は

$$a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和})$$

ばね B なら $a = 280 \div 14 = 20$ で、段 3 と同じです。3-8 の「もっと知りたい」の 3 点なら、 x^2 の和 14、 xy の和 28.0 で、 $28.0 \div 14 = 2$ です (3-8 では傾きを k と書きました)。この式は覚えなくても、段 2・段 3 の平方完成をすれば、いつでも作れます。

このように、ずれの2乗の和をいちばん小さくして直線を決める方法を、**最小二乗法**といいます。「二乗」は2乗のことで、「2乗の和を最小にする方法」という意味の名前です。

3-0の宿題の答え

？はてな？の答えを出しましょう。ソラさんのデータで、 x^2 と xy を表にします ($x = 0$ の列は、 x^2 も xy も 0 なので省きます)。

x	1	2	3	4	5	6	ごうけい 合計
y	1.6	2.9	4.6	5.9	7.6	8.9	
x^2	1	4	9	16	25	36	91
xy	1.6	5.8	13.8	23.6	38.0	53.4	136.2

表4 3-0のソラさんのデータ

$$a = 136.2 \div 91 = 1.4967 \dots$$

いちばんよく合う直線は、 $y = 1.497x$ 、およそ $y = 1.50x$ です。3-0でソラさんが目で見て引いた $y = 1.5x$ は、ほぼ最小二乗法の答えと同じでした。3本の線の S をくらべると、 $y = 1.45x$ は 0.258、 $y = 1.5x$ は 0.060、 $y = 1.55x$ は 0.318 で、 $y = 1.5x$ がいちばん小さくなります (最小二乗法の $y = 1.497x$ では 0.059)。だれが計算しても、同じ1本 $y = 1.497x$ に決まります。これで、宿題の答えが出ました。

ばね定数も求められる 3-0のおもりは1個 20g で、重さは約 0.2N です (100g で約 1N、2-15)。1個あたり 1.497cm のびるので、

$$1.497 \text{ cm} \div 100 \text{ cm/m} = 0.01497 \text{ m}, \quad k = \frac{0.2 \text{ N}}{0.01497 \text{ m}} = 13.4 \text{ N/m}$$

ソラさんのばねのばね定数は、約 13 N/m です (2-15 の $F = kx$)。

3 原点を通らない直線 $y = ax + b$ ：共分散 ÷ 分散

こんどは、のびではなく、ばねの**全体の長さ**をはかった場合です。全体の長さは、おもりが0個でも、もとの長さがあるので、比例しません（2-15のまちがえやすいところ）。線は $y = ax + b$ の形で、 a と b の2つを決めます。ばねCのデータです。

おもり x (個)	1	2	3	4	5
長さ y (cm)	14.0	15.9	18.1	20.1	21.9

表5 ばねCの全体の長さ。平均は $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 90.0 \div 5 = 18.0$

段1 傾きを決めると、いちばんよい b は「平均」

まず、傾きを $a = 2$ と決めたとして、いちばんよい b を探します。ずれは $y - (2x + b) = (y - 2x) - b$ です。 $y - 2x$ を計算すると、

$$14.0 - 2 = 12.0, \quad 15.9 - 4 = 11.9, \quad 18.1 - 6 = 12.1,$$

$$20.1 - 8 = 12.1, \quad 21.9 - 10 = 11.9$$

です。この5つの数から b をひいて2乗した和を、いちばん小さくすればよいのです。②と同じように展開して平方完成すると（5つの数の和は60、2乗の和は720.04）、

$$\begin{aligned} S &= 5b^2 - 2 \times 60 \times b + 720.04 \\ &= 5(b^2 - 24b) + 720.04 \\ &= 5\{(b - 12)^2 - 144\} + 720.04 \\ &= 5(b - 12)^2 - 720 + 720.04 = 5(b - 12)^2 + 0.04 \end{aligned}$$

となり、 $b = 12$ のとき S はいちばん小さくなります。12は、5つの数12.0、11.9、12.1、12.1、11.9の**平均**です。

これは、いつでも成り立ちます。いちばんよい b は「 $y - ax$ の平均」、つまり $\bar{y} - a\bar{x}$ です。 $b = \bar{y} - a\bar{x}$ を $y = ax + b$ に入れると、 $x = \bar{x}$ のとき

$y = a\bar{x} + \bar{y} - a\bar{x} = \bar{y}$ です。つまり、いちばんよい直線は、平均の点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通ります (図4)。

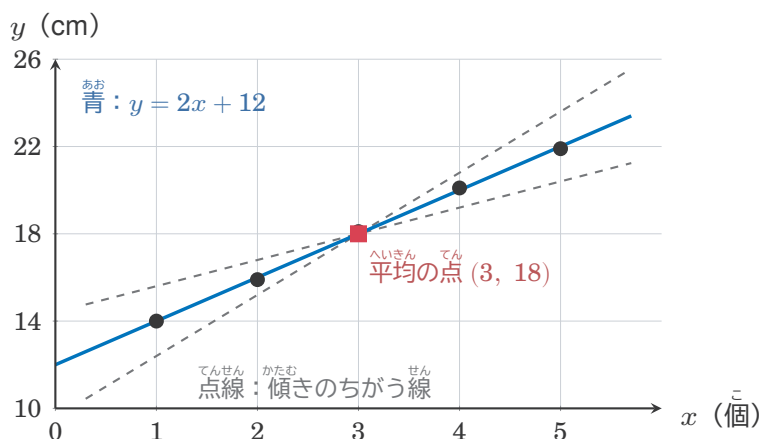


図4 よい線は、平均の点を中心に回して探せばよい。点線も平均の点を通るが、傾きが合っていない。

段2 平均の点を通る線で、傾きを決める

平均の点 $(3, 18)$ を通り、傾き a の直線は、3-5 の点と傾きの式で

$$y - 18 = a(x - 3)$$

です。ずれは $(y - 18) - a(x - 3)$ 。これは「 y の偏差」 $-a \times$ 「 x の偏差」です (3-14)。偏差を表にします。

x の偏差	y の偏差	x の偏差の2乗	偏差の積	y の偏差の2乗
-2	-4.0	4	8.0	16.00
-1	-2.1	1	2.1	4.41
0	0.1	0	0	0.01
1	2.1	1	2.1	4.41
2	3.9	4	7.8	15.21
ごうけい 合計		10	20.0	40.04

表6 ばねCの偏差

②の段2と同じように展開すると（ y のかわりに y の偏差、 x のかわりに x の偏差）、

$$S = 10a^2 - 2 \times 20 \times a + 40.04 = 10(a - 2)^2 + 0.04$$

で、 $a = 2$ のときいちばん小さくなります。

段3 共分散と分散で書く

段2の a は、（偏差の積の和） $\div$ （ x の偏差の2乗の和） $= 20 \div 10 = 2$ です。分子と分母を両方とも人数5でわっても、答えは変わりません。すると、分子は偏差の積の平均、つまり共分散 σ_{xy} (3-15)、分母は x の偏差の2乗の平均、つまり x の分散 σ_x^2 (3-14) になります。

たいせつ

$y = ax + b$ で、**ずれの2乗の和をいちばん小さくする a と b は**

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad (\text{共分散} \div x \text{ の分散}) \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

いちばんよい直線は、平均の点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る。

ばねCでは、 $\sigma_{xy} = 20 \div 5 = 4$ 、 $\sigma_x^2 = 10 \div 5 = 2$ で $a = 4 \div 2 = 2$ 、 $b = 18 - 2 \times 3 = 12$ 。だから $y = 2x + 12$ です。 $b = 12$ は、おもりが0個のときの長さ、つまりばねのもとの長さが約12cm だということです。はかっていない0個のときの長さまで、直線からわかりました。

このように最小二乗法で求めた直線を、**回帰直線**ともいいます。3-15のコラムのゴルトンがつけた名前です。

3-0の表計算の式のなぞ

3-0では、表計算が $y = 1.4893x + 0.0321$ という式を出しました。これは、原点を通ると決めずに、 $y = ax + b$ で最小二乗法をした答えです。ソラさんのデータは、 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 31.5 \div 7 = 4.5$ 、偏差の積の和が41.7、 x の偏差の2乗の和が28なので、

$$a = 41.7 \div 28 = 1.4893 \dots, \quad b = 4.5 - 1.4893 \times 3 = 0.0321 \dots$$

ぴったり合いました。表計算の中でも、この章と同じ計算をしていたのです。
表計算では、 $=\text{SLOPE}(\text{B2:B8}, \text{A2:A8})$ で傾き、 $=\text{INTERCEPT}(\text{B2:B8}, \text{A2:A8})$ で
切片を求められます（はじめに y の範囲、次に x の範囲）。

どちらの式を使う？ ②の $y = 1.497x$ と、この $y = 1.4893x + 0.0321$ は、
少しちがいます。おもりが0個ならのは0、という物理のきまりを知っている
なら、原点を通る $y = ax$ を使います。もとの長さのように、0個のときの値が
わからないなら、 $y = ax + b$ を使います。どちらの形の式を使うかは、数学で
はなく、しくみの理解で決めるのです。

4 残差を見て、直線でよいか確かめる

最小二乗法は、どんなデータにも、いちばん合う直線を1本出してくれます。
点が曲がってならんでも、直線を出してしまいます。だから最後に、残差
(ずれ) のならび方を見て、直線でよいかを確かめます。

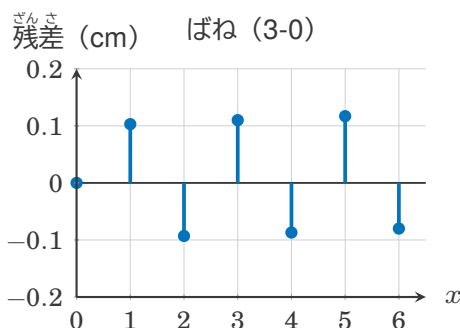


図5 0のまわりに、+と-がまざる。

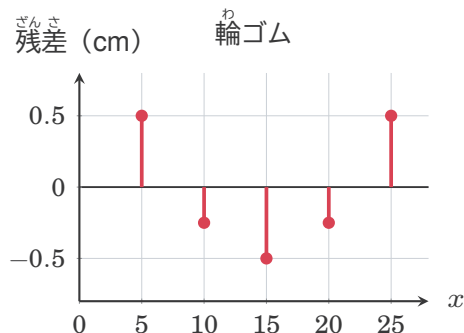


図6 +、-、-、-、+の谷の形。

図5は、3-0のソラさんのデータと $y = 1.497x$ の残差です。どれも0.12 cm
より小さく、+と-がまざって、きまったならび方がありません。これは、
はかるときの小さなずれ(2-6)だと考えられます。直線でよいということです。

図6は、3-0のやってみようの輪ゴムで、10円玉を5まい、10まい、…
と入れたときののび(1.0、2.0、3.5、5.5、8.0 cm)に、最小二乗法で直線
 $y = 0.35x - 1.25$ を引いたときの残差です。両はしが+、まん中が-の、谷の
形になっています。点が直線ではなく、曲がったきまりにしたがっているしる

しです。輪ゴムは、のびるにつれてのび方が変わるのでした (3-0)。このようなときは、直線ではなく、曲がった式を考えます (第2部の3-7~3-10)。

たいせつ

残差が、0のまわりに小さく、+と-がばらばらにならば → 直線でよい
 残差が、山や谷の形にならば → 曲がった関係。直線は合わない
 残差が1つだけとても大きい → はかりまちがいでないか、確かめる

🔍 もっと知りたい ★★★

微分で最小を求める (5-7)

②では、 S がいちばん小さくなる a を、平方完成で求めました。第5巻の5-7では、「グラフのいちばん低い点では、グラフの傾きが0になる」ことを使って、いちばん小さい所を求める方法 (微分) を学びます。 a と b の2つを同時に決めるときも、たくさんの式を同時に解けば求められます (行列、7-5)。

曲がったデータも、直線にして最小二乗法 (3-12)

放射性物質の量や、冷めていくお湯の温度差のように、倍々でへるデータ (3-11) は、たての軸の目もりを片対数グラフ (3-12) にすると、点が直線にならびます。その直線に最小二乗法を使えば、半分になる時間などを、データから決められます。

📖 この章で出てきたことば

残差 はかった値 - 直線の値。点が直線から上下にずれた大きさ。

最小二乗法 ずれ (残差) の2乗の和がいちばん小さくなるように、直線を決める方法。

回帰直線 最小二乗法で求めた直線。平均の点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る。

例題でたしかめよう

例題1 ずれの2乗の和で、2本の線をくらべる

3つの点^{てん} (1, 3)、(2, 4)、(3, 7)があります。直線^{ちよくせん} $y = 2x$ と $y = 2.5x$ のどちらがよく合っているかを、ずれの2乗の和^{じょう わ} S でくらべましょう。

考え方 ^{かんが} それぞれの x で「はかった値^{あたい} - 線の値^{せん}」を計算^{けいさん}し、2乗^{じょう}してたします。 S が小さい^{ちい}ほうが、よく合^あっています。

しき $y = 2x$: ずれは $3 - 2 = 1$ 、 $4 - 4 = 0$ 、 $7 - 6 = 1$

$$S = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$

$y = 2.5x$: ずれは $3 - 2.5 = 0.5$ 、 $4 - 5 = -1$ 、 $7 - 7.5 = -0.5$

$$S = 0.25 + 1 + 0.25 = 1.5$$

こたえ $y = 2.5x$ のほうがよく合^あっている (S が 2 と 1.5 で、1.5 のほう^{ちい}が小さい)

コラム 最小二乗法^{さいしょうにじょうほう}で、星^{ほし}を見つけた

1801年^{ねん}のお正月^{しょうがつ}、イタリアの天文学者^{てんもんがくしゃ}が、火星^{かせい}と木星^{もくせい}のあいだに新しい星^{ほし} (小惑星^{しょうわくせい} ケレス) を見つけました。ところが星^{ほし}はすぐ^{たいよう}に太陽のまぶしさにかくれ、見えなくなりました。はかった位置^いには少しずつずれがあり、どこにもどってくるのか、だれにもわかりませんでした。

ドイツの若い数学者^{わか すうがくしゃ} ガウスは、ずれのあるデータから「ずれの2乗^{じょう}の和^わがいちばん小さくなる道^{ちい}すじ^{みち}」を計算^{けいさん}して、星^{ほし}がもどってくる場所^{ばしょ}を予想^{よそう}しました。その年^{ねん}の終わり、望遠鏡^{ぼうえんきょう}を向けると、ケレスはほぼ予想^{よそう}どおりの場所^{ばしょ}に見つかりました。こうして最小二乗法^{さいしょうにじょうほう}は、世界^{せかい}に知られるようになりました。

 例題 2 原点を通る直線の a を、平方完成で求める

3つの点 (1, 4)、(2, 7)、(3, 8) に直線 $y = ax$ を引きます。ずれの 2 乗の和 S を a の式にして平方完成し、 S がいちばん小さくなる a を求めましょう。

考え方 x^2 、 xy 、 y^2 の和を求めて、②の段 2 と同じように

$$S = (x^2 \text{ の和}) a^2 - 2 (xy \text{ の和}) a + (y^2 \text{ の和})$$

を作ります。

しき x^2 の和は 14、 xy の和は $4 + 14 + 24 = 42$ 、 y^2 の和は $16 + 49 + 64 = 129$

$$\begin{aligned} S &= 14a^2 - 84a + 129 \\ &= 14(a^2 - 6a) + 129 \quad 14 \text{ でくくる} \\ &= 14\{(a-3)^2 - 9\} + 129 \quad a^2 - 6a = (a-3)^2 - 9 \\ &= 14(a-3)^2 + 3 \end{aligned}$$

こたえ $a = 3$ (そのとき $S = 3$ でいちばん小さい)。確かめ： $42 \div 14 = 3$

 じぶんでこう 1

3つの点 (1, 2)、(2, 5)、(3, 6) があります。直線 $y = 2x$ と $y = 2.5x$ のどちらがよく合っているかを、ずれの 2 乗の和でくらべましょう。

 じぶんでこう 2

3つの点 (1, 3)、(2, 5)、(3, 5) に $y = ax$ を引きます。 S を a の式で表して平方完成し、 S がいちばん小さくなる a を求めましょう。

例題3 公式で a を求めて、ばね定数を出す

ばねをひく力 x (N) と、のび y (cm) をはかりました。原点を通る直線 $y = ax$ を最小二乗法で求め、ばね定数 k (N/m) を求めましょう。

力 x (N)	1	2	3	4
のび y (cm)	2.2	3.9	6.0	8.0

考え方 $a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和})$ で、 a は「1N あたり何 cm のびるか」です。ばね定数は「1m のばすのに何 N いるか」なので、cm を m に直してから、わり算の向きを逆にします (2-15)。

しき x^2 の和 : $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

xy の和 :

$$2.2 + 7.8 + 18.0 + 32.0 = 60.0$$

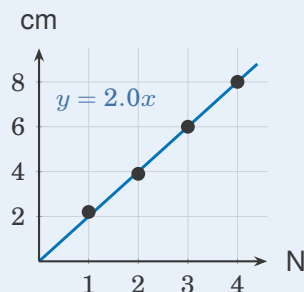
$$a = 60.0 \div 30 = 2.0$$

1N で 2.0 cm のびる

$$2.0 \text{ cm} \div 100 \text{ cm/m} = 0.020 \text{ m}$$

$$k = 1 \text{ N} \div 0.020 \text{ m} = 50 \text{ N/m}$$

こたえ $y = 2.0x$ 、ばね定数は 50 N/m



じぶんでこう3

力 x (N) が 1、2、3、4 のとき、のび y (cm) は 4.2、7.9、12.0、16.0 でした。原点を通る直線 $y = ax$ を最小二乗法で求め、ばね定数を求めましょう。

例題 4 直線 $y = ax + b$ を、共分散と分散で求める

あるばねの、おもりの数 x 個と、全体の長さ y [cm] です。最小二乗法で直線 $y = ax + b$ を求め、ばねのものの長さを答えましょう。

おもりの数 x (個)	1	2	3	4	5
長さ y (cm)	5.1	6.7	7.9	9.7	11.1

考え方 平均→偏差→偏差の積と x の偏差の2乗→共分散と分散、の順に計算します。 $a = \sigma_{xy} \div \sigma_x^2$ 、 $b = \bar{y} - a\bar{x}$ です。

しき $\bar{x} = 15 \div 5 = 3$ 、 $\bar{y} = 40.5 \div 5 = 8.1$

x の偏差：-2、-1、0、1、2

y の偏差：-3.0、-1.4、-0.2、1.6、3.0

偏差の積：6.0、1.4、0、1.6、6.0 で、和は 15.0

x の偏差の2乗：4、1、0、1、4 で、和は 10

$\sigma_{xy} = 15.0 \div 5 = 3.0$ 、 $\sigma_x^2 = 10 \div 5 = 2$ 、 $a = 3.0 \div 2 = 1.5$

$b = 8.1 - 1.5 \times 3 = 3.6$

こたえ $y = 1.5x + 3.6$ 。ものの長さ ($x = 0$ のとき) は約 3.6 cm

じぶんでこう 4

おもりの数 x が 1~5 のとき、ばねの長さ y [cm] は 14.0、15.9、18.1、20.1、21.9 でした。直線 $y = ax + b$ を最小二乗法で求めましょう (③のばね C)。

例題5 残差を計算して、直線でよいか調べる

5つの点(1, 2.0)、(2, 2.5)、(3, 3.5)、(4, 5.0)、(5, 7.0)に、最小二乗法で直線を引くと $y = 1.25x + 0.25$ になりました。残差を計算し、この直線でよいかを答えましょう。

考え方 残差 = はかった値 - 線の値です。ならば方が「ばらばら」か「山や谷の形」かを見ます。

しき 線の値 : $1.25 \times 1 + 0.25 = 1.5$ 、2.75、4.0、5.25、6.5

残差 : $2.0 - 1.5 = 0.5$ 、 $2.5 - 2.75 = -0.25$ 、 $3.5 - 4.0 = -0.5$ 、
 $5.0 - 5.25 = -0.25$ 、 $7.0 - 6.5 = 0.5$

こたえ 残差の符号は+、-、-、-、+で、谷の形。直線は合っていない(点は曲がったきまりにしたがう)

例題6 直線で予想する

例題4 の直線 $y = 1.5x + 3.6$ で、(1) おもりの重さをつるしたときの長さ、(2) おもりの個をつるしたときの長さを予想しましょう。(2) の予想は、信用してよいですか。

考え方 x に代入します(2-13)。はかった範囲(1~5個)の外の予想は、外挿といって危ないことを思い出しましょう(3-4)。

しき (1) $y = 1.5 \times 3.5 + 3.6 = 5.25 + 3.6 = 8.85$

(2) $y = 1.5 \times 40 + 3.6 = 60 + 3.6 = 63.6$

こたえ (1) 約 8.9 cm (2) 計算では約 64 cm。でも、はかったのは5個までなので信用できない。ばねは引きすぎると、のびが比例しなくなる(3-0)

じぶんでとこう 5

5 つの点 (1, 3.1)、(2, 4.8)、(3, 7.2)、(4, 8.8)、(5, 11.1) に、最小二乗法で直線 $y = 2x + 1$ をひきました。残差を計算し、この直線でよいかを答えましょう。

じぶんでとこう 6

じぶんでとこう 4 の直線 $y = 2x + 12$ で、(1) おもひ 2.5 個分、(2) おもひ 30 個をつるしたときの長さの予想をしよう。(2) は信用してよいですか。

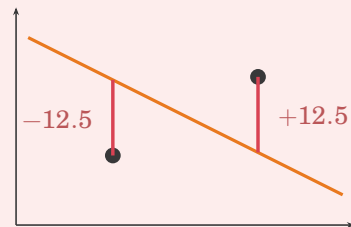
ましがえやすいところをチェック

ましがえやすいところ

ずれの和が 0 なら、いちばんよい？

✗ ずれをたすと 0 になったので、この線がいちばん合っている

○ ずれは 2 乗してからたして、その和がいちばん小さい線をさがす
上へのずれと下へのずれは打ち消し合います。まったく合わない線でも、ずれの和が 0 になることがあります (図 2)。右の線なら、ずれは -12.5 と $+12.5$ で和は 0 ですが、2 乗の和は $156.25 + 156.25 = 312.5$ と大きく、合っていないことがわかります。



⚠ まちがえやすいところ

$(y - ax)^2$ の展開

✗ $(y - ax)^2 = y^2 - a^2x^2$

○ $(y - ax)^2 = y^2 - 2axy + a^2x^2$

3-8 の $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ のまん中の $-2AB$ をわすれないこと。
 $y = 4$ 、 $a = 3$ 、 $x = 1$ なら $(4 - 3)^2 = 1$ ですが、まちがいの式では $16 - 9 = 7$ になります。

⚠ まちがえやすいところ

a を「 $y \div x$ の平均」で求める

例題2 の3つの点で

✗ $y \div x$ は4、3.5、2.67...なので、平均して $a = 3.39$

○ $a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和}) = 42 \div 14 = 3$

$a = 3.39$ では $S = 14 \times 0.39^2 + 3 = 5.1 \dots$ で、 $a = 3$ の $S = 3$ より大きくなります。

⚠ まちがえやすいところ

傾きを、相関係数の式で求める

✗ $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

○ $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ (分母は x の分散)

共分散を $\sigma_x \sigma_y$ でわると相関係数 r (3-15) で、単位のない数です。傾きには、cm/個のような単位があります。

物理・工学ではこう使う

計器の校正：圧力をはかる伝送器

工場では、配管の中の圧力を「伝送器」

という計器ではかり、0～100 kPa を

4～20 mA の電流に直して、遠くの制

御室へ送ります。計器が正しいかを

確かめるには、正確な圧力を加えて、

出てくる電流をはかります（校正）。

グラフの5点に最小二乗法を使うと、

$y = 0.15976x + 4.014$ になりました。

決められた $y = 0.16x + 4$ とほぼ同じ

で、残差も最大 0.034 mA と小さいので、

合格です。残差が山や谷の形なら、計器

の目もりが直線からずれている（直線性

が悪い）しるしです。

鉄のかたさ：ヤング率

鉄の棒を引っばると、ほんの少しのびます。「1 mm² あたりの力（応力）」

と、「もとの長さに対するのびの割合（ひずみ）」は比例し、その比例定数

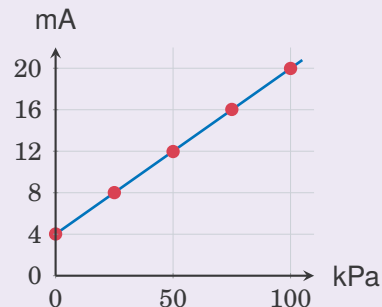
をヤング率といいます。ひずみが 0.0005、0.0010、0.0015、0.0020 のと

き、応力が 101、199、302、398 N/mm² だった実験に、原点を通る直線

の最小二乗法を使うと、傾きは約 200000 N/mm² になります。鉄のヤン

グ率として知られている値です。橋やビルの設計は、こうして実験から決

めた数をもとにしています。



物理・工学ではこう使う

気温から、あしたの電気を予想する

3-15 では、夏の気温と電気の使用量に正の相関があることを見ました。
ある地域の10日分のデータ（最高気温 27～36℃）に最小二乗法を使う
と、「最高気温が1℃上がると、最大電力が約 69 万 kW ふえる」という
回帰直線が得られます。天気予報の気温をこの直線に入れば、あしたの
電気の使用量を予想して、発電所の準備ができるのです。



章末問題

3-16 のまとめ

基本



- 3つの点 (1, 1)、(2, 3)、(3, 4) があります。直線 $y = x$ と $y = 1.5x$ のどちらがよく合っているかを、ずれの2乗の和でくらべましょう。
- 3つの点 (1, 5)、(2, 9)、(3, 11) に $y = ax$ を引きます。ずれの2乗の和 S を a の式で表して平方完成し、 S がいちばん小さくなる a を求めましょう。
- 力 x (N) が 1、2、3、4 のとき、ばねののび y (cm) は 1.2、1.9、3.0、4.0 でした。原点を通る直線 $y = ax$ を最小二乗法で求め、ばね定数を求めましょう。
- 5つの点 (1, 2.1)、(2, 2.8)、(3, 4.2)、(4, 4.8)、(5, 6.1) に、最小二乗法で直線 $y = ax + b$ を引きましょう。
- 5つの点 (1, 0.5)、(2, 1.0)、(3, 2.0)、(4, 3.5)、(5, 5.5) に、最小二乗法で直線を引くと $y = 1.25x - 1.25$ になりました。残差を計算し、この直線での誤差を答えましょう。

6 問題 4 の直線で、 $x = 2.5$ と $x = 50$ のときの y を予想しましょう。 $x = 50$ の予想は信用してよいですか。

チャレンジ ★★★

7 3-0 のソラさんのデータ（おもり 0～6 個、のび 0、1.6、2.9、4.6、5.9、7.6、8.9 cm）で、原点を通る直線 $y = ax$ を最小二乗法で求めましょう。おもり 1 個は約 0.2 N として、ばね定数を求めましょう。

8 圧力計の校正で、0、50、100 kPa を加えると、出てくる電流は 4.0、12.1、19.9 mA でした。最小二乗法で直線 $y = ax + b$ を求めましょう（ x は kPa、 y は mA）。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ ずれの 2 乗の和で、どの直線がよく合うかくらべられる。

→ 476 ページ

☐ $y = ax$ の a を、平方完成で求められる。

→ 479 ページ

☐ $y = ax + b$ を共分散と分散で求め、残差で確かめられる。

→ 483 ページ



デルタ

はかった点はいつもずれる。ずれの正体が「偶然のばらつき」なら、どんな形にちらばるのかな？ 次の章で調べよう。

第4部 データと統計

★★★

3-17

偶然のばらつき：
確率と正規分布

この章の先に 2-5 3-13 3-14 この章の先に 5-17 9-4

この章でできるようになること

- ★★ 表や樹形図で場合を数えて、確率 $P(A)$ と期待値を求められる。
- ★★★ コイン n 枚で表が k 枚になる場合の数を、パスカルの三角形で求められる。
- ★★★ たくさん足すとつりがね形（正規分布）になることを知り、平均 $\pm\sigma$ に約 68%、 $\pm 2\sigma$ に約 95% を使える。

? はてな？

サイコロ 1 個では、1 から 6 のどの目も同じくらい出ます（グラフは平ら）。では、2 個、3 個、10 個とふって、目を足すと？ 足した数をたくさん記録すると、右のように、まん中が高いつりがねの形になっていきます。平らなものを足すと、なぜ山になるのでしょうか。



2-6・3-13・3-14 では、はかった数には「ずれ」があり、何回もはかるとちらばることを学びました。ずれの大きさは、標準偏差 σ で表せました。この章では、そのずれの正体である「偶然」を、数で考えます。

偶然に起きることは、1回1回は予想できません。コインを投げて表が出るか裏が出るかは、投げるまでわかりません。ところが、たくさんくり返すと、きまりが見えてきます。そのきまりを表す数が、確率です。この章の最後には、3-14 で出てきた「平均 $\pm\sigma$ にだいたい7割」の「7割」が、どこから来るのかもわかります。

なお、この章では「ほぼ等しい」を表す記号 $\approx$ を使います（くわしくは5-8）。たとえば $\frac{1}{3} \approx 0.33$ です。

△ やってみよう コインを何回も投げて、表の割合を調べよう

- ① 10 円玉を 1 枚投げて、表（平等院の絵がある面）か裏かを記録しよう。
- ② 10 回、20 回、50 回、100 回投げたところで、「表が出た回数 ÷ 投げた回数」を計算しよう（表の割合、2-5）。
- ③ 表計算なら、A 列に `=RANDBETWEEN(0,1)` と入れて 1000 行コピーすると、0 か 1 が出ます。1 を表として、1000 回分を一度にためせます（2-18）。
- ④ 投げる回数をふやすと、表の割合はどうなっていくかな？

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-5** 割合 = くらべる量 ÷ もとにする量。たとえば20回中12回なら $12 \div 20 = 0.6$
- 2-7** 同じ数をくり返しかけるのが累乗。 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 、 $2^{10} = 1024$
- 3-13** 度数 ÷ 合計の数 = 相対度数。ヒストグラムで、データのちらばりを見る。
- 3-14** 標準偏差 σ = 偏差の2乗の平均（分散、 n でわる）の $\sqrt{\quad}$ 。平均 $\pm\sigma$ に、データのだいたい7割が入る。



ミナ

10回投げたら表が7回も出たよ。コインがかたよっているのかな？

数学の道具

1 たくさんくり返すと、割合が落ち着く

ソラさんとミナさんが、表計算でコインを1000回ずつ投げました。投げた回数ごとに、それまでの表の割合をグラフにすると、図1のようになりました。

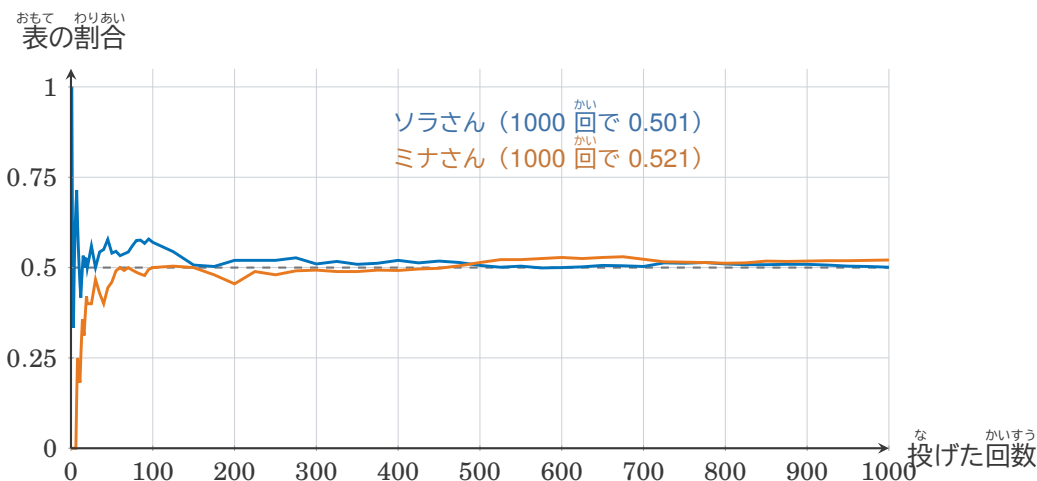


図1 表の割合の変わり方。はじめは大きくゆれるが、回数がふえると0.5の近くに落ち着く。

はじめの 10 回くらいまでは、割合は大きくゆれます。ミナさんは、はじめに 6 回続けて裏が出たので、割合は 0 でした。でも、何百回と投げていくと、2 人とも割合が 0.5 の近くに落ち着いていきます。1 回 1 回はでたらめなのに、たくさんくり返すと、割合はある数に近づくのです。

このように、たくさんくり返したときに割合が近づいていく数を、そのことから起こる**確率**といいます。コインの表が出る確率は 0.5、つまり $\frac{1}{2}$ です。実験で、くり返した回数から求める確率なので、**統計的な確率**ともいいます。

画びょうの確率 画びょうを投げると、針が上を向く「上向き」と、横にたおれる「横向き」があります。形が左右で同じではないので、どちらが出やすいかは、考えるだけではわかりません。実験するしかありません。

投げた回数	100	200	500	1000	2000
上向きの回数	66	127	309	621	1238
上向きの割合	0.660	0.635	0.618	0.621	0.619

表 1 画びょうを投げた結果（ある 1 つの画びょう）

割合は 0.62 くらいに落ち着いています。この画びょうが上向きになる確率は、およそ 0.62 と考えられます。2000 回投げたあとで、もう 1000 回投げるなら、上向きはおよそ $1000 \times 0.62 = 620$ 回と予想できます。

❓ はてな？ に向けて：ミナさんの「10 回で表が 7 回」も、ふしぎなことではありません。10 回くらいでは、割合は大きくゆれるからです。どのくらいゆれるのかは、③・⑤で計算します。

コラム 天気予報の「降水確率 30%」

天気予報の「あしたの降水確率は 30%」は、どんな意味でしょう。「あしたは、1 日のうち 30% の時間だけ雨がふる」でも、「30% の地域で雨がふる」でもありません。

「今回と同じような天気図の日が、過去に 100 回あったとすると、そのうち約 30 回は、1mm 以上の雨がふった」という意味です。①の統計的な確率と同じ考え方で、たくさんの過去のデータの割合から決めています。30% なら、10 回のうち 3 回くらいは雨。かさを持っていくかどうかは、あなたが決めましょう。

2 場合を数えて、確率を求める

コインやサイコロは、実験しなくても確率がわかります。

同じように確からしい

きちんと作られたサイコロは、どの面も同じ形・同じ重さです。だから、1 から 6 のどの目も、出やすさは同じだと考えられます。このように、どれが起こることも同じ程度に期待できるとき、「同様に確からしい」といいます。



確率を数で求める

同様に確からしい場合が全部で n 通りあり、そのうち、ことがら A が起こる場合が a 通りあるとき、 A の起こる確率は

$$P(A) = \frac{a}{n} \quad (A \text{ の起こる場合の数}) \div (\text{全部の場合の数})$$

です。 P は英語の probability (確率) の頭文字で、 $P(A)$ は「ピー・エー」と読みます。 $f(x)$ と同じかっこの書き方 (3-3) で、「ことがら A を入れると、その確率がでてくる」と読めます。

たとえば、サイコロ 1 個で偶数の目が出るのは、2、4、6 の 3 通りなので、
 (偶数の目が出る確率) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 です。必ず起こること (6 以下の目が出る) は $\frac{6}{6} = 1$ 、決して起こらないこと (7 の目が出る) は $\frac{0}{6} = 0$ です。確率は、いつも 0 以上 1 以下の数です。

記号カード

初めて出た章 3-17

$P(A)$

読み方 ピー・エー
 意味 ことがら A の起こる確率。0 から 1 までの数。
 英語 probability

2 個のサイコロの和は、表で数える

大小 2 個のサイコロをふって、目の和を考えます。大が 1 で小が 2 の場合と、大が 2 で小が 1 の場合は、別の場合です。全部の場合を、 6×6 の表にします (1-13 の九九の表と同じ形)。

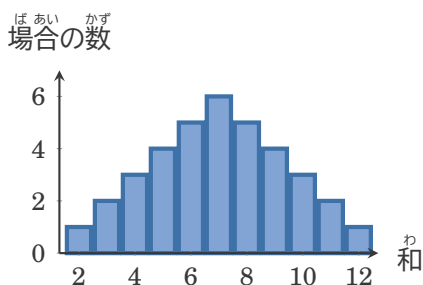
大 \ 小	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

表 2 2 個のサイコロの目の和。全部で $6 \times 6 = 36$ 通り。和が 7 (赤) は 6 通り。

和が 7 になるのは、ななめに並んだ 6 通りです。だから、和が 7 になる確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ です。和が 2 になるのは「大 1・小 1」の 1 通りだけなので、 $\frac{1}{36}$ です。和ごとの場合の数を数えると、次のようになります。

和	2	3	4	5	6	7
ばあい 場合	1	2	3	4	5	6
和	8	9	10	11	12	
ばあい 場合	5	4	3	2	1	

表3 和ごとの場合の数 (合計 36)



1個のサイコロでは、どの目も同じ確率でした(平ら)。2個の和になると、7がいちばん出やすい山の形になります。まん中の7は、作り方(大と小の組)がいちばん多いからです。**②はてな?**の答えの、1つめのかぎです。

③ コインの表の枚数を数える：パスカルの三角形

コインを何枚か投げて、表が何枚出るかを考えます。

段1 樹形図で、全部の場合を書き出す

コインを3枚、1枚めから順に投げます。1枚ごとに、表(お)か裏(う)の2通りに分かれていく図をかきます。木の枝のように分かれるので、**樹形図**といいます。

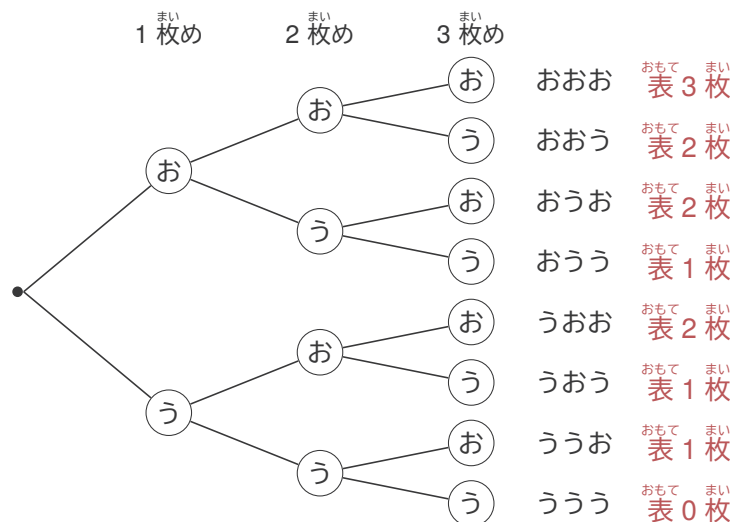


図2 コイン3枚の樹形図。全部で $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通り (お=表、う=裏)。

全部で $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ 通りです (2-7の累乗)。表の枚数ごとに数えると、

おもて まいすう 表の枚数	0 枚	1 枚	2 枚	3 枚
ば あい かず 場合の数	1	3	3	1
かくりつ 確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ひょう 表 4 コイン 3 枚の表の枚数

おもて まい
表が 2 枚になるのは、「おお」「おうお」「うおお」の 3 通りです。どの 1 枚が
うら 裏になるかで 3 通り、と考えることもできます。1、3、3、1 は、3-8 の $(a + b)^3$
てんかい 展開したときの係数と同じ数です。

だん 段 2 1 枚ふやすと、どうなる？

まい
4 枚にすると、じゆけい ず 樹形図は 16 通りになって、かくの が たいへん 大変です。そこで、樹形
図をかかずに数える方法を考えます。

まい おもて
4 枚で表がちょうど 2 枚になるのは、4 枚めのコインで 2 つに分けられます。

- 4 枚めが裏のとき：はじめの 3 枚で、おもて まい
表が 2 枚。まえ ひょう 前の表から 3 通り。
- 4 枚めが表のとき：はじめの 3 枚で、おもて まい
表が 1 枚。まえ ひょう 前の表から 3 通り。

だから、 $3 + 3 = 6$ 通りです。同じように、4 枚で表が 1 枚は「3 枚で 1 枚」+ 「3
まい 枚で 0 枚」= $3 + 1 = 4$ 通りです。

きまり： n 枚で表が k 枚の数 = $(n - 1$ 枚で表が k 枚の数) + $(n - 1$ 枚で
おもて 表が $k - 1$ 枚の数)

だん 段 3 さんかくけい 三角形にならべる

このきまりを使って、つか 上から 1 段ずつ数を書いていきます。各段の両はしは 1
です (全部裏、全部 表は 1 通りずつ)。そのほかの数は、すぐ上の左右の 2 つの
かず 数をたした数です。

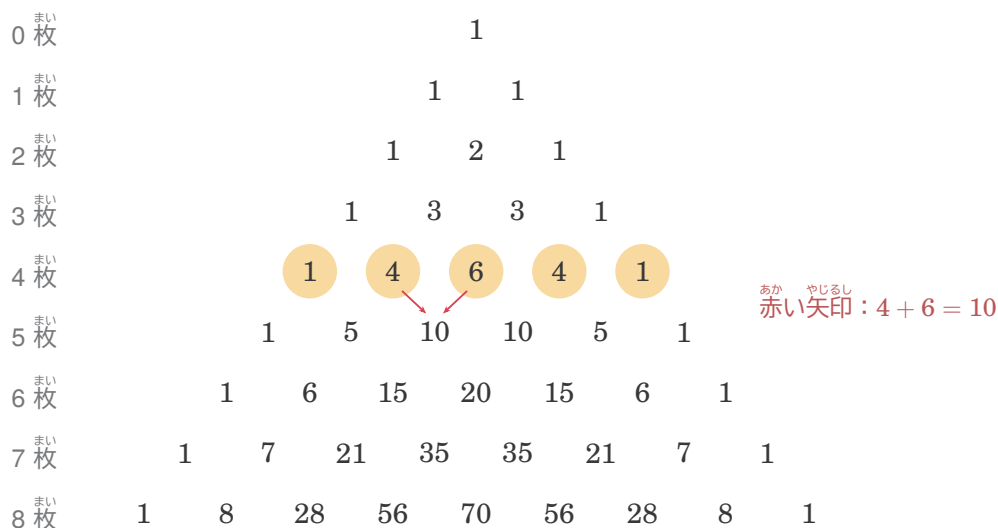


図3 パスカルの三角形。 n 段めの左から k 番め (0 から数える) が、コイン n 枚で表が k 枚の数。4 枚の段 (黄) は 1、4、6、4、1。

この三角形を、**パスカルの三角形**といいます。370 年ほど前に、フランスのパスカルがくわしく研究したので、この名前があります。

4 枚の段は 1、4、6、4、1 です。3-14 で、4 回の並び方の数として出てきた 1、4、6、4、1 と同じです。表が 0 枚から 4 枚になる数を全部たすと、 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$ で、全部の場合の数になります。どの段でも、たと 2^n です (1 枚ふやすごとに、場合が 2 倍に分かれるから)。

段4 組合せの数と、その記号

「4 枚のうち、どの 2 枚が表か」は、4 枚から 2 枚を**選ぶ**選び方の数と同じです。順番を考えずに、いくつかを**選ぶ**選び方を**組合せ**といい、 n 個から r 個を選ぶ組合せの数を ${}_nC_r$ と書きます。C は英語の combination (組合せ) の頭文字です。パスカルの三角形の n 段めの左から r 番め (0 番めから数える) が、 ${}_nC_r$ です。

${}_nC_r$ は、かけ算でも計算できます。5枚から2枚を選ぶとき、1枚めの選び方は5通り、2枚めは残りの4通りで、 $5 \times 4 = 20$ 通り。でも、「AとB」と「BとA」は同じ組なので、どの組も2回ずつ数えています（2枚の並べ方 $2 \times 1 = 2$ 通り）。

だから、2でわります（図4）。

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

	AB	AC	AD	AE
BA		BC	BD	BE
CA	CB		CD	CE
DA	DB	DC		DE
EA	EB	EC	ED	

順番をつけて選ぶと $5 \times 4 = 20$ 通り。

青の「AB」と、だいだいの「BA」は同じ組なので、2回ずつ数えている。

組は $20 \div 2 = 10$ 通り（青の10こ）。

図4 5枚（A～E）から2枚を選ぶ。

パスカルの三角形の5枚の段（1、5、10、10、5、1）の、左から2番めの10と合っています。3枚を選ぶなら、選ぶ順番は $5 \times 4 \times 3$ 通り、3枚の並べ方は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りなので、 ${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{60}{6} = 10$ です。

10枚投げたら

パスカルの三角形をあと2段のばすと、10枚の段は1、10、45、120、210、252、210、120、45、10、1です（合計 $2^{10} = 1024$ ）。表が5枚の確率は $\frac{252}{1024} \approx 0.25$ 、7枚の確率は $\frac{120}{1024} \approx 0.12$ です。ミナさんの「10回で7回」は、だいたい8回に1回は起こることで、めずらしくありません。

記号カード

初めて出た章 3-17

${}_nC_r$

読み方 エヌ・シー・アール
意味 n 個から r 個を選ぶ組合せの数。パスカルの三角形の数。
英語 combination

もっと知りたい ★★★

数の爆発：トランプの並べ方

トランプ 52 枚を 1 列に並べる並べ方は何通りでしょう。1 枚めは 52 通り、2 枚めは残りの 51 通り、3 枚めは 50 通り、…と、最後の 1 枚まで選ぶので

$$52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times 2 \times 1 \text{ 通り}$$

です。計算すると、およそ 8×10^{67} 通り（8 のあとに 0 が 67 個）になります。地球上の砂つぶの数（およそ 10^{19} 個ともいわれます）より、はるかに

大きな数です。よく切ったトランプの並び方は、たぶん人類の歴史で一度も出たことのない並び方なのです。このような「1 から n までの数

部かけた数」は、5-17 で $n!$ という記号で書きます。物理では、気体の分子の並び方の数を数えるときに、この大きな数が出てきます。

4 たくさんやったときの平均：期待値

サイコロを何回もふって、出た目の平均をとると、いくつに近づくでしょう。1 から 6 の目は、どれも $\frac{1}{6}$ ずつ出ます。600 回ふれば、どの目もおおよそ 100 回ずつ出るので、目の合計はおおよそ

$$1 \times 100 + 2 \times 100 + 3 \times 100 + 4 \times 100 + 5 \times 100 + 6 \times 100 = 2100$$

で、平均は $2100 \div 600 = 3.5$ です。これを 1 回あたりで書くと、

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

となります。このように、(値 × その確率) を全部たした数を**期待値**といいます。たくさんくり返したときの、1 回あたりの平均です。3.5 という目はありませんが、期待値は平均なので、ない目でもかまいません。

コイン 10 枚で表が出る枚数の期待値は、1 枚あたり $\frac{1}{2}$ 枚ずつなので、 $10 \times \frac{1}{2} = 5$ 枚です。パスカルの三角形の 10 枚の段で、いちばん大きい 252 がまん中の 5 枚にあるのと合っています。

🔍 もっと知りたい ★★★

このコインは、いかさま？ (仮説検定)

コインを 10 回投げたら、表が 9 回以上出ました。「このコインは正しい (表の確率 $\frac{1}{2}$) 」と仮に考えると、9 回以上表になるのは、パスカルの三角形の 10 枚の段から $\frac{10+1}{1024} = \frac{11}{1024} \approx 0.011$ 、約 1% です。「100 回に 1 回しか起きないことが起きた」ので、「正しいコインだ」という仮の考えのほうを疑います。このように確率を使って判断する方法を、**仮説検定**といいます。工場の品質の判断や、薬の効き目を確かめるときに使われます。

5 たくさん足すと、つりがね形：正規分布

❓ はてな？ にもどります。サイコロの目の和の、それぞれの確率をグラフにすると、図 5 のようになります (3 個まではすべての場合を数えて、10 個は表計算で計算しました)。

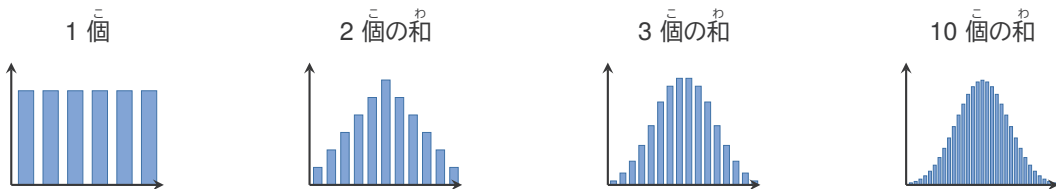


図 5 サイコロの目の和の分布。左から、1 個 (平ら)、2 個 (三角)、3 個 (丸みのある山)、10 個 (つりがね形)。

3-14 では「平均 $\pm\sigma$ に、だいたい 7 割」と学びました。その 7 割が、正規分布の約 68% です。

サイコロ 10 個で確かめる

10 個の和の平均（期待値）は、1 個の期待値 3.5 の 10 倍で 35 です。表計算で和の分散を計算すると（3-14 と同じく、偏差の 2 乗に確率をかけてたす）、 $\sigma \approx 5.4$ になります。

- 平均 $\pm\sigma$: $35 - 5.4 = 29.6$ から $35 + 5.4 = 40.4$ まで。和が 30~40 になる確率は、数えると約 68.7%。
- 平均 $\pm 2\sigma$: $35 - 10.8 = 24.2$ から $35 + 10.8 = 45.8$ まで。和が 25~45 になる確率は、約 95.0%。

どちらも、68%・95% にとても近くなっています。

🔍 もっと知りたい ★★★

10 個の和の $\sigma \approx 5.4$ を、手で計算する

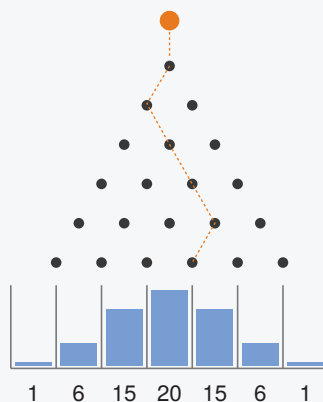
サイコロ 1 個の目の平均は 3.5 です。偏差は $-2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5$ で、2 乗は 6.25、2.25、0.25、0.25、2.25、6.25。どれも同じ確率で出るので、分散はその平均で

$$(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25) \div 6 = 17.5 \div 6 = 2.916\ldots$$

です（3-14 と同じく、個数でわる）。べつべつにふったサイコロの和では、分散がたし算になることが知られています（くわしくは大学で）。10 個なら分散は 10 倍の 29.16... で、 $\sigma = \sqrt{29.16\ldots} \approx 5.40$ です。平均（期待値）が 10 倍になるのに、 σ は $\sqrt{10} \approx 3.16$ 倍にしかありません。だから、たくさん足すほど、平均にくらべてちらばりは小さく見えます（3-14 の $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ と同じしくみ）。

コラム ガルトンボード：くぎの山で正規分布を作る

板にくぎを三角形に打ち、上から玉を落とします。玉は、くぎに当たるたびに、左か右に半分ずつの確率で分かれます。くぎが6段なら、玉の右へ行っただけの回数は、コイン6枚の表の枚数と同じです。下の7つの部屋に入る玉の数は、パスカルの三角形の6段め（1、6、15、20、15、6、1）に比例して、つりがね形にたまります。3-15のコラムのゴルトン（ガルトン）が考えた装置です。



6 全部を調べずに、一部から全体を知る：標本調査

工場で作った電球が、何時間もつかを知りたいとします。全部の電球を切れるまで点けて調べたら、売電球がなくなってしまう。そこで、一部だけを取り出して調べ、そこから全体のようすを予想します。

全部を調べること全数調査、一部を取り出して調べること標本調査といえます。調べたい全体を母集団、取り出した一部を標本といえます。国勢調査（国に住む全員を調べる）は全数調査、テレビの視聴率やニュースの世論調査は標本調査です。

かたよらないように取り出す

標本は、母集団の中からかたよりなく選ばないと、全体を正しく表しません。たとえば、工場の朝いちばんに作った製品だけを調べると、機械が温まる前の不良品ばかりかもしれません。くじ引きや乱数（表計算のRANDBETWEENなど）

で、どれも同じ確率で選ばれるようにして取り出します。これを無作為に抽出するといいます。

標本から全体を予想する

10000 個の製品から、無作為に 200 個を取り出して調べると、不良品が 4 個ありました。標本の不良品の割合は $4 \div 200 = 0.02$ です。母集団の割合もほぼ同じと考えて、全体の不良品はおおよそ

$$10000 \times 0.02 = 200 \text{ (個)}$$

と予想します。

標本が大きいほど、予想のずれは小さい。標本の割合も、偶然でゆれます。コインの割合が、回数をふやすと 0.5 に落ち着いたのと同じで (①)、標本を大きくするほど、ゆれは小さくなります。3-14 で、 n 回はかって平均すると、平均のずれが $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ になると学びました。標本を 4 倍にすると、ずれは $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ になります。

たいせつ

確率 $P(A) = (A \text{ の起こる場合の数}) \div (\text{全部の場合の数})$ 。0 以上 1 以下。

コイン n 枚で表が k 枚の数 = パスカルの三角形の n 段めの k 番め $= {}_n C_k$ 。

期待値 = (値 $\times$ その確率) を全部たした数 = たくさんやったときの平均。

正規分布：平均 $\pm \sigma$ に約 68%、平均 $\pm 2\sigma$ に約 95%。

この章で出てきたことば

確率 $P(A)$ ことがら A の起こりやすさ。たくさんくり返したときの割合。(A の場合の数) $\div$ (全部の場合の数)。

樹形図 場合が枝分かれしていくようすを、木の形にかいた図。

パスカルの三角形・組合せ ${}_nC_r$ 上の左右2つの数をたしてできる三角形。 n 個から r 個を選ぶ数。

期待値 (値 $\times$ その確率) を全部たした数。たくさんやったときの1回あたりの平均。

正規分布 偶然のずれがたたくさん足し合わさってできる、つりがね形のちらばり。

標本調査 母集団から無作為に取り出した標本を調べて、全体を予想する方法。

例題でたしかめよう

例題1 実験から確率を求める

ペットボトルのキャップを投げて、上向き(口が上)になる回数を調べると、2000回のうち620回でした。(1) 上向きになる確率は、およそいくつですか。(2) このキャップをあと5000回投げると、上向きはおよそ何回ですか。

考え方 たくさんくり返したときの割合が、確率です(統計的な確率)。その確率を、次の回数にかけて予想します。

しき (1) $620 \div 2000 = 0.31$

(2) $5000 \times 0.31 = 1550$

こたえ (1) およそ0.31 (2) およそ1550回

例題 2 2 個のサイコロの確率

大小 2 個のサイコロをふります。(1) 目の和が 7 になる確率、(2) 目の和が 10 以上になる確率を求めましょう。

考え方 全部の場合は、 6×6 の表で $6 \times 6 = 36$ 通り (②の表)。それぞれの場合の数を、表で数えます。

しき (1) 和が 7 は、表のななめの 6 通り。 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
 (2) 和が 10 は 3 通り、11 は 2 通り、12 は 1 通りで、 $3 + 2 + 1 = 6$ 通り。 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

こたえ (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$

じぶんでこう 1

画びょうを 1500 回投げたら、上向きが 930 回でした。(1) 上向きになる確率は、およそいくつですか。(2) あと 1000 回投げると、上向きはおよそ何回ですか。

じぶんでこう 2

大小 2 個のサイコロをふります。(1) 目の和が 5 になる確率、(2) 目の和が 4 以下になる確率を求めましょう。

例題3 樹形図で数える

コインを3枚投げます。(1) 表がちょうど2枚になる確率、(2) 少なくとも1枚表になる確率を求めましょう。

考え方 図2の樹形図で、全部の8通りから数えます。(2)は、「全部裏」でない場合です。

しき (1) おおう、おうお、うおおの3通り。 $\frac{3}{8}$
 (2) 全部裏(ううう)は1通りなので、それ以外は $8 - 1 = 7$ 通り。

$\frac{7}{8}$

こたえ (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{7}{8}$

例題4 パスカルの三角形で数える

コインを5枚投げます。(1) 表がちょうど2枚になる確率を求めましょう。その場合の数を ${}_5C_2$ のかけ算の式でも確かめましょう。(2) 表が3枚以上になる確率を求めましょう。

考え方 全部の場合は $2^5 = 32$ 通り。パスカルの三角形の5枚の段(1、5、10、10、5、1)の、左から2番め(0番めから数える)が、表2枚の数です。(2)の「3枚以上」は、3枚・4枚・5枚の3つの場合を合わせます。

しき (1) 5枚の段で表2枚は10通り。確率は $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

確かめ： ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(2) 3枚は10通り、4枚は5通り、5枚は1通り

$10 + 5 + 1 = 16$ 通り。確率は $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

こたえ (1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$

じぶんでとこう 3

コインを 3 枚投げます。(1) 表
がちょうど 1 枚になる確率、(2)
3 枚とも同じ面になる確率を求め
ましょう。

じぶんでとこう 4

コインを 6 枚投げます。(1) 表が
ちょうど 3 枚になる確率を、パ
スカルの三角形で求めましょう。
 ${}_6C_3$ のかけ算の式でも確かめま
しょう。(2) 表が 4 枚以上になる
確率を求めましょう。

例題 5 期待値を求める

100 本のくじがあります。1 等 (500 円) が 2 本、2 等 (100 円) が 10
本、3 等 (10 円) が 30 本で、残りははずれです。くじを 1 本引くときに
もらえる金額の期待値を求めましょう。

考え方 (金額 × その確率) を全部たします。はずれは 0 円なので、たし
ても変わりません。

$$\begin{aligned} \text{しき} \quad & 500 \times \frac{2}{100} + 100 \times \frac{10}{100} + 10 \times \frac{30}{100} \\ & = 10 + 10 + 3 = 23 \end{aligned}$$

こたえ 23 円 (このくじを何回も引くと、1 回あたり平均 23 円もらえる)

例題6 サイコロのゲームの期待値

サイコロを1回ふって、出た目の数の10倍の点数（1なら10点、6なら60点）がもらえるゲームがあります。1回あたりの点数の期待値を求めましょう。

考え方 1から6の目は、どれも確率 $\frac{1}{6}$ です。（点数×その確率）を全部たします。

しき
$$10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{6} + 40 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} + 60 \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60}{6} = \frac{210}{6} = 35$$

こたえ 35点（目の期待値3.5の10倍になっている）

じぶんでこう5

50本のくじがあります。1等（200円）が1本、2等（50円）が4本、3等（10円）が10本で、残りははずれです。1本引くときにもらえる金額の期待値を求めましょう。

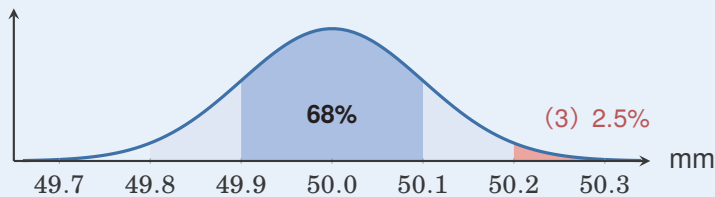
じぶんでこう6

サイコロを1回ふって、偶数の目なら100点、奇数の目なら0点がもらえるゲームがあります。1回あたりの点数の期待値を求めましょう。

例題 7 正規分布の 68% と 95% を使う

ある工場の部品の長さは、平均 50.0 mm、標準偏差 0.1 mm の正規分布になっています。1000 個作ると、(1) 49.9~50.1 mm の部品はおよそ何個ですか。(2) 49.8~50.2 mm はおよそ何個ですか。(3) 50.2 mm より長い部品はおよそ何個ですか。

考え方 49.9~50.1 は平均 $\pm\sigma$ 、49.8~50.2 は平均 $\pm 2\sigma$ です。正規分布は左右対称なので、 $\pm 2\sigma$ の外の 5% は、右と左に半分ずつあります。



しき (1) $1000 \times 0.68 = 680$ (2) $1000 \times 0.95 = 950$

(3) $1000 - 950 = 50$ 個が外にあり、その半分で $50 \div 2 = 25$

こたえ (1) およそ 680 個 (2) およそ 950 個 (3) およそ 25 個

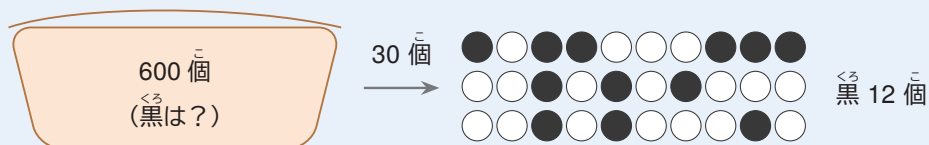
じぶんでこう 7

クッキー 1 まいの重さは、平均 20 g、標準偏差 0.5 g の正規分布です。2000 まい作ると、(1) 19.5~20.5 g は、(2) 19~21 g は、(3) 21 g より重いのは、それぞれおよそ何まいですか。

例題8 標本から全体を予想する

ふくろに白と黒の碁石が合わせて 600 個入っています。よくかき混ぜて 30 個取り出すと、黒が 12 個でした。ふくろの中の黒は、およそ何個と考えられますか。

考え方 よくかき混ぜて取り出したので、無作為な標本です。標本の黒の割合は、ふくろ全体の黒の割合とほぼ同じと考えます。



しき 標本の黒の割合 : $12 \div 30 = 0.4$

全体の黒 : $600 \times 0.4 = 240$

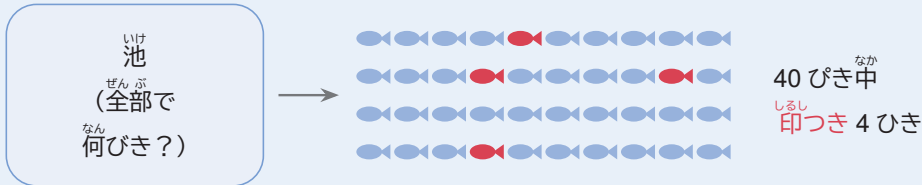
こたえ およそ 240 個

じぶんでとこう8

工場で作ったねじ 8000 本から、無作為に 400 本を取り出して調べると、不良品が 6 本ありました。8000 本の中の不良品は、およそ何本と考えられますか。

例題 9 印をつけて、全体の数を予想する

池の魚の数を調べます。まず 50 匹をつかまえて印をつけ、池にもどしました。数日後、よく泳ぎ回ったあとで 40 匹をつかまえると、そのうち 4 匹に印がついていました。池の魚は、およそ何匹と考えられますか。



考え方 2 回めにつかまえた 40 匹は、池全体からの無作為な標本と考えます。標本の中の「印つき」の割合は、池全体の「印つき」の割合とほぼ同じです。池全体の印つきは 50 匹とわかっているので、全体の数を x 匹として、割合が等しい式を作ります (2-5)。

しき 標本の印つきの割合： $4 \div 40 = 0.1$

池全体： $50 \div x = 0.1$ だから、 $x = 50 \div 0.1 = 500$

こたえ およそ 500 匹 (確かめ：500 匹のうち 50 匹が印つきなら、割合は $50 \div 500 = 0.1$)

じぶんでこう 9

ある島の野ウサギの数を調べます。30 匹をつかまえて印をつけて放し、しばらくしてから 60 匹をつかまえると、そのうち 5 匹に印がついていました。島の野ウサギは、およそ何匹と考えられますか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

2個のサイコロの和の確率

✕ 和は2から12までの11通りなので、和が7になる確率は $\frac{1}{11}$

○ 全部の場合は36通りで、和が7は6通り。確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2から12までの11通りは、同様に確からしくありません。和が2になるのは1通り、7になるのは6通りで、出やすさがちがいます。確率は、同様に確からしい場合で数えます。

⚠ まちがえやすいところ

コイン2枚で「1枚表・1枚裏」

✕ 「2枚表」「1枚ずつ」「2枚裏」の3通りなので、 $\frac{1}{3}$

○ おお・おう・うお・ううの4通りのうち2通りで、 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2枚のコインを区別して数えます。「1枚ずつ」には、「1枚めが表」と「2枚めが表」の2つの場合があります。

⚠ まちがえやすいところ

まえ けつ か つぎ えいきょう
前の結果が、次に影響する？

✗ 5 回続けて裏が出たから、次は表が出やすい

○ コインには記憶がない。次も表の確率は $\frac{1}{2}$

わりあい ちか なんびやっかい かえ
割合が 0.5 に近づくのは、何百回もくり返して、はじめのかたよりがうすまるからです。

⚠ まちがえやすいところ

かくりつ $\frac{1}{6}$ なら、6 回で必ず 1 回？

✗ 6 回ふれば、1 の目は必ず 1 回出る

○ 6 回ふって、1 の目が 1 回も出ないこともある

かくりつ 確率は、たくさんくり返したときの割合です。6 回では、0 回のことも 2 回以上のこともあります。

⚠ まちがえやすいところ

へいきん 平均 + 2σ より大きいのは何 %？

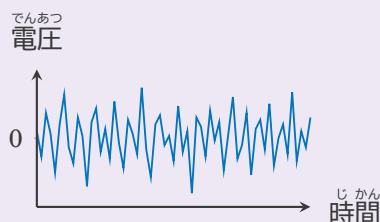
✗ $\pm 2\sigma$ の外は 5% なので、5%

○ 外の 5% は左右に半分ずつなので、 $5 \div 2 = 2.5$ で 2.5%

せい きぶん ぶ 正規分布は左右 対称です。外の 5% には、小さい側と大きい側の両方がふくまれています ( 例題 7 の (3))。

物理・工学ではこう使う

電気の雑音：抵抗の中の電子のゆれ
 電気を流していない抵抗でも、中の電子は熱でたえずでたらめに動いています。たくさんさんの電子の小さな動きが足し合わさって、ごく小さな電圧のゆれ（雑音）が生まれます。たくさんさんの偶然を足したもので、雑音の電圧は平均0の正規分布になります。センサーで小さな信号をはかるときは、この雑音の σ より信号が十分大きくなるように、回路を設計します。



放射線を数える：めったに起きないことを数える

放射線をはかる計数器は、放射線が1つ通るたびに「カチッ」と1回数えます。放射線がいつ来るかは偶然で決まるので、同じ場所で1分ずつはかっても、数は毎回ちがいます。平均して100回数えられる場所では、ばらつきの標準偏差はおおよそ $\sqrt{100} = 10$ 回になることが知られています（物理のきまり）。だから「1分に100回」は「 100 ± 10 回くらい」の意味です。1000回数えれば、ばらつきは $\sqrt{1000} \approx 32$ 回で、割合にすると約3%まで小さくなります。長い時間はかるほど、正確になるのです。

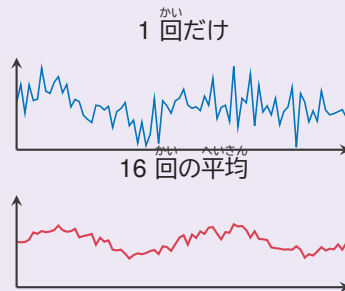
物理・工学ではこう使う

気体の分子の速さ

部屋の空気の分子は、ぶつかり合いながら、いろいろな速さで飛び回っています。1つ1つの分子の速さは偶然で決まりますが、ものすごい数（ 1cm^3 に約 2.5×10^{19} 個）の分子があるので、速さのちらばり方は、温度だけで決まる、いつも同じ形になります。速さの平均は、室温で秒速 500m くらいです。物理シリーズでは、確率を使って、このちらばり方から温度や圧力を説明します。

何回も重ねて、雑音を消す

小さな信号が雑音にうもれて見えな
いとき、同じ信号を何回もはかって、
時刻ごとに平均します。信号は毎回同
じなので、平均しても残ります。雑音
は毎回でたらめなので、平均すると打
ち消し合って小さくなります。3-14
の $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとおり、16 回の平均で雑
音は $\frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$ になります。心電図
や、遠くの星からの電波をとらえる
望遠鏡などで使われています。





しょうまつもんだい
章末問題

3-17 のまとめ

基本



- 1 あるボタンを投げると、1200 回のうち表向きが 780 回でした。(1) 表向きになる確率は、およそいくつですか。(2) あと 2000 回投げると、表向きはおよそ何回ですか。
- 2 大小 2 個のサイコロをふります。(1) 目の和が 9 になる確率、(2) 目の和が 3 以下になる確率を求めましょう。
- 3 コインを 3 枚投げます。(1) 3 枚とも表になる確率、(2) 少なくとも 1 枚裏になる確率を求めましょう。
- 4 コインを 4 枚投げます。表がちょうど 2 枚になる確率を、パスカルの三角形で求めましょう。 ${}_4C_2$ のかけ算の式でも確かめましょう。
- 5 大小 2 個のサイコロをふります。目の和が 11 以上になる確率を求めましょう。
- 6 200 本のくじがあります。1 等 (1000 円) が 2 本、2 等 (100 円) が 20 本、3 等 (20 円) が 50 本で、残りはずれです。1 本引くときにもらえる金額の期待値を求めましょう。
- 7 ある中学校の 1 年生 500 人の身長は、平均 152 cm、標準偏差 7 cm の正規分布に近いとします。(1) 145~159 cm の人は、(2) 138~166 cm の人は、それぞれおよそ何人ですか。
- 8 池の水を、よくかき混ぜてから 1 L くみ取ると、ミジンコが 36 ぴきいました。池の水は全部で 5000 L です。池のミジンコは、およそ何ぴきと考えられますか。

チャレンジ ★★★

9 コインを 10 回投げて、表が 8 回以上出る確率を、パスカルの三角形の 10 枚の段 (1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1) を使って求めましょう。

10 サイコロを 10 個ふって目を足すことを 1000 回くり返します。和は平均 35、標準偏差 約 5.4 の正規分布に近くなります。(1) 和が 29.6 から 40.4 のあいだになるのは、およそ何回ですか。(2) 45.8 より大きくなるのは、およそ何回ですか。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 表や樹形図で数えて、確率と期待値を求められる。 → 502 ページ
- ☐ パスカルの三角形で、表が k 枚になる数を求められる。 → 504 ページ
- ☐ 正規分布の 68% と 95% を使える。 → 509 ページ



デルタ

はかる・表にする・点にする・線を引く・ばらつきを考える。第3巻で、データからきまりを見つける道具がそろったね。

こたえ

「じぶんでとこう」は **じ1**、章末問題は **1** のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

3-1

じ1 (1) $y = 80x + 200$ (2) 変数は x と y 、定数は 80 と 200

じ2 (1) 変数は V と I 、定数は R (20)
(2) 問題ごとに決まる数 (電熱線をとりにかえると変わる) (3) $I = \frac{6}{20} = 0.3$ で 0.3 A

じ3 (1) $3.0 \times 10^8 \times 2 = 6.0 \times 10^8$ で 6.0×10^8 m
(2) $3.0 \times 10^8 \times 0.5 = 1.5 \times 10^8$ で 1.5×10^8 m (3) 変わらない (物理定数だから)

じ4 (1) $30 - 6 = 24$, $24 \div 3 = 8$ で 8 分
後 (2) $0 \leq x \leq 8$ (3) $6 \leq y \leq 30$

じ5 (1) $x > 0$ (2) $x = 3$ で $y = 800$,
 $x = 8$ で $y = 300$. $300 \leq y \leq 800$

じ6 (1) $y = 50x$ (2) $0 \leq x \leq 6$ の整数
(3) $50 \times 6 = 300$ で 300 g

じ7 (1) $\bigcirc (y = 50x)$ (2) $\times$ (たとえば
 $x = 36$ で、 6×6 ならまわり 24、
 4×9 なら 26) (3) $\times$

1 変数は x と y 、定数は 30 と 1000

2 (1) 変数は V と I 、定数は R (50)
(2) 問題ごとに決まる数
(3) $I = \frac{10}{50} = 0.2$ で 0.2 A

3 (1) $9.8 \times 4 = 39.2$ で 39.2 m/s
(2) $9.8 \times 1.5 = 14.7$ で 14.7 m/s

4 (1) $50 - 5 = 45$, $45 \div 9 = 5$ で 5 分
後 (2) $0 \leq x \leq 5$ (3) $5 \leq y \leq 50$

5 (1) $x > 0$ (2) $x = 3$ で $y = 600$,
 $x = 9$ で $y = 200$. $200 \leq y \leq 600$

6 (1) $\bigcirc (y = 200x)$ (2) $\times$ (同じ
身長でも体重はちがう)

7 (1) $y = 40x$ (2) $0 \leq x \leq 5$ の整数
(3) $40 \times 5 = 200$ で 200 g

8 $3.0 \times 10^8 \times 500 = 1500 \times 10^8$
 $= 1.5 \times 10^{11}$ で、約 1.5×10^{11} m (1
億 5000 万 km)

9 (1) $y = 65x$ (2) $0 \leq x \leq 9$ の整数
(3) $65 \times 9 = 585$ で 585 kg. 600 kg
をこえない

10 (1) $60 - 12 = 48$, $48 \div 8 = 6$ で 6 分
後 (2) $0 \leq x \leq 6$ (3) $12 \leq y \leq 60$
(4) $8 \times 3.5 + 12 = 40$ で 40 cm

3-2

じ1 (1) P(-4, 2), Q(1, 4), R(3, -3),
S(-1, -4) (2) 右へ 3, そこから
下へ 2

じ2 (1) 右上 (2) 左下 (3) x 軸の上
(4) 左上

じ3 (1) B(1, -2), C(-4, 4)
(2) $(60 - 20, 80 + 50) = (40, 130)$

じ4 (1) $y_1 = 5$, $x_2 = 4$
(2) $4 - (-2) = 6$, $1 - 5 = -4$
(3) 右へ 6 cm, 下へ 4 cm

- じ5** 公園 (4 - (-2), -1 - 3) = (6, -4)、
 駅 (0 - (-2), 0 - 3) = (2, -3)
- じ6** (1) 12 (2) 0.8 (3) 1.5
 (4) 5 + 3 = 8 (5) 9 - 5 = 4
- じ7** (1) |-2 - (-6)| = |4| = 4
 (2) |-3 - 4| = |-7| = 7
- じ8** (1) D(-1, 2) (2) AB は 4、BC は
 5。まわり (4 + 5) × 2 = 18 で 18 cm、
 面積 4 × 5 = 20 で 20 cm²
- 1** A(2, 4)、B(-5, 1)、C(-1, -3)、
 D(4, -2)
- 2** (1) 左下 (2) 右上 (3) y 軸の上
 (4) 右下
- 3** B(2, -1)、C(-5, 6)
- 4** (1) $x_2 = -2$ 、 $y_1 = 1$
 (2) -2 - 5 = -7、-3 - 1 = -4。左
 へ 7、下へ 4
- 5** (1) 20 (2) 3.6 (3) 5 (4) 2
- 6** (1) |2 - (-5)| = 7
 (2) |1 - (-6)| = 7
- 7** 図書館 (3 - (-4), 5 - 1) = (7, 4)、駅
 (0 - (-4), 0 - 1) = (4, -1)
- 8** D(-4, 3)。AB = 6、BC = 4。まわり
 20 cm、面積 24 cm²
- 9** 右へ 40 × 4 = 160、上へ
 25 × 4 = 100。
 (300 + 160, 200 - 100) = (460, 100)

3-3

- じ1** (1) 関数 ($y = 40x$) (2) 関数
 ($y = x^3$) (3) 関数ではない (例：
 $x = 12$ のとき、たて 3 cm・横 4 cm な
 $y = 3$ 、たて 2 cm・横 6 cm な
 $y = 2$)

- じ2** (1) $y = 500x + 2000$ (2) y は順に
 2000、2500、3000、3500、4000。グ
 ラフは、この 5 つの点にならぶまっすぐ
 な線 (3) $500x + 2000 = 6000$ 、
 $500x = 4000$ 、 $x = 8$ で 8 回
- じ3** (1) $g(4) = 2.5 \times 4 + 10 = 20$ 、
 $g(-2) = 2.5 \times (-2) + 10 = 5$ 、
 $g(0.4) = 2.5 \times 0.4 + 10 = 11$
 (2) $x(4) = 5 \times 16 = 80$
- じ4** (1) 25 (2) $(t + 1)^2$
 (3) $(3a)^2 = 9a^2$
 (4) $2(a + h) - 5 = 2a + 2h - 5$
- じ5** (1) $g(2) = 5$ 、 $f(5) = 25$
 (2) $y = (x + 3)^2$ (3) $f(2) = 4$ 、
 $g(4) = 7$ 。(1) とちがう
- じ6** $x = -1$ で $y = 3$ 、 $x = 2$ で $y = -6$ 。
 $-6 \leq y \leq 3$
- じ7** (1) 600 円 (2) 900 円
 (3) $1 < x \leq 2$
- じ8** (1) $\frac{x}{15} = \frac{2}{5}$ 、 $x = 6$
 (2) $x : 80 = 72 : 30$ 、 $\frac{x}{80} = 2.4$ 、
 $x = 192$ で 192 g
- 1** (1) 関数 ($y = 80x$) (2) 関数
 ($y = 2x$) (3) 関数ではない (例：
 $x = 20$ のとき、たて 2 cm なら $y = 8$ 、
 たて 4 cm なら $y = 6$)
- 2** (1) $y = 800x + 300$ (2) 2700 円
 (3) $800x + 300 = 4300$ 、
 $800x = 4000$ 、5 箱
- 3** $f(3) = 1$ 、 $f(-4) = 15$ 、 $f(0.5) = 6$
- 4** (1) 36 (2) $(a + 2)^2$ (3) $25a^2$
 (4) $4a + 4h - 3$

- 5** (1) $g(5) = 3, f(3) = 9$
 (2) $y = (x - 2)^2$ (3) $f(5) = 25, g(25) = 23$
- 6** $x = -2$ で $y = 8, x = 1$ で $y = -4$.
 $-4 \leq y \leq 8$
- 7** (1) $x = 6$ (2) $x = 12$
- 8** (1) $f(-40) = 1.8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$. 摂氏と華氏が同じ数になる (2) $1.8x + 32 = 212, 1.8x = 180, x = 100$ で 100°C
- 9** (1) 300 円 (2) 400 円
 (3) $40 < x \leq 60$
- 10** (1) $f(g(x)) = (2x + 1)^2, g(f(x)) = 2x^2 + 1$
 (2) $f(g(1)) = f(3) = 9, g(f(1)) = g(1) = 3$
- 11** (1) $g(25) = 0.01 \times 25 = 0.25, f(0.25) = 100 \times 0.25 = 25$
 (2) $y = 100 \times 0.01T = T$ (温度と同じ数が出てくる)

3-4

- じ 1** 横軸は時間 t (分) で 1 マス 1 分。たて軸は長さ (cm)。0 からだと 1 マス 2 cm、10 cm より下を $\approx$ で省くと 1 マス 0.5 cm で 10~15 cm (こちらが大きくなる)。点がまっすぐに並ぶので、右下がりの直線を引く
- じ 2** (1) 600 m (2) $14 - 8 = 6$ で 6 分
 (3) 行き $600 \div 8 = 75$ で 75 m、帰り $600 \div 6 = 100$ で 100 m
- じ 3** (1) 5 秒は $2 \times 5 = 10$ で 10 m、7 秒も 10 m、10 秒は $10 + 4 \times 3 = 22$ で 22 m (2) 右上がりの直線 $\rightarrow$ 水平 $\rightarrow$ もっと急な右上がりの直線

- じ 4** (1) $(132 + 138) \div 2 = 135$ で 135 cm (2) 141 は 138 と 144 のまん中なので 10 歳半 (3) 1 年に 6 cm で 22 年分、 $126 + 6 \times 22 = 258$ で 258 cm。正しくない (大人になると身長はのびなくなる)
- じ 5** (1) $70 \times 6 = 420$ で 420 m (2) 9 分、630 m (A さん $70 \times 9 = 630$ 、B さん $210 \times 3 = 630$) (3) A さん $1050 \div 70 = 15$ 分、B さん $6 + 1050 \div 210 = 6 + 5 = 11$ 分。B さんが 4 分早い
- じ 6** C さんが速い (C さんは $300 \div 60 = 5$ で 5 m/s、D さんは $180 \div 60 = 3$ で 3 m/s)
- 1** 横軸は時間 t (分) で 1 マス 0.5 分。たて軸は温度 ($^\circ\text{C}$)。0 からだと 1 マス 5°C 、 10°C より下を省くと 1 マス 2°C で $10 \sim 30^\circ\text{C}$ (こちらが大きくなる)。点がまっすぐに並ぶので、直線を引く
- 2** (1) 400 m (2) 5 分 (3) 行き $400 \div 4 = 100$ で 100 m、帰り $400 \div 8 = 50$ で 50 m
- 3** 3 秒は $4 \times 3 = 12$ で 12 m、5 秒も 12 m、9 秒は $12 + 2 \times 4 = 20$ で 20 m
- 4** (1) 20 g と 40 g のまん中なので、 $(1.5 + 3.0) \div 2 = 2.25$ で 2.25 cm
 (2) 3.0 と 4.5 のまん中なので、40 g と 60 g のまん中の 50 g (3) 20 g で 1.5 cm なので、 $1.5 \times 50 = 75$ で 75 cm。正しいとは言えない (強く引きすぎると比例しなくなる。2-15)
- 5** P さんは $5 \times 4 = 20$ (m) で $20 \div 5 = 4$ 、Q さんは $2 \times 8 = 16$ (m) で $16 \div 5 = 3.2$ 。P さんが速い

- 6 (1) 500 m (2) 15 分、家から 750 m
 (姉 $50 \times 15 = 750$ 、妹 $150 \times 5 = 750$) (3) 姉は $1200 \div 50 = 24$ 分、妹は $10 + 1200 \div 150 = 10 + 8 = 18$ 分。
 妹が 6 分早い

- 7 (1) 120°C の 199 と 130°C の 270 の
 まん中で、 $(199 + 270) \div 2 = 234.5$ 、
 約 230 kPa (くわしい値は約 232 kPa)
 (2) はかった範囲の外では、きまりが変
 わるかもしれないから (線は上へだんだ
 ん急に曲がっている)

3-5

- じ1 (1) $\frac{10-1}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$ 。右上がり。
 (2) $\frac{-4-4}{1-(-3)} = \frac{-8}{4} = -2$ 。右下がり。

- じ2 (1) 傾き 2、切片 -4 。(2) $x = 1$ で
 $y = -2$ 、 $x = 5$ で $y = 6$ 。
 $\Delta y = 6 - (-2) = 8$ (確かめ：
 $2 \times 4 = 8$)。

- じ3 (1) (0, 1) と、右へ $3 \cdot$ 上へ 1 の
 (3, 2) を通る直線。(2) (0, 2) と、右
 へ $1 \cdot$ 下へ 1 の (1, 1) を通る直線。

- じ4 0~200 秒: $\frac{800-0}{200-0} = 4$ で 4 m/s。
 200~300 秒: $\frac{800-800}{300-200} = 0$ で
 0 m/s (止まっている)。300~500 秒:
 $\frac{0-800}{500-300} = -4$ で -4 m/s (反対向
 きに 4 m/s)。

- じ5 (1) $a = \frac{11-7}{4-2} = 2$ 。 $7 = 2 \times 2 + b$
 より $b = 3$ 。 $y = 2x + 3$ 。
 (2) $a = \frac{2-8}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2$ 。
 $2 = -2 \times 1 + b$ より $b = 4$ 。
 $y = -2x + 4$ 。

- じ6 傾きは $\frac{20-12}{10-6} = \frac{8}{4} = 2$ で 2°C/h 。 7
 時は $12 + 2 \times 1 = 14$ で約 14°C 、9 時
 は $12 + 2 \times 3 = 18$ で約 18°C 。

- じ7 (1) $a = \frac{20-32}{5-2} = \frac{-12}{3} = -4$ 。
 $32 = -4 \times 2 + b$ より $b = 40$ 。

$$y = -4x + 40. (2) 40 \text{ L.}$$

$$(3) 0 = -4x + 40, 4x = 40, 10 \text{ 分後。}$$

- じ8 (1) $y - 4 = 2(x - 3)$ 、
 $y - 4 = 2x - 6$ 、 $y = 2x - 2$ 。
 (2) $y - 5 = -\frac{1}{3}(x + 3)$ 、
 $y - 5 = -\frac{1}{3}x - 1$ 、 $y = -\frac{1}{3}x + 4$ 。

- じ9 (1) $4x > 16$ 、 $x > 4$ 。
 (2) $-5x < -40$ 、両辺を -5 でわって
 向きを反対にし、 $x > 8$ 。

- 1 (1) $\frac{11-2}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$ 、右上がり。
 (2) $\frac{-2-6}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$ 、右下がり。

- 2 (1) 傾き -2 、切片 7。(2) $x = 2$ で
 $y = 3$ 、 $x = 5$ で $y = -3$ 。
 $\Delta y = -3 - 3 = -6$ ($-2 \times 3 = -6$)。

- 3 (1) (0, -2) と (1, 1) を通る直線。
 (2) (0, 3) と、右へ $2 \cdot$ 下へ 1 の
 (2, 2) を通る直線。

- 4 0~40 秒: $\frac{10}{40} = 0.25$ で 0.25 m/s。 40
 ~100 秒: 0 m/s (止まっている)。 100
 ~140 秒: $\frac{0-10}{140-100} = -0.25$ で
 -0.25 m/s (反対向きに 0.25 m/s)。

- 5 (1) $a = \frac{11-7}{5-3} = 2$ 、 $7 = 2 \times 3 + b$
 より $b = 1$ 。 $y = 2x + 1$ 。
 (2) $a = \frac{1-9}{2-(-2)} = -2$ 、
 $1 = -2 \times 2 + b$ より $b = 5$ 。
 $y = -2x + 5$ 。

6 (1) $y - 3 = 4(x - 1)$, $y = 4x - 1$.

(2) $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$,

$y - 5 = -\frac{1}{2}x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

7 $\frac{\text{かたむ}}{\text{傾き}} = \frac{40 - 24}{5 - 1} = 4$ で 4°C/min .

$24 + 4 \times (3 - 1) = 32$ で約 32°C .

8 (1) $5x > 15$, $x > 3$. (2) $-3x < -9$,
 -3 でわって向きを反対にし, $x > 3$.

9 (1) $a = \frac{34 - 26}{7 - 3} = 2$,

$26 = 2 \times 3 + b$ より $b = 20$.

$y = 2x + 20$. (2) 20 cm .

(3) $40 = 2x + 20$, $2x = 20$, 10 個.

10 (1) $y = -15x + 80$.

(2) $-15x + 80 < 20$, $-15x < -60$,

-15 でわって向きを反対にし, $x > 4$.

4 時間後より後.

11 (1) $0 \sim 100$ 秒: $\frac{300 - 0}{100 - 0} = 3$ で

3 m/s . $100 \sim 250$ 秒: 0 m/s (止まって

いる). $250 \sim 400$ 秒: $\frac{0 - 300}{400 - 250} = -2$

で -2 m/s . (2) 行き (3 m/s) のほうが

速い. 帰りは反対向きに 2 m/s .

12 $y - 1 = -3\{x - (-2)\} = -3(x + 2)$,

$y - 1 = -3x - 6$, $y = -3x - 5$. 確

かめ: $-3 \times (-2) - 5 = 6 - 5 = 1$.

3-6

じ1 $\frac{\text{こうてん}}{\text{交点}} = (2, 4)$. $2 + 2 = 4$, $-2 + 6 = 4$
 で両方をみたとす.

じ2 (1) $2x + 1 = -x + 7$, $3x = 6$,

$x = 2$, $y = 5$. (2) $4x - 3(x - 2) = 9$,

$4x - 3x + 6 = 9$, $x = 3$, $y = 1$.

じ3 (1) ひいて $y = 3$. $3x + 3 = 9$ より

$x = 2$. (2) たして $2x = 12$, $x = 6$.

$6 + y = 9$ より $y = 3$.

じ4 (1) $\frac{\text{した}}{\text{下}} \times 3$ は $6x - 3y = 18$. $\frac{\text{うえ}}{\text{上}}$

とたして $7x = 28$, $x = 4$.

$4 + 3y = 10$ より $y = 2$. (2) $\frac{\text{うえ}}{\text{上}} \times 2$ は

$6x + 4y = 14$, $\frac{\text{した}}{\text{下}} \times 3$ は

$6x + 9y = 24$. ひいて $5y = 10$,

$y = 2$. $3x + 4 = 7$ より $x = 1$.

じ5 ジュースを x 円, パンを y 円とすると,

$2x + y = 380$, $x + 3y = 540$. 2 つめ

$\times 2$ は $2x + 6y = 1080$. 1 つめをひい

て $5y = 700$, $y = 140$.

$x = 540 - 420 = 120$. ジュース 120

円, パン 140 円.

じ6 $y = 40x$, $y = -60x + 1500$.

$40x = -60x + 1500$, $100x = 1500$,

$x = 15$. $y = 40 \times 15 = 600$. 15 分

後, 家から 600 m の所.

じ7 (1) 傾きが同じで切片がちがうので,

なし. (2) $-3y = -3x - 9$, $y = x + 3$

で同じ直線なので, 無数.

(3) $x + 3 = -2x + 6$, $3x = 3$,

$x = 1$, $y = 4$. 1 組.

じ8 $2a + b = 7$, $4a + b = 11$. ひいて

$2a = 4$, $a = 2$. $4 + b = 7$ より $b = 3$.

$y = 2x + 3$.

じ9 $\frac{\text{ひだり}}{\text{左}}: 9 = 3I_1 + (I_1 + I_2)$ より

$4I_1 + I_2 = 9$. $\frac{\text{みぎ}}{\text{右}}: 6 = 3I_2 + (I_1 + I_2)$

より $I_1 + 4I_2 = 6$. 1 つめ $\times 4$ から 2

つめをひいて $15I_1 = 30$, $I_1 = 2$.

$8 + I_2 = 9$ より $I_2 = 1$. $I_1 = 2\text{ A}$,

$I_2 = 1\text{ A}$, まん中は 3 A .

1 (1, 4). $1 + 3 = 4$, $-1 + 5 = 4$.

2 (1) $2x - 3 = -x + 6$, $3x = 9$,

$x = 3$, $y = 3$. (2) $2x - 3(x - 1) = 1$,

$-x + 3 = 1$, $x = 2$, $y = 1$.

- 3 (1) ひいて $2y = 4$, $y = 2$.
 $4x + 2 = 14$ より $x = 3$. (2) たして
 $2x = 14$, $x = 7$. $y = 3$.
- 4 (1) 上^{うえ} $\times 2$ は $6x + 2y = 20$. 下^{した} とたし
て $7x = 21$, $x = 3$. $9 + y = 10$ より
 $y = 1$. (2) 上^{うえ} $\times 3$ は $6x + 9y = 21$, 下^{した}
 $\times 2$ は $6x + 4y = 16$. ひいて $5y = 5$,
 $y = 1$. $2x + 3 = 7$ より $x = 2$.
- 5 (1) 傾き^{かたむ} が同じで切片^{おな} がちがうので、
なし. (2) $-2y = -2x + 4$, $y = x - 2$
で同じ直線^{ちよくせん}なので、無数^{むすう}.
- 6 大人^{おとな} を x 円^{えん}、子ども^こ を y 円^{えん} とすると、
 $2x + 3y = 2600$, $x + 2y = 1500$. 2
つめ $\times 2$ は $2x + 4y = 3000$. 1 つめを
ひいて $y = 400$.
 $x = 1500 - 800 = 700$. 大人^{おとな} 700 円^{えん},
子ども^こ 400 円^{えん}.
- 7 $y = 60x$, $y = -100x + 2000$.
 $160x = 2000$, $x = 12.5$.
 $y = 60 \times 12.5 = 750$. 12.5 分^{ふん} 後^ご (12
分^{ふん} 30 秒^{びょうご} 後^ご)、750 m の所^{ところ}.
- 8 左^{ひだり} : $9 = 3I_1 + 2(I_1 + I_2)$ より
 $5I_1 + 2I_2 = 9$. 右^{みぎ} :
 $12 = 3I_2 + 2(I_1 + I_2)$ より
 $2I_1 + 5I_2 = 12$. 1 つめ $\times 5$ は
 $25I_1 + 10I_2 = 45$, 2 つめ $\times 2$ は
 $4I_1 + 10I_2 = 24$. ひいて $21I_1 = 21$,
 $I_1 = 1$. $5 + 2I_2 = 9$ より $I_2 = 2$.
 $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, まん^{なか} 中は 3 A.
- 9 $-a + b = 1$, $2a + b = 7$. 2 つめから 1
つめをひいて $3a = 6$, $a = 2$.
 $-2 + b = 1$ より $b = 3$. $y = 2x + 3$.

3-7

- じ1 (1) $a = 4 \times (-3) = -12$ で
 $y = -\frac{12}{x}$. (2) $x = 2$ のとき -6 ,
 $x = -6$ のとき 2. (3) $6x = -12$ で
 $x = -2$
- じ2 y は順^{じゆん}に $-1, -2, -3, -6, 6, 3, 2$,
1. 右上^{みぎうえ} と左下^{ひだりした} の区画^{くかく} を通る双曲線^{とお そうきよくせん} (軸^{じく}
にはくつつかない)
- じ3 (1) $a = 3 \times (-4) = -12$ で
 $y = -\frac{12}{x}$. (2) $(-6) \times 2 = -12$ なの
で $(-6, 2)$ はのっている. $2 \times 6 = 12$
なので $(2, 6)$ はのっていない
- じ4 $x = 2, 4, 8$ で $y = 12, 6, 3$. $2 \rightarrow 4$ は
 $\frac{6-12}{4-2} = -3$, $4 \rightarrow 8$ は $\frac{3-6}{8-4} = -\frac{3}{4}$
- じ5 $pV = 100 \times 40 = 4000$.
(1) $4000 \div 25 = 160$ で 160 kPa.
(2) $4000 \div 400 = 10$ で 10 mL. (3) 4
倍^{ばい}. (4) $4000 \div 500 = 8$ で 8 mL, $\frac{1}{5}$
- じ6 $x \times y$ はどれも 6 なので反比例^{はんびれい} で
 $y = \frac{6}{x}$ (オームの法則^{ほうそく} $V = RI$ と同^{おな}
じ). $y = \frac{6}{12} = 0.5$ で 0.5 A
- 1 $a = 2 \times 9 = 18$ で $y = \frac{18}{x}$. $x = -3$
のとき $y = -6$. $4x = 18$ で $x = 4.5$
- 2 y は順^{じゆん}に $2, 3, 4, 6, -6, -4, -3$,
 -2 . 左上^{ひだりうえ} と右下^{みぎした} の区画^{くかく} を通る双曲線^{とお そうきよくせん}
- 3 ア、イ、エ ($x \times y$ が 20 になるもの。
ウは -20)
- 4 $1 \rightarrow 3$ は $\frac{6-18}{3-1} = -6$, $3 \rightarrow 6$ は
 $\frac{3-6}{6-3} = -1$
- 5 $pV = 100 \times 50 = 5000$.
(1) $5000 \div 20 = 250$ で 250 kPa.
(2) $5000 \div 125 = 40$ で 40 mL

- 6** $x \times y$ はどれも 600。だから式は
 $y = \frac{600}{x}$ 。 $600 \div 24 = 25$ で 25 回転
- 7** $a = 3 \times 4 = 12$ で $y = \frac{12}{x}$ 。
 $b = \frac{12}{6} = 2$ 。 $-2c = 12$ で $c = -6$
- 8** $pV = 100 \times 500 = 50000$ 。
 (1) $50000 \div 50 = 1000$ で 1000 kPa。
 (2) $1200 \div 100 = 12$ 倍なので、体積は $\frac{1}{12}$
- 9** (1) $xy = 120$ で $y = \frac{120}{x}$ 。
 (2) $x = 40$ で 3 時間、 $x = 60$ で 2 時間。
 (3) $1.5x = 120$ で $x = 80$ 、
 80 km/h
- 10** $pV = 100 \times 120 = 12000$ 。
 $12000 \div 80 = 150$ で 150 mL
- 11** $x \times y$ はどれも 12 なので $y = \frac{12}{x}$ 。
 $y = \frac{12}{8} = 1.5$ で 1.5 A
- 12** $b = -\frac{18}{3} = -6$ 。 $xy = -18$ に $y = 2$
 を入れて $2c = -18$ 、 $c = -9$
- 13** pV が一定なので、体積が $\frac{1}{5}$ なら圧力は
 5 倍

3-8

- じ 1** (1) $12x^2y$ 、3 次。(2) $-6a^2b$ 、3 次。
 (3) $9x^2$ 、2 次
- じ 2** (1) $ab + a + 4b + 4$ 。
 (2) $3x^2 + 12x - 2x - 8$
 $= 3x^2 + 10x - 8$
- じ 3** (1) $x^2 + 12x + 36$ 。
 (2) $100 - 40x + 4x^2$ 。(3) $x^2 - 49$ 。
 (4) $x^2 - 2x - 24$
- じ 4** (1) $(100 + 3)^2 = 10609$ 。
 (2) $(100 - 1)^2 = 9801$ 。

$$(3) (50 + 2)(50 - 2) = 2500 - 4 = 2496。$$

$$(4) (1 + 0.2)^2 = 1 + 0.4 + 0.04 = 1.44$$

- じ 5** (1) $6(x^2 + 3x - 4)$ 。(2) $5t(t - 4)$ 。
 (3) $4(x^2 - 1)$

- じ 6** (1) 恒等式。(2) 方程式。 $-6x = -18$
 で $x = 3$ のときだけ

- じ 7** (1) $2p = 10$ で $p = 5$ 、 $25 + q = 30$ で
 $q = 5$ 。(2) $a = 4$ 、 $a + b = 5$ で $b = 1$

- じ 8** $x = 2$ で $16 = 4A$ 、 $A = 4$ 。 $x = -2$
 で $-8 = -4B$ 、 $B = 2$ ($A + B = 6$ 、
 $2A - 2B = 4$ で合う)

- じ 9** (1) $(x + 4)^2 - 6$ 、 $x = -4$ のときいち
 ばん小さく -6 。(2) $(x - 5)^2 + 5$ 。
 (3) $(x + \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}$

- じ 10** (1) $3\{(x + 2)^2 - 4\} + 7$
 $= 3(x + 2)^2 - 5$ 。
 (2) $h = -5(t - 1)^2 + 7$ で、1 秒後に
 7 m

- じ 11** $3 = A(x + 2) + B(x - 1)$ 。 $x = 1$ で
 $3 = 3A$ 、 $A = 1$ 。 $x = -2$ で
 $3 = -3B$ 、 $B = -1$ 。
 $\frac{3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$
 ($A + B = 0$ 、 $2A - B = 3$ に合う)

1 (1) $-10a^2b$ 。(2) $9x^2$

2 (1) $xy - 5x + 2y - 10$ 。

(2) $2x^2 + 5x - 3$ 。

(3) $x^2 - 10x + 25$ 。

(4) $36 - 24x + 4x^2$ 。

(5) $t^2 + 2t - 15$ 。(6) $x^2 - 81$

- 3** (1) $(200 + 1)^2 = 40000 + 400 + 1$
 $= 40401$ 。(2) $(1 + 0.05)^2$
 $= 1 + 0.1 + 0.0025 = 1.1025$ 。
 (3) $(30 + 1)(30 - 1) = 900 - 1 = 899$

4 (1) $8(x^2 - 3x + 2)$ 。(2) $3x(x + 5)$

5 (1) 恒等式。

(2) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1$ から $2x = 0$
で、 $x = 0$ のときだけ成り立つ方程式

6 (1) $(x - 2)^2 + 3$ 、 $x = 2$ のとき 3。

(2) $(x + 1)^2 - 4$ 、 $x = -1$ のとき -4

7 代入： $x = 1$ で $12 = 3A$ 、 $A = 4$ 。
 $x = -2$ で $-9 = -3B$ 、 $B = 3$ 。係数：
 $(A + B)x + (2A - B)$ から

$A + B = 7$ 、 $2A - B = 5$ 。たして

$3A = 12$ 、 $A = 4$ 、 $B = 3$

8 $h = -5(t^2 - 6t) = -5\{(t - 3)^2 - 9\}$
 $= -5(t - 3)^2 + 45$ 。3 秒後に 45 m

9 $2(x^2 + 6x) + 13$
 $= 2\{(x + 3)^2 - 9\} + 13$
 $= 2(x + 3)^2 - 5$ 。 $x = -3$ のとき -5

3-9

じ1 $a = \frac{18}{3^2} = 2$ で $y = 2x^2$ 。 $x = 4$ のとき
 $y = 2 \times 16 = 32$ 、 $x = -2$ のとき
 $y = 2 \times 4 = 8$

じ2 (1) 1、0.25、0、0.25、1。上に開いた
放物線。(2) -8、-2、0、-2、-8。下
に開いた放物線。どちらも頂点は原点、
軸は y 軸

じ3 (1) $\frac{48 - 12}{4 - 2} = \frac{36}{2} = 18$
(2) $3(2 + h)^2 = 12 + 12h + 3h^2$ 。
 $\frac{12h + 3h^2}{h} = 12 + 3h$

じ4 (1) 頂点 (1, -5)、軸 $x = 1$ 、上に開く
(2) 頂点 (-2, -1)、軸 $x = -2$ 、
上に開く

じ5 (1) $(x + 1)^2 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$
で頂点 (-1, -4) (2) $-5(t^2 - 2t)$

$= -5\{(t - 1)^2 - 1\} = -5(t - 1)^2 + 5$
で頂点 (1, 5)

じ6 (1) 最大値 8 ($x = 2$)、最小値 2

($x = 1$) (2) 最大値 18 ($x = -3$)、

最小値 0 ($x = 0$) (3) 最大値 5

($t = 1$)、最小値 0 ($t = 0$)

じ7 (1) $y = 5\left(\frac{x}{10}\right)^2 = 0.05x^2$ (2) 4 m
すすみ、0.8 m 下がる。 $0.05 \times 4^2 = 0.8$
で合う

1 $a = \frac{27}{9} = 3$ で $y = 3x^2$ 。 $x = -2$ の
とき $y = 3 \times 4 = 12$

2 (1) 1、0.25、0、0.25、1。上に開いた
放物線。(2) -4、-1、0、-1、-4。下
に開いた放物線。どちらも頂点は原点

3 (1) $\frac{36 - 4}{2} = 16$
(2) $4(1 + h)^2 - 4 = 8h + 4h^2$ 。
 $8 + 4h$

4 (1) 頂点 (-4, -1)、軸 $x = -4$ 、上に
開く (2) 頂点 (2, 5)、軸 $x = 2$ 、下
に開く

5 (1) $(x - 3)^2 - 4$ で頂点 (3, -4)
(2) $-5(t - 4)^2 + 80$ で頂点 (4, 80)

6 (1) 最大値 16 ($x = 4$)、最小値 4
($x = 2$) (2) 最大値 9 ($x = -3$)、
最小値 0 ($x = 0$)

7 (1) $y = -5(t - 3)^2 + 45$ 。3 秒後に
45 m (2) 頂点 $t = 3$ は範囲の中で 45。
 $t = 1$ で 25、 $t = 4$ で 40。最大値 45 m
($t = 3$)、最小値 25 m ($t = 1$)

8 (1) $t = x$ なので $y = 5x^2$
(2) $x = 1 \times 0.4 = 0.4$ で 0.4 m 先。
 $5 \times 0.4^2 = 5 \times 0.16 = 0.8$ で合う

9 (1) $\frac{45-20}{3-2} = 25$ で 25 m/s
(2) $5(2+h)^2 - 20 = 20h + 5h^2$.

$20 + 5h$ 。 $h = 0.1$ で 20.5

10 (1) $a = \frac{10}{10^2} = 0.1$ で $y = 0.1v^2$
(2) $0.1 \times 900 = 90$ で 90 m。 9 倍

3-10

1 (1) $x = \pm 7$ (2) $x = \pm \sqrt{10}$
(3) $t^2 = 16$ 、 $t = \pm 4$ 。時刻なので 4 秒後 (4) $x + 1 = \pm 4$ 。 $x = 3, -5$

2 (1) $x = 0$ または $x + 4 = 0$ 。
 $x = 0, -4$ (2) $x = 1, 6$

3 (1) $x(x-1) = 0$ で $x = 0, 1$
(2) $5t(t-4) = 0$ で $t = 0, 4$

4 (1) $(x+2)(x+4)$
(2) $(x-2)(x-3)$ (3) $(t+5)(t-2)$
(4) $(x-4)(x+3)$

5 (1) $(x+3)(x-3)$
(2) $2(x^2-4) = 2(x+2)(x-2)$
(3) $3(t^2-4t+3) = 3(t-1)(t-3)$

6 (1) $(x+3)(x-2) = 0$ で $x = -3, 2$
(2) $t^2 + 2t - 8 = 0$ 、
 $(t+4)(t-2) = 0$ 。 $t > 0$ なので 2 秒後 (3) $t^2 - 5t + 4 = 0$ 、
 $(t-1)(t-4) = 0$ 。 1 秒後と 4 秒後

7 (1) $(x+3)^2 = 5$ 、 $x = -3 \pm \sqrt{5}$
(2) $t^2 - 4t + 1 = 0$ 、 $(t-2)^2 = 3$ 、
 $t = 2 \pm \sqrt{3}$ 。約 0.27 秒後と約 3.73 秒後

8 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(4) $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

9 (1) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$

(2) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$
 $= 1 \pm \sqrt{3}$

10 (1) $D = 9 - 16 = -7$ でない
(2) $D = 36 - 36 = 0$ で 1 つ
(3) $D = 1 + 4 = 5$ で 2 つ
(4) $5t^2 - 20t + 18 = 0$ 、
 $D = 400 - 360 = 40 > 0$ なので届く
(上りと下りの 2 回)

11 (1) プラスは $x < -2$ と $x > 4$ 、マイ
ナスは $-2 < x < 4$
(2) $y - 20 = -5(t-1)(t-4)$ で、1
秒後から 4 秒後まで

1 (1) $x = \pm 6$ (2) $x = \pm \sqrt{5}$
(3) $x - 3 = \pm 2$ で $x = 5, 1$

2 (1) $(x+2)(x+3)$
(2) $(x-2)(x-5)$ (3) $(x+4)(x-3)$
(4) $(x+4)(x-4)$
(5) $2(x+3)(x-3)$ (6) $x(x-6)$

3 (1) $x(x-3) = 0$ で $x = 0, 3$
(2) $(x-2)(x-4) = 0$ で $x = 2, 4$
(3) $(t+3)(t-2) = 0$ で $t = -3, 2$

4 (1) $(x-1)^2 = 2$ で $x = 1 \pm \sqrt{2}$
(2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

5 (1) $2\sqrt{5}$ (2) $3\sqrt{5}$ (3) $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

6 (1) $D = 4 - 12 = -8$ でない
(2) $D = 16 - 16 = 0$ で 1 つ
(3) $D = 9 + 4 = 13$ で 2 つ

7 (1) $t^2 - 6t + 5 = 0$ 、
 $(t-1)(t-5) = 0$ で 1 秒後 (上り) と
5 秒後 (下り)
(2) $y - 25 = -5(t-1)(t-5)$ で、1
秒後から 5 秒後まで
(3) $-5t^2 + 30t = 0$ 、 $-5t(t-6) = 0$
で $t = 0, 6$ 。 6 秒後

8 $v^2 + 10v - 600 = 0$,
 $(v + 30)(v - 20) = 0$. $v > 0$ なので
 20 m/s.
 $20 \text{ m/s} \times 3600 \text{ s/h} \div 1000 \text{ m/km}$
 $= 72 \text{ km/h}$

9 $5t^2 - 20t + 21 = 0$,
 $D = 400 - 420 = -20 < 0$ で届かな
 い。最高点は 20 m (2 秒後) なので、
 21 m には届かないことと合う

10 $t^2 - 6t + 6 = 0$, $(t - 3)^2 = 3$,
 $t = 3 \pm \sqrt{3}$. 約 1.27 秒後 (上り) と約
 4.73 秒後 (下り)

3-11

じ1 (1) $120 \text{ min} \div 20 \text{ min} = 6$ 回。
 $500 \times 2^6 = 32000$ で 32000 個。(2) 7
 回で 64000、8 回で 128000。
 $20 \times 8 = 160$ で 160 min、2 時間 40
 分後

じ2 (1) $1.05^2 = 1.1025$,
 $40000 \times 1.1025 = 44100$ で 44100
 円。(2) $0.9^3 = 0.729$,
 $100000 \times 0.729 = 72900$ で 72900 円

じ3 (1) $16 \times 2 = 32$ (2) $3^4 = 81$ (3) 1
 (4) $\frac{1}{100}$ (5) $3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x$

じ4 (1) $\frac{30}{6} = 5$ 回。 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
 (2) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ で 3 回。 $6 \times 3 = 18$ で
 18 時間後

じ5 (1) 5 (2) $\frac{1}{3}$
 (3) $9 \times \sqrt{9} = 9 \times 3 = 27$ (4) 100

じ6 (1) $\frac{15}{30} = 0.5$. $2000 \times 0.707 = 1414$
 で約 1414 g (2) $\frac{45}{30} = 1.5$.
 $2000 \times 0.5 \times 0.707 = 707$ で約 707 g

じ7 (1) $5 \times \sqrt{5} = 5 \times 2.236 = 11.18$
 (2) $p \times 0.1436 = 1$ より
 $p = \frac{1}{0.1436} = 6.96 \dots$ で約 6.96 倍

1 (1) 6 回。 $100 \times 2^6 = 6400$ で 6400
 個。(2) 6 回で 6400、7 回で 12800。
 $20 \times 7 = 140$ で 140 min、2 時間 20
 分後

2 (1) $1.04^2 = 1.0816$,
 $50000 \times 1.0816 = 54080$ で 54080
 円。(2) $0.75^2 = 0.5625$,
 $80 \times 0.5625 = 45$ で 45 万円

3 (1) $32 \times 2 = 64$ (2) $2^9 = 512$ (3) 1
 (4) $\frac{1}{9}$ (5) 5×5^x

4 (1) $\frac{17190}{5730} = 3$ 回。 $\frac{1}{8}$ (2) 2 回。
 $5730 \times 2 = 11460$ で 11460 年後

5 (1) 6 (2) $\frac{1}{5}$
 (3) $4^2 \times 4^{0.5} = 16 \times 2 = 32$
 (4) $16 \times \sqrt{16} = 16 \times 4 = 64$

6 (1) 0.5 回。 $800 \times 0.707 = 565.6$ で
 約 566 mg (2) 1.5 回。
 $800 \times 0.5 \times 0.707 = 282.8$ で約
 283 mg

7 1 時間 30 分は 1.5 回。
 $2^{1.5} = 2 \times 1.414 = 2.828$,
 $1000 \times 2.828 = 2828$ で約 2828 個

8 $0.1^{1.4} = 0.0398$. $p \times 0.0398 = 1$ よ
 り $p = \frac{1}{0.0398} = 25.1 \dots$ で約 25.1 倍

9 1 年ごとに 0.98 倍。
 $0.98^{10} = 0.8170 \dots$ で約 81.7 %

3-12

じ1 (1) 6 (2) 3 (3) 4 (4) -2 (5) $\frac{1}{2}$
 (6) 0

- じ2** (1) $12 = 2^2 \times 3$.
 $2 \times 0.301 + 0.477 = 1.079$
 (2) $9 = 3^2$. $2 \times 0.477 = 0.954$
 (3) $20 = 2 \times 10$. $0.301 + 1 = 1.301$
 (4) $0.5 = 2^{-1}$. -0.301

- じ3** (1) $20 \times 0.477 = 9.54$.
 $10^9 \leq 3^{20} < 10^{10}$ で 10 けた
 (2) $50 \times 0.301 = 15.05$.
 $10^{15} \leq 2^{50} < 10^{16}$ で 16 けた

- じ4** (1) $\frac{4}{0.477} = 8.38\dots$. $3^8 = 6561$,
 $3^9 = 19683$ で 9 回目
 (2) $\frac{0.301}{0.079} = 3.81\dots$. $1.2^3 = 1.728$,
 $1.2^4 = 2.0736$ で 4 年後
 (3) $2^n \geq 100$. $\frac{2}{0.301} = 6.64\dots$.
 $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ で 7 回.
 $30 \times 7 = 210$ で 210 年後

- じ5** (1) $10 \times 2 = 20$ で 20 dB
 (2) $10 \times 0.301 = 3.01$ で約 3 dB
 (3) $20 \times 2 = 40$ で 40 dB (4) 30 dB.
 $10^3 = 1000$ で 1000 倍

- じ6** (1) $10^{0.699} = 10^{\log_{10} 5} = 5$ で 5 倍
 (2) $5 \times 5 = 25$ で 25 倍

- じ7** (1) 点 (81, 4) (2) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ なので
 $y = -3$

- 1** (1) 4 (2) 3 (3) -1 (4) -2 (5) $\frac{1}{2}$
 (6) 0

- 2** (1) $18 = 2 \times 3^2$.
 $0.301 + 0.954 = 1.255$ (2) $16 = 2^4$.
 $4 \times 0.301 = 1.204$ (3) $50 = \frac{100}{2}$.
 $2 - 0.301 = 1.699$
 (4) $0.301 - 0.477 = -0.176$

- 3** (1) $40 \times 0.301 = 12.04$ で 13 けた
 (2) $30 \times 0.477 = 14.31$ で 15 けた

- 4** $\log_2 100000 = \frac{5}{0.301} = 16.6\dots$.
 $2^{16} = 65536$, $2^{17} = 131072$ で 17 回
 目

- 5** (1) $10 \times 4 = 40$ で 40 dB
 (2) $20 \times 3 = 60$ で 60 dB
 (3) $-3 + (-3) = -6$ で約 -6 dB
 (電力は $\frac{1}{4}$)

- 6** (1) 点 (64, 6) (2) $10^{0.301} = 2$ で 2 倍

- 7** $100 \times 0.301 = 30.1$.
 $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$ で 31 けた

- 8** $90 - 40 = 50$ dB. $50 \div 10 = 5$ なので
 $10^5 = 100000$ 倍

- 9** $20 + 40 = 60$ dB. $60 \div 10 = 6$ なので
 電力は $10^6 = 1000000$ 倍 (電圧は
 1000 倍)

- 10** $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{0.477}{0.301} = 1.584\dots$
 で約 1.58. 2 を約 1.58 乗すると 3 に
 なる

3-13

- じ1** はなれ 0.6、0.4、0.9、0.5、0.6 の合計
 3.0 、 $3.0 \div 5 = 0.6$.
 $\bar{x} = 24.0 + 0.6 = 24.6$ で 24.6°C

- じ2** (1) $4 \sim 6 : 1$ 、 $6 \sim 8 : 5$ 、 $8 \sim 10 : 9$ 、
 $10 \sim 12 : 4$ 、 $12 \sim 14 : 1$. (2) 相対度数
 0.05 、 0.25 、 0.45 、 0.20 、 0.05 . 累積
 度数 1、6、15、19、20. (3) 6 回

- じ3** (1) 30.05 mm (2) $1 + 5 + 12 = 18$
 本. $18 \div 40 = 0.45$ で 45%
 (3) 30.0 mm 以上 30.1 mm 未満 (累
 積度数 18、33)

- じ4** ならべると 21、22、22、22、23、24、
 25、25、41. (1) 平均 $225 \div 9 = 25$ 、
 中央値 23、最頻値 22、範囲

$$41 - 21 = 20 \quad (2) \quad 184 \div 8 = 23$$

(3) 中央値

- 【5】 ならべると 16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、30。第1四分位数 18、中央値 21、第3四分位数 24。箱は 18 から 24、中央値の線は 21、ひげは 16 から 30 まで

- 【6】 ならべると 29.1、29.9、30.0、30.0 | 30.1、30.1、30.2、30.2。第1四分位数 29.95、第3四分位数 30.15、四分位範囲 0.2、 $0.2 \times 1.5 = 0.3$ 。29.65 より小さい 29.1 が外れ値

- 【7】 (1) 1 班：範囲 $26 - 13 = 13$ 、四分位範囲 $20 - 15 = 5$ 。2 班：範囲 $23 - 12 = 11$ 、四分位範囲 $16 - 14 = 2$
(2) 1 班 (17 と 15) (3) 2 班

- 【1】 はなれ 0.23、0.18、0.25、0.16、0.18 の合計 1.00 、 $1.00 \div 5 = 0.20$ 。
 $\bar{x} = 14.20$ 秒

- 【2】 (1) $10 \sim 15 : 1$ 、 $15 \sim 20 : 7$ 、 $20 \sim 25 : 8$ 、 $25 \sim 30 : 4$ (2) 相対度数 0.05、0.35、0.40、0.20。累積度数 1、8、16、20 (3) 8 人

- 【3】 ならべると 16、16、16、17、18、19、20、21、28。平均 $171 \div 9 = 19$ で 19 cm、中央値 18 cm、最頻値 16 cm、範囲 $28 - 16 = 12$ で 12 cm

- 【4】 ならべると 24、25、26、27、28、29、30、30、31、32、33。第1四分位数 26、中央値 29、第3四分位数 31。箱は 26 から 31、線は 29、ひげは 24 から 33 まで

- 【5】 ならべると 49、50、50、50 | 51、51、52、58。第1四分位数 50、第3四分位数 51.5、四分位範囲 1.5、

$$1.5 \times 1.5 = 2.25。53.75 \text{ より大きい} \\ 58 \text{ が外れ値}$$

- 【6】 (1) 59 g (2) $3 + 7 = 10$ こ、 $10 \div 40 = 0.25$ で 25% (3) 58 g 以上 60 g 未満 (累積度数 10、23)

- 【7】 ならべると 0.96、1.50、1.51、1.52、1.52、1.53、1.54。(1) 平均 $10.08 \div 7 = 1.44$ で 1.44 V、中央値 1.52 V (2) $9.12 \div 6 = 1.52$ で 1.52 V (3) 中央値 (0.96 に引っぱられない)

- 【8】 (1) P：範囲 $20.6 - 19.6 = 1.0$ 、四分位範囲 $20.2 - 20.0 = 0.2$ 。Q：範囲 $20.4 - 19.4 = 1.0$ 、四分位範囲 $20.2 - 19.7 = 0.5$ (2) P (20.1 と 19.9) (3) P (範囲は同じだが、四分位範囲が P のほうが小さい)

- 【9】 ならべると 99.7、99.8、99.9、99.9、100.0、100.0 | 100.0、100.0、100.1、100.1、100.2、100.3。(1) 平均 $1200.0 \div 12 = 100.0$ 、中央値 100.0、第1四分位数 99.9、第3四分位数 100.1 (2) 四分位範囲 0.2、 $0.2 \times 1.5 = 0.3$ 。99.6 より小さい値も 100.4 より大きい値もないので、ない

3-14

- 【1】 平均 $305 \div 5 = 61$ 。偏差は +2、-3、0、+5、-4 (m)。合計 $2 - 3 + 0 + 5 - 4 = 0$

- 【2】 平均 20。偏差 +6、-6、0、+2、-2。2 乗 36、36、0、4、4 の合計 80。分散 $80 \div 5 = 16$ 、 $\sigma = \sqrt{16} = 4$ で 4 点

- 【3】 どちらも平均 20。P：2 乗の合計 20、分散 4、 $\sigma = 2$ 。Q：2 乗の合計 58、分

さん
散 11.6、 $\sigma = \sqrt{11.6} = 3.40\dots$ 。P のほ
うがそろっている

じ 4 (1) 18 から 22 まで (2) 19、22、21、
19、22、21、19 の 7 回。7 ÷ 10 = 0.7
で 70%

じ 5 (1) 1000 mL/L でわる。平均 0.5 L、
 σ 0.002 L (2) 平均 510 mL、 σ 2 mL
(3) 平均 0.51 L、 σ 0.002 L

じ 6 (1) $0.5 \div \sqrt{25} = 0.5 \div 5 = 0.1$ で
0.1 g (2) $0.5 \div 10 = 0.05$ で 0.05 g
(3) $0.5 \div 0.25 = 2$ なので $\sqrt{n} = 2$ 、
 $n = 4$ で 4 回

1 平均 $41.0 \div 5 = 8.2$ 。偏差は +0.2、
-0.1、+0.1、-0.2、0 (秒)。合計 0

2 平均 30。偏差 +3、-3、0、+1、-1。
2 乗の合計 20。分散 4、 $\sigma = 2$

3 どちらも平均 22。S: 2 乗の合計 10、分
散 2、 $\sigma = \sqrt{2} = 1.41\dots$ 。T: 2 乗の合
計 2、分散 0.4、 $\sigma = \sqrt{0.4} = 0.63\dots$ 。
T のほうがそろっている

4 (1) 26 分から 34 分まで (2) 31、33、
28、30、34、31、32 の 7 日。70%

5 (1) 10 mm/cm でわる。平均
2.00 cm、 σ 0.03 cm (2) 平均
25.0 mm、 σ 0.3 mm

6 (1) $0.8 \div \sqrt{16} = 0.8 \div 4 = 0.2$ で
0.2 g (2) $0.8 \div 0.1 = 8$ なので
 $\sqrt{n} = 8$ 、 $n = 64$ で 64 回

7 (1) 平均 $66 \div 6 = 11$ 。偏差 +1、-3、
+3、0、-2、+1、2 乗の合計 24、分散
4、 $\sigma = 2$ (2) 9 から 13 まで。12、11、
9、12 の 4 回

8 平均 $20.0 \times 1.8 + 32 = 68.0$ で
68.0°F。 σ は 1.8 倍して

$0.5 \times 1.8 = 0.9$ で 0.9°F (32 をたし
ても変わらない)

9 $0.1 \div 0.004 = 25$ なので $\sqrt{n} = 25$ 、
 $n = 25^2 = 625$ で 625 回

3-15

じ 1 点は右上がり、細い帯に集まる。強い
正の相関がある (気温が高い日ほど、よ
く売れる)

じ 2 (1) 負の相関 (読書が長いほど、ゲー
ムの時間が短くなりやすい) (2) 正の
相関 (3) 相関がない

じ 3 言えない。町の大きさ (人口や建物の
数) が大きいほど、消防車も火事も多く
なるから

じ 4 $\bar{x} = 6$ 、 $\bar{y} = 6$ 。偏差の積は 12、4、0、
6、8 で合計 30。 $\sigma_{xy} = 30 \div 5 = 6$ 。
正の相関

じ 5 偏差の 2 乗の合計は x が 40、 y が 26。
 $\sigma_x = \sqrt{8} = 2.828\dots$ 、
 $\sigma_y = \sqrt{5.2} = 2.280\dots$ 。
 $r = 6 \div (2.828 \times 2.280) = 6 \div 6.450$
 $= 0.93$

じ 6 y の偏差が 100 倍になるので、共分散
は 100 倍の 600。 σ_y も 100 倍なので、
相関係数は変わらず 0.93

1 点は右上がり、細い帯に集まる。強い
正の相関がある

2 (1) 正の相関 (2) 負の相関 (3) 相
関がない

3 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 6$ 。偏差の積は -6、-1、
0、-2、-4 で合計 -13。
 $\sigma_{xy} = -13 \div 5 = -2.6$ 。負の相関

- 4 偏差の2乗の合計は x が10、 y が18。

$$\sigma_x = \sqrt{2} = 1.414 \dots,$$

$$\sigma_y = \sqrt{3.6} = 1.897 \dots.$$

$$r = -2.6 \div (1.414 \times 1.897)$$

$$= -2.6 \div 2.683 = -0.97$$

- 5 共分散は10倍の-15。相関係数は変わらず-0.6

- 6 言えない。学年(年齢)が上がるほど、勉強時間も長くなり、むし歯の数(これまででできた数)もふえるから

- 7 $\bar{x} = 2.5$ 、 $\bar{y} = 8.5$ 。共分散 3.75、

$$\sigma_x = \sqrt{1.25}$$

$$\sigma_y = \sqrt{11.25}$$

$$\sigma_x \sigma_y = \sqrt{14.0625} = 3.75. r = 1.$$

直線 $y = 3x + 1$ の上

- 8 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 2$ 。偏差の積は-4、1、0、-1、4で合計0。共分散は0 ($r = 0$)。

点は放物線 $y = (x - 3)^2$ の上にある。

x が決まると y が決まるので、関係はある(r は直線にどれだけ近いかしか表さない)

- 9 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 3$ 。偏差の積の合計は8で、共分散1.6。偏差の2乗の合計は x も

$$y$$
 も10で、 $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{2}$ 。

$$r = 1.6 \div (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 1.6 \div 2 = 0.8.$$

強い正の相関

3-16

- じ1 $y = 2x$: ずれ0、1、0で $S = 1$ 。

$$y = 2.5x$$
 : ずれ-0.5、0、-1.5で

$$S = 2.5. y = 2x$$
 のほうがよく合う

- じ2 x^2 の和14、 xy の和28、 y^2 の和59。

$$S = 14a^2 - 56a + 59$$

$$= 14(a - 2)^2 + 3. a = 2$$

- じ3 x^2 の和30、 xy の和120.0。

$$a = 120.0 \div 30 = 4.0$$
 で $y = 4.0x$ 。

$$4.0 \text{ cm} = 0.040 \text{ m},$$

$$k = 1 \div 0.040 = 25$$
 で 25 N/m

- じ4 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 18.0$ 。偏差の積の和20.0、

x の偏差の2乗の和10。 $\sigma_{xy} = 4$ 、

$$\sigma_x^2 = 2, a = 2, b = 18 - 6 = 12.$$

$$y = 2x + 12$$

- じ5 残差は0.1、-0.2、0.2、-0.2、0.1。

小さく、+と-がまざっている。直線でよい

- じ6 (1) $2 \times 2.5 + 12 = 17$ で約17 cm

(2) $2 \times 30 + 12 = 72$ で約72 cm。はかった範囲(1~5個)の外なので信用できない

- 1 $y = x$: ずれ0、1、1で $S = 2$ 。

$$y = 1.5x$$
 : ずれ-0.5、0、-0.5で

$$S = 0.5. y = 1.5x$$
 のほうがよく合う

- 2 x^2 の和14、 xy の和56、 y^2 の和227。

$$S = 14a^2 - 112a + 227$$

$$= 14(a - 4)^2 + 3. a = 4$$

- 3 x^2 の和30、 xy の和30.0。 $a = 1.0$ で

$$y = 1.0x. 1.0 \text{ cm} = 0.010 \text{ m},$$

$$k = 1 \div 0.010 = 100$$
 で 100 N/m

- 4 $\bar{x} = 3$ 、 $\bar{y} = 4.0$ 。偏差の積の和10.0、

x の偏差の2乗の和10。 $\sigma_{xy} = 2$ 、

$$\sigma_x^2 = 2, a = 1, b = 4 - 3 = 1.$$

$$y = x + 1$$

- 5 線の値は0、1.25、2.5、3.75、5.0。残

差は0.5、-0.25、-0.5、-0.25、0.5

で谷の形。直線は合っていない

- 6 $x = 2.5$ で3.5。 $x = 50$ で51。 $x = 50$

ははかった範囲(1~5)の外なので、信用できない

- 7 x^2 の和91、 xy の和136.2。

$$a = 136.2 \div 91 = 1.497.$$

$$y = 1.497x. \quad 1.497 \text{ cm} = 0.01497 \text{ m},$$

$$k = 0.2 \div 0.01497 = 13.4 \text{ で約}$$

$$13 \text{ N/m}$$

8 $\bar{x} = 50, \bar{y} = 12.0$. 偏差の積の和は

$$(-50) \times (-8.0) + 0 \times 0.1 + 50 \times 7.9$$

$$= 795, x \text{ の偏差の 2 乗の和 } 5000.$$

$$a = 795 \div 5000 = 0.159,$$

$$b = 12.0 - 0.159 \times 50 = 4.05.$$

$$y = 0.159x + 4.05$$

3-17

じ1 (1) $930 \div 1500 = 0.62$ で、およそ 0.62 (2) $1000 \times 0.62 = 620$ で、およそ 620 回

じ2 (1) 4 通りで $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (2) 和が 2、3、4 で $1 + 2 + 3 = 6$ 通りで $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

じ3 (1) おうう、うおう、ううおの 3 通りで $\frac{3}{8}$ (2) おおお、うううの 2 通りで $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

じ4 (1) 6 枚の段は 1、6、15、20、15、6、1 で、表 3 枚は 20 通りで $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

(2) $15 + 6 + 1 = 22$ 通りで $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$

じ5 $200 \times \frac{1}{50} = 4, 50 \times \frac{4}{50} = 4,$

$$10 \times \frac{10}{50} = 2. \quad 4 + 4 + 2 = 10 \text{ で } 10 \text{ 円}$$

じ6 $100 \times \frac{3}{6} + 0 \times \frac{3}{6} = 50$ で 50 点

じ7 (1) $2000 \times 0.68 = 1360$ で、およそ 1360 まい (2) $2000 \times 0.95 = 1900$ で、およそ 1900 まい

(3) $(2000 - 1900) \div 2 = 50$ で、およそ 50 まい

じ8 $6 \div 400 = 0.015.$

$$8000 \times 0.015 = 120 \text{ で、およそ } 120 \text{ 本}$$

じ9 印つきの割合 $5 \div 60 = \frac{1}{12}$ より

$$x = 30 \times 12 = 360. \quad \text{およそ } 360 \text{ びき}$$

1 (1) $780 \div 1200 = 0.65$ で、およそ 0.65 (2) $2000 \times 0.65 = 1300$ で、およそ 1300 回

2 (1) 4 通りで $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (2) 和が 2、3 で $1 + 2 = 3$ 通りで $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

3 (1) おおおの 1 通りで $\frac{1}{8}$ (2) 全部表以外の $8 - 1 = 7$ 通りで $\frac{7}{8}$

4 4 枚の段は 1、4、6、4、1 で、表 2 枚は 6 通りで $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. ${}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

5 和が 11 は 2 通りで、12 は 1 通りで、 $2 + 1 = 3$ 通りで $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

6 $1000 \times \frac{2}{200} = 10, 100 \times \frac{20}{200} = 10,$

$$20 \times \frac{50}{200} = 5. \quad 10 + 10 + 5 = 25 \text{ で } 25 \text{ 円}$$

7 (1) 平均 $\pm \sigma$ なので

$$500 \times 0.68 = 340 \text{ で、およそ } 340 \text{ 人}$$

(2) 平均 $\pm 2\sigma$ なので

$$500 \times 0.95 = 475 \text{ で、およそ } 475 \text{ 人}$$

8 1 L あたり 36 びき。

$$5000 \times 36 = 180000 \text{ で、およそ } 18 \text{ 万 びき}$$

9 8 回は 45 通りで、9 回は 10 通りで、10 回は 1 通りで、 $45 + 10 + 1 = 56$ 通りで

$$\frac{56}{1024} = \frac{7}{128} \approx 0.055 \text{ (約 } 5.5\%)$$

10 (1) 平均 $\pm \sigma$ なので

$$1000 \times 0.68 = 680 \text{ で、およそ } 680 \text{ 回}$$

(2) 平均 $+ 2\sigma = 35 + 10.8 = 45.8.$

外側の 5% の半分では

$$1000 \times 0.05 \div 2 = 25 \text{ で、およそ } 25 \text{ 回}$$

こたあ 答え合わせのしかた

- ① まず自分の答えを全部書いてから、ここを見よう。
- ② ちがっていたら、答えだけを直さずに、同じ形の例題にもどって、どの行でちがったかをさがそう。
- ③ 単位もいっしょに確かめよう。数が合っていても、単位がちがえば、ちがう量です (2-1)。

きごう 記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

きごう 記号	よ 読み方 読み方	い 意味 意味	しょう 章
=	イコール	ひだり みぎ おな おお 左と右が同じ大きさ	1-4
-	マイナス	ひき さん ひき算。0 より小さい数の印にも使う (2-2)	1-5
×	かける	ぶん かず 1 つ分の数×いくつつ分	1-12
÷	わる	おな かず わ 同じ数ずつ分ける。1 あたりを求めると もと	1-14
$\frac{1}{2}$	2 分の 1	ぶん 1 を 2 つに等しく分けた 1 つ分	1-16
< > ≤ ≥	ふとうごう 不等号	おお 大きさをくらべる記号。≤ は「以下」、 ≥ は「以上」。変域 (3-1) や不等式 ひと (3-5) で使う	2-2
Δ	デルタ	へんかりよう 変化量。「あとーまえ」で求めると もと は x の変化量	2-3
%	パーセント	ひゃくぶんりつ きごう わりあい 百分率の記号。割合の 0.01 が 1%	2-5
±	プラスマイナス	ずれのはば。3-10 の $x = \pm 3$ は「3 と -3 の 2 つ」の印 しるし	2-6
2^3	2 の 3 乗	かい かず 2 を 3 回かけた数。2 × 2 × 2 = 8	2-7
$\sqrt{\quad}$	ルート	じょう なか かず せい かず 2 乗すると中の数になる正の数。 $\sqrt{9} = 3$	2-8
π	パイ	えんしゅうりつ えんしゅう ちまつけい 円周率。円周 ÷ 直径。3.14159...	2-9
x	エックス	かず 数のかわりに使う文字。この巻では変 さう 数 (3-1)	2-11
()	かっこ	ひとまとまりにする印。かっこの中を なか 先に計算する さき けいさん	2-11
x^{-1}	エックスのマイナス 1 乗	$\frac{1}{x}$ のこと。 x で 1 回わる かい	2-12
g	ジー	お ちぎゅう はや びよう 落ちる物の速さが、1 秒ごとにふえる りよう ちぎゅう やく 量。地球で約 9.8 m/s ²	3-1

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
c	シー	真空の中の光の速さ。約 3.0×10^8 m/s	3-1
x_1	エックス・いち	1 番めの x 。右下の数字は名札で、かけ算ではない	3-2
$ x $	絶対値エックス	x の絶対値。数直線で 0 からの距離。 $ -3 = 3$	3-2
$f(x)$	エフ・エックス	関数 f に x を入れた値	3-3
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	デルタエックス分のデルタ ワイ	傾き。たての変化量 ÷ 横の変化量。	3-5
$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$	れんりつ なみ 連立の波かっこ	2 つ (いくつか) の式を、同時に成り立たせる組だという印。	3-6
α, β	アルファ、ベータ	ギリシャ文字。2 次方程式の 2 つの解によく使う。	3-10
D	ディー	判別式 $b^2 - 4ac$ 。解の個数がわかる。	3-10
$x^{\frac{1}{2}}$	エックスの 2 分の 1 乗	$\sqrt{x}$ のこと。分数の指数	3-11
$\log_a b$	ログ・エー・ビー	a を何乗すると b になるかを表す数 (対数)。 a が底	3-12
dB	デシベル	強さの比を「 $10 \times$ 常用対数」で表す単位。10 倍で 10 dB	3-12
$\bar{x}$	エックス・バー	$x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均。合計を個数 n でわった値	3-13
σ	シグマ	標準偏差。偏差の 2 乗の平均 (分散) の $\sqrt{\quad}$ 。ばらつきの大きさ	3-14
σ_{xy}	シグマ・エックス・ワイ	x と y の共分散。偏差の積の平均。	3-15
r	アール	相関係数。共分散 ÷ $(\sigma_x \times \sigma_y)$ 。-1 から 1 まで。	3-15
$P(A)$	ピー・エー	ことがら A の起こる確率。0 から 1 までの数。	3-17
${}_nC_r$	エヌ・シー・アール	n 個から r 個を選ぶ組合せの数。パスカルの三角形の数。	3-17

きごう か 記号を書くときのちゅうい

この巻では、文字の右下や右上に小さく書く記号や、ギリシャ文字がふえます。手で書くと、ほかの字や記号とまぎれやすいものの、書くときのコツです。

記号	まぎれやすいもの	書くときのコツ
V (V)	VV (VV)	記号と単位が並ぶときは、単位を〔 〕でくる。「電圧 V (V)」 「電流 I (A)」 (3-1)
$f(x)$	$f \times x$	かっこは「 x を入れる」印で、かけ算ではない。 f のすぐ右に書く (3-3)
x_1	$x1, x^1$	1 は右下に小さく。右上に書くと累乗になってしまう (3-2)
$ x $	1, l (エル)	たての線を、数の両側に同じ長さで書く (3-2)
Δy	$\Delta \times y$	Δy で 1 つの量 (y の変化量)。 Δ と y をはなさない (3-5)
$x^{\frac{1}{2}}$	$x\frac{1}{2}$	分数の指数も、右上に小さく書く (3-11)
$\log_2 8$	$\log 28$	底の 2 は右下に小さく。8 はふつうの大ききで書く (3-12)
α	a	丸から右へ、2 本の線を開いてのぼす。 a のようにたての線を書かない (3-10)
β	B	左のたての線を、下へ長くのぼす (3-10)
$\pm$	$+$	+ の下に横線を 1 本 (3-10)
$\bar{x}$	x	横ぼうを x のすぐ上に。 $\bar{x}$ (平均) と x はちがう数 (3-13)
σ	6, b , Σ	丸の上から右へ横ぼうをのぼす。大文字の Σ は別の記号 (5-10) (3-14)
${}_nC_r$	nCr	n は左下、 r は右下に小さく。 C は大きく書く (3-17)
$P(A)$	p	確率の P は大文字。圧力の p (3-7) と区別する (3-17)

よく使う定数・単位・公式

1 この巻で使う単位

量	単位 (読み方)	ほかの単位との関係	章
時間	s (秒)、min (分)、 h (時間)	1 min = 60 s、1 h = 60 min	3-6 3-11
速さ	m/s、m/min、 km/h	道のり ÷ 時間。 $x-t$ グラフの傾き	3-4 3-5
傾き・変化の 速さ	°C/h など	傾きの単位は、たての単位 ÷ 横の単位	3-5
速さの ふえ方	m/s ²	1 秒ごとに、速さが何 m/s ふえるか。 g の単位	3-1
力・ばね定数	N、N/m	ばね定数は、1 m のばすのに何 N いるか ($F = kx$)	3-1 3-16
圧力	Pa (パスカル) kPa	1 m ² あたり 1 N の力が 1 Pa。 1 kPa = 1000 Pa	3-7
温度	°C (摂氏)、°F (華氏)	$F = 1.8C + 32$	3-3
体積	L、mL	1 L = 1000 mL	3-7
電圧・電流 抵抗	V、A、Ω	オームの法則 $V = RI$ 。 1 A = 1000 mA	3-6 3-12
電気の 使用量	kWh (キロワット 時)	電気料金の計算に使う	3-3
強さの比	dB (デシベル)	強さが 10 倍で 10 dB、100 倍で 20 dB	3-12
振動数	Hz (ヘルツ)	100 Hz は、1 秒に 100 回のゆれ	3-12

2 よく使う数

名前	値	章
落ちる物の速さのふえ方 g	約 9.8 m/s^2 (地球の表面の近く)	3-1
真空中の光の速さ c	約 $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ (ちょうど 299792458 m/s)	3-1
円周率 π	$3.14159\cdots$ (数学の定数)	2-9 3-1
$\sqrt{2}$	$1.41421\cdots (= 2^{\frac{1}{2}})$	2-8 3-11
$\sqrt{3}$	$1.73205\cdots$	3-10
$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0.70710\cdots$	3-10
$\log_{10} 2, \log_{10} 3$	$0.301\cdots, 0.477\cdots$	3-12
大気圧	約 101 kPa (1013 hPa)	3-7

3 関数とグラフ・連立方程式

公式・きまり	式	章
物理の式	落ちる物の速さ $v = gt$ 、重力 $W = mg$ 、ばね $F = kx$	3-1
点を動かす	点 (a, b) を右へ p 、上へ q 動かすと $(a + p, b + q)$	3-2
2 点の距離	横に並んだ 2 点は $ x_2 - x_1 $ 、たてに並んだ 2 点は $ y_2 - y_1 $	3-2
関数 $f(x)$	$f(x) = x^2$ なら $f(3) = 9$ 、 $f(a + h) = (a + h)^2$ (かっこごとに入れる)	3-3
合成関数	$g(x) = 3x + 1$ 、 $f(u) = u^2$ なら $f(g(x)) = (3x + 1)^2$ (内側から計算)	3-3
摂氏と華氏	$F = 1.8C + 32$	3-3

つぎのページへつづく

こうしき 公式・きまり	しき 式	しょう 章
かたむ 傾き	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (たての ^{へんかりよう} 変化量÷横の ^{よこへんかりよう} 変化量)	3-5
1 じ かんすう 次関数	$y = ax + b$ (a が ^{かたむ} 傾き=変化の割合、 b が ^{せつぺん} 切片)	3-5
1 てん かたむ 点と傾きから	^{かたむ} 傾き m 、点 (x_1, y_1) を ^{とお} 通る ^{ちよくせん} 直線： $y - y_1 = m(x - x_1)$	3-5
グラフと ^{はや} 速さ	x - t グラフの ^{かたむ} 傾き=速さ。 v - t グラフの ^{めんせき} 面積=道のり	3-5
1 じ ふ とうしき 次不等式	^{りようへん} 両辺に ^{かす} マイナスの数をかける・わると、 ^{ふ とうごう} 不等号の向 ^む きが ^{はんたい} 反対になる	3-5
れんりつほうていしき 連立方程式	^{だいにゆうほう} 代入法：「 $y = \dots$ 」をもう 1 つの ^{しき} 式にかっこごと ^い と入れ ^{か げんほう} る。 ^{けいすう} 加減法：係数をそろえて、 ^{しき} 式 ^{しき} どうしを ^{たす} ・ ^{ひく} ひく	3-6
かい こそう 解の個数	2 本の ^{ほん} 直線が ^{ちよくせん} 交わる→ 1 ^{くみ} 組。平行→ ^{へいこう} 解なし。 ^{かい} 重 ^{かさ} なる→ ^{むすう} 無数	3-6
はん びれい 反比例	$y = \frac{a}{x}$ ($xy = a$)。グラフは ^{そうきよくせん} 双曲線	3-7
ほうそく ボイルの法則	^{おん ど} 温度が ^か 変わらなければ、 ^{き たい} 気体の pV は ^{いってい} 一定	3-7

4 しき けいさん じ かんすう じ ほうていしき 式の計算・2 次関数・2 次方程式

こうしき 公式・きまり	しき 式	しょう 章
てんかい 展開	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (全部の ^{ぜん ぶ} 組み ^く あわせを ^あ かけてたす)	3-8
2 じょう てんかい 乗の展開	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 、 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	3-8
わ さ せき 和と差の積	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	3-8
$(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	3-8
3 じょう てんかい 乗の展開	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	3-8
こうとうしき 恒等式	^{も じ} 文字に ^{かず} どんな ^い 数を入れても ^な 成り ^た 立つ ^{とうしき} 等式。係数を ^{けいすう} 比 ^{くら} べる・ ^{かず} 数を ^{だいにゆう} 代入する、で ^{けいすう} 係数を ^き 決める	3-8

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	しょう章
平方完成 へいほうかんせい	$x^2 + bx + c = (x + p)^2 - p^2 + c$ (p は b の半分)。 例: $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$	3-8 3-9
放物線 ほうぶつせん	$y = ax^2$: $a > 0$ なら上に開く、 $a < 0$ なら下に開く	3-9
放物線を動かす ほうぶつせん うご	$y = a(x - p)^2 + q$: 頂点 (p, q)、軸は直線 $x = p$	3-9
$x^2 = k$	$k > 0$ なら $x = \pm\sqrt{k}$ 。 $k = 0$ なら $x = 0$ 。 $k < 0$ なら解はない	3-10
かけて 0	$A \times B = 0$ なら、 $A = 0$ または $B = 0$	3-10
因数分解 いんすうぶんかい	$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ 。 $x^2 + \boxed{\text{和}}x + \boxed{\text{積}}$ は、 たして和・かけて積の 2 つの数をさがす	3-10
$\sqrt{\quad}$ の計算 けいさん	$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (有理化)	3-10
解の公式 かい こうしき	$ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	3-10
判別式 はんべつしき	$D = b^2 - 4ac$ 。 $D > 0$ なら解は 2 つ、 $D = 0$ なら 1 つ、 $D < 0$ ならない	3-10
解と因数分解 かい いんすうぶんかい	解が α, β なら $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$	3-10

5 指数と対数

公式・きまり	式	しょう章
倍々でふえる・ へる ばいばい	(x 回後の量) = (はじめの量) $\times a^x$ (a は 1 回ごとの倍率)	3-11
指数のきまり しすう	$a^{x+h} = a^x \times a^h$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $a^0 = 1$ 、 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	3-11
分数の指数 ぶんすう しすう	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 、 $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	3-11
半減期 T はんげんき	(のこっている量) = (はじめの量) $\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$	3-11

つぎのページへつづく

こうしき 公式・きまり	しき 式	しょう 章
たいすう 対数	$a^p = b$ と $\log_a b = p$ は同じこと。 $a^{\log_a b} = b$	3-12
たいすう 対数のきまり	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 、 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ 、 $\log_a M^k = k \log_a M$ ($a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ 。底 a が何でも成り立つ)	3-12
とくべつ あたい 特別な値	$\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a a = 1$	3-12
てい か 底を変える	$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$ (電卓の $\log$ は底が 10)	3-12
たいすう 対数のグラフ	$y = \log_a x$ は、 $y = a^x$ を直線 $y = x$ で折り返し たもの	3-12
デシベル	$(\text{dB}) = 10 \times \log_{10} (\text{電力の比}) = 20 \times \log_{10} (\text{電圧の比})$	3-12

6 データと確率

こうしき 公式・きまり	しき 式	しょう 章
へいきん 平均	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$	3-13
ちゅうおうち 中央値	小さい順に並べて、まん中の値 (偶数のなら、まん 中の 2 つの平均)	3-13
そうたい どすう 相対度数	相対度数 = 度数 ÷ 合計	3-13
はん い 範囲	範囲 = 最大値 - 最小値	3-13
し ぶん い はん い 四分位範囲	第 3 四分位数 - 第 1 四分位数	3-13
へん さ 偏差	値 - 平均。全部たすと、かならず 0	3-14
ぶんさん 分散	偏差の 2 乗の平均 (合計を個数 n でわる)	3-14
ひょうじゆんへんさ 標準偏差	$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$	3-14
σ の性質	全部に b をたしても同じ。 a 倍 ($a > 0$) すると a 倍	3-14

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	しょう章
平均のずれ	n 回はかった平均のずれは $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	3-14
共分散	$\sigma_{xy} = \{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\} \div n$	3-15
相関係数	$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ 。いつも $-1 \leq r \leq 1$	3-15
最小二乗法 (原点を通る)	$y = ax$ の $a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和})$	3-16
最小二乗法	$y = ax + b$ の $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ (共分散 $\div x$ の分散)、 $b = \bar{y} - a\bar{x}$	3-16
確率	$P(A) = \frac{a}{n}$ (A の起こる場合の数) $\div$ (全部の場合の数)	3-17
組合せの数	${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 。パスカルの三角形の数と同じ	3-17
期待値	(値 $\times$ その確率) を全部たした数。サイコロの目なら 3.5	3-17
正規分布	平均 $\pm \sigma$ に約 68%、平均 $\pm 2\sigma$ に約 95% が入る	3-14 3-17

7 ひょうけいさん でんたく か かた 表計算・電卓・プログラムの書き方

もと 求めるもの	ひょうけいさん でんたく か かた れい 表計算・電卓での書き方 (例)	い み 意味	しょう章
0 でわった印	#DIV/0!	0 でわったというエラー	3-7
累乗	=2 ^{0.5} 電卓は x ^y のキー	2 ^{0.5} (= $\sqrt{2}$)	3-11
常用対数	=LOG10(2) 電卓は log のキー	$\log_{10} 2$	3-12
平均	=AVERAGE(B2:B13)	$\bar{x}$	3-13

つぎのページへつづく

もと 求めるもの	ひょうけいさん でんたく 表計算・電卓での書き方 (例)	い み 意味	しょう 章
ちゅうおうち 中央値	=MEDIAN(B2:B13)	まん中の値	3-13
し ぶん い すう 四分位数	=QUARTILE.INC(B2:B13,3)	だい 3 し ぶん い すう 第 3 四分位数	3-13
へいほうこん 平方根	=SQRT(D23)	$\sqrt{\quad}$	3-14
ひょうじゆんへんさ 標準偏差	=STDEV.P(B2:B21)	σ (n でわる)	3-14
きょうぶんさん 共分散	=COVARIANCE.P(A2:A11,B2:B11)	σ_{xy}	3-15
そうかんけいすう 相関係数	=CORREL(A2:A11,B2:B11)	r	3-15
かたむ 傾き	=SLOPE(B2:B8,A2:A8)	さいしやうにじやうほう 最小二乗法の a	3-16
せつぺん 切片	=INTERCEPT(B2:B8,A2:A8)	さいしやうにじやうほう 最小二乗法の b	3-16
らんすう 乱数	=RANDBETWEEN(0,1)	0 か 1 を、でたらめにだす	3-17
プログラムの かんすう 関数 (Python)	def f(x): return 1.8 * x + 32	はこ 箱 f のきまりを決める。 return はけいさんかず 計算した数を だす	3-3

- STDEV.P は偏差の 2 乗の合計を n でわり、その平方根 ($\sqrt{\quad}$) をとります。STDEV.S は n のかわりに $n - 1$ でわります。この本では n でわります (3-14)。
- SLOPE と INTERCEPT のかっこの中は、はじめに y の範囲、次に x の範囲の順です (3-16)。
- 電卓の $\log$ のキーは、底が 10 の常用対数です。 $\log_2$ は、底を変える式で常用対数になおして求めます (3-12)。

できるようになったことチェック表^{ひょう}

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、次の巻に進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

しやう 章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
3-1	式の中の変数と定数を見分けられる。	26	☐	☐
	物理定数と、問題ごとに決まる数のちがいを説明できる。	28	☐	☐
	変域を不等号で書ける。	31	☐	☐
3-2	原点と軸を決めて、点をかいたり座標を読んだりできる。	51	☐	☐
	マイナスの座標、4 つの区画、点を動かした座標がわかる。	56	☐	☐
	絶対値を使って、2 点の距離を求められる。	58	☐	☐
3-3	関数を見分け、表・グラフ・式で表せる。	78	☐	☐
	$f(x)$ を読み、 $f(3)$ や $f(a+h)$ を計算できる。	83	☐	☐
	2 つの関数をつないだ合成関数を作れる。	87	☐	☐
3-4	軸と目もりを決めて、はかった点からグラフをかける。	106	☐	☐
	x - t グラフと v - t グラフを読み分けられる。	109	☐	☐
	表にない値を線から読み、外挿の注意を説明できる。	112	☐	☐
3-5	傾きを「たての変化量÷横の変化量」で求め、正・負・0 がわかる。	130	☐	☐
	$y = ax + b$ の傾きと切片を読み、 x - t グラフの傾きを速さとして使える。	134	☐	☐
	1 点と傾きから、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ で直線の式を作れる。	140	☐	☐
3-6	交点が、2 つの式を同時にみたと組だとわかる。	164	☐	☐
	代入法と加減法で解き、両方の式で確かめられる。	166	☐	☐
	解がない・無数のわけを説明し、出会い・買い物・回路の問題を解ける。	171	☐	☐
3-7	双曲線をかき、軸にくっつかないわけを言える。	196	☐	☐

つぎのページへつづく

しょう 章	できるようになったこと	ページ	かい 1 回め	かい 2 回め
	$a < 0$ のグラフを読み、変化の割合を計算できる。	200	☐	☐
	xy が一定を見つけ、式を作って使える。	201	☐	☐
3-8	かっこのある式を展開し、面積の図で説明できる。	221	☐	☐
	恒等式の係数を、2 通りの方法で決められる。	229	☐	☐
	平方完成して、いちばん小さい・大きい値を読める。	237	☐	☐
3-9	2 乗に比例を見つけ、 $y = ax^2$ の式とグラフにできる。	258	☐	☐
	a とグラフの形の関係や、変化の割合を説明できる。	263	☐	☐
	平方完成で頂点を、範囲から最大・最小を求められる。	269	☐	☐
3-10	$x^2 = k$ の形や因数分解で、2 次方程式を解ける。	297	☐	☐
	解の公式を作り、 $\sqrt{\quad}$ の計算をして解ける。	304	☐	☐
	判別式で解の個数を調べ、場面に合う解を選ぶ。	306	☐	☐
3-11	「ふえる量が、いまある量に比例する」変化を、表・式・グラフにできる。	331	☐	☐
	指数のきまり $a^{x+h} = a^x \times a^h$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $a^0 = 1$ を使える。	337	☐	☐
	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ のわけを説明できる。	340	☐	☐
3-12	10 を何乗するかでけたを数え、 $\log_a b$ の意味を説明できる。	361	☐	☐
	対数のきまりを、指数のきまりから作って使える。	363	☐	☐
	片対数グラフやデシベルを使える。	368	☐	☐
3-13	何回もはかった値の平均を、 $\bar{x}$ を使って求められる。	390	☐	☐
	度数分布表とヒストグラムを作り、読みとれる。	393	☐	☐
	中央値・最頻値・四分位数を求め、箱ひげ図をかける。	398	☐	☐
3-14	偏差を求め、合計が 0 になるわけを説明できる。	418	☐	☐
	分散と σ を求め、ばらつきをくらべられる。	420	☐	☐
	平均 $\pm \sigma$ と $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の意味を説明できる。	424	☐	☐
3-15	散布図をかき、相関の向きと強さを見分けられる。	444	☐	☐

つぎのページへつづく

しょう 章	できるようになったこと	ページ	かい 1 回め	かい 2 回め
	きょうぶんさん けいさん 共分散を計算し、その符号の意味を説明できる。	448	☐	☐
	そうかんけいすう もと そうかん いん が く べつ 相関係数 r を求め、相関と因果を区別できる。	452	☐	☐
3-16	じょう わ ずれの 2 乗の和で、どの直線がよく合うかくらべられる。	476	☐	☐
	へいほうかんせい もと $y = ax$ の a を、平方完成で求められる。	479	☐	☐
	きょうぶんさん ぶんさん もと ざん さ たし $y = ax + b$ を共分散と分散で求め、残差で確かめられる。	483	☐	☐
3-17	ひょう じゅけい ず かぞ かくりつ き たい ち もと 表や樹形図で数えて、確率と期待値を求められる。	502	☐	☐
	さんかくけい おもて まい かず もと パスカルの三角形で、表が k 枚になる数を求められる。	504	☐	☐
	せい き ぶん ぶ つか 正規分布の 68% と 95% を使える。	509	☐	☐

つぎの巻へ

ひょう・グラフ・式で変化のきまりをつかむ道具がそろいました。第4巻「形と向き」では、この巻で身につけた座標・関数・グラフを使って、長さと角度で、形と向きを数にします。第4巻の章をのぞいてみましょう。

4-2 角度と円、ラジアン

角度を「長さ」ではかる方法

使う道具 円周率 π (3-1) と、1次関数・比例 (3-5)。

4-4 三平方の定理

ななめの距離を、たとえ横から計算する

使う道具 座標と2点の距離 (3-2)、展開 (3-8)、 $x^2 = k$ と $\sqrt{\quad}$ の計算 (3-10)。

4-6 坂道と三角比

坂の上の荷物にかかる力を、2つに分ける

使う道具 坂の急さを表す傾き (3-5) と、比 (2-5)。

4-8 三角関数：円運動の影

回る点の影は、行ったり来たりする

使う道具 座標 (3-2)、関数 (3-3) と、グラフの読み方 (3-4・3-9)。

4-10 向きと大きさをもつ量：ベクトル

2人で引くと、荷物はどっちへ動く？

使う道具 座標と、点を動かす計算 (3-2)。

4-13 空間の座標と3次元のベクトル

部屋の中の1点を、3つの数で表す

使う道具 2つの数で場所を表す座標と、下つき文字 (3-2)。



デルタ

第4巻からは、漢字にふりがながつかないよ。チェック表で自信のない章を見なおしてから、第4巻へ進もう！

この巻の道具は、この先でこう使う

第3巻の章と、その道具を使う第4巻から先の章です（章のはじめの「道しるべ」の「この巻の先に」から集めました）。

この巻の章	この道具を使う章
3-1 変わる量と変わらない量	第4巻から先：5-4 5-5
3-2 場所を数で表す：座標	第4巻から先：4-4 4-10 4-13 4-15
3-3 関数は「入れると出てくる」ルール	第4巻から先：5-1 5-3 5-6 9-8
3-4 グラフをかこう・読もう	第4巻から先：5-1 5-9
3-5 グラフの傾きは「変化の速さ」	第4巻から先：5-1 5-3 8-2
3-6 2本の直線が交わるところ： 連立方程式	第4巻から先：7-1 9-10
3-7 反比例のグラフ	第4巻から先：5-4 5-14
3-8 かつこをはずす：展開と平方完成	第4巻から先：5-4 9-7
3-9 放物線と $y = ax^2$	第4巻から先：5-1 5-2
3-10 ボールはいつその高さに届く？： 2次方程式	第4巻から先：5-5 5-7 5-11 6-12
3-11 指数関数：いまある量に比例して ふえる・へる	第4巻から先：5-14 5-18 6-4
3-12 対数：けたを数える道具	第4巻から先：5-14 9-8
3-14 ばらつきを1つの数で：標準偏差	第4巻から先：9-4
3-15 2つの量の関係：散布図と相関	第4巻から先：4-12
3-16 データに直線を引く： 最小二乗法	第4巻から先：5-7 7-5

つぎのページへつづく

この巻の章

この道具を使う章

3-17 偶然のばらつき：確率と正規分布

第4巻から先：5-17 9-4

さくいん

数字^{すうじ}はページです。その語^{ことば}がはじめて出てくるページや、くわしく説明^{せつめい}しているページをのせています。

あ

あつりよく 圧力	193
1 次関数 ^{じ かんすう}	135
1 次不等式 ^{じ ふとうしき}	145
いん が かんけい 因果関係	459
いんすうぶんかい 因数分解	297
x - t グラフ	110

か

かいきちよくせん 回帰直線	485
がいそう 外挿	113
かい こうしき 解の公式	305
かくりつ 確率	501
か げんほう 加減法	170
かたたいすう 片対数グラフ	368
かたむ 傾き	131
かんすう 関数	14, 79
き たい ち 期待値	509
きょうぶんさん 共分散	452
けいすう 係数	173
けいすう くら 係数を比べる	233
げんてん 原点	51
こうせい 校正	495
こうせいかんすう 合成関数	88
こうてん 交点	165
こうとうしき 恒等式	230

さ

さいしょうにじょうほう 最小二乗法	482
さいだい ち さいしょうち 最大値・最小値	272
ざひょう 座標	51
ざん さ 残差	477
ざん ぶ ず 散布図	445
じすう 次数	220
しすうかんすう 指数関数	335
しすう 指数のきまり	345
した も じ 下つき文字	57
し ぶん い すう 四分位数	401
じょうようたいすう 常用対数	361
せい き ぶん ぶ 正規分布	510
ぜったい ち 絶対値	59
せつぺん 切片	136
そうかん 相関	446
そうかんけいすう 相関係数	455
そうきよくせん 双曲線	198

た

たいすう 対数	361
だいにゆうほう 代入法	167
ダイヤグラム	124
ちゅうおうち 中央値	398
ちやうてん 頂点	262
てい 底	361
ていすう 定数	27

データロガー.....	125	ぶつりていすう 物理定数.....	30
デシベル.....	370	せんず ブロック線図.....	101
てんかい 展開.....	222	ぶんさん 分散.....	421
どすうぶんぷひょう 度数分布表.....	394	ぶんすう しすう 分数の指数.....	342
な		へいほうかんせい 平方完成.....	237
ないそう 内挿.....	112	へんいき 変域.....	31, 89
じ かんすう 2 次関数.....	269	へん か わりあい 変化の割合.....	136
じ ほうていしき 2 次方程式.....	293	へん さ 偏差.....	418
じょう ひれい 2 乗に比例.....	259	へんすう 変数.....	27
は		ほうそく ボイルの法則.....	202
はこ ず 箱ひげ図.....	402	ほうぶつせん 放物線.....	261
さんかくけい パスカルの三角形.....	506	ほうぶつせん じく 放物線の軸.....	262
はんげん き 半減期.....	339	や	
はんべつしき 判別式.....	306	ゆう り か 有理化.....	304
ヒストグラム.....	396	ら	
ひょうじゆんへんさ 標準偏差.....	421	れんりつほうていしき 連立方程式.....	165
ひょうほんちょうさ 標本調査.....	512		

物理を理解するための数学 第3巻

関数とデータ

へんしや ぶつ り かい すうがく だい かん
編者 「物理を理解するための数学」編集委員会

いいんちょう しょうがっこうちょう やく
委員長 小学校長（まとめ役）

いいん すうがく でん き こうがく き かいこうがく きょういくがく りょうしりきがく けんちくこうがく
委員 数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・
はんどうたいこうがく だいがくきょうじゅ ようちえんきょうじゅ じゅくこうし
半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、
とくべつしえんがっこうきょうじゅ しん り し か がくかいせつしや しょうがっこうきょうじゅ
特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭

デザイン ユニバーサルデザイン 担当委員

さし え たんどう いん
挿絵 イラスト担当委員

はん だい はん だい かいへんしゅういんかい ねん がつ
版 第1版（第12回編集委員会） 2026年10月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

だい かん かんすう 第3巻 関数とデータ きまりを見つめる

この巻で学ぶこと

だい ぶ かんすう
第1部 関数とグラフ (3-1～3-6)

だい ぶ ま
第2部 曲がったグラフ (3-7～3-10)

だい ぶ ばいばい
第3部 倍々とけた (3-11～3-12)

だい ぶ どうけい
第4部 データと統計 (3-13～3-17)

ぜん かん 全9巻のならび

1 かぞえる・はかる

2 かず りょう
数と量のことば

3 かんすう
関数とデータ きまりを見つめる

4 かたち む すけい さんかくかんすう
形と向き 図形・三角関数・ベクトル

5 へん か
変化をつかむ 微分と積分

6 みらい けいさん びぶんほうていしき ぐく そ すう
未来を計算する 微分方程式と複素数

7 まとめて計算する けいさん ぎょうれつ
行列

8 くうかん ひろ りょう かいせき
空間に広がる量 ベクトル解析

9 なみ へん か よ ふうりえかいせき へんかん
波と変化を読みとく フーリエ解析とラプラス変換

ひょう しき へん
表・グラフ・式で、変
化のきまりをつかもう

