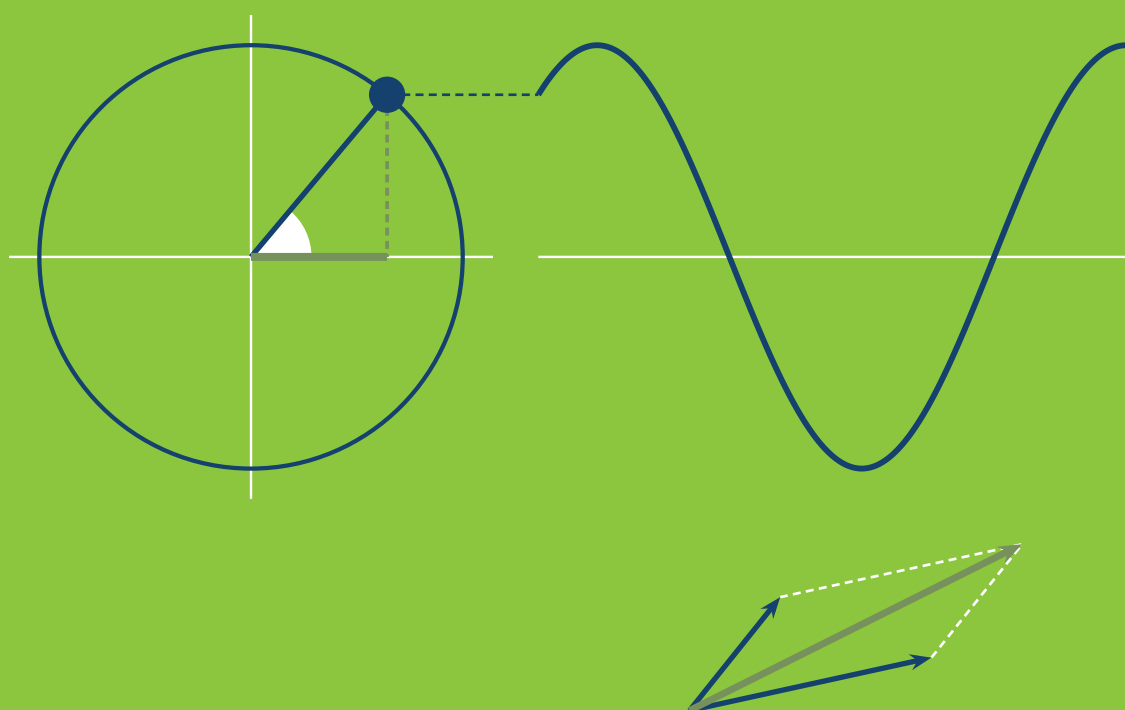


形と向き

図形・三角関数・ベクトル

長さと角度で、形と向きを数にしよう



1

2

3

4

5

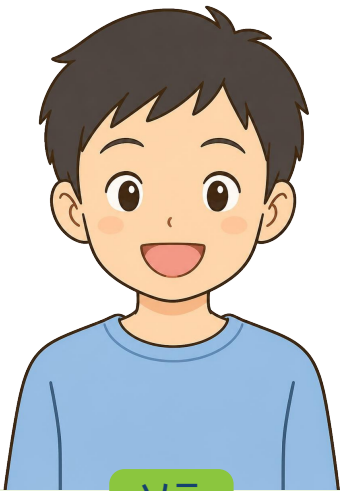
6

7

8

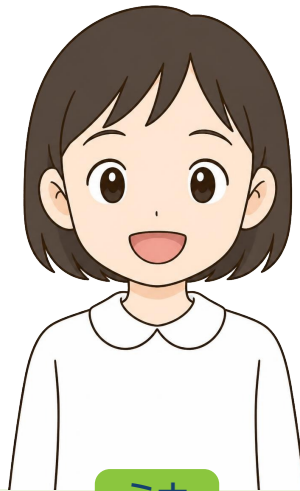
9

いっしょに学ばなかも



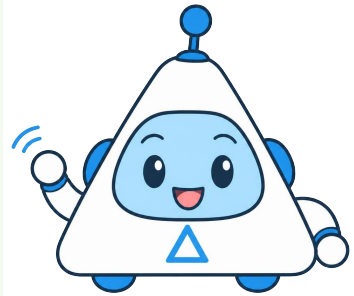
ソラ

「なぜ？」と聞くのが大好き。
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。
手を動かして考える。



デルタ

計算と記録がとくいな
ロボット。名前は
「変化」を表す
記号 Δ から。

こまったら、3 人のことばをヒントにしよう。

物理を理解するための数学

第4巻

形と向き

図形・三角関数・ベクトル

長さと角度で、形と向きを数にしよう



7本の路線が、この本を通っています

「物理を理解するための数学」編集委員会編

もくじ

第4巻 形と向き

△ = 路線 (P.4・5) ★☆☆☆☆ = 内容の高さ (★は必ず、☆の所まで) P.8 = 8 ページ

序章 ロボットの手は、どこにある？

✓ ★★★★★ P.8

長さや角度がわかれば、場所が決まる

第1部 図形

P.24

4-1 きまりから考えを積み上げる：定義・公理・定理

✈ ★★★★★ P.26

三角形の角をたすと、なぜ必ず 180° ？

4-2 角度と円、ラジアン

✓ ★★★★★ P.56

角度を「長さ」ではかる方法

4-3 にた形と比：相似

✈ ★★★★★ P.98

影の長さから、木の高さがわかる

4-4 三平方の定理

✈ ★★★★★ P.128

ななめの距離を、たてと横から計算する

4-5 面積と体積：細かく分けてたす

✚ ★★★★★ P.160

円を切って並べかえると、長方形になる？

第2部 三角比と三角関数

P.194

4-6 坂道と三角比

✓ ★★★★★ P.196

坂の上の荷物にかかる力を、2 つに分ける

4-7 三角形を解く：正弦定理と余弦定理

✓ ★★★★★ P.234

行けない場所までの距離をはかる

4-8 三角関数：円運動の影

✓ ★★★★★ P.268

回る点の影は、行ったり来たりする

4-9 波をたし合わせる：加法定理とうなり

✓ ★★★★★ P.306

2 つの音を重ねると、ウワンウワンと聞こえる

4-10 向きと大きさをもつ量：ベクトル ★★★★★ **p.340**

2 人で引くと、荷物はどっちへ動く？

4-11 ベクトルを成分で計算しよう ★★★★★ **p.374**

川に流されながら渡る船は、どこに着く？

4-12 内積：どれだけ同じ向きか ★★★★★ **p.408**

進む向きと直角に押しても、仕事は 0

4-13 空間の座標と 3 次元のベクトル ★★★★★ **p.434**

部屋の中の 1 点を、3 つの数で表す

4-14 外積：回す力と右ねじ ★★★★★ **p.468**

ドアのノブは、なぜちょうつがいから遠い？

4-15 いろいろな座標：極座標・円柱座標・球座標 ★★★★★ **p.500**

地球の上の場所は、緯度と経度で表す

こたえ p.526 記号カード p.539 よく使う定数・単位・公式 p.543

できるようになったことチェック表 p.550 つぎの巻へ p.553 さくいん p.556

この本の路線図

この本の章は、7本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるかを確認しよう。



① 変化 ひき算→傾き→微分

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



② たし合わせ かけ算→面積→積分

この巻の駅：4-5



③ 倍々 累乗→指数→ e

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



④ 回転と波 角→ $\sin$ →複素数

この巻の駅：4-2、4-6、4-7、4-8、4-9



⑤ 表 九九の表→行列

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



⑥ 矢印 向き→ベクトル→場

この巻の駅：4-1、4-3、4-4、4-10、4-11、4-12、4-13、4-14、4-15

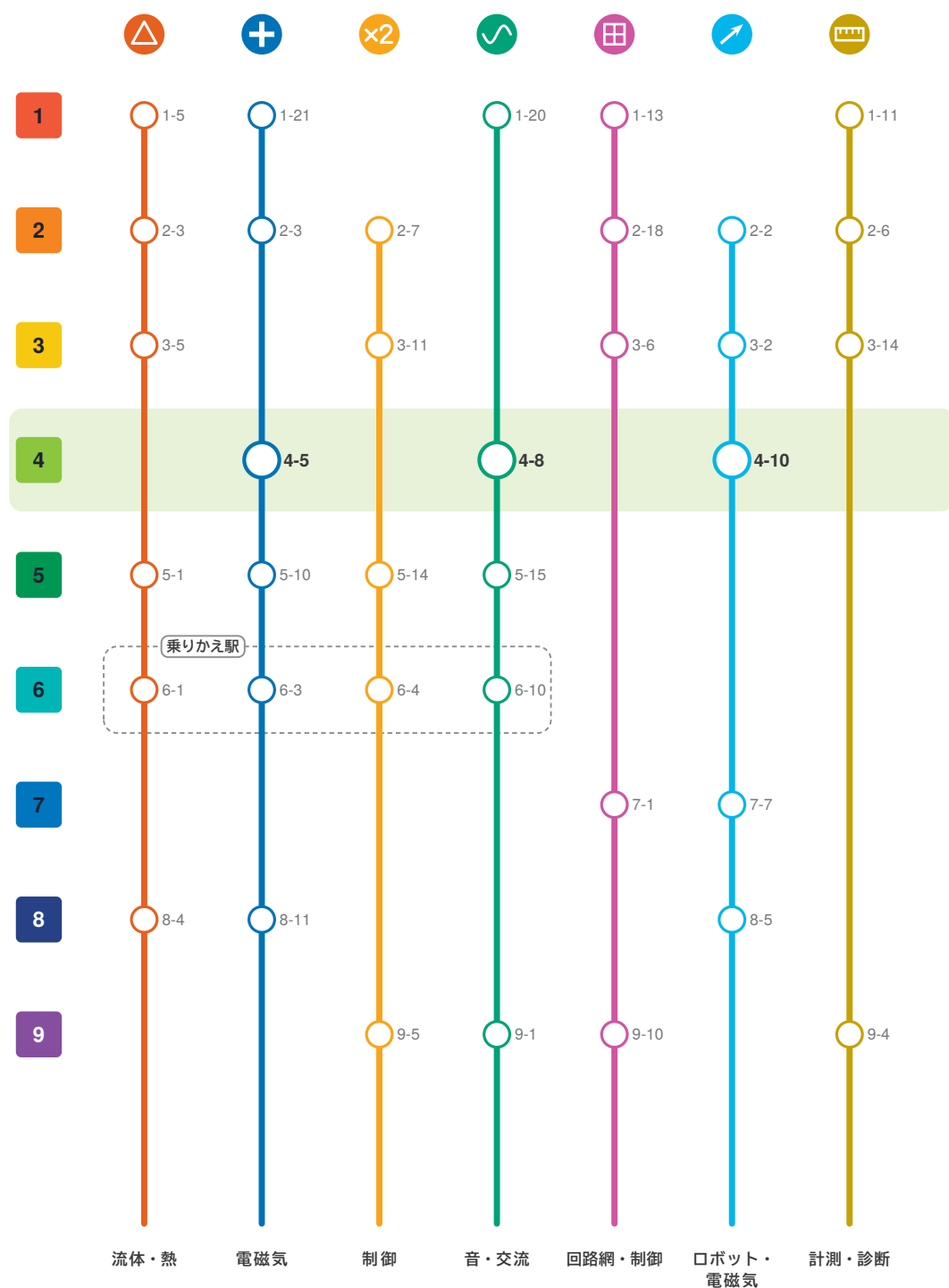


⑦ はかる 目もり→誤差→統計

この巻の駅：(この巻には駅がありません)

全9巻の路線図

下へ行くほど先の巻。色の帯がこの巻です。



終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第6巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

① 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

② 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

T 道しるべ この章の前に **1-14** **2-2** この章の先に **3-5** **5-9**

前に読んでおくといふ章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

③ ★は「どこまで登るか」のしるし



章と小見出しには★がついています。★の数は、内容の高さ。山登りにたとえば、★1つは「はじめの一步」、★5つは「頂上」です。

白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登る」というしるし。自分の読める★まで読んで、先へ進んでもだいじょうぶ。

④ ノートを1冊用意しよう

「じぶんでとこう」と章末問題は、ノートに解きます。本には書きこまないの、何度でもやり直せます。

問題の番号を書き、図をかいてから式を書こう。答えには単位をつけます。

例	じぶんでとこう 1
	$6 \text{ m/s} \times 15 \text{ s} = 90 \text{ m}$
	答え 90 m

⑤ この本の3つのやくそく

- ① 数には、いつも単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
- ② 式を書く前に、表や図をかいて考えよう。
- ③ くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。

問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

第4巻 形と向き



序章

ロボットの手は、どこにある？

自動車の工場では、たくさんのロボットのうでが、部品をつかんだり、ねじをしめたり、溶接（ようせつ：金属をとかしてつなぐこと）をしたりしています。ロボットのうでは、人のうでと同じように、いくつかの「関節（かんせつ）」で曲がります。

ロボットのうでの部分は、人のうでと同じ名前によびます。関節にはモーターが入っていて、うでを回す角度を決めます。うでの長さは変わりません。

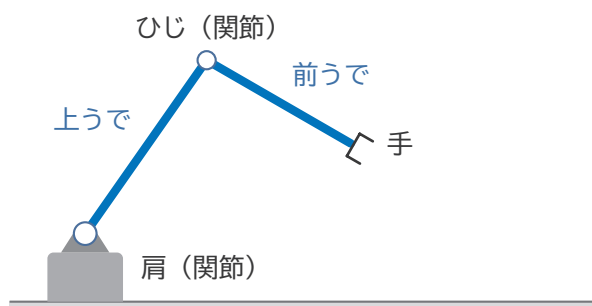


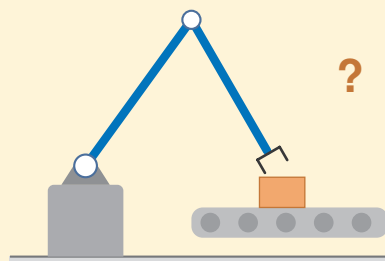
図1 ロボットのうでの部分の名前（肩とひじの2つの関節で曲がるうで）

ロボットを動かすコンピュータが、じかに決めているのは、関節のモーターを「何度回すか」だけです。手の位置は、だれも決めていません。それなのに、ロボットの手は、ベルトコンベアの上の小さな部品のま上に、ぴたりと止まります。

？ はてな？

うでの長さと、関節の角度がわかれば、手の位置は決まるかな？

反対に、「手をここに置きたい」という場所から、関節の角度は決まるかな？



この巻は、長さと角度を使って、「形」と「向き」を数で表す巻です。序章では、ロボットのうでを例にして、この巻で学ぶことの地図を作ります。

🌀 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

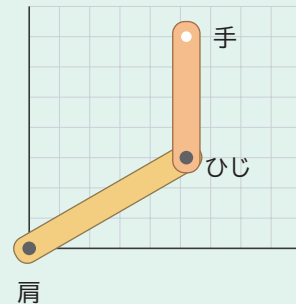
- 1-20** 1回転は 360° 、直角は 90° 。角の大きさは分度器ではかる。
- 3-2** 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y の所。平面の上の場所は、2つの数で表せる。
- 2-14** 式を変形して、ほしい量を取り出す。ロボットの手の位置の式を、角度について解くことを「逆運動学」とよぶ、と予告した。

🛠 やってみよう 紙のうでロボットを動かそう

用意するもの

厚紙、割りピン 2 本、1 cm の方眼紙、分度器、定規

- 1** 厚紙で、穴と穴のあいだが 6 cm の上うでと 4 cm の前うでを作り、割りピンでつなごう（ひじ）。方眼紙を厚紙にはり、上うでのはしを原点に割りピンでとめよう（肩）。
- 2** 分度器で、肩の角を 30° 、ひじの角を 60° にしよう。手の先の穴は、どの点にあるかな？
- 3** 反対に、手の先の穴を点 $(6, 4)$ に置こう。置き方は何通りあるかな？
- 4** 手の先の穴を点 $(10, 3)$ に置けるかな？



②では、手の先は点 (5.2, 7.0) の近くに來たはずですが。③と④の答えは、このあと「ロボットのうでの2つの問題」で考えます。



長さや角度で、場所が決まる

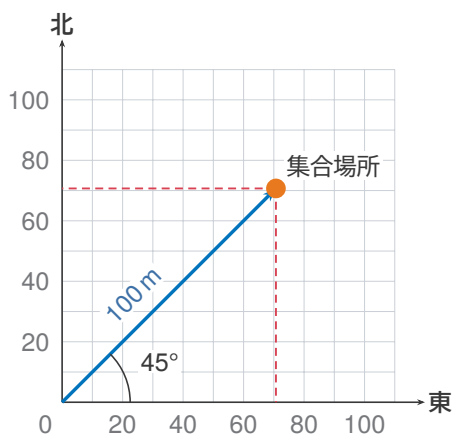
①「北東へ 100 m」

遠足の集合場所を、友だちに伝えます。2つの伝え方をくらべてみましょう。

伝え方	伝えることば
ア たてと横	「校門から、東へ約 71 m、北へ約 71 m 行った所」
イ 長さや向き	「校門から、北東へ 100 m 行った所」

表1 同じ場所を、2通りに伝える

アは、3-2の座標と同じ伝え方です。東を x 軸の向き、北を y 軸の向きにすると、集合場所は点 (71, 71) です。イは、「まっすぐ行く長さ」と「向き」の2つで伝えています。北東は、東と北のちょうどまん中の向きです。東から北へ、直角の半分の 45° だけ回した向きです。



方眼の1目もりを10 mにして（目もりの数字の単位は m）、校門を原点にかきました。

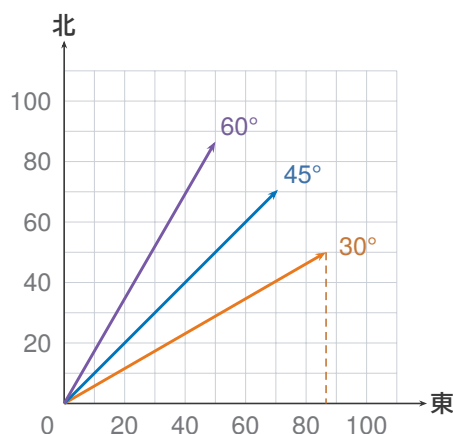
青い矢印は、東から 45° の向きへ 100 m（10 目もり）の長さです。定規で 100 m 分の長さをはかってかきます。

矢印の先から、赤い点線を軸までおろして、目もりを読みます。東へも北へも、7 目もりと少し（約 71 m）です。

長さや向きがわかれば、図をかいて、たてと横の長さを読みとれます。反対に、たてと横の長さがわかれば、図をかいて、矢印の長さや向きをはかれます。アとイは、同じ場所の、2通りの言い方です。

② 向きを変えると、たてと横はどう変わる？

向きの角を変えて、同じように図をかいて読みとってみます。角は、東から左回り（北のほう）にはかります。



長さはどれも 100 m（10 目もり）。

オレンジの 30° の矢印は、横に約 8.7 目もり、たてに 5 目もりの点に着く。

だから「東へ約 87 m、北へ 50 m」。

角を大きくするほど、矢印は北へ回り、北への長さがふえて、東への長さがへる。

図 2 東から $30^\circ \cdot 45^\circ \cdot 60^\circ$ の向きへ、100 m ずつ進んだ所。 0° はま東、 90° はま北。

向き（東から左回りの角）	0°	30°	45°	60°	90°
東へ（m）	100	約 87	約 71	50	0
北へ（m）	0	50	約 71	約 87	100

表 2 100 m 進んだときの、東への長さや北への長さ（図から読みとった値）

表から、次のことがわかります。

- 角が決まると、東への長さや北への長さが 1 つに決まる。
- 30° と 60° では、東と北の数が入れかわる。 30° の矢印と 60° の矢印は、 45° の線をはさんで、鏡に映したような形（線対称、4-1）だから。
- もし 200 m 進むなら、同じ形のまま 2 倍に大きくなるので、東へも北へも 2 倍になる（にた形、4-3）。

角と長さから、たてと横の長さを、図をかかずに計算で求める道具が、 $\cos$ （コサイン）と $\sin$ （サイン）です。**これから学ぶ** この印のついたことばや式は、これから学ぶものです。いまはわからなくてもだいじょうぶです。4-6 で、直角三角形の辺の比として作り、「長さ」と向きを「たてと横」に直す道具として使います。

たいせつ

平面の上の場所は、2つの数で決まる。

「たての長さと横の長さ（座標）」でも、「まっすぐの長さと向きの角」でもよい。

「長さ」と角で場所を表す方法は、レーダーや、ロボットのうでのように「回るもの」で使うと便利です。この方法は、4-2 で**極座標**（きょくざひょう）として学びます。極座標を、 $\cos \cdot \sin$ を使ってたてと横（座標）に直す方法は 4-6 と 4-8 で、反対に、たてと横から長さ」と角を求める方法や、空間への広げ方は 4-15 で学びます。



ロボットのうでの2つの問題

③ 角度から手の位置を求める

いよいよ、ロボットのうでです。肩からひじまでの上うでが 30 cm、ひじから手までの前うでが 20 cm のロボットを考えます（やってみようの紙のうでは、この5分の1の大きさです）。肩を原点に置き、長さは cm ではかります。

角は、次のように決めます。

- **肩の角**： x 軸の向きから、上うでがどれだけ左回りに回ったか。
- **ひじの角**：上うでの向き（点線）から、前うでがどれだけ左回りに曲がったか。

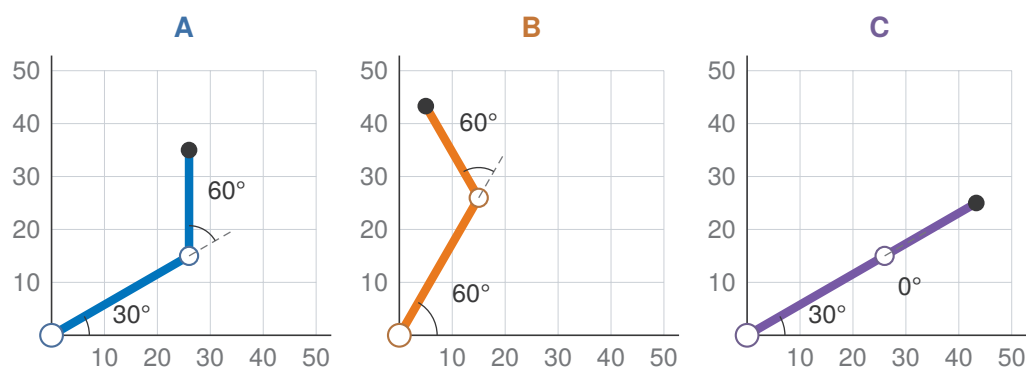


図3 A・B・Cの3つの形。黒い点が手の位置。方眼の1目もりは10cm。

形	肩の角	ひじの角	前うでの向きの角	手の位置
A	30°	60°	$30 + 60 = 90^\circ$	約 (26, 35)
B	60°	60°	$60 + 60 = 120^\circ$	約 (5, 43)
C	30°	0°	$30 + 0 = 30^\circ$	約 (43, 25)

表3 角度を決めると、手の位置が1つに決まる（図の目もりを読んだ値）

手の位置は、①の「長さで向きで場所が決まる」を2回くり返すと決まります。

- ① 肩の角で上うでの向きが決まる。肩から 30 cm その向きへ進んだ所が、ひじ。
- ② 前うでの向きは、肩の角とひじの角をたした角になる（上うでの向きから、さらにひじの角だけ回すから）。
- ③ ひじから 20 cm その向きへ進んだ所が、手。

たとえばAでは、前うでの向きは $30 + 60 = 90$ で 90° 、つまりま上です。だから、手はひじのま上にあります。図でも、Aの前うではまっすぐ上を向いています。Bでは $60 + 60 = 120$ で 120° なので、前うでは左ななめ上を向き、手はひじより左に来ます。Cは、ひじを曲げていない (0°) ので、うで全体が 30° の向きにまっすぐのびています。①の 30° の矢印と同じ形で、長さは $30 + 20 = 50$ で 50 cm です。

角度を決めれば、手の位置はいつも1つに決まります。この計算を、ロボットの分野では**順運動学**（じゅんうんどうがく）といいます。「角度 → 位置」の順の向きに計算する、という意味です。

せいかくに言うと

計算で書くと

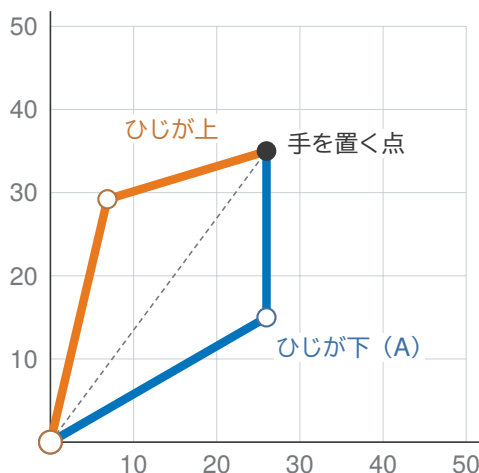
肩の角を θ_1 、ひじの角を θ_2 と書くと（ θ はシータと読むギリシャ文字で、角の大きさによく使う。4-2）、手の位置 (x, y) は次の式で計算できます。 これから学ぶ

$$x = 30 \cos \theta_1 + 20 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = 30 \sin \theta_1 + 20 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

1 つめの項が「肩からひじまで」、2 つめの項が「ひじから手まで」です。 $\theta_1 + \theta_2$ が、②の「前うでの向きの角」です。この式は 4-7 で作ります。

④ 手を置きたい場所から、角度を求める

こんどは反対です。A の手の位置（約 (26, 35)）に、ほかの角度で手を置けないでしょうか。



同じ点に、2 通りの形で手が届きます。

青は A の形（肩 30° 、ひじ 60° ）です。

オレンジは、肩を約 77° まで上げて、ひじを反対向き（右回り）に 60° 曲げた形です。右回りは、角にマイナスをつけて -60° と書きます（2-2：マイナスは反対の向き）。

2 つの形は、肩と手を結ぶ点線をはさんで、鏡に映したような形（線対称、4-1）です。

やってみようの③も同じです。紙のうでの手を (6, 4) に置くには、「肩 0° ・ひじ 90° 」と「肩約 67° ・ひじ -90° 」の 2 通りがあります。

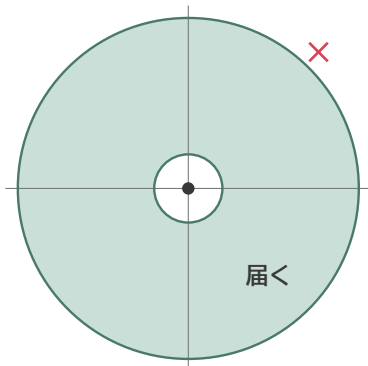
このように、「手を置きたい位置 → 角度」の向きに計算することを、**逆運動学**（ぎゃくうんどうがく）といいます。2-14 の「ロボットのうで」で予告した名前です。順運動学の式を、角度について解く計算です。



図4 順運動学は右へ、逆運動学は左へ。2つは逆向きの計算。

では、手をどこにでも置けるのでしょうか。やってみようの④の点 (10, 3) は、紙のうで (6 cm と 4 cm) では届きません。うでをまっすぐにのばしても、届くのは肩から $6 + 4 = 10$ で 10 cm までです。点 (10, 3) は、肩から 10 cm より少し遠いのです（どれだけ遠いかは、4-4 の三平方の定理で計算できます）。

本物のうで (30 cm と 20 cm) で、手が届く所を緑でぬりました。まん中の黒い点が肩です。外側の円は半径 50 cm、内側の円は半径 10 cm です。



・肩から 50 cm ($30 + 20$) より遠い所（赤い×など）には届かない。

・肩から 10 cm ($30 - 20$) より近い所にも届かない。前うでを上うでにいちばん近くまで折りたたんでも、手は肩から 10 cm はなれているから。

・緑の所なら、答えは2通り。外側の円の上（うでをまっすぐのばす）と、内側の円の上（いちばん折りたたむ）では、答えは1通り。

	順運動学	逆運動学
わかっていること	関節の角度	手を置きたい位置
求めること	手の位置	関節の角度
答えの数	いつも1つ	2つ・1つ・0のことがある
計算のしかた	式に入れるだけ	角度について解く(4-7)

表4 順運動学と逆運動学のくらべ

②はてな? の答え：うでの長さで関節の角度がわかれば、手の位置は1つに決まります（順運動学）。反対に、手を置きたい場所から角度を求めると（逆運動学）、答えが2つあったり、届かなくて答えがなかったりします。逆の向きの計算のほうが、ずっとむずかしいのです。



ミナ

わたしもコップに手をのばすとき、ひじを下にしているな。ひじを上にしても、同じ所に届くんだね。

たいせつ

順運動学：角度 → 手の位置。答えはいつも1つ。

逆運動学：手の位置 → 角度。答えは2つ・1つ・0のことがある。

🌀 物理・工学ではこう使う

ショベルカーの画面

ショベルカーも、うでの3つの関節の角度をセンサーではかり、バケットの先の深さを順運動学で計算して、運転席の画面に表示します。

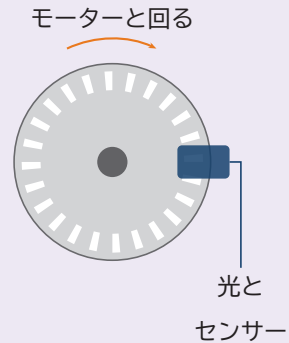
人のうでも、逆運動学を解いている

コップに手をのばすとき、わたしたちの脳は、目で見たコップの位置から、肩とひじを曲げる角度を決めています。

物理・工学ではこう使う

工場のロボットは、関節の角度をはかっている

工場のロボットのうでは、ふつう 6 つの関節があります。どの関節のモーターにも、回った角度をはかるセンサー（エンコーダー）がついています。細いすき間がたくさん並んだ円板がモーターといっしょに回り、すき間の列をはさんだ光のセンサー（半導体でできている）が、光が通った回数を数えます。その数から、回った角度がわかります。制御装置は、はかった角度から順運動学で手の位置を、1 秒に 1000 回ほど計算しています。



ロボットのうについての、ほかの問題も、この巻のいろいろな章で、少しずつ解けるようになります。

ロボットのうについて知りたいこと	解ける章
肩から手までの、まっすぐな距離	4-4（三平方の定理）
関節が 1 秒に回る角度と、手の速さ	4-2・4-8
角度から手の位置を計算する式（順運動学）	4-6・4-7
手の位置から、ひじの角を計算する（逆運動学）	4-7（余弦定理）
手が動く速さの向き、手が物をおす力の向き	4-10・4-11
モーターが関節を回す力（トルク）	4-14（外積）

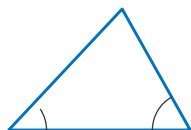
表 5 ロボットのうでの問題と、それが解ける章

▶ この巻でできるようになること

第4巻は、3つの部に分かれています。どの部も、①と②で見た「長さと角度で、形と向きを数で表す」ことを、少しずつくわしくしていきます。

第1部 図形

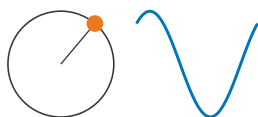
4-1～4-5



- ・きまり（定義・公理）から、証明で考えを積み上げる。
- ・角を「長さ」（ラジアン）ではかる。場所を「距離と向き」（極座標）で言う。にた形の比と三平方の定理で、長さを計算する。
- ・面積や体積を、細かく分けてたして求める。

第2部 三角比と三角関数

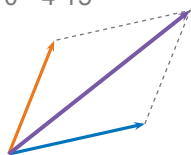
4-6～4-9



- ・距離と向きを、たてと横に直す（ $\sin \cdot \cos$ ）。坂の角度から、重さを2つの向きの力に分ける。
- ・行けない場所までの距離や、ロボットのひじの角を計算する。
- ・回る点の影から波を作り、2つの波をたし合わせる。

第3部 ベクトル

4-10～4-15



- ・力や速さを、向きと大きさをもつ矢印（ベクトル）で表し、たしたり分けたりする。
- ・仕事（内積）と、回す力（外積）を計算する。
- ・空間の点を、3つの数や、距離と角で表す。

図5 第4巻の3つの部と、できるようになること

この巻が通る路線と駅

この本の章は、7本の路線の駅です。同じ路線の駅は、1つの考え方でつながっています。第4巻を通るのは、次の3本です。

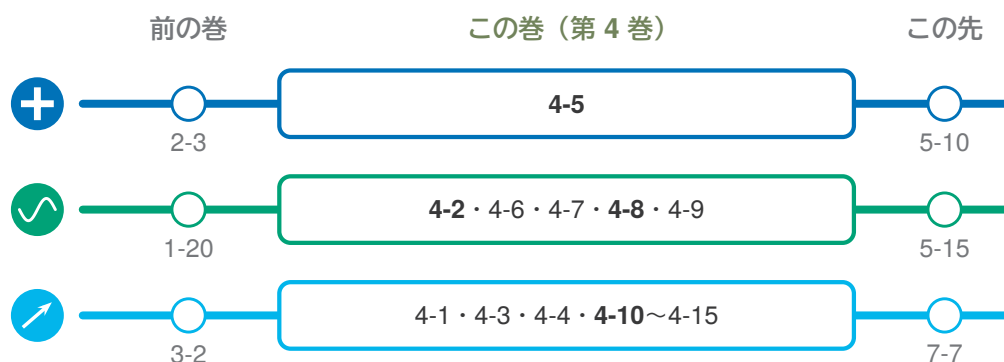


図6 第4巻を通る3本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字は大きな駅）。

	路線	大きな駅のつながり
	たし合わせ	かけ算の面積 (2-3) → 細かく分けてたす面積と体積 (4-5) → 積分 (5-10)
	回転と波	角の大きさ (1-20) → ラジアン (4-2)・三角関数 (4-8) → $\sin \cdot \cos$ の微分 (5-15)
	矢印	座標 (3-2) → ベクトル (4-10) → 3次元の回転 (7-7)・ベクトル場 (8-5)

表6 3本の路線の、この巻の大きな駅

序章のロボットのうでは、回転と波の路線 (👍) の駅です。関節がくるくる回ると、手は円をえがき、その影は波のように行ったり来たりします (4-8)。矢印の路線 (👉) は、この巻でいちばんたくさんの駅に止まります。点・線・角 (4-1) から始まり、向きと大きさをもつ矢印 (ベクトル、4-10) へと進みます。

🔍 コラム なぜ「形と向き」なの？

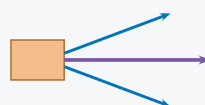
第3巻では、時間がたつと量はどう変わるかを、グラフと式で表しました。第4巻では、「どこにあるか」「どっちを向いているか」を数で表します。ものの形（図形）、回る角度（三角関数）、力や速さの向き（ベクトル）です。物理のきまりの多くは、「どの向きに、どれだけの力がはたらくか」で書かれています。だから、第4巻の道具は、このあと学ぶ物理（力学）の土台になります。



図形：橋の三角形（4-1）



回転：観覧車（4-8）



矢印：2人で引く（4-10）

たいせつ

第4巻の道具は、図形（形）・三角関数（回転と波）・ベクトル（向き）の3つ。

どれも、「長さや角度で、場所や向きを数にする」ことから始まる。

3つの部は、次のようにつながって、第5巻と物理シリーズ（力学）へ続いています。

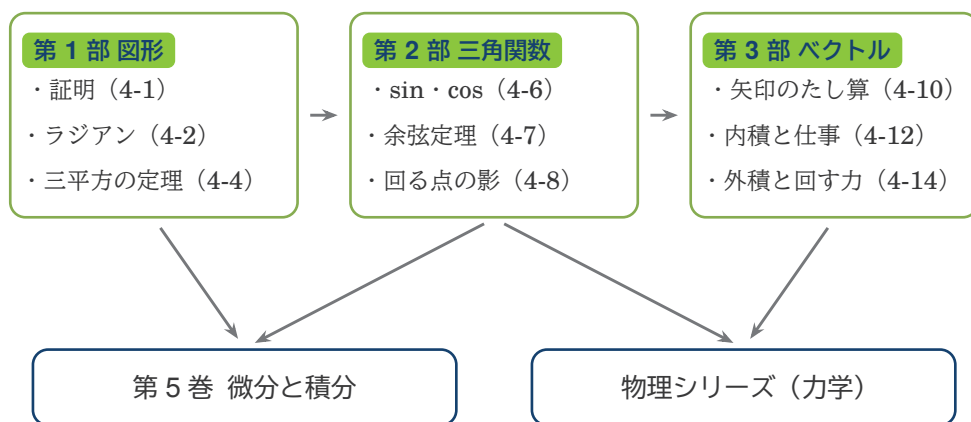
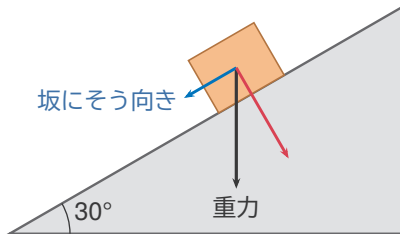


図7 第4巻の道のり。矢印の先で、この巻の道具を使う。

🌀 このあと学ぶ物理（力学）とのつながり

この巻のすぐあとには、物理シリーズの「力学」が続きます。力学では、物の動きと力を、式で説明します。そこで使う道具の多くが、この巻で手に入ります（下の表の「使う道具」は、いまはわからなくてだいじょうぶ）。



たとえば、坂の上に置いた箱にはたらく重力（黒）は、「坂にそってすべらせようとする力」（青）と「坂をおす力」（赤）の2つに分けて考えます。分けた力の大きさは、坂の角度から $\sin \cdot \cos$ で計算できます（4-6）。 これから学ぶ

力学でやること	使う道具	章
坂の上の物にはたらく力を分ける	三角比 ($\sin \cdot \cos$)	4-6
2つの力を合わせた力の大きさ	余弦定理	4-7
3つの力のつり合い	正弦定理・成分	4-7・4-11
川を渡る船、電車の中から見た動き	ベクトルの和と差	4-10・4-11
ボールの速度を、たてと横に分ける	ベクトルの成分	4-11
物の重心	位置ベクトルの平均	4-11
力がした仕事とエネルギー	内積	4-12
円運動の速さと周期	ラジアン、角速度	4-2・4-8
ボールがいちばん遠くへ飛ぶ角度	2倍角の式	4-9
物を回す力（力のモーメント）	外積	4-14
惑星の動き	極座標、だ円	4-8・4-15

表7 力学で使う、第4巻の道具

この巻で出会う新しい記号

第4巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくてもだいじょうぶです。どの記号も、使う前に場面と図でていねいに説明します（記号カードは巻末にも並べてあります）。

記号	読み方	ひとことと言うと	章
$\angle ABC$	角 ABC	点 B にできる角	4-1
$\triangle ABC$	三角形 ABC	3つの点 A・B・C を結んだ三角形	4-1
$\perp, \parallel$	垂直、平行	直角に交わる、交わらない	4-1
θ	シータ	角の大きさ	4-2
rad	ラジアン	角の単位（弧の長さ÷半径）	4-2
(r, θ)	アール、シータ	距離と向きの角で表した場所（極座標）	4-2
$\sim$	相似	形が同じ（大きさはちがってよい）	4-3
$\equiv$	合同	ぴったり重なる	4-3
$\sin \cdot \cos \cdot \tan$	サイン・コサイン・タンジェント	直角三角形の辺の比	4-6
ω	オメガ	角速度。1秒に回る角	4-8
$\vec{a}, \vec{a} $	ベクトル a 、その大きさ	向きと大きさをもつ量	4-10
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	a ドット b	内積。どれだけ同じ向きか	4-12
$a, \vec{i} \cdot \vec{j} \cdot \vec{k}$	太字の $a, i \cdot j \cdot k$	専門書のベクトルの書き方、軸の向きの矢印	4-13
$\vec{a} \times \vec{b}$	a クロス b	外積。回す力の計算	4-14

表8 この巻で出会う記号（くわしくはそれぞれの章で）

同じ形の記号が、ちがう意味で使われることがあります。 $\triangle$ （三角形）は、2-3の Δ （デルタ、変化量）とは別の記号です。 $\vec{a} \times \vec{b}$ の「 $\times$ 」は、ふつうの数のか

け算とはちがう計算です（4-14）。第 5 巻で使う記号（ $\lim$ など）は、この巻では使いません。

この巻の読み方



ソラ

第 3 巻の最後に、デルタが「第 4 巻からは、漢字にふりがながつかないよ」って言ってたね。



ミナ

読めない漢字が出てきたら、どうしよう……。図形や三角関数も、むずかしそう。



デルタ

だいじょうぶ。新しいことばには、読みを書くよ。図形も三角関数も、まず図をかくて、はかって、気づいてから式にするよ。わからなくなったら、章番号の札の章にもどろう。



① ふりがなのかわりに

新しいことばには、はじめて出てきた所で、読みを（ ）で書きます。

例：弧（こ）、錯角（さっかく）
声に出して読んでみよう。



② 「式」と「答え」

例題の中の札が、ひらがなの

しき **こたえ** から、漢字の
式 **答え**

に変わります。中身は同じです。



③ 図をかく道具

- ・定規・分度器・コンパスを用意する。
- ・まず図をノートに大きくかき、わかった長さや角を書きこむ。



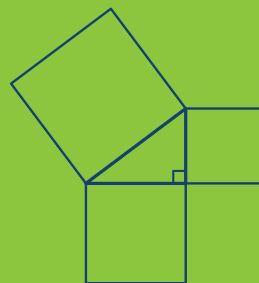
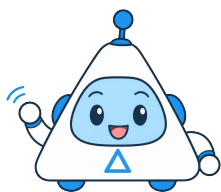
④ 電卓と表計算

- ・電卓・表計算・プログラムを使ってよい。
- ・関数電卓の DEG（度）と RAD（ラジアン）の切りかえ（4-2）を、おす前に確かめる。

図形



- ? 三角形の角をたすと、なぜ必ず 180° ?
- ? 影の長さから、木の高さがわかる?
- ? ななめの距離を、たてと横から計算できる?



形のきまりを、図をかいて確かめ、ことばで説明できるようにするよ。にた形の比と三平方の定理を使うと、行けない場所の長さも計算できるよ。

この部で学ぶこと

4-1 きまりから考えを積み上げる：定義・公理・定理 ★★☆☆☆ p.26

三角形の角をたすと、なぜ必ず 180° ？

4-2 角度と円、ラジアン ★★☆☆☆ p.56

角度を「長さ」ではかる方法

4-3 にた形と比：相似 ★★☆☆☆ p.98

影の長さから、木の高さがわかる

4-4 三平方の定理 ★★☆☆☆ p.128

ななめの距離を、たてと横から計算する

4-5 面積と体積：細かく分けてたす ★★☆☆☆ p.160

円を切って並べかえると、長方形になる？

この部を読むと…

角度・面積・体積と、にた形の比、三平方の定理を使って、ものの大きさや距離を計算できるようになります。「細かく分けてたす」面積の考え方は、第5巻の積分の入口です。

第1部 図形

★★～★★★★

4-1

きまりから考えを積み上げる：
定義・公理・定理

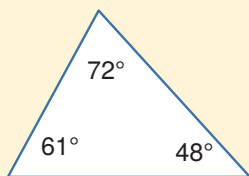
道しるべ この章の前に 1-19 1-20 3-2 この章の先に 4-6 4-7 6-15

この章でできるようになること

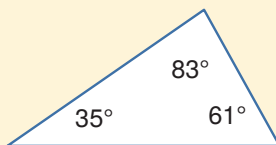
- ★★ 記号 $\angle \cdot \triangle \cdot \perp \cdot \parallel$ を使い、平行線の同位角・錯角から角の大きさを求められる。
- ★★★ 三角形の内角の和が 180° になるわけを証明でき、多角形の内角の和・外角の和を求められる。
- ★★★ 定義・公理・定理・法則のちがいを説明でき、合同条件・逆・反例を使える。

? はてな?

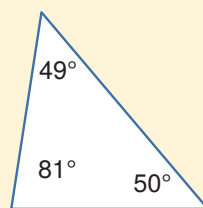
三角形の3つの角を分度器ではかって、たしてみました。どれも、だいたい 180° です。



$$61 + 48 + 72 = 181$$



$$35 + 61 + 83 = 179$$



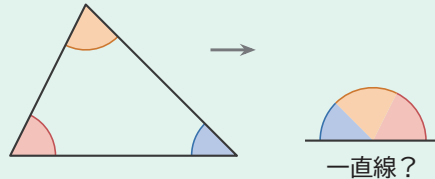
$$81 + 50 + 49 = 180$$

でも、ぴったり 180° ではないこともあります。何回はかっても、世界じゅうの三角形をはかることはできません。それなのに、「三角形の角をたすと、必ず 180° 」と言えるのは、なぜかな?

はかった値には、いつも少しずれがあります (2-6)。 181° や 179° になったのは、はかるときのずれでしょうか。それとも、ほんとうに 180° でない三角形があるのでしょうか。はかるだけでは、これを決められません。この章では、「はからずに、考えを積み上げて、必ず正しいと言う方法」を学びます。これを証明 (しょうめい) といいます。

△ やってみよう 三角形の角を、ちぎって並べよう

- ① 紙に、好きな形の三角形を 1 つ
かいて、はさみで切りとろう。
- ② 3 つの角に、ちがう色をぬろう。
- ③ 3 つの角を、手でちぎりとろう。
- ④ ちぎった 3 つの角の頂点を 1 つ
の点に集めて、すきまなく並べ
よう。どんな形になるかな？
- ⑤ ほかの形の三角形でも、ためし
てみよう。



どんな形の三角形でも、3 つの角はすきまなく並んで、ちょうど一直線になったはずです。一直線の角は、半回転で 180° です (1-20)。でも、紙はちぎるとき少し欠けるし、並べるときにすきまができることもあります。これも、「必ず」とまでは言えません。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-20** 1 回転は 360° 。半回転 (一直線) は 180° 、直角は 90° 。
- 1-19** 三角形の 3 つの角のかどを頂点、まわりの線を辺という。
- 2-6** はかった値には、いつも少しずれがある。
- 3-2** 点 (x, y) は、原点から右へ x 、上へ y の所。

数学の道具

1 点と線の名前と、記号

考えを積み上げるには、まず、ことばの意味を全員でそろえる必要があります。人によってことばの意味がちがうと、話がかみ合わないからです。図形でいちばん土台になる「点」と「線」から始めます。

点は、場所だけを表し、大きさはありません。紙にかくときは小さな丸でかきますが、ほんとうは大きさ0です。点には、A、B、Pのような大文字のアルファベットで名前をつけます。



図1 直線・線分・半直線。点線は「この先もずっと続く」というしるし。

2つの点AとBを通る、まっすぐな線を考えます。両方へどこまでものびる線を**直線**AB、AからBまでで終わる線を**線分**(せんぶん)AB、Aから始まってBのほうへどこまでものびる線を**半直線**(はんちよくせん)ABといいます。紙にかけるのは直線の一部だけですが、頭の中では、どこまでものびていると考えます。線分ABの長さも、そのままABと書きます。たとえば「 $AB = 3\text{ cm}$ 」です。

垂直と平行

2本の直線の関係には、とくに大事なものが2つあります。方眼のノートの、たての線と横の線を思いうかべてください。

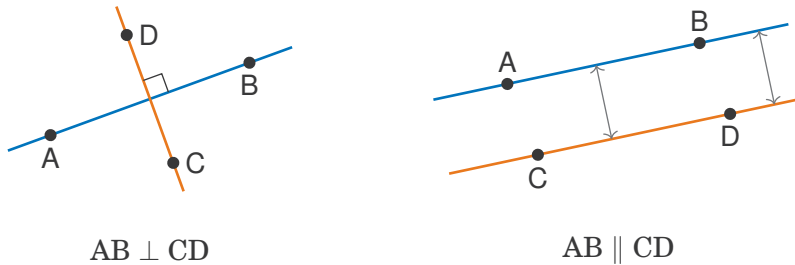


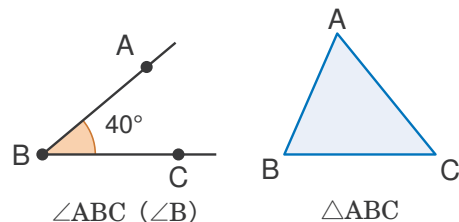
図2 左：垂直。直角に交わる。右：平行。どこまでのばしても交わらない（あいだのはばは、どこでも同じ）。

- 2本の直線が直角に交わる時、2本は**垂直**（すいちよく）であるといい、 $AB \perp CD$ と書きます。方眼のたての線と横の線は垂直です。
- 同じ平面の上の2本の直線が、どこまでのばしても交わらない時、2本は**平行**（へいこう）であるといい、 $AB \parallel CD$ と書きます。方眼の横の線どうしは平行です。電車のレールも平行です。

角と三角形の書き方

1つの点から出た2本の半直線は、**角**をつくれます。点Bから、半直線BAと半直線BCが出ているとき、この角を $\angle ABC$ と書き、「角ABC」と読みます。角の頂点（ちょうてん）Bを、まん中に書くのがきまりです。ほかに角がなくてまぎれないときは、短く $\angle B$ とも書きます。角の大きさも同じ記号で、 $\angle ABC = 40^\circ$ のように書きます。

3つの点A、B、Cを線分で結んだ三角形を、 $\triangle ABC$ と書き、「三角形ABC」と読みます。



△ は、2-3 で学んだ Δ (デルタ、変化量) とは別の記号です。△ は「三角形」の絵、Δ はギリシャ文字です。△ABC は「Δ × ABC」でも「ABC の変化量」でもありません。

記号カード

初めて出た章 4-1



読み方 角・三角形

意味 ∠ABC は頂点 B の角。

△ABC は三角形 ABC。△

は Δ (変化量) とはちがう

英語 angle / triangle

記号カード

初めて出た章 4-1



読み方 垂直・平行

意味 $AB \perp CD$ は直角に交わる。 $AB \parallel CD$ はどこまで

も交わらない

英語 perpendicular /

parallel

② ずらす・回す・裏返す：合同と対称

うすい紙を三角形の上に重ねて、形を写しとります。その紙を動かして、ほかの三角形にぴったり重なるか調べてみましょう。紙の動かし方は、3 つしかありません。

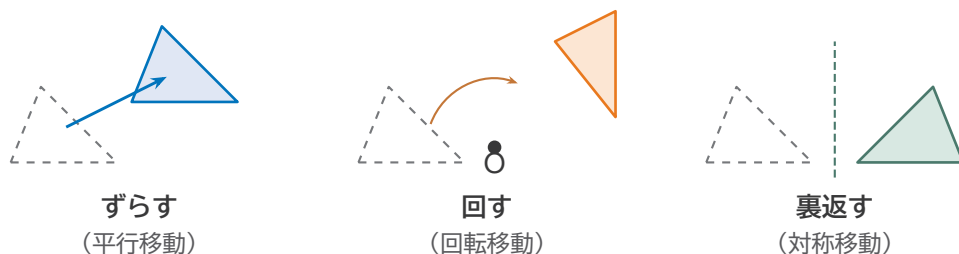


図3 紙を動かす3つの方法。点線がもとの三角形。裏返すときは、緑の点線で折る。

どの動かし方でも、形と大きさは変わりません。ずらす・回す・裏返すを組み合わせて、ぴったり重なる2つの図形を、**合同** (ごうどう) であるといいます。

- 重なり合う頂点・辺・角を、それぞれ「対応する」頂点・辺・角といいます。
- 合同な図形では、対応する辺の長さは等しく、対応する角の大きさも等しい。
- $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同で、A と D、B と E、C と F が重なるときは、対応する頂点を同じ順に書いて「 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同」といいます (合同の記号は 4-3 で)。

線対称と点対称

1つの図形が、自分自身にぴったり重なることもあります。

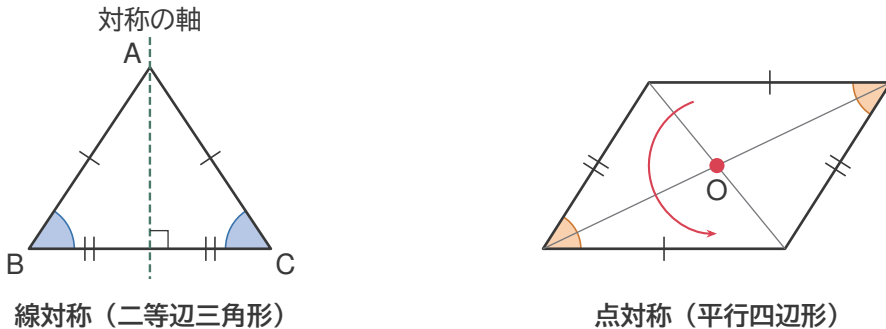


図4 同じしるしの辺は長さが等しく、同じ色の角は大きさが等しい。

- 1本の直線で折ると、ぴったり重なる図形を**線対称**（せんたいしょう）な図形といい、折り目の直線を**対称の軸**といいます。
- 1つの点のまわりに 180° 回すと、ぴったり重なる図形を**点対称**（てんたいしょう）な図形といい、その点を**対称の中心**といいます。

二等辺三角形（にとうへんさんかくけい）は、「2つの辺の長さが等しい三角形」です。等しい2つの辺がはさむ角を**頂角**（ちょうかく）、残りの2つの角を**底角**（ていかく）といいます。二等辺三角形を切りとって、頂点Aと、底辺BCのまん中を通る線で折ると、ABとACがぴったり重なります。だから二等辺三角形は線対称で、次のことがわかります。

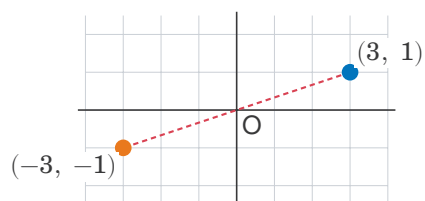
- ① 2つの底角は等しい（ $\angle B = \angle C$ ）。折ると重なるから。
- ② 対称の軸は、底辺BCを2等分し、BCに垂直に交わる。

平行四辺形（へいこうしへんけい）は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行な四角形」です。平行四辺形を写しとった紙を、2本の対角線（たいかくせん：となり合わない頂点を結ぶ線分）の交わる点Oにピンでとめて 180° 回すと、もとの平行四辺形にぴったり重なります。だから平行四辺形は点対称で、次のことがわかります。

- ① 向かい合う辺の長さは等しい。向かい合う角の大きさも等しい。
- ② 2本の対角線は、それぞれのまん中の点で交わる。

(どちらも、紙を折ったり回したりして確かめたことです。正しいことを証明する方法もありますが、この本では省きます。)

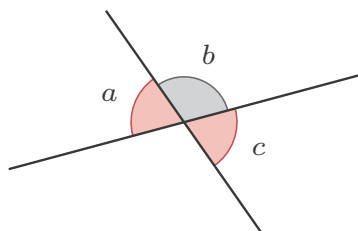
座標で見る点対称



原点 O を中心に、点 $(3, 1)$ を 180° 回します。 O と点を結ぶ線分も、いっしょに半回転します。すると点は、 O をはさんで反対側の、同じ距離の所に来ます。右へ3が左へ3に、上へ1が下へ1になるので、 $(-3, -1)$ です (3-2)。原点のまわりに 180° 回すと、点 (x, y) は $(-x, -y)$ に移ります。 180° 以外の角だけ回したときの式は、4-8 で作ります。

③ 平行線と角：対頂角・同位角・錯角

対頂角



2本の直線が交わると、4つの角ができます。向かい合う2つの角 (a と c) を、**対頂角** (たいちょうかく) といいます。

分度器ではかると、 a は 70° 、 b は 110° 、 c は 70° でした。 a と c は等しくなっています。

これは、はからなくてもわかります。 a と b は、合わせると一直線 (180°) です。 b と c も、合わせると一直線です。

$$a + b = 180^\circ \quad b + c = 180^\circ$$

どちらも「 b にたすと 180° になる角」なので、 a と c は同じ大きさです。 b が 110° なら、 a も c も $180 - 110 = 70$ で 70° です。 b が何度でも、同じ理由で $a = c$ になります。**対頂角は等しい。**

同位角と錯角

2本の直線 ℓ 、 m に、もう1本の直線 n が交わっています (ℓ はエル、 m はエム。直線の名前には小文字もよく使う)。交わる点が2つあり、それぞれに4つずつ角ができます。

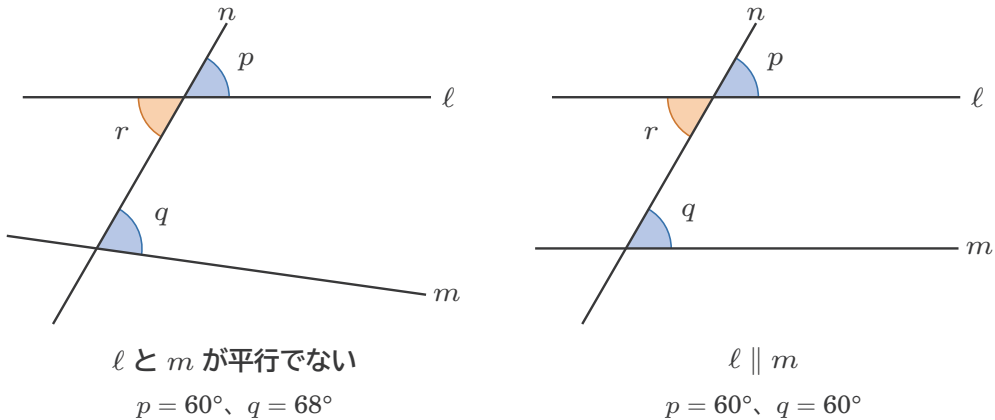


図5 p と q は同位角、 r と q は錯角。 p と r は対頂角。

- p と q のように、2つの交わる点で「同じ位置」(どちらも右上)にある角を、**同位角** (どういかく) といいます。
- r と q のように、 ℓ と m のあいだで、 n をはさんで「ななめに向かい合う」角を、**錯角** (さっかく) といいます。

図の左のように、 ℓ と m が平行でないときは、同位角 p と q の大きさはちがいます。右のように $\ell \parallel m$ のときは、 p と q は同じ大きさです。 ℓ を n にそってまっすぐ下へずらすと、平行な m にぴったり重なり、交わる所の形もまるごと重なるからです。

たいせつ

平行な2本の直線に、1本の直線が交わるとき、
同位角は等しい。 錯角は等しい。

錯角が等しいわけは、同位角からわかります。図の右で、 r と p は対頂角なので $r = p$ 。 p と q は同位角なので $p = q$ 。だから $r = q$ です。

せいかくに言うと

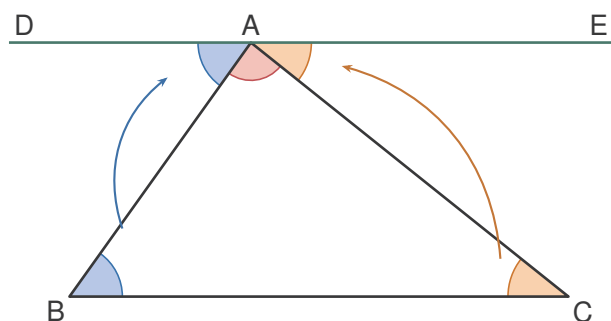
反対も言える

反対に、2本の直線に1本の直線が交わってできる同位角（または錯角）が等しいなら、その2本の直線は平行です。三角定規を定規にそってすべらせて平行な線を引けるのは、すべらせても三角定規の角（同位角）が変わらないからです。このように、「～ならば…」の前と後ろを入れかえたものを「逆」といいます（⑦でくわしく）。

4 三角形の内角の和は 180°

三角形の内側にある3つの角を**内角**（ないかく）といいます。**② はてな？**で、内角の和をはかると 180° に近くなりました。やってみようでは、3つの角が一直線に並びました。この「一直線」を、紙をちぎらずに、頭の中で作ります。

アイデア：頂点Aを通して、辺BCに平行な直線DEを引きます。すると、③の「平行線の錯角は等しい」が使えて、 $\angle B$ と $\angle C$ を、頂点Aのまわりに「移す」ことができます。



緑の線DEは、辺BCに平行。

青の角（ $\angle B$ ）と、オレンジの角（ $\angle C$ ）が、Aのまわりに移る。

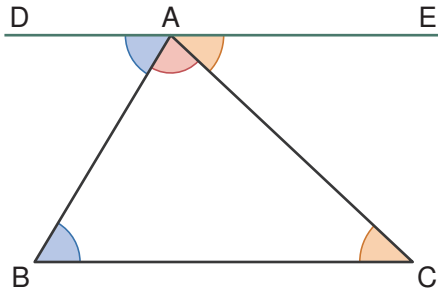
赤の角（ $\angle A$ ）とならべると、一直線のDEになる。

図6 アイデア：平行線を1本引いて、3つの角をAのまわりに集める（やってみようの「ちぎって並べる」を頭の中でする）

せいかくに言うと

証明の読み方

証明は、「わかっていること（仮定・かてい）」から出発して、1行に1つずつ、理由のはっきりしたことだけを使って、「示したいこと（結論・けつろん）」までたどりつく文章です。どの行にも「なぜそう言えるか」が書いてあるので、読む人は1行ずつ確かめられます。証明は、この本では次の1つだけです。ほかの性質は、図で確かめるだけにします。

証明：三角形の内角の和は 180° 

わかっていること（仮定）

$\triangle ABC$ は三角形。

示したいこと（結論）

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

準備

頂点 A を通り、辺 BC に平行な直線 DE を引く（緑の線）。

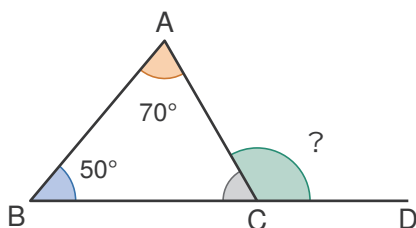
- ① $DE \parallel BC$ で、平行線の錯角は等しいので、 $\angle DAB = \angle B$ （青）
- ② 同じように、平行線の錯角は等しいので、 $\angle EAC = \angle C$ （オレンジ）
- ③ D・A・E は一直線の上にあるので、 $\angle DAB + \angle BAC + \angle EAC = 180^\circ$
- ④ ③の式の $\angle DAB$ を $\angle B$ に、 $\angle EAC$ を $\angle C$ におきかえる（①・②）と、
 $\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$

だから、三角形の内角の和は 180° である。

証明の中では、ものさしも分度器も使っていません。使ったのは、「平行線の錯角は等しい」と「一直線は 180° 」の2つだけです。この2つは、とがった三角形でも、平たい三角形でも、どんな三角形でも成り立ちます。だから、結論も、どんな三角形でも成り立ちます。

？はてな？ の答え：三角形の角をたすと「必ず」 180° と言えるのは、どんな三角形でも成り立つことだけを使って、 180° になることを証明できるからです。 181° や 179° になったのは、はかるときのずれです。

外角



三角形の1つの辺をのばすと、のばした線と、となりの辺のあいだに角ができます（緑の角 $\angle ACD$ ）。これを、頂点Cの**外角**（がいかく）といいます。

図で、 $\angle B = 50^\circ$ 、 $\angle A = 70^\circ$ のとき、緑の外角は何度でしょう。

内角の和は 180° なので、 $\angle ACB = 180 - (50 + 70) = 60$ で 60° 。 $\angle ACB$ と外角は合わせて一直線（ 180° ）なので、外角は $180 - 60 = 120$ で 120° です。

120 は、 $50 + 70$ と同じです。これはたまたまではありません。外角も、 $\angle A + \angle B$ も、どちらも「 180° から $\angle ACB$ をひいた角」だからです。

三角形の外角＝となりにない2つの内角の和

多角形の内角の和

四角形・五角形……のように、線分で囲まれた図形を**多角形**（たかくけい）といいます。多角形の内角の和は、何度でしょう。1つの頂点から対角線を引いて、三角形に分けてみます。

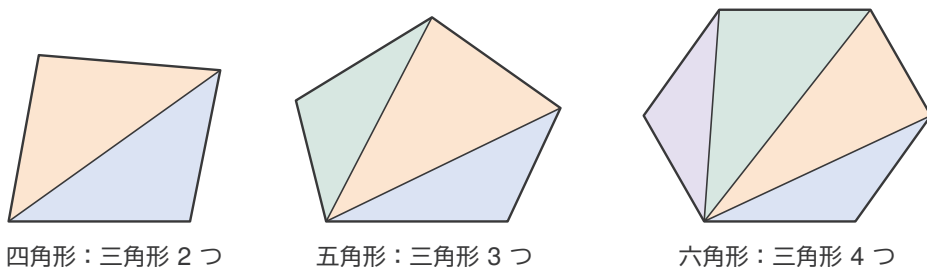


図7 1つの頂点から対角線を引くと、多角形は三角形に分かれる。

三角形の内角を全部たすと、もとの多角形の内角を全部たしたものになります（三角形の角が、ちょうど多角形の角を分けあっているから）。表にしてみました。

多角形	三角形	四角形	五角形	六角形	七角形	八角形
頂点の数 n	3	4	5	6	7	8
分かれた三角形 の数	1	2	3	4	5	6
内角の和	180°	360°	540°	720°	900°	1080°

表 1 三角形の数は、いつも頂点の数より 2 少ない。

三角形の数が、頂点の数 n より 2 少ないのは、選んだ頂点と、そのとなりの 2 つの頂点には、対角線が引けないからです（対角線は、となり合わない頂点を結ぶ線）。 n 個の頂点のうち、対角線の行き先になるのは $n - 3$ 個で、対角線 $n - 3$ 本で $n - 2$ 個の三角形に分かれます。だから、

$$n \text{ 角形の内角の和} = 180^\circ \times (n - 2)$$

たとえば十角形なら、 $180 \times (10 - 2) = 180 \times 8 = 1440$ で 1440° です。

辺の長さがすべて等しく、角の大きさもすべて等しい多角形を、**正多角形**（せいたかくけい）といいます。正 n 角形の 1 つの内角は、内角の和を n 等分して求めます。正六角形なら $720 \div 6 = 120$ で 120° です。

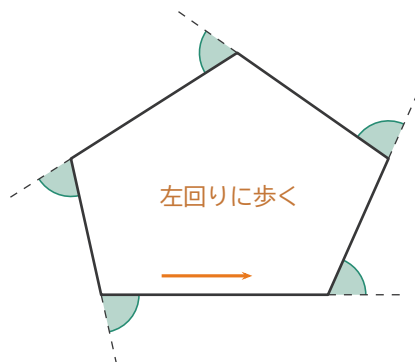
多角形の外角の和は 360°

多角形の外角は、各頂点で、辺を 1 本ずつ同じ回り方でのばしてつくります。どの頂点でも、内角と外角を合わせると一直線の 180° です。 n 角形では、内角と外角の組が n 組あるので、

$$\begin{aligned} \text{外角の和} &= 180^\circ \times n - (\text{内角の和}) \\ &= 180^\circ \times n - 180^\circ \times (n - 2) \\ &= 180^\circ \times n - 180^\circ \times n + 180^\circ \times 2 = 360^\circ \end{aligned}$$

（2 行めから 3 行めは、かっこをはずした (3-8)。 $-180^\circ \times (n - 2)$ は、 $-180^\circ \times n$ と $+180^\circ \times 2$ になる。） n が消えたので、**外角の和は、何角形でも 360° です。**

歩いて確かめる



五角形の辺の上を、左回りに歩きます。頂点に着くたびに、左へ向きを変えて、次の辺へ進みます。向きを変える角度が、その頂点の外角（緑）です。

1周して出発点にもどると、はじめと同じ向きを向いています。だから、とちゅうで向きを変えた角度の合計は、ちょうど1回転の 360° です（1-20）。何角形でも、1周すれば1回転です。

この考えで、三角形の内角の和をもう一度確かめられます。三角形の外角の和は 360° で、内角と外角の組は3組で $180 \times 3 = 540$ 。だから内角の和は $540 - 360 = 180$ で 180° 。証明と同じ答えになりました。

5 定義・公理・定理・法則

④の証明では、「平行線の錯角は等しい」を使いました。それは、③で「同位角は等しい」と「対頂角は等しい」から説明しました。では、「同位角は等しい」は、何から説明できるのでしょうか。

「なぜ?」「それはこうだから」「では、それはなぜ?」……と、さかのぼる問いは、いつまでも続きます。どこかで「ここから出発する」と決めないと、何も説明できません。数学では、出発点を2種類用意します。

- **定義**（ていぎ）：ことばの意味を決める約束。

例：「二等辺三角形とは、2つの辺の長さが等しい三角形のこと」「平行とは、同じ平面の上の2本の直線が交わらないこと」

- **公理**（こうり）：証明しないで、正しいと認めて出発点にすること。だれもが「それはそうだ」と思える、ごく当たり前のことを選びます。

例：「2つの点を通る直線は、1本だけある」「平行線の同位角は等しい」

そして、定義と公理から、証明によって正しいと示されたことを、**定理**（ていり）といいます。「対頂角は等しい」「三角形の内角の和は 180° 」は定理です。

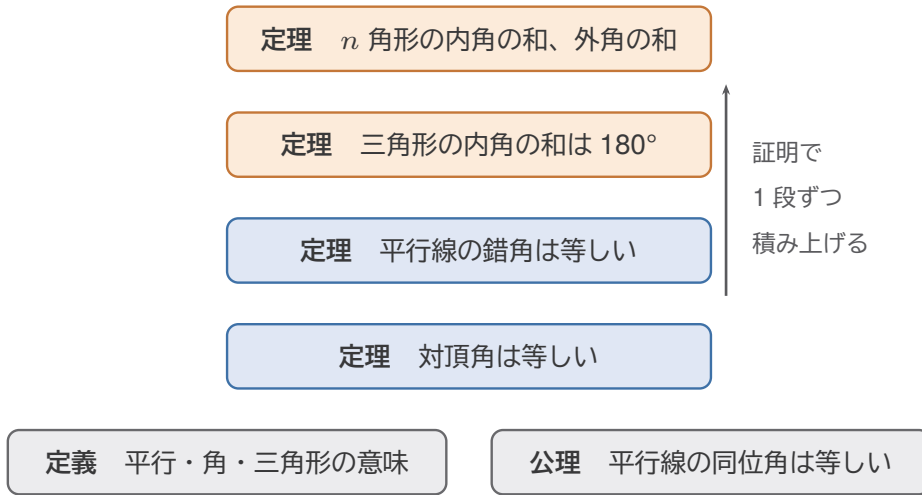


図 8 定義と公理を土台にして、定理を 1 段階ずつ積み上げる。上の段は、下の段を使って証明する。

建物と同じで、土台がしっかりしていれば、その上にいくらでも高く積みめます。そして、いちど証明された定理は、次の証明の材料として、安心して使えます。この章の題名「きまりから考えを積み上げる」は、このことです。

法則

理科や物理には、もう 1 つ、**法則**（ほうそく）ということばがあります。法則は、自然を実験や観察で調べて見つけたきまりです。

- ばねののびは、引く力に比例する ($F = kx$ 、2-15)。実験で見つけた法則です。引っぱりすぎると、成り立たなくなります。
- 物に力がはたらくと、力に比例した加速度が生まれる（力＝質量×加速度、 $F = ma$ ）。物理の土台になる法則です（5-5、物理シリーズ）。

法則は、どれだけたくさん実験しても、「次の実験でも必ず成り立つ」と証明することはできません。じっさい、 $F = ma$ は、光の速さに近い、とても速い物では少しずれることが、のちの実験でわかりました。法則は、もっと正確な実験で、なおされることがあるのです。

一方、「速さ＝距離÷時間」(2-3)は、法則ではありません。「速さということばを、こういう意味で使おう」と決めた約束、つまり定義です。だから実験でく

1 つがえることはありません。

	何か	正しさの決め方	例
定義	ことばの意味を決める 約束	約束なので、正しい・まちがいは ない	二等辺三角形、平行、速 さ＝距離÷時間
公理	証明しないで認める出 発点	当たり前のことを 選んで、認める	2点を通る直線は1本、 平行線の同位角は等しい
定理	証明で示されたこと	証明（定義と公理 から）	対頂角は等しい、内角の 和は 180°
法則	自然の中に見つけたき まり	実験と観察（なお されることもある）	$F = kx$ 、 $F = ma$

表2 定義・公理・定理・法則のちがい。この本では、ずっとこの使い方をする。

たいせつ

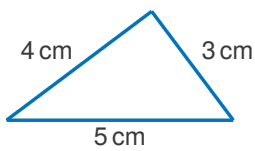
定義と公理を土台に、証明で定理を積み上げるのが数学。

実験と観察で法則を見つけ、なおしていくのが物理。

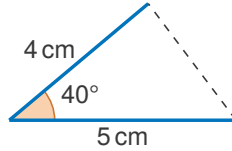
物理の法則も、いくつかの法則を出発点にして、数学の証明と同じように、たくさんさんのきまりを導きます。たとえば第6巻の6-15では、ばねも電気も熱も、少数の法則から同じ形の式で書けることを見ます。物理シリーズでは、 $F = ma$ などの法則から、小学校から高校までの物理の式を、1つずつ導いていきます。

⑥ 三角形が1つに決まる条件：合同条件

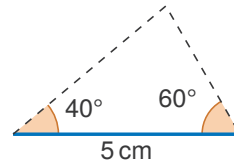
友だちに電話で三角形を伝えて、同じ三角形をかいてもらいます。何を伝えれば、友だちは必ず、自分のと合同な三角形をかけるでしょう。



① 3 辺



② 2 辺とそのあいだの角



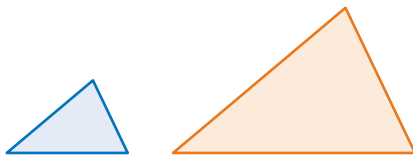
③ 1 辺とその両はしの角

図 9 青い線と色のついた角を伝えれば、点線の部分は自然に決まる。

- ① **3 辺**：「5 cm、4 cm、3 cm」。5 cm の辺を引き、両はしからコンパスで 4 cm と 3 cm の円をかくと、交わる点が 3 つめの頂点です。上と下に 1 つずつ交わりますが、どちらでかいても、裏返すと重なる（合同）三角形です。
- ② **2 辺とそのあいだの角**：「5 cm と 4 cm で、そのあいだの角が 40° 」。2 本の辺の向きと長さが決まるので、2 つのはしを結べば三角形が 1 つに決まります。
- ③ **1 辺とその両はしの角**：「5 cm で、両はしの角が 40° と 60° 」。両はしから出る 2 本の線の向きが決まるので、2 本が交わる点が 1 つに決まります。

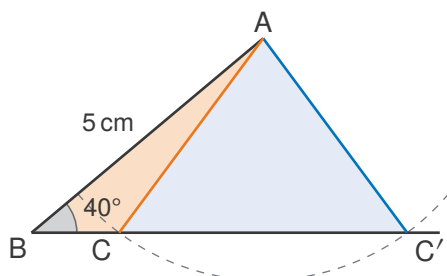
この 3 つを、三角形の**合同条件**といいます。2 つの三角形で、①②③のどれかが等しければ、2 つは合同です。合同条件は、「三角形が 1 つに決まるための条件」なのです。

これだけでは決まらない



3 つの角は同じ。大きさがちがう

「3 つの角が 40° 、 60° 、 80° 」だけでは、形は決まっても、大きさが決まりません。小さい三角形も、大きい三角形もかけます。3 つの角が等しい三角形は、合同とはかぎらないのです（このような「形が同じ」三角形は、4-3 の相似で学びます）。



「 $AB = 5\text{ cm}$ 、 $AC = 4\text{ cm}$ 、 $\angle B = 40^\circ$ 」も、だめです。 40° は、 5 cm と 4 cm の辺の「あいだの角」ではありません。A を中心に半径 4 cm の円をかくと、B から出た線と 2 か所 (C と C') で交わり、三角形が 2 つかけてしまいます。BC は約 1.4 cm か約 6.2 cm です。合同条件の②で「あいだの角」と言うのは、このためです。

4-0 のロボットのうでを思い出しましょう。肩・ひじ・手を結ぶと、三角形ができます。上うで 30 cm 、前うで 20 cm 、肩から手までのまっすぐな距離の 3 辺が決まっているので、合同条件①から、三角形の形は 1 つに決まります。ただし、裏返した形 (ひじが上とひじが下) もかけるので、答えは 2 通りでした。三角形の辺や角を、合同条件ごとに計算で求める方法 (正弦定理・余弦定理) は、4-7 で学びます。

7 逆と反例

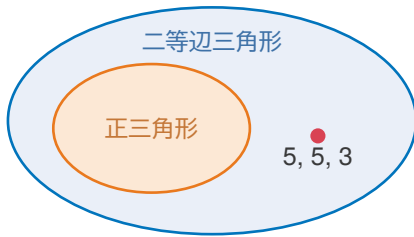
「 $\triangle ABC$ が正三角形ならば、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である」は正しい文です。正三角形は 3 つの辺が等しいので、とくに 2 つの辺も等しいからです。この文の「ならば」の前の部分を**仮定**、後ろの部分を**結論**といいます (④の証明と同じことば)。

仮定と結論を入れかえた文を、もとの文の**逆** (ぎゃく) といいます。

もとの文「正三角形ならば、二等辺三角形」

逆「二等辺三角形ならば、正三角形」

逆は正しいでしょうか。辺の長さが 5 cm 、 5 cm 、 3 cm の三角形は、2 つの辺が等しいので二等辺三角形です。でも 3 つの辺は等しくないなので、正三角形ではありません。だから逆は正しくありません。



正三角形は、二等辺三角形のなかま（内側の円）です。だから「正三角形ならば二等辺三角形」は正しい。でも、二等辺三角形のなかには、正三角形でないもの（赤い点）があります。

逆が正しくないことを示すには、「仮定にあてはまるのに、結論にあてはまらない例」を1つ見つければ十分です。この例を**反例**（はんれい）といいます。

逆が正しいこともあります。③の「平行ならば、同位角は等しい」の逆「同位角が等しいならば、平行」は正しい文でした。もとの文が正しくても、逆は正しいとはかぎりません。1つずつ確かめる必要があります。

数でも同じです。「 $x = 3$ ならば $x^2 = 9$ 」は正しい。逆の「 $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ 」は正しくありません。反例は $x = -3$ です。 $(-3)^2 = 9$ なのに、 $x = 3$ ではないからです（ $3 \cdot 10 : 2$ 乗して 9 になる数は 3 と -3 ）。

せいかくに言うと

反例は1つでよい、証明は全部の場合

「正しくない」と言うには、反例が1つあれば十分です。でも「正しい」と言うには、たくさんの例で確かめるだけでは足りません（どこかに反例があるかもしれない）。全部の場合で成り立つことを、証明する必要があります。**② はてな？** で三角形をいくつかついても「必ず」と言えなかったのは、このためです。直角三角形についての定理と、その逆は、4-4（三平方の定理）で使います。

この章で出てきたことば

定義・公理 ことばの意味の約束。証明しないで認める出発点。

定理・証明 定義と公理から、理由をつないで正しいと示したこと。その文章。

法則 実験と観察で見つけた自然のきまり。なおされることもある。

合同 ずらす・回す・裏返すで、ぴったり重なること。

対頂角・同位角・錯角 対頂角はいつも等しい。平行線の同位角・錯角は等しい。

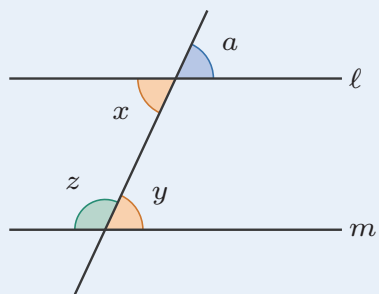
内角・外角 n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ 、外角の和は 360° 。

逆・反例 仮定と結論を入れかえた文。正しくないことを示す1つの例。

例題でたしかめよう

例題1 平行線と角

右の図で、 $\ell \parallel m$ です。 $\angle a = 65^\circ$ のとき、 $\angle x$ 、 $\angle y$ 、 $\angle z$ の大きさを求めましょう。



考え方 対頂角は等しい。平行線の同位角・錯角は等しい。一直線は 180° 。

式 $\angle x$ は $\angle a$ の対頂角なので $\angle x = 65^\circ$

$\angle y$ は $\angle a$ の同位角で、 $\ell \parallel m$ なので $\angle y = 65^\circ$

$\angle z$ と $\angle y$ を合わせると一直線なので $\angle z = 180 - 65 = 115$

答え $\angle x = 65^\circ$ 、 $\angle y = 65^\circ$ 、 $\angle z = 115^\circ$

$\angle x$ と $\angle y$ は錯角です。錯角は等しいので、ここからも $\angle y = \angle x = 65^\circ$ と確かめられます。

 じぶんでこう 1

例題 1 の図で、 $\angle a = 48^\circ$ のとき、 $\angle x$ 、 $\angle y$ 、 $\angle z$ の大きさを求めましょう。

 例題 2 三角形の内角と外角

$\triangle ABC$ で、 $\angle A = 50^\circ$ 、 $\angle B = 70^\circ$ です。 $\angle C$ と、頂点 C の外角の大きさを求めましょう。

考え方 内角の和は 180° 。外角は、となりにない 2 つの内角の和 (④)。

式 $\angle C = 180 - (50 + 70) = 180 - 120 = 60$

外角 $= 50 + 70 = 120$ (確かめ: $180 - 60 = 120$)

答え $\angle C = 60^\circ$ 、外角 120°

 じぶんでこう 2

$\triangle ABC$ で、 $\angle A = 35^\circ$ 、 $\angle B = 80^\circ$ です。 $\angle C$ と、頂点 C の外角の大きさを求めましょう。

 例題 3 二等辺三角形の角

$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、頂角 $\angle A = 40^\circ$ です。底角 $\angle B$ と $\angle C$ の大きさを求めましょう。

考え方 二等辺三角形は線対称なので、2 つの底角は等しい (②)。内角の和は 180° 。

式 2 つの底角の和は $180 - 40 = 140$

2 つは等しいので、1 つは $140 \div 2 = 70$

答え $\angle B = \angle C = 70^\circ$

じぶんでところ3

$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、頂角 $\angle A = 110^\circ$ です。底角の大きさを求めましょう。

例題4 多角形の内角と外角

- (1) 正八角形の内角の和と、1つの内角の大きさを求めましょう。
- (2) 五角形の4つの外角が 70° 、 80° 、 65° 、 75° です。残りの外角は何度ですか。
- (3) 1つの内角が 150° の正多角形は、正何角形ですか。

考え方 内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ 。外角の和は何角形でも 360° 。内角と外角を合わせると 180° 。

式 (1) $180 \times (8 - 2) = 180 \times 6 = 1080$ 。1つの内角は $1080 \div 8 = 135$
 (2) $360 - (70 + 80 + 65 + 75) = 360 - 290 = 70$
 (3) 1つの外角は $180 - 150 = 30$ 。外角の和は 360° なので

$$n = 360 \div 30 = 12$$

答え (1) 和 1080° 、1つの内角 135° (2) 70° (3) 正十二角形

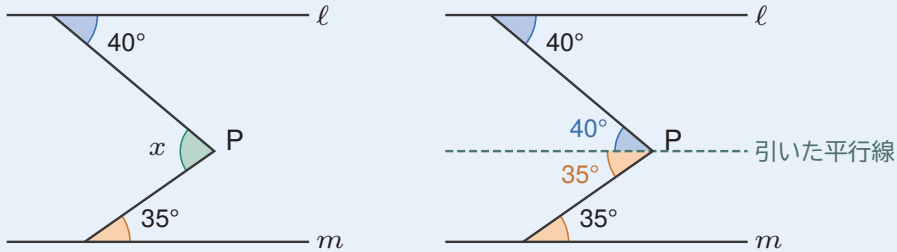
(3) は、内角の和の式からも確かめられます。正十二角形の内角の和は $180 \times 10 = 1800$ で、 $1800 \div 12 = 150$ 。合っています。

じぶんでところ4

- (1) 正十角形の内角の和と、1つの内角の大きさを求めましょう。
- (2) 六角形の5つの外角が 50° 、 70° 、 60° 、 55° 、 65° です。残りの外角は何度ですか。
- (3) 1つの内角が 140° の正多角形は、正何角形ですか。

例題 5 平行線のあいだの折れ線

下の左の図で、 $\ell \parallel m$ です。 $\angle x$ の大きさを求めましょう。



考え方 上の右の図のように、 P を通って ℓ に平行な直線を引くと、 $\angle x$ が上と下の 2 つに分かれる。上の部分は ℓ との錯角、下の部分は m との錯角。

式 上の部分 = 40° (ℓ と、引いた線の錯角)

下の部分 = 35° (m と、引いた線の錯角。引いた線は m にも平行)

$$\angle x = 40 + 35 = 75$$

答え 75°

平行線のあいだの角は、「平行線を 1 本ふやす」と、知っている錯角に分けられます。答えは、両はしの角をたしたものになります。

じぶんでこう 5

例題 5 の図で、 40° が 32° 、 35° が 46° のとき、 $\angle x$ の大きさを求めましょう。

例題6 合同条件

次のア～エで、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が必ず合同になるものを選び、そのときの合同条件を答えましょう。

ア $AB = DE = 5\text{ cm}$ 、 $BC = EF = 7\text{ cm}$ 、 $\angle B = \angle E = 40^\circ$

イ $\angle A = \angle D = 60^\circ$ 、 $\angle B = \angle E = 50^\circ$ 、 $\angle C = \angle F = 70^\circ$

ウ $BC = EF = 6\text{ cm}$ 、 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ 、 $\angle C = \angle F = 75^\circ$

エ $AB = DE = 6\text{ cm}$ 、 $AC = DF = 5\text{ cm}$ 、 $\angle B = \angle E = 50^\circ$

考え方 等しい辺と角が、合同条件①②③のどれかにあてはまるかを見る。角は、どの辺の「あいだ」や「両はし」かを確かめる。

式 ア： $\angle B$ は、辺 AB と辺 BC のあいだの角。②にあてはまる

イ：角だけで辺の長さがない。大きさが決まらない

ウ： $\angle B$ と $\angle C$ は、辺 BC の両はしの角。③にあてはまる

エ： AB と AC のあいだの角は $\angle A$ 。 $\angle B$ は「あいだの角」ではない。

⑥の図のように、三角形が2つかけることがある

答え アは「2 辺とそのあいだの角」、ウは「1 辺とその両はしの角」で合同。イとエは合同とはかぎらない

じぶんでところ6

次のア～ウで、2 つの三角形が必ず合同になるものを選び、合同条件を答えましょう。

ア $AB = DE = 4\text{ cm}$ 、 $BC = EF = 6\text{ cm}$ 、 $CA = FD = 5\text{ cm}$

イ $AB = DE = 5\text{ cm}$ 、 $AC = DF = 4\text{ cm}$ 、 $\angle B = \angle E = 40^\circ$

ウ $AC = DF = 3\text{ cm}$ 、 $\angle A = \angle D = 50^\circ$ 、 $\angle C = \angle F = 60^\circ$

例題 7 逆と反例

次の文の逆を書き、逆が正しいかどうかを答えましょう。正しくないときは、反例を 1 つ答えましょう。

(1) $x = 2$ ならば $x^2 = 4$

(2) 四角形が正方形ならば、4 つの辺の長さが等しい。

考え方 仮定と結論を入れかえる。逆の仮定にあてはまるのに、結論にあてはまらない例をさがす。

式 (1) 逆は「 $x^2 = 4$ ならば $x = 2$ 」。 $x = -2$ でも $(-2)^2 = 4$ だが、 $x = 2$ ではない

(2) 逆は「4 つの辺の長さが等しい四角形ならば、正方形」。

ひし形 (4 つの辺が等しく、角が直角でない四角形) は、正方形ではない

答え (1) 正しくない。反例 $x = -2$ (2) 正しくない。反例は、角が直角でないひし形

じぶんでこう 7

次の文の逆を書き、正しいかどうかを答えましょう。正しくないときは、反例を 1 つ答えましょう。

(1) $x = 5$ ならば $x^2 = 25$

(2) ある整数が 6 の倍数ならば、その整数は 2 の倍数である。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

∠ABC の頂点

✕ ∠ABC は、頂点 A の角

○ ∠ABC は、まん中に書いた B が頂点の角

3つの文字のまん中が頂点です。∠BAC なら A の角、∠ACB なら C の角です。

⚠ まちがえやすいところ

平行かどうかを確かめずに、同位角を等しいとする

✕ 2本の直線に1本の直線が交わったので、同位角は等しい

○ 2本の直線が平行なときだけ、同位角は等しい

③の図の左のように、平行でない2本では、同位角の大きさはちがいます。問題文や図の「 $l \parallel m$ 」を確かめてから使いましょう。

⚠ まちがえやすいところ

n 角形の内角の和を $180^\circ \times n$ にする

✕ 五角形の内角の和は $180 \times 5 = 900$ で 900°

○ 五角形の内角の和は $180 \times (5 - 2) = 540$ で 540°

三角形に分けると、三角形の数は頂点の数より2少なくなります。三角形 ($n = 3$) で $180 \times (3 - 2) = 180$ になるか、確かめるくせをつけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

逆も正しいと思いきむ

✕ 「正方形ならば4辺が等しい」は正しいので、「4辺が等しいならば正方形」も正しい

○ 逆が正しいかどうかは、別に確かめる。ひし形が反例
もとの文が正しくても、逆が正しいとはかぎりません。反例をさがしてみましょう。

⚠ まちがえやすいところ

たくさん確かめたので「必ず」と言う

✕ 三角形を10こはかって、どれも 180° に近かったから、必ず 180°

○ 必ず成り立つと言うには、証明が必要
はかった例がいくつあっても、ほかの三角形で成り立つとはかぎりません。
どんな場合にも使える理由（証明）をさがしましょう。

⚠ まちがえやすいところ

「2辺と1つの角」なら合同、と思いきむ

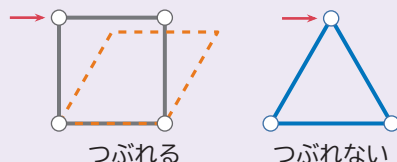
✕ 2辺と1つの角が等しいので、合同

○ 2辺と、その2辺の「あいだの角」が等しいときだけ、合同
角が2辺のあいだにないと、三角形が2つかけることがあります（⑥の図）。角が、どの2辺にはさまれているかを、図に書きこんで確かめましょう。

物理・工学ではこう使う

三角形は、形が変わらない：トラス

4本の棒を角で回るようにつないだ四角形の枠は、横から押すとつぶれます。4辺の長さだけでは、形が1つに決まらないからです。三角形の枠は、3辺で形が1つに決まる（合同条件①）ので、つぶれません。



鉄橋や鉄塔は、細い鋼材を三角形に組んで作ります（トラス）。家の壁の中の筋かい（柱のあいだのななめの木）も、三角形を作って、地震で家がゆがむのを防ぎます。

物理・工学ではこう使う

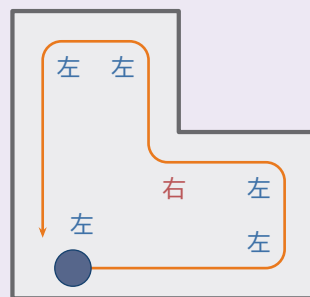
ロボット掃除機は、1周で360°回る

ロボット掃除機には、向きの変わり方をはかるセンサー（ジャイロセンサー。半導体の小さな部品）が入っていて、曲がった角度をたし合わせて、いまの向きを知ります。

L字形の部屋のかべにそって1周すると、左に90°曲がる角が5か所、右に90°曲がる角が1か所あります。右に曲がるのを反対の向きのマイナス（2-2）とすると、

$$90 \times 5 + (-90) = 450 - 90 = 360$$

で、ちょうど1回転です。出発点にもどったとき合計が360°からずれていれば、センサーのずれがわかり、直すことができます。



物理・工学ではこう使う

単位の「定義」

1 m の長さは、「光が、何もない空間（真空）を $\frac{1}{299\,792\,458}$ 秒のあいだに進む距離」と決められています。これは実験で見つけた法則ではなく、世界じゅうで同じ長さを使うための約束、つまり定義です。光の速さが「光速 299 792 458 m」ぴったりなのは、はかった結果ではなく、そう定義したからです。

コラム 三角形の内角の和が、 180° にならない世界

今から約 2300 年前、ギリシャのユークリッドは、それまでに知られていた図形の性質を、少数の定義と公理から証明で積み上げた本『原論』をまとめました。その公理の 1 つが、平行線についての公理です。

19 世紀になって、数学者たちは、この平行線の公理を別のものに取りかえても、矛盾（むじゅん：つじつまが合わないこと）のない図形の世界が作れることに気づきました。たとえば、地球のような球の表面です。北極から経度 0° の線にそって赤道まで進み、赤道にそって経度 90° の所まで進み、北極へもどると、3 つの角がどれも 90° の三角形ができます。内角の和は 270° です。球の表面では、平らな面の公理が成り立たないからです。公理を変えると、定理も変わります。この本の図形は、平らな面の公理の上に積み上げたものです。地球の大きさにくらべて小さい範囲（学校の校庭など）なら、平らな面と考えて問題ありません。



章末問題

4-1 のまとめ

基本

1 例題1の図で、 $\angle a = 72^\circ$ のとき、 $\angle x$ 、 $\angle y$ 、 $\angle z$ の大きさを求めましょう (例題1)。

2 $\triangle ABC$ で、 $\angle A = 62^\circ$ 、 $\angle B = 43^\circ$ です。 $\angle C$ と、頂点 C の外角の大きさを求めましょう (例題2)。

3 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、頂角 $\angle A = 36^\circ$ です。底角の大きさを求めましょう (例題3)。

4 次の問いに答えましょう (例題4)。

(1) 正五角形の内角の和と、1つの内角の大きさを求めましょう。

(2) 七角形の6つの外角が、どれも 50° です。残りの外角は何度ですか。

(3) 1つの内角が 160° の正多角形は、正何角形ですか。

5 例題5の図の 40° が 38° 、 35° が 44° のときの、 $\angle x$ を求めましょう (例題5)。

6 次のア・イで、2つの三角形が必ず合同になるものを選び、合同条件を答えましょう (例題6)。

ア $AB = DE = 8\text{ cm}$ 、 $\angle A = \angle D = 30^\circ$ 、 $AC = DF = 6\text{ cm}$

イ $\angle A = \angle D = 90^\circ$ 、 $\angle B = \angle E = 30^\circ$ 、 $\angle C = \angle F = 60^\circ$

チャレンジ

7 次の文の逆を書き、正しいかどうかを答えましょう。正しくないときは、反例を1つ答えましょう (例題7)。

(1) $x = 4$ ならば $x^2 = 16$ (2) 整数が10の倍数ならば、5の倍数である。

8 正 n 角形の 1 つの外角が 24° です。 n と、内角の和を求めましょう (例題 4)。

9 ロボット掃除機が五角形の部屋のかべにそって左回りに 1 周し、4 つの角で左に 70° 、 75° 、 80° 、 65° 曲がりました。残りの角 (?) では、左に何度曲がりましたか (例題 4、④の「歩いて確かめる」)。

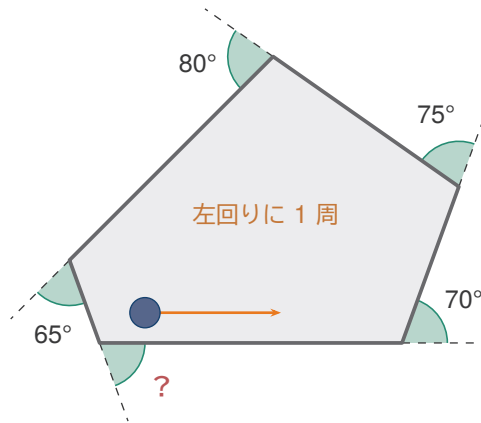


図 10 緑の角が、それぞれの角で左に曲がる角 (外角)

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 平行線の同位角・錯角から、角を求められる。 → 32 ページ
- ☐ 内角の和が 180° のわけと、多角形の角の和がわかる。 → 34 ページ
- ☐ 定義・公理・定理・法則のちがいを説明でき、合同条件・逆・反例を
使える。 → 38 ページ



ソラ

はかるだけじゃ「必ず」とは言えないけど、証明すれば、まだはかっ
ていない三角形のことまでわかるんだね。

第1部 図形

★～★★

4-2 角度と円、ラジアン

📌 道しるべ この章の前に 1-19 1-20 2-9 2-15 4-1
 この章の先に 4-6 4-8 4-15 5-3 5-15 5-17

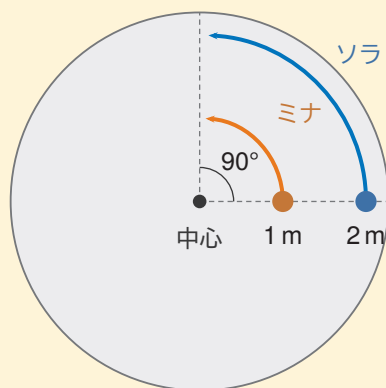
📌 この章でできるようになること

- ★★ 弦・弧・おうぎ形がわかり、弧の長さとおうぎ形の面積を、中心角に比例させて求められる。
- ★★★★★ 角をラジアン（弧の長さ÷半径）で表し、度と換算して、 $s = r\theta$ と $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ を使える。
- ★★ 接線が半径に垂直なわけを説明でき、DEG・RAD と極座標 (r, θ) を使える。

? はてな？

公園の回る遊具に、ミナさんとソラさんが乗っています。ミナさんは中心から 1m、ソラさんは中心から 2m の所です。遊具が、ちょうど $\frac{1}{4}$ 回転（90°）しました。2人が回った角度は、どちらも 90°です。でも、地面の上を進んだ道のりは、外側のソラさんのほうが長そうです。

では、「進んだ道のり」から「回った角度」を言いあてる方法は、あるでしょうか。角度を「長さ」ではかることはできるかな？



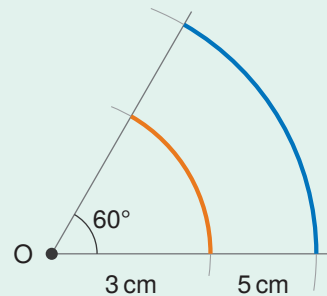
角度は、分度器ではかって「何度」と言うのがふつうです(1-20)。この章では、角度を「弧の長さ÷半径」という長さのわり算で表す方法を作ります。この方法は、回るものの動きを計算するときに、とても便利です。第5巻で $\sin$ や $\cos$ を微分するときも、物理で回転を調べるときも、この方法を使います。

△ やってみよう ひもで、弧の長さをはかろう

用意するもの

コンパス、分度器、定規、たこ糸(細いひも)、電卓

- 1 コンパスで、同じ中心 O のまわりに、半径 3 cm と半径 5 cm の円をかこう。
- 2 分度器を使って、 O の所に 60° の角をかこう。角の2本の線は、外の円までのぼそう。
- 3 2本の線にはさまれた円の曲がった部分に、糸をそわせよう。はしに印をつけて、糸をまっすぐにのぼし、定規で長さをはかろう。
- 4 「はかった長さ÷半径」を、電卓で計算しよう。 90° でもやってみよう。



ミナさんがはかった結果です。右のはしの列を、自分で計算してみよう。

角	半径	糸ではかった長さ	はかった長さ÷半径
60°	3 cm	3.1 cm	
60°	5 cm	5.2 cm	
90°	3 cm	4.7 cm	
90°	5 cm	7.9 cm	

やってみようの答え：60°では、 $3.1 \div 3 = 1.03\dots$ 、 $5.2 \div 5 = 1.04$ です。90°では、 $4.7 \div 3 = 1.56\dots$ 、 $7.9 \div 5 = 1.58$ です。半径がちがうので、はかった長さはちがいます。それなのに、同じ角なら「長さ÷半径」は、ほとんど同じ数になりました。小さなちがいは、糸ではかったときのずれです(2-6)。このふしぎを、この章の数学の道具③で解きあかします。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-20** 角の大きさは、回った大きさ。1回転は360°、直角は90°。
- 2-9** 円周＝直径× π 。 $\pi = 3.14159\dots$ は、どんな大きさの円でも同じ数(円周率)。
- 2-15** 比例： x が2倍、3倍になると、 y も2倍、3倍になる。式は $y = ax$ 。
- 2-10** 換算は「単位つきの1」をかける。 $2\text{ min} \times 60\text{ s/min} = 120\text{ s}$ (minが約分されて消える)。
- 4-1** 二等辺三角形の2つの底角は等しい。三角形の内角の和は180°。三角形の外角は、とりにない2つの内角の和。

数学の道具

① 円のことば：弦・弧・おうぎ形

コンパスで円をかくとき、針をさした点が円の**中心**です。針からえんぴつの先までの長さが**半径**です(1-19)。円の上のどの点も、中心からの長さは、ちょうど半径です。円は「中心から同じ長さの点を、ぜんぶ集めた形」なのです。

円の中心をって、円の上の2点を結んだ線分が**直径**です。直径は、半径2つ分の長さです。

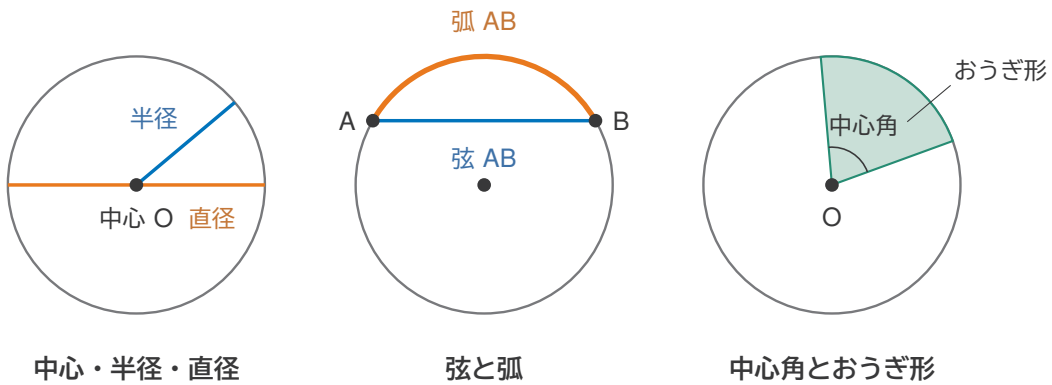
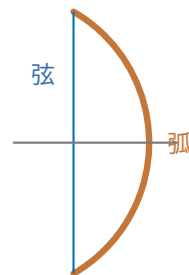


図 1 円のことば。まん中の図のオレンジが弧、青が弦。右の図の緑の部分が、おうぎ形。

- 円の上の 2 点 A、B を結んだ線分を、**弦**（げん）といいます。弦 AB とよびます。
- 円の上の A から B までの、曲がった部分を**弧**（こ）といいます。弧 AB とよびます。
- 2 本の半径にはさまれた角を**中心角**といいます。
- 2 本の半径と弧でかこまれた形を**おうぎ形**といいます。ピザの 1 切れや、開いたせんすの形です。

「弧」と「弦」は、どちらも弓（ゆみ）から来たことばです。弓の、曲がった木の部分の形が弧です。弓にぴんとはった糸（つる）が弦です。弦は、弧の両はしをまっすぐに結んでいます。

A、B の 2 点で円を分けると、短い弧と長い弧の 2 つができます。ことわりがなければ、弧 AB は短いほうを指します。



円周の長さは $2\pi r$

円のまわりの長さ（円周）は、直径 $\times \pi$ でした（2-9）。 π （パイ）は、どんな円でも同じ数 3.14159… です。直径は半径の2倍なので、半径を r とすると、直径は $2 \times r$ です。

$$\text{円周} = \text{直径} \times \pi = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$$

文字式では、数を先に、次に π 、そのあとに文字を書くのが約束です。だから $2\pi r$ と書きます。半径 5 cm の円なら、円周は $2\pi \times 5 = 10\pi$ で、約 31.4 cm です。

この本では、「約」のかわりに、記号 $\approx$ を使うことがあります。 $\approx$ は「ほぼ等しい」という意味です（5-8 でくわしく）。 $10\pi \approx 31.4$ のように書きます。

せいかくに言うと

この章の r は半径

半径を r と書くのは、英語で半径を **radius**（レイディアス）というからです。3-15 では、相関係数を r と書きました。同じ文字でも、この章の r は半径で、相関係数とは関係ありません。文字は、そのつど「何を表すか」を決めて使います。

② おうぎ形の弧と面積は、中心角に比例する

半径 6 cm の丸いピザを、中心から 8 等分します。1 切れの中心角は、 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ です。1 切れ、2 切れ、3 切れ……と、となりどうしをくっつけて、大きなおうぎ形を作ってみましょう。

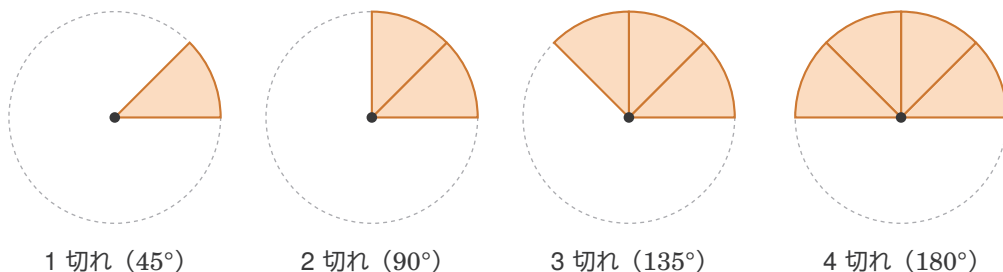


図2 1 切れの中心角は 45° 。切れの数を 2 倍、3 倍にすると、中心角も 2 倍、3 倍になる。

8 切れは、どれも同じ形・同じ大きさです。1 切れを中心のまわりに回すと、となりの 1 切れにぴったり重なるからです（合同。4-1）。だから、どの 1 切れも、弧の長さは同じで、面積も同じです。

- 2 切れのおうぎ形は、中心角が 2 倍、弧の長さも 2 倍、面積も 2 倍です。
- 3 切れなら、中心角も弧も面積も、すべて 3 倍です。

中心角が 2 倍、3 倍になると、弧の長さも面積も 2 倍、3 倍になります。これは比例です（2-15）。円全体（8 切れ）の円周は $2\pi \times 6 = 12\pi \approx 37.70 \text{ cm}$ なので、1 切れの弧は $12\pi \div 8 = 1.5\pi \approx 4.71 \text{ cm}$ です。

切れの数	1	2	3	4	8
中心角	45°	90°	135°	180°	360°
弧の長さ (cm)	4.71	9.42	14.14	18.85	37.70
面積 (1 切れの何倍)	1	2	3	4	8

表 1 半径 6 cm のおうぎ形。弧の長さも面積も、中心角に比例する。

度で書いた弧の長さの式

円全体は、中心角 360° のおうぎ形と考えられます。その弧の長さは、円周の $2\pi r$ です。中心角が a° のおうぎ形は、円全体の $\frac{a}{360}$ にあたります。比例なので、弧の長さも円周の $\frac{a}{360}$ 倍です。

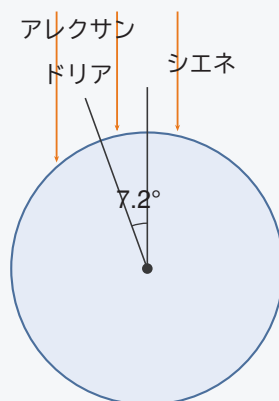
$$\text{中心角 } a^\circ \text{ のおうぎ形の弧の長さ} = 2\pi r \times \frac{a}{360}$$

360 でわるのは、1 回転が 360° だからです（1-20）。半径 6 cm、中心角 60° なら、 $2\pi \times 6 \times \frac{60}{360} = 12\pi \times \frac{1}{6} = 2\pi$ で、約 6.28 cm です。

面積も同じように、円全体の面積の $\frac{a}{360}$ 倍です。円の面積は πr^2 （半径×半径×円周率。小学校で学んだ式です。なぜそうなるかは 4-5 でくわしく調べます）なので、中心角 a° のおうぎ形の面積は $\pi r^2 \times \frac{a}{360}$ です。⑤では、ラジアンを使って、もっと簡単な式にします。

コラム 角で地球の大きさをはかった人

いまから 2200 年ほど前、エジプトにいたエラトステネスは、角と弧の長さの比例を使って、地球 1 周の長さを求めました。夏至の日の正午、南のシエネという町では、太陽が真上にあり、深い井戸の底まで日光がとどきました。同じ時刻、北のアレクサンドリアでは、地面に立てた棒のかげから、太陽の光が真上から 7.2° かたむいてさしていることがわかりました。



太陽の光は平行にとどくので、 7.2° は、地球の中心から見た 2 つの町の間の中心角と同じです (4-1 の平行線と角)。 $360 \div 7.2 = 50$ なので、2 つの町の間の道のりは、地球 1 周の $\frac{1}{50}$ です。その道のりを約 925 km とすると、地球 1 周は $925 \times 50 = 46\,250$ で、約 46 000 km。本当の値の約 40 000 km に近い数を、棒と角度と道のりだけで求めたのです。(図は、角を大きめにかいています。)

3 角を長さではかる：弧度法とラジアン

？はてな？ にもどりましょう。遊具が 90° 回るあいだに、2 人はそれぞれ、半径 1 m と 2 m の円の $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ を進みます。

	半径	進んだ道のり (弧の長さ)	弧の長さ ÷ 半径
ミナ	1 m	$2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} \approx 1.57 \text{ m}$	$1.57 \div 1 = 1.57$
ソラ	2 m	$2\pi \times 2 \times \frac{1}{4} \approx 3.14 \text{ m}$	$3.14 \div 2 = 1.57$

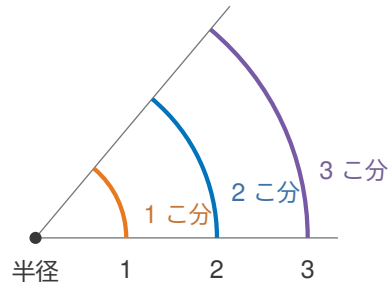
表 2 進んだ道のりは 2 倍ちがうのに、「弧の長さ ÷ 半径」は同じ。

ソラさんは、ミナさんの2倍の道のりを進みました。ところが、「弧の長さ÷半径」を計算すると、2人とも1.57で同じです。やってみようでも、同じことが起きていました。

① なぜ同じになるの？（図で考える）

同じ中心のまわりに、半径1、2、3の円をかきます。同じ角のおうぎ形を切りとると、大きいおうぎ形は、小さいおうぎ形を、そのまま2倍、3倍に引きのばした形になっています。

引きのばすと、弧の長さも2倍、3倍になります。半径が2倍なら弧も2倍、半径が3倍なら弧も3倍。だから「弧÷半径」は変わりません。



② なぜ同じになるの？（式で考える）

中心角 a° の弧の長さは、②の式で $2\pi r \times \frac{a}{360}$ でした。これを半径 r でわります。

$$\left(2\pi r \times \frac{a}{360}\right) \div r = 2\pi \times \frac{a}{360}$$

r をかけてから r でわるので、 r は消えます。のこった $2\pi \times \frac{a}{360}$ には、半径 r が入っていません。角 a だけで決まる数です。だから、どんな大きさの円で計算しても、同じ角なら同じ数になるのです。

③ 角を「弧の長さ÷半径」で表す

「弧の長さ÷半径」は、角だけで決まる数でした。そこで、この数を、角の大きさそのものとして使うことにします。

$\text{角 } \theta \text{ (ラジアン)} = \text{弧の長さ} \div \text{半径}$

θ は、ギリシャ文字で「シータ」と読みます。角の大きさを表すのによく使う文字です。このように角をはかる方法を**弧度法**（こどほう）といい、この角の単位を**ラジアン**（記号 rad）といいます。ラジアン（radian）は、半径（radius）から作られたことばです。

？はてな？ の答え：角度は、「弧の長さ÷半径」という長さのわり算で表せます。ミナさんもソラさんも、 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ ラジアン回りました。進んだ道のりがちがっても、回った角は同じ数になります。

④ 半径1の円なら、角と弧の長さは同じ数

半径が1のときは、1でわっても数は変わりません。だから、

半径1の円なら、角（rad）と弧の長さは同じ数

です。半径1の円の上を、長さ0.5だけ進んだら、角は0.5ラジアン。長さ2だけ進んだら、角は2ラジアンです。ラジアンは、「半径1の円の上を、どれだけ歩いたか」で角をはかる方法、と考えることもできます。

⑤ 1周は 2π ラジアン

1周（ 360° ）の弧の長さは、円周の $2\pi r$ です。半径でわると、

$$1 \text{ 周の角} = 2\pi r \div r = 2\pi \text{（ラジアン）}$$

です。半分（ 180° ）なら π 、 $\frac{1}{4}$ 周（ 90° ）なら $\frac{\pi}{2}$ です。

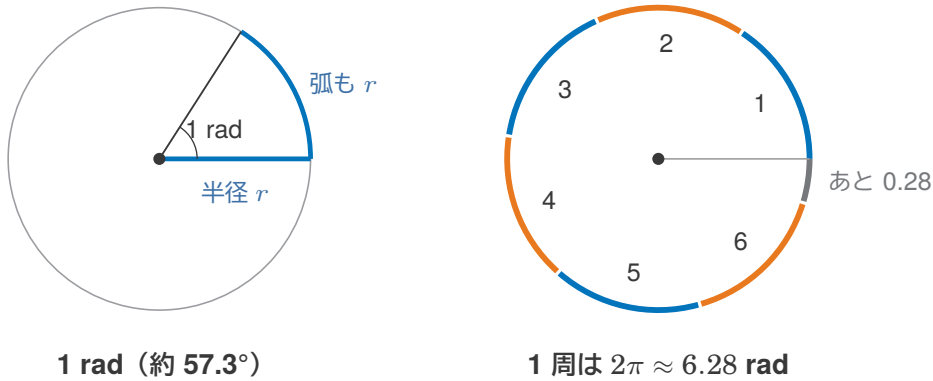


図 3 左：弧の長さが半径と同じになる角が 1 rad。右：円周には、半径と同じ長さの弧が 6 こと、あと 0.28 こ分入る。

1 ラジアンは、どのくらいの角？

1 ラジアンは、「弧の長さ÷半径」がちょうど 1 になる角です。つまり、**弧の長さが半径と同じになる角**です。半径と同じ長さのひもを、円にそわせて曲げると、その両はしと中心が作る角が 1 ラジアンです（図の左）。

円周は $2\pi r$ なので、半径の $2\pi \approx 6.28$ 倍です。円周には、半径と同じ長さの弧が 6 こと、あと少し（0.28 こ分）入ります（図の右）。1 周 360° を 6.28 こに分けるので、1 ラジアンは $360 \div 6.28 \approx 57.3$ で、約 57.3° です。1 ラジアンは、 1° とくらべると、ずっと大きな角です。

4 度とラジアンの換算

度とラジアンは、同じ角を、ちがう単位で表したものです。cm と m のように、換算できます（2-10）。もともになるのは、半周の角です。

$$\pi \text{ ラジアン} = 180^\circ$$

1°は何ラジアン？ 1ラジアンは何度？

両辺を 180 でわると、1° が何ラジアンかがわかります。両辺を π でわると、1ラジアンが何度かがわかります。

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.30^\circ$$

換算は「単位付きの1」をかける

2-10 では、60 s/min のような「単位付きの1」をかけて、単位を換算しました。

π ラジアンと 180° は同じ角なので、次の2つの分数は、どちらも1です。

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 1 \quad \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 1$$

度をラジアンにするときは、° が約分されて消えるように、左の分数をかけます。

ラジアンを度にするときは、rad が消えるように、右の分数をかけます。

$$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{60\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad (60 \text{ と } 180 \text{ を } 60 \text{ で約分})$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ \quad (\pi \text{ が約分されて消える})$$

どちらの分数をかけるか迷ったら、「消したい単位が分母にくるほう」と考えます。

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
ラジアン	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
小数で	0	0.524	0.785	1.047	1.571	2.094	3.142	4.712	6.283

表3 よく使う角。180° が π なので、90° はその半分の $\frac{\pi}{2}$ 、60° は3分の1の $\frac{\pi}{3}$ 。

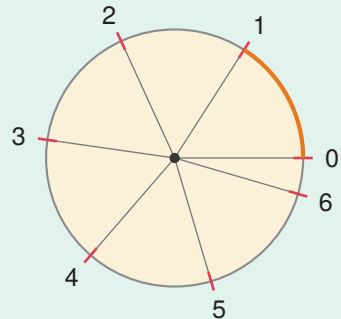
表を全部おぼえる必要はありません。「180° が π 」だけおぼえておけば、30° は180° の $\frac{1}{6}$ だから $\frac{\pi}{6}$ 、のように、いつでも作れます。

△ やってみよう ラジアンに分度器を作ろう

用意するもの

厚紙、コンパス、たこ糸（または紙テープ）、
定規、はさみ、ふつうの分度器

- ① 厚紙に、半径 10 cm の円をかこう。
- ② 糸を、半径と同じ 10 cm に切ろう。
- ③ 円の右はしから、糸を円にそわせて置き、糸のはしに印をつけて「1」と書こう。そこからまた糸をそわせて、「2」「3」……と印をつけよう。
- ④ 中心と印を結ぶ線を引くと、1 rad、2 rad、3 rad……の目もりができる。6 の印のあと、1 周までに少しだけあまることを確かめよう。
- ⑤ ふつうの分度器を重ねて、1 rad が何度か読もう。



⑤の答え：1 rad は、分度器で約 57° です。どの大きさの円で作っても、糸を半径と同じ長さにすれば、同じ目もりになります。

せいかくに言うと

ラジアンには、単位をつけないことが多い

ラジアンは「長さ÷長さ」です。 $m \div m$ のように同じ単位どうしでわると、単位は約分されて消えます。だから、ラジアンは本当は単位のない数です。そのため、「 $\theta = 2$ 」と書いたら、ふつうは 2 ラジアンのことです。いっぽう、度は「1 回転を 360 に分けたもの」という約束で決めた単位なので、「 $^\circ$ 」を省いてはいけません。

わざわざラジアンを使うのは、なぜ？

度は、1回転を360に分けた単位です。360という数は、昔の人が「2、3、4、5、6、8、9、10、12……と、たくさんでわり切れて便利だから」と選んだ数です。円の形とは関係がありません。だから、度で弧の長さを計算すると、 $2\pi r \times \frac{a}{360}$ のように、360や 2π が入ってきます。ラジアンは、円の半径と弧の長さから決めた角です。次の⑤で見るように、ラジアンを使うと、式から360も 2π も消えて、とても簡単になります。

🔍 もっと知りたい ★★

角の細かい単位「分」「秒」と、海の上の距離

1° より小さい角は、 1° を60に分けた分（'）と、1分を60に分けた秒（"）で表すことがあります。時計の分・秒と同じ60ずつの区切りです。地図の緯度（いど）や経度（けいど）は、北緯34度41分のように書きます。

船や飛行機では、地球の中心から見て緯度1分の角に当たる地面の弧の長さを、1海里（かいり）とよび、距離の単位にしています。地球の1周（約40000km）を、 $360 \times 60 = 21600$ 分でわると、 $40000000 \div 21600 \approx 1852$ で、約1852mです。いまは、1海里 = 1852mと決めています。角と弧の長さが比例する(②)ことを、そのまま使った単位です。

⑤ 弧の長さ $s = r\theta$ と、おうぎ形の面積

ラジアンの決め方「 θ = 弧の長さ ÷ 半径」で、弧の長さを s と書くと、 $\theta = \frac{s}{r}$ です。 s は、弧の長さによく使う文字です。両辺に r をかけると(2-14)、

$$\boxed{\text{弧の長さ} = \text{半径} \times \text{角} \quad s = r\theta \quad (\theta \text{ はラジアン})}$$

になります。半径6cm、中心角 $\frac{\pi}{3}$ ラジアン（ 60° ）なら、弧の長さは

$$s = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \approx 6.28 \text{ cm}$$

です。②で度の式から求めた値と同じです。

度の式と同じになるわけ

中心角 a° をラジアンにすると $\frac{\pi a}{180}$ です (④)。 $s = r\theta$ に入れると、 $r \times \frac{\pi a}{180}$ 。度の式は $2\pi r \times \frac{a}{360} = r \times \frac{2\pi a}{360} = r \times \frac{\pi a}{180}$ で、同じです。2つの式は、同じことを、ちがう単位で書いたものです。ラジアンのほうが、ずっと短く書けます。

🔍 コラム 時計の針の先は、1分で何 cm 進む？

長い針（分針）は、60分で1周（ 2π rad）回ります。1分では $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad、約 0.105 rad です。長さ 10 cm の長い針なら、その先は1分で、 $s = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3}$ で、約 1.05 cm 進みます。

短い針（時針）は、12時間（720分）で1周なので、1分で $\frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360}$ rad しか回りません。長さ 6 cm の短い針の先は、1分で $6 \times \frac{\pi}{360} = \frac{\pi}{60}$ で、約 0.05 cm（0.5 mm）しか進まないの、動いているのが見えないのです。

ロンドンの時計台「ビッグ・ベン」の長い針は、長さが約 4.2 m あります。その先は、1分で $4.2 \times \frac{\pi}{30} \approx 0.44$ m も進みます。



おうぎ形の面積：細い三角形に分けて考える

おうぎ形を、中心から細く細く切り分け

ます。1切れ1切れは、とても細いおうぎ形です。細いおうぎ形は、底辺が小さな弧、高さが半径 r の、細長い三角形とほとんど同じです。

三角形の面積は、底辺×高さ÷2です。どの三角形も高さは r なので、ぜんぶ合わせると、

$$\frac{1}{2} \times r \times (\text{底辺の合計})$$

底辺の合計は、もとの弧の長さ s です。

$$\text{おうぎ形の面積 } S = \frac{1}{2}rs$$

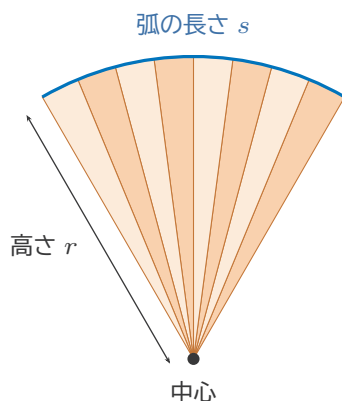
S は面積によく使う文字です（英語の square、面積の単位の「平方」から）。この式は、三角形の面積「底辺×高さ÷2」と同じ形です。おうぎ形は、底辺が弧の長さ s 、高さが半径 r の三角形のようなもの、と考えればおぼえやすいでしょう。

細かく分けるほど、正確になる

三角形の底辺はまっすぐですが、弧は曲がっています。だから、細い三角形の面積の合計は、おうぎ形の面積より少しだけ小さくなります。でも、分ける数をふやすほど、そのちがいは小さくなります。半径 6 cm、中心角 60° のおうぎ形で、コンピュータに計算させると、次のようになります。

分ける数	1	2	4	8	16	100
三角形の面積の合計 (cm^2)	15.59	18.00	18.63	18.80	18.84	18.849

表4 $\frac{1}{2}rs = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\pi = 6\pi \approx 18.850$ に、どんどん近づく。



このように「細かく分けて、たし合わせる」と、曲がった形の面積も求められます。この考え方は、4-5 で円や球に、第5巻の積分(5-10)で、もっといろいろな形に使います。

角 θ で書いたおうぎ形の面積

$S = \frac{1}{2}rs$ の s に、 $s = r\theta$ を入れます。

$$S = \frac{1}{2} \times r \times r\theta = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta \text{ はラジアン})$$

半径 6 cm、中心角 $\frac{\pi}{3}$ なら、 $S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{36\pi}{6} = 6\pi \approx 18.85 \text{ cm}^2$ です。

円全体は、中心角 2π のおうぎ形です。 $\theta = 2\pi$ を入れると、

$$\frac{1}{2}r^2 \times 2\pi = \pi r^2$$

で、小学校で学んだ円の面積 πr^2 と、ちゃんと合っています。円の面積がなぜ πr^2 になるのかは、4-5 で、円を細かく切って並べかえる方法でくわしく調べます。

6 円の接線は、半径に垂直

円と直線の関係は、3 通りあります。

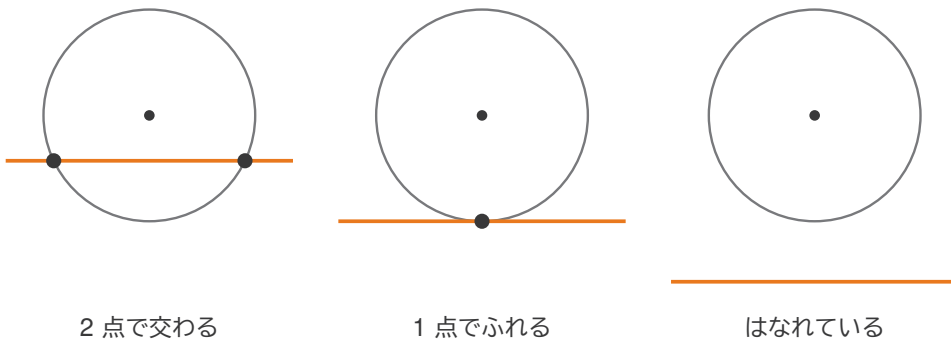


図4 直線(オレンジ)を下へずらしていくと、2点で交わる → 1点でふれる → はなれる、と変わる。

まん中のように、円にちょうど1点だけでふれる直線を、円の**接線**(せっせん)といいます。ふれている点を**接点**(せってん)といいます。接線は、円に「接

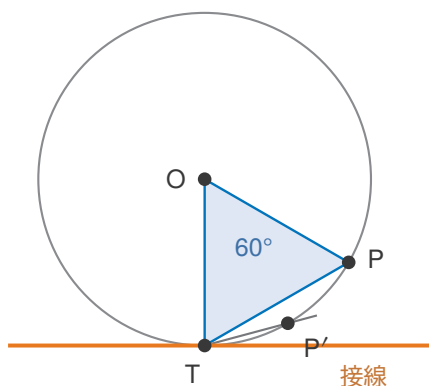
する」直線です。丸いお皿のふちに定規をあてて、ぴったりふれさせたときの定規のへりが、接線です。

接線には、大切な性質があります。

接線は、接点で半径に垂直

なぜでしょう。2通りの方法で確かめます。

① 方法1：2点で交わる直線を、近づけていく



円の中心を O 、真下の点を T とします。円の上にもう1つの点 P をとり、直線 TP を引きます。 TP は、円と2点で交わる直線です。

三角形 OTP で、 OT も OP も半径なので、二等辺三角形です。だから、 T の角と P の角は等しくなります (4-1)。

P を、円にそって T に近づけていきます ($P \rightarrow P' \rightarrow \dots$)。中心の角 $\angle TOP$ は、だんだん小さくなります。三角形の内角の和は 180° なので (4-1)、 T の角は $(180^\circ - \angle TOP) \div 2$ です。

中心の角 $\angle TOP$	60°	30°	10°	2°	0.2°
T の角 (直線 TP と半径 OT の角)	60°	75°	85°	89°	89.9°

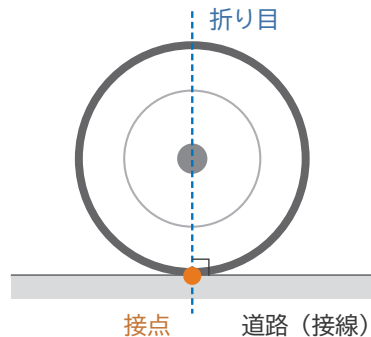
表5 P を近づけるほど、直線 TP と半径 OT の角は 90° に近づく。

P が近づくほど、直線 TP は、 T でふれる1本の直線 (接線) に近づいていきます。そのとき、半径 OT との角は 90° に近づきます。だから、接線と半径の角は 90° 、つまり垂直です。5-3 では、この「近づけていく」考え方で、曲線の接線を求めます。

② 方法2：タイヤと道路を、折り目で考える

平らな道路にのっているタイヤを、横から見ます。タイヤ（円）は、道路（直線）に1点だけでふれています。道路は、タイヤの接線です。

タイヤの中心（車軸）から、道路にまっすぐ垂直に下ろした線を引きます。この線で、紙を折ることを考えます。円は、中心を通る線で折ると、左右がぴったり重なります。道路も、この折り目に垂直なので、折ると自分自身に重なります。



もし、タイヤと道路のふれる点が、折り目より右にずれていたとします。折ると、その点は折り目の左側にうつります。円も道路も自分自身に重なるので、うつった点も、円と道路がふれる点です。すると、ふれる点が左右に2つできてしまいます。でも、接線がふれる点は1つだけです。だから、ふれる点（接点）は、折り目の上にあるはずです。つまり接点は、中心の真下です。中心と接点を結んだ半径は折り目そのもので、道路に垂直です。

たいせつ

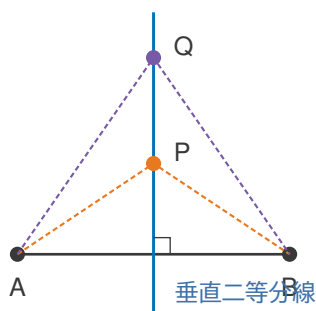
円の接線は、円に1点だけでふれる直線。

接線は、ふれた点（接点）で半径に垂直。

この性質を使うと、円の上の点 T での接線は、「半径 OT に垂直で、 T を通る直線」として引けます。

⑦ 垂直二等分線と、円の中心

紙に2点 A 、 B をかき、 A と B がぴったり重なるように紙を折ってみましょう。折り目は、線分 AB のまん中を通り、 AB に垂直です。この直線を、線分 AB の垂直二等分線といいます（「垂直」で、「2つの等しい長さに分ける」線）。



垂直二等分線の上に点 P をとります。紙を折ると A と B が重なるので、P から A までの長さと、P から B までの長さは同じです。点 Q でも同じです。

垂直二等分線の上の点は、A から B からも同じ長さ。

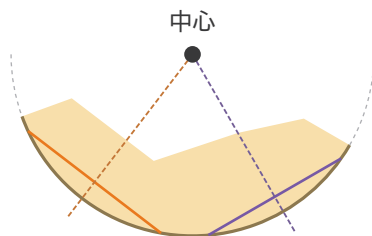
反対に、A から B からも同じ長さの点は、垂直二等分線の上にあります。

弦の垂直二等分線は、円の中心を通る

円の弦 AB を考えます。円の中心 O から、A までも B までも、長さは半径で同じです。だから、O は弦 AB の垂直二等分線の上にあります。どの弦の垂直二等分線も、中心を通ります。

だから、弦を 2 本引いて、それぞれの垂直二等分線を引けば、2 本の交わる点が円の中心です。

たとえば、割れてしまった丸いお皿のかげから、もとのお皿の中心と大きさがわかります。新しいお皿を注文したり、こわれた部品を作り直したりするときに使う方法です。



3つの点を通る円：外接円と外心

三角形 ABC の 3 つの頂点を、ぜんぶ通る円をかきたいとします。その円の中心は、A から B からも C からも同じ長さの点です。A と B から同じ長さなので、辺 AB の垂直二等分線の上にあります。A と C から同じ長さなので、辺 AC の垂直二等分線の上にもあります。だから、2 本の垂直二等分線の交わる点が中心です。

三角形の3つの頂点を通る円を**外接円**（がいせつえん）、その中心を**外心**（がいしん）といいます。4-7では、外接円の半径を使って、三角形の辺と角の関係を調べます。

8 円周角は、中心角の半分

円の上に2点A、Bと、もう1つの点Pをとります。角 $\angle APB$ を、弧ABに対する**円周角**（えんしゅうかく）といいます。頂点Pが円の上にある角です。

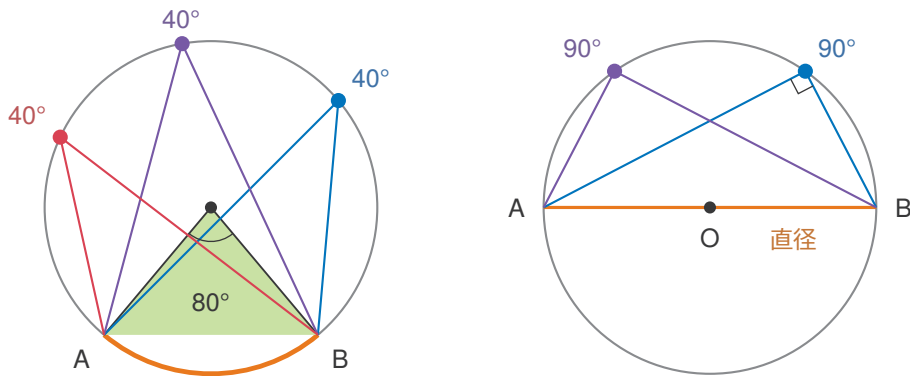


図5 左：中心角 $\angle AOB$ が 80° のとき、円周角は、Pがどこにあっても 40° 。右：ABが直径なら、円周角は 90° 。

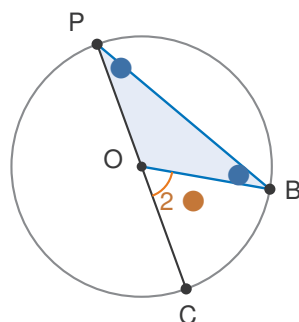
分度器ではかると、Pを円の上のどこに動かしても（弧ABの上に入らなければ）、 $\angle APB$ は同じ 40° です。中心角 $\angle AOB$ の 80° の、ちょうど半分です。

円周角 = 中心角の半分

なぜ半分になるの？

P から中心 O を通る直径 PC を引いた場合を考えます。三角形 OPB は、OP も OB も半径なので、二等辺三角形です。2 つの底角は等しいので、どちらも ● とします (4-1)。

$\angle BOC$ は、三角形 OPB の外角です。外角は、とりにない 2 つの内角の和なので (4-1)、 $\angle BOC = \bullet + \bullet = 2 \times \bullet$ 。中心角 $\angle BOC$ は、円周角 $\angle BPC (= \bullet)$ の 2 倍です。ほかの場所に P があるときも、このような形を 2 つ組み合わせて、同じことが確かめられます。

**直径に対する円周角は 90°**

AB が直径のとき、中心角 $\angle AOB$ は、まっすぐな角 180° です。円周角はその半分なので、

直径に対する円周角は 90°

です。直径の両はしと、円の上の点を結ぶと、いつも直角三角形ができます。大工さんは、この性質を使って、直角三角定規（さしがね）の直角の頂点を円にあって、2 本の辺が円と交わる 2 点を結んで、直径（と中心）を見つけます。

9 電卓と表計算の DEG・RAD

角を使う計算は、電卓や表計算ですることが多くなります。そのとき、角を度で入れるのか、ラジアンで入れるのかに注意が必要です。

関数電卓

角を使う電卓（関数電卓）には、角の単位を切りかえるボタンがあります。画面に **DEG** と出ていれば度、**RAD** と出ていればラジアンで計算します。**DEG** は degree（度）、**RAD** は radian（ラジアン）の頭の 3 文字です。

4-6 からは、角を入れると数が出てくる **sin**（サイン）などの計算が出てきます。そのとき、**DEG** と **RAD** をまちがえると、まったくちがう答えが出ます。計算をはじめる前に、画面の **DEG・RAD** を必ず確かめましょう。



表計算は、いつもラジアン

表計算ソフトの **SIN** などの関数は、いつもラジアンで計算します。**DEG** のような切りかえはありません。度で計算したいときは、関数 **RADIANS** で、先にラジアンに直します。

	A	B	C
1	度	=RADIANS(A2)	=DEGREES(B2)
2	30	0.5236	30
3	60	1.0472	60
4	90	1.5708	90
5	180	3.1416	180
6	360	6.2832	360

表 6 **RADIANS** は度をラジアンに、**DEGREES** はラジアンを度に直す。180° は 3.1416 (π)。

表計算のセルに **=PI()** と入れると、 $\pi = 3.14159 \dots$ が出ます。**=RADIANS(A2)** という式は、**=A2*PI()/180** と同じ計算をしています。④で作った「 $\times \frac{\pi}{180}$ 」です。

たとえば、4-6 で学ぶ「30° のサイン」は 0.5 です。表計算で **=SIN(30)** と入れると、30 ラジアンサインを計算してしまい、 $-0.988 \dots$ というちがう数が出

出ます。30°なら、`=SIN(RADIANS(30))` と入れると、0.5 が出ます。プログラム (2-19) でも、ふつうはラジアンで計算します。Python なら `math.radians(30)` で度をラジアンに直せます。

10 距離と向きで場所を言う：極座標

夜の海で、灯台のレーダーが船を見つけました。レーダーは、アンテナをぐるぐる回しながら電波を出します。電波が船に当たってはね返り、もどってくるまでの時間から、船までの距離がわかります。そのとき、アンテナがどちらを向いていたかで、船のいる向きもわかります。だから、レーダーの画面では、船の場所が「中心から何 km、どの向き」という 2 つの数で表されます。

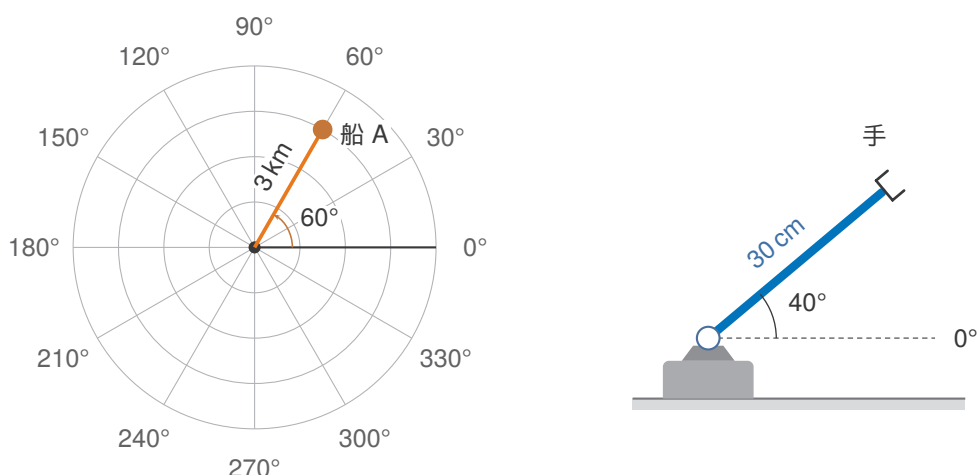


図6 左：レーダーの画面。円は中心から 1・2・3・4 km、線は 30° ごと。船 A は、中心から 3 km、0° の線から左回りに 60° の向き。右：ロボットのうで (4-0)。手は、肩から 30 cm、水平な線から 40° の向き。

ロボットのうでも同じです (4-0)。関節が 1 つで、長さ 30 cm のうでを、水平な線から 40° だけ回して上げると、手の場所は「肩から 30 cm、向き 40°」で 1 つに決まります。ロボットのモーターが決めるのは回す角度で、うでの長さは変わりません。だから、ロボットにとっては「距離と向き」で場所を言うのが、いちばん自然なのです。

極座標の約束

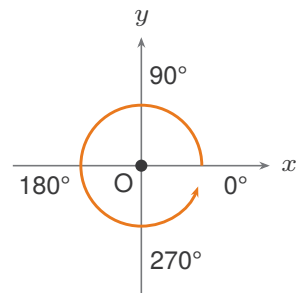
このように、中心からの**距離**と、中心から見た**向き**の2つの数で場所を言う方法を、次のように決めます。

- ❶ 中心にする点 O を決める。3-2 の座標の原点にあたる点です。
- ❷ O から右へのびる向き (x 軸の正の向き) を、角をはかりはじめる向き (0°) にする。
- ❸ 点 P について、 O から P までの距離を r 、 0° の向きから**左回り** (時計の針と反対の向き) にはかった P の向きの角を θ とする。

2つの数の組 (r, θ) を、点 P の**極座標** (きょくざひょう) といいます。「極」は、中心の点 O のことです。レーダーの船 A の極座標は $(3, 60^\circ)$ (距離の単位は km)、ロボットの手の極座標は $(30, 40^\circ)$ (距離の単位は cm) です。

なぜ左回りにはかるの？

3-2 の座標では、右が x 軸の正の向き、上が y 軸の正の向きでした。右 (0°) から上へ、直角だけ回る向きは、左回りです。だから、右から左回りにはかると、真上がちょうど 90° 、真左が 180° 、真下が 270° になって、座標の軸と角がきれいにそろいます。数学では、この左回りを「正の向き」と決めています (右回りの角は 4-8 で考えます)。



(x, y) と (r, θ) : 同じ点の、2つの名前

3-2 の座標 (x, y) は、「右へいくつ、上へいくつ」で場所を言いました。極座標 (r, θ) は、「どの向きへ、どれだけ」で場所を言います。同じ点を、2通りの名前ではべるのです。軸の上の点なら、すぐに行き来できます。

点の場所	(x, y)	(r, θ)
O から右へ 3	$(3, 0)$	$(3, 0^\circ)$
O から上へ 2	$(0, 2)$	$(2, 90^\circ)$
O から左へ 4	$(-4, 0)$	$(4, 180^\circ)$
O から下へ 1	$(0, -1)$	$(1, 270^\circ)$

表7 軸の上の点の、2つの名前

たとえば $(-4, 0)$ は、O から左へ 4 の点です。左は 180° の向きなので、極座標は $(4, 180^\circ)$ です。 r は距離なので、マイナスにはなりません。向きのちがいは、 θ が受けもちます。

ななめの向きの点、たとえば船 A $(3, 60^\circ)$ は、中心から右へいくつ、上へいくつの所にあるでしょう。方眼紙に図を大きくかいて読みとると、右へ約 1.5、上へ約 2.6 です。これを、図をかかずに計算で求める道具が、4-6 で作る $\sin$ (サイン) $\cdot \cos$ (コサイン) です。4-6 では、極座標 (r, θ) を (x, y) に直す式を作ります。いまは、「同じ点を、 (x, y) でも (r, θ) でも言える」ことがわかれば十分です。

角は、度でもラジアンでもよい

θ は角なので、度でもラジアンでも書けます。 $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ なので (④)、船 A は $(3, 60^\circ)$ と、 $(3, \frac{\pi}{3})$ と書けます。ラジアンには単位をつけないことが多いので (④のせいかくに言うと)、「 $^\circ$ 」がついていない角はラジアンです。ふつうは、 θ を 0° 以上 360° 未満 (ラジアンなら 0 以上 2π 未満) で答えます。 360° より大きい角や、マイナスの角は、4-8 で考えます。

せいかくに言うと

r と θ のきまり

r は radius (半径) の頭文字です。中心からの距離なので、 0 以上の数です。3-15 の相関係数の r とは、別の意味です (同じ文字が、場面によってちがう意味で使われます)。中心の点 O は $r = 0$ で、向きは決まりません (どの向きに 0 だけ進んでも、O のままだから)。極座標は、 (r, θ) の順に書きます。 $(60^\circ, 3)$ のように逆にしないこと。

たいせつ

円周 = $2\pi r$ 。弧の長さとおうぎ形の面積は、中心角に比例する。

弧度法：角 θ (rad) = 弧の長さ ÷ 半径。半径 1 の円なら、角と弧の長さは同じ数。

1 周は 2π rad (360°)。 π rad = 180°

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

弧の長さ = 半径 × 角 $s = r\theta$ おうぎ形の面積 $S = \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}r^2\theta$

円周角は中心角の半分。直径に対する円周角は 90° 。

電卓は DEG (度) と RAD (ラジアン) を確かめる。表計算の SIN など
はラジアン。

極座標 (r, θ) : 中心からの距離 r と、 x 軸の正の向きから左回りにはかった向きの角 θ で、場所を言う。

この章で出てきたことば

弦・弧 円の上の 2 点を結ぶ線分が弦。円の上の 2 点の間の曲がった部分が弧。

おうぎ形・中心角 2 本の半径と弧でかこまれた形がおうぎ形。2 本の半径の間の角が中心角。

弧度法・ラジアン 角を「弧の長さ ÷ 半径」で表す方法が弧度法。その単位がラジアン (rad)。

接線・接点 円に 1 点だけでふれる直線が接線。ふれる点が接点。接線は接点で半径に垂直。

垂直二等分線 線分のまん中を通り、線分に垂直な直線。両はしから同じ長さの点の集まり。

外接円・外心 三角形の 3 つの頂点を通る円が外接円。その中心が外心。

円周角 円の上に頂点がある角。同じ弧に対する円周角は、中心角の半分。

極座標 中心からの距離 r と、 x 軸の正の向きから左回りにはかった角 θ の組 (r, θ) で、点の場所を表す方法。

記号カード

初めて出た章 4-2

 θ

読み方 シータ

意味 角の大きさ。度でもラジアンでも使う（微分・積分ではラジアン）

英語 theta

記号カード

初めて出た章 4-2

rad

読み方 ラジアン

意味 弧度法の角の単位。弧の長さ÷半径。 $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

英語 radian

例題でたしかめよう

例題1 度で、弧の長さとおうぎ形の面積を求める

半径 6 cm、中心角 60° のおうぎ形の、(1) 弧の長さと、(2) 面積を求めましょう。答えは π を使って表し、小数（約）でも答えましょう。

考え方 (1) 中心角 60° は、円全体 (360°) の $\frac{60}{360}$ 。弧の長さも円周の $\frac{60}{360}$ 倍です。(2) 弧の長さ s がわかれば、 $S = \frac{1}{2}rs$ が使えます。

式 (1) 円周は $2\pi \times 6 = 12\pi$

$$\text{弧の長さ} = 12\pi \times \frac{60}{360} = 12\pi \times \frac{1}{6} = 2\pi$$

$$2\pi \approx 2 \times 3.14 = 6.28$$

$$(2) S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\pi = 6\pi$$

$$6\pi \approx 6 \times 3.14 = 18.84。くわしい \pi \text{ で計算すると } 18.85$$

答え (1) $2\pi \text{ cm}$ (約 6.28 cm) (2) $6\pi \text{ cm}^2$ (約 18.8 cm^2)

じぶんでとこう1

半径 4 cm、中心角 135° のおうぎ形の、(1) 弧の長さと、(2) 面積を求めましょう。 π を使って表し、小数（約）でも答えましょう。

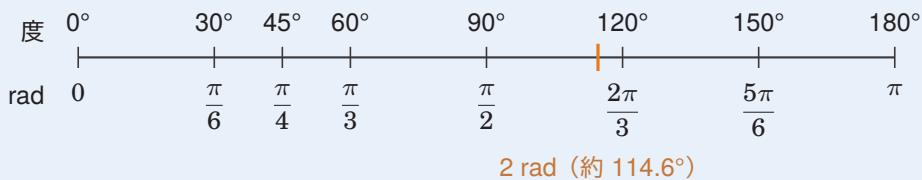
ポイント 度で求めるときは、①円周 $2\pi r$ を出す、②「中心角 $\div 360$ 」をかける、の2段で考えます。面積は、弧の長さがわかれば $S = \frac{1}{2}rs$ を使うと早く求められます。

例題2 度とラジアンを換算する

(1) 45° と 150° を、ラジアンで表しましょう。

(2) $\frac{2\pi}{3}$ rad と 2 rad を、度で表しましょう (2 rad は小数第1位まで)。

考え方 「単位つきの1」 $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$ または $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$ を、消したい単位が分母にくるようにかけます。



式 (1) $45^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{45\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (45 でわって約分)

$150^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{150\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ (30 でわって約分)

(2) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$ (π が約分される)

$2 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{\pi} = 360^\circ \div 3.14159 \dots \approx 114.6^\circ$

答え (1) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ 、 $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ (2) 120° 、約 114.6°

じぶんでこう2

(1) 30° と 270° を、ラジアンで表しましょう。(2) $\frac{3\pi}{4}$ rad と 0.5 rad を、度で表しましょう (0.5 rad は小数第1位まで)。

ポイント 換算でかける分数は、「消したい単位を分母に」。答えが出たら、目まりの図で、だいたい合っているか確かめましょう。 1 rad は約 57° なので、 2 rad は 120° より少し小さいはずです。

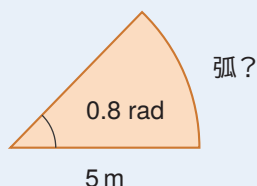
例題3 ラジアンで、弧の長さや面積を求める

(1) 半径 5 m、中心角 0.8 rad のおうぎ形の、弧の長さや面積を求めましょう。

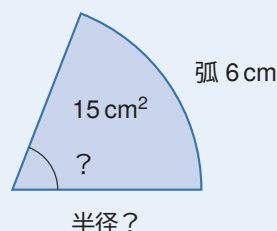
(2) 弧の長さが 6 cm、面積が 15 cm^2 のおうぎ形の、半径と中心角 (rad) を求めましょう。

考え方 (1) $s = r\theta$ 、 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ に入れます。(2) $S = \frac{1}{2}rs$ から r を、 $\theta = \frac{s}{r}$ から角を求めます。

(1)



(2)



式 (1) $s = 5 \times 0.8 = 4$ $S = \frac{1}{2} \times 5^2 \times 0.8 = \frac{1}{2} \times 25 \times 0.8 = 10$

(2) $15 = \frac{1}{2} \times r \times 6$ より $15 = 3r$ 、 $r = 5$

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{5} = 1.2$$

確かめ: $\frac{1}{2} \times 5^2 \times 1.2 = \frac{1}{2} \times 25 \times 1.2 = 15$

答え (1) 弧の長さ 4 m、面積 10 m^2 (2) 半径 5 cm、中心角 1.2 rad

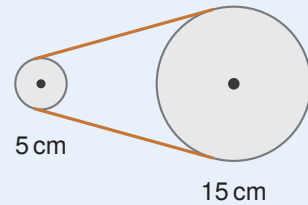
じぶんでこう3

(1) 半径 4 cm、中心角 1.5 rad のおうぎ形の、弧の長さや面積を求めましょう。(2) 弧の長さが 8 cm、面積が 24 cm^2 のおうぎ形の、半径と中心角 (rad) を求めましょう。

ポイント ラジアンなら、弧の長さは「半径×角」、面積は「半径×半径×角÷2」です。わからない量が2つあるときは、まず1つだけ求められる式を選びます(面積と弧から半径、次に半径と弧から角)。

例題 4 動いた長さから、回った角を求める

半径 5 cm の小さいプーリー（ベルトをかける車）と、半径 15 cm の大きいプーリーを、ベルトでつなぎます。ベルトが 30 cm 動いたとき、それぞれのプーリーは何 rad 回りますか。



大きいプーリーの角は、度でも答えましょう。

考え方 ベルトがすべらなければ、どちらのプーリーのふちも、ベルトと同じ 30 cm だけ動きます。動いた長さが弧の長さ s なので、 $\theta = \frac{s}{r}$ です。

式 小さいプーリー： $\theta = \frac{30}{5} = 6$

大きいプーリー： $\theta = \frac{30}{15} = 2$

$2 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 114.6^\circ$

答え 小さいプーリーは 6 rad、大きいプーリーは 2 rad（約 114.6°）

じぶんでこう 4

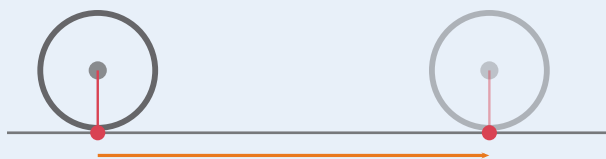
半径 4 cm のプーリーと、半径 12 cm のプーリーをベルトでつなぎます。ベルトが 24 cm 動いたとき、それぞれのプーリーは何 rad 回りますか。大きいプーリーの角は、度でも答えましょう。

ポイント ベルトでつながった車は、ふちが動く長さ s が同じです。だから、半径が大きいほど、回る角は小さくなります（半径と角は反比例。2-15）。

例題5 タイヤが進む道のり

半径 0.33 m の自転車のタイヤが、すべらずに転がります。(1) 100 回転すると、何 m 進みますか (小数第 1 位まで)。(2) 1000 m 進むには、約何回転しますか (整数で)。(3) タイヤが 1 秒に 3 回転するとき、自転車の速さは時速約何 km ですか (小数第 1 位まで)。

考え方 すべらずに転がるタイヤは、1 回転で、地面に円周 1 つ分をおしつけながら進みます。1 回転は $2\pi\text{ rad}$ なので、 $s = r\theta$ で $\theta = 2\pi$ と考えても同じです。



1 回転で $2\pi \times 0.33 \approx 2.07\text{ m}$ (赤い点が、ふたたび地面にふれる)

式 1 回転で進む道のり : $s = 0.33 \times 2\pi = 0.66\pi \approx 2.0735\text{ (m)}$

(1) 100 回転 : $0.66\pi \times 100 = 66\pi \approx 207.3\text{ (m)}$

(2) 1000 m では : $1000 \div 2.0735 \approx 482.3$ (回転)

(3) 1 秒に 3 回転 : $2.0735 \times 3 \approx 6.22$ で、 6.22 m/s

$1\text{ m/s} = 3.6\text{ km/h}$ (2-10) なので、単位つきの 1 をかける

$$6.22\text{ m/s} \times \frac{3.6\text{ km/h}}{1\text{ m/s}} \approx 22.4\text{ km/h}$$

答え (1) 約 207.3 m (2) 約 482 回転 (3) 時速約 22.4 km

じぶんでこう5

半径 0.3 m のタイヤが、すべらずに転がります。(1) 50 回転すると、何 m 進みますか (小数第 1 位まで)。(2) 600 m 進むには、約何回転しますか (整数で)。(3) 1 秒に 4 回転するとき、速さは時速約何 km ですか (小数第 1 位まで)。

ポイント 1回転は 2π rad です。「何回転するか」は、「進む道のり ÷ 1回転で進む道のり」で求めます。

例題 6 接線と半径の角

円 O の外の点 P から、円に 2 本の接線を引き、接点を A 、 B とします。 $\angle APB = 50^\circ$ のとき、 $\angle AOB$ を求めましょう。

考え方 接線は接点で半径に垂直なので、 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ です。四角形 $OAPB$ の内角の和は 360° です (4-1: n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$)。

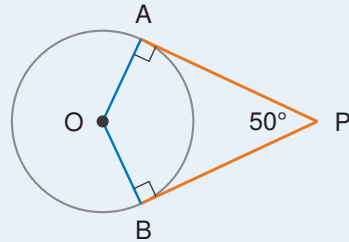
式 四角形 $OAPB$ の内角の和: $180^\circ \times (4 - 2) = 360^\circ$

$$\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\text{確かめ: } 130^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 50^\circ = 360^\circ$$

直角が 2 つあるので、 $\angle AOB$ と $\angle APB$ の和は、いつも $360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ になる

答え 130°



じぶんでとこう 6

円 O の外の点 P から 2 本の接線を引き、接点を A 、 B とします。 $\angle APB = 70^\circ$ のとき、 $\angle AOB$ を求めましょう。

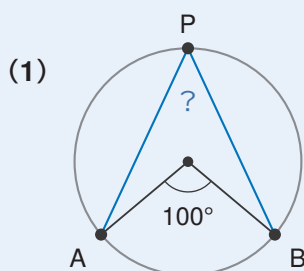
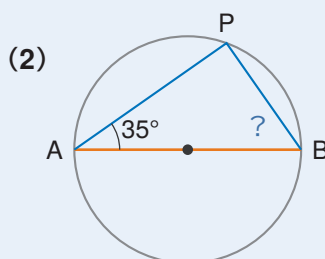
ポイント 接線が出てきたら、まず接点と中心を結ぶ半径をかき、直角の印をつけましょう。それが、接線の問題を解く第一歩です。

例題7 円周角を求める

(1) 円Oで、弧ABに対する中心角 $\angle AOB$ が 100° です。弧ABに対する円周角 $\angle APB$ を求めましょう。

(2) ABが円の直径で、Pは円の上の点です。 $\angle PAB = 35^\circ$ のとき、 $\angle PBA$ を求めましょう。

考え方 (1) 円周角は中心角の半分。(2) 直径に対する円周角は 90° なので、 $\angle APB = 90^\circ$ 。三角形PABの内角の和は 180° です。



式 (1) $100^\circ \div 2 = 50^\circ$

(2) $\angle APB = 90^\circ$ 。 $\angle PBA = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

答え (1) 50° (2) 55°

じぶんでこう7

(1) 弧ABに対する中心角が 140° のとき、円周角を求めましょう。(2) ABが円の直径で、Pは円の上の点です。 $\angle PAB = 28^\circ$ のとき、 $\angle PBA$ を求めましょう。

ポイント 円周角の問題では、① 同じ弧に対する中心角をさがす、② 直径があれば 90° の角をさがす。そのあとで、三角形の内角の和 180° を使います。

例題 8 3 点を通る円の中心（外心）を求める

座標平面の 3 点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 4)$ を通る円の、中心の座標を求めましょう。

考え方 中心は、辺 AB の垂直二等分線と、辺 AC の垂直二等分線の交わる点です。 AB は x 軸の上にあるので、垂直二等分線は、 AB のまん中を通る、たての直線です。 AC は y 軸の上にあるので、垂直二等分線は、 AC のまん中を通る、横の直線です。

式 AB のまん中は $(3, 0)$ 。垂直二等分線は、 $x = 3$ のたての直線
 AC のまん中は $(0, 2)$ 。垂直二等分線は、 $y = 2$ の横の直線
 2 本が交わる点は $(3, 2)$

確かめ： $(3, 2)$ から見ると、

A は、左へ 3・下へ 2 の所

B は、右へ 3・下へ 2 の所

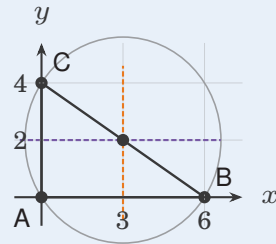
C は、左へ 3・上へ 2 の所

どれも「横に 3・たてに 2」の動きなので、3 つの点までの長さは等しい

(長さそのものは、4-4 で計算できる)

確かめ： $\angle CAB = 90^\circ$ なので、 BC は直径のはず。 BC のまん中は $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$ で合う

答え $(3, 2)$



じぶんでこう 8

3 点 $A(0, 0)$ 、 $B(8, 0)$ 、 $C(0, 6)$ を通る円の、中心の座標を求めましょう。

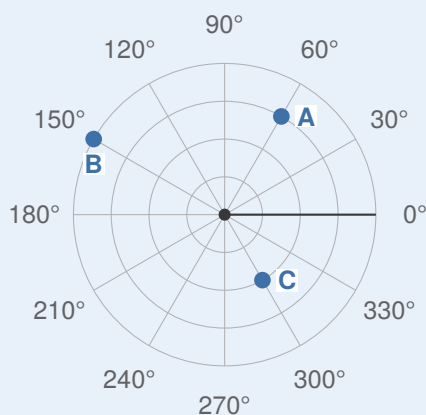
ポイント 外心は「3つの頂点から同じ長さの点」です。垂直二等分線を2本引けば決まります（3本めも同じ点を通ります）。直角三角形なら、外心は斜辺のまん中です。

例題9 極座標で、点の場所を言う・点をかく

右の図は、中心Oのまわりに、中心からの距離が1・2・3・4の円と、30°ごとの線をかいたものです。

(1) 点A、B、Cの極座標を答えましょう（角は度で）。

(2) 極座標が $(2, \frac{\pi}{2})$ の点Pと、 $(3, \frac{7\pi}{6})$ の点Qは、図のどこにありますか。



考え方 r は「中心から何番めの円の上か」、 θ は「0°の線から左回りに、何度目の線の上か」で読みます。(2)は、ラジアンを度に直してから(4)、その向きへ r だけ進んだ点をさがします。

式 (1) A : 3番めの円と、60°の線が交わる点。(3, 60°)

B : 4番めの円と、150°の線が交わる点。(4, 150°)

C : 2番めの円と、300°の線が交わる点。(2, 300°)

(2) P : $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 90^\circ$ 。真上の向きへ2

Q : $\frac{7\pi}{6} \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{7 \times 180^\circ}{6} = 210^\circ$

210°は、真左(180°)から、さらに30°左回りの向き
その向き(左下)へ3

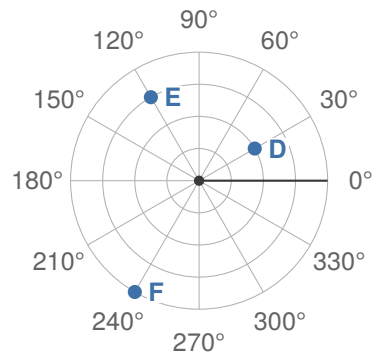
答え (1) A (3, 60°)、B (4, 150°)、C (2, 300°)

(2) P : 2番めの円と90°の線が交わる点(Oの真上)

Q : 3番めの円と210°の線が交わる点(左下)

じぶんでこう9

(1) 右の図の点 D、E、F の極座標を答えましょう (円は中心から $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ 、線は 30° ごと)。(2) 極座標が $(1, \pi)$ の点 R と、 $(3, \frac{5\pi}{3})$ の点 S は、図のどこにありますか。



ポイント 極座標は「距離、角」の順。角は 0° の線 (右) から左回りに読みます。ラジアンで書いてあったら、度に直すと、どの線の上かがすぐわかります。

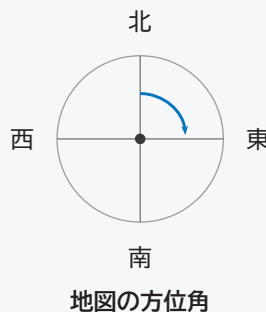
もっと知りたい ★★

地図や船の「方位角」は、北から右回り

地図や船・飛行機では、向きを「北から右回りに何度」で言うことが多く、これを**方位角** (ほういかく) といいます。東は方位角 90° 、南は 180° です。この本の極座標は「東 (右) から左回り」なので、同じ東の向きが 0° 、北が 90° になります。北東だけは、どちらで言っても 45° です。角の数を見たら、「どこから、どちら回りにはかった角か」を、まず確かめましょう。



東が 0°
左回り
北は 90°



北が 0°
右回り
東は 90°

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

換算でかける分数が、さかさま

✕ $60^\circ = 60 \times \frac{180}{\pi} \text{ rad}$

○ $60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

単位をつけて書けば、 $^\circ$ が分母にあるほうをかけると $^\circ$ が消えることがわかります。×の式は約3438になり、1周の $2\pi \approx 6.28$ より大きいので、おかしいと気づけます。

⚠ まちがえやすいところ

$s = r\theta$ に、度のまま入れる

✕ 半径2、中心角 30° の弧の長さは $2 \times 30 = 60$

○ $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ なので、 $s = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \approx 1.05$

$s = r\theta$ は、 θ がラジアンの際の式です。円周は $2\pi \times 2 \approx 12.6$ なのに、×の60は円周より長くなっています。

⚠ まちがえやすいところ

半径と直径を取りちがえる

✕ 半径5の円の円周は 5π

○ 円周 $= 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi$

2-9の「直径× π 」の直径は、半径の2倍です。 r は半径なので、2をかけるのをわすれないこと。

⚠ まちがえやすいところ

円周角を、中心角と同じや 2 倍にする

✕ 中心角 80° なので、円周角は 80° (または 160°)

○ 円周角は中心角の半分。 $80^\circ \div 2 = 40^\circ$

円の上の点 P は、中心 O よりも弧 AB から遠いので、AB を見こむ角は小さくなります。分度器ではかって確かめてみよう。

⚠ まちがえやすいところ

極座標の角を、真上からはかる

✕ O の真上の向きへ 3 の点は $(3, 0^\circ)$

○ 真上は、右 (0°) から左回りに 90° なので $(3, 90^\circ)$

極座標の角は、 x 軸の正の向き (右) を 0° にして、左回りにはかります。地図の方位角 (北から右回り) とまちがえないようにしましょう。

⚠ まちがえやすいところ

1 rad を、 1° くらいの小さい角だと思う

✕ 1 rad は、 1° とほとんど同じ大きさ

○ 1 rad は約 57.3° 。1 周は約 6.28 rad

1 rad は、弧の長さが半径と同じになる角です。半径を 6 本ちょっとならべると 1 周するので、1 rad は 1 周の 6 分の 1 より少し小さい角です。

物理・工学ではこう使う

タイヤとスピードメーター

自動車のスピードメーターは、タイヤ（車輪）が1秒に何回転したかを数えて、速さを計算しています。半径 0.30 m のタイヤなら、1回転で約 1.885 m ($2\pi \times 0.30$) 進みます。1秒に10回転していれば、1秒に 18.85 m 進みます。時速にすると、単位つきの1 (2-10) をかけて、

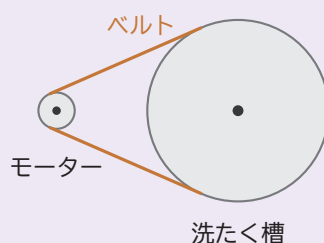
$$18.85\text{ m/s} \times \frac{3.6\text{ km/h}}{1\text{ m/s}} \approx 67.9\text{ km/h}$$

です。タイヤがすりへって半径が小さくなると、1回転で進む道のりが短くなるので、メーターは実際より少し速い速さを表示します。

ベルトとプーリー

エンジンや洗たく機のモーターは、ベルトとプーリーで回転を伝えます。ベルトがすべらなければ、2つのプーリーのふちは同じ長さだけ動きます。 $s = r\theta$ で s が同じなので、半径3倍のプーリーは、3分の1の角しか回りません（例題4）。半径のちがうプーリーを組み合わせると、回転をおそくして、そのかわりに回す力を大きくできます。

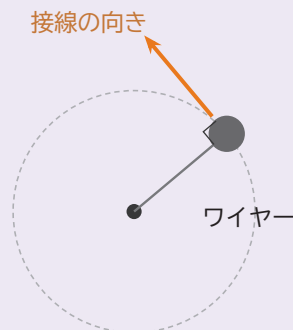
たて型の洗たく機では、モーターの小さいプーリーと、洗たく槽の大きいプーリー（半径が約6倍）をベルトでつなぎ、回転を約 $\frac{1}{6}$ におとしています。



物理・工学ではこう使う

ハンマー投げと、回る傘のしずく

ハンマー投げでは、ワイヤーの先のハンマーを、半径約 2m の円をえがくように回します。ワイヤーは、ハンマーを中心のほうへ引っばっています。手をはなすと、ハンマーはその瞬間に動いていた向き、つまり**円の接線の向き**（ワイヤーに垂直）に飛んでいきます。ぬれた傘を回すと、しずくがふちから接線の向きに飛ぶのも、同じしくみです。



章末問題

4-2 のまとめ

基本 ★★

- 1 半径 9 cm、中心角 40° のおうぎ形の、(1) 弧の長さ、(2) 面積を求めましょう。 π を使って表し、小数（約）でも答えましょう。(例題 1)
- 2 (1) 120° と 225° を、ラジアンで表しましょう。(2) $\frac{5\pi}{3}$ rad と 3 rad を、度で表しましょう (3 rad は小数第 1 位まで)。(例題 2)
- 3 (1) 半径 10 cm、中心角 $\frac{\pi}{6}$ rad のおうぎ形の、弧の長さ、面積を求めましょう (π を使って)。(2) 弧の長さが 10 cm、面積が 40 cm^2 のおうぎ形の、半径と中心角を求めましょう。(例題 3)
- 4 半径 6 cm と 18 cm のプーリーをベルトでつながします。ベルトが 36 cm 動いたとき、それぞれ何 rad 回りますか。大きいほうは度でも答えましょう。(例題 4)

5 半径 0.35 m のタイヤがすべらずに転がります (例題 5)。 (1) 200 回転で何 m 進む? (小数第 1 位まで) (2) 1000 m では約何回転? (整数で)

6 次の角を求めましょう (例題 6・例題 7)。 (1) 円 O の外の点 P から引いた 2 本の接線の接点が A、B で、 $\angle APB = 40^\circ$ のときの $\angle AOB$ 。 (2) 中心角 76° の弧に対する円周角。 (3) AB が直径、P が円の上の点で、 $\angle PBA = 64^\circ$ のときの $\angle PAB$ 。

7 例題 9 と同じ図をノートにかき、極座標が $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$ の点 P と $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ の点 Q をかきましょう。角は何度ですか。 (例題 9)

チャレンジ ★★★

8 $A(0, 0)$ 、 $B(10, 0)$ 、 $C(0, 4)$ を通る円の中心を求めましょう。 (例題 8)

9 半径 0.32 m のタイヤが 1 秒に 8 回転しています。 (1) 1 秒に何 m 進みますか (小数第 2 位まで)。 (2) 時速約何 km ですか (整数で)。 (例題 5)

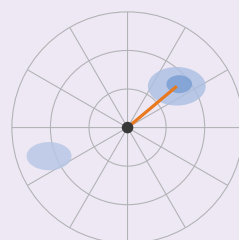
10 半径 12 cm、弧の長さ 4π cm のおうぎ形の、 (1) 中心角 (ラジアンと度)、 (2) 面積 (π を使って) を求めましょう。 (例題 2・例題 3)

物理・工学ではこう使う

気象レーダーと、雨雲の地図

気象レーダーは、アンテナを回しながら電波を出

し、雨つぶではね返った電波をはかります。もどるまでの時間で距離 r が、アンテナの向きで角 θ がわかります (⑩)。電波は 1 秒に約 30 万 km 進むので、60 km 先の雨なら約 0.0004 秒で往復します。集めた (r, θ) を色でぬると、雨雲の地図になります。



レーダーの画面

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 弦・弧・おうぎ形がわかり、弧の長さとおうぎ形の面積を、中心角に比例させて求められる。→ 60 ページ
- ☐ 角をラジアンで表し、度と換算して、 $s = r\theta$ と $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ を使える。→ 62 ページ
- ☐ 接線が半径に垂直なわけを説明でき、DEG・RAD と極座標 (r, θ) を使える。→ 71 ページ



デルタ

回るものの道のりは $s = r\theta$ 。次の章は「比」だよ。

第1部 図形

★★～★★★★

4-3 にた形と比：相似

道しるべ この章の前に 2-5 2-15 3-5 4-1 4-2 この章の先に 4-4 4-6 5-10

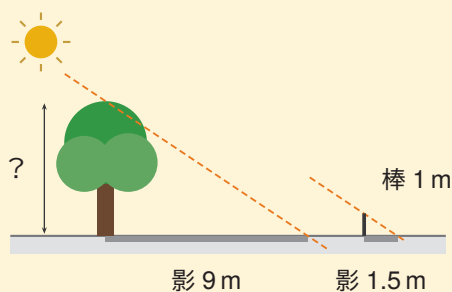
この章でできるようになること

- ★★ 拡大図・縮図と縮尺を使って、本当の長さや図の上の長さを求められる。
- ★★★ 三角形の相似条件を見つけ、相似比や平行線と線分の比から、辺の長さを求められる。
- ★★★ 面積の比は k^2 、体積の比は k^3 になることを使い、すいの断面や直角三角形の辺の比を説明できる。

? はてな？

晴れた日に、校庭の木の高さを知りたくなりました。木はとても高くて、のぼることも、メジャーを当てることもできません。でも、地面にできた影の長さなら、メジャーではかれます。

木の影は 9 m でした。同じ時刻に、長さ 1 m の棒をまっすぐ立てると、影は 1.5 m でした。木の高さは何 m かな？



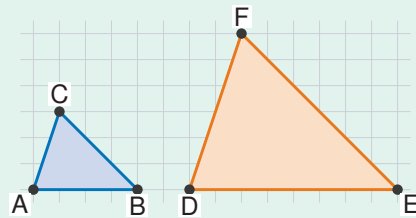
木と棒は、大きさがまるでちがいます。でも、木とその影が作る三角形と、棒とその影が作る三角形は、「形」が同じです。この章では、形が同じで大きさだけがちがう図形を調べます。形が同じなら、長さの「比」が同じになります。その比を使うと、はかれない長さが計算で求められます。

△ やってみよう 方眼で、2 倍の拡大図をかこう

用意するもの

方眼紙、定規、分度器

- 1 方眼紙に、右の図の三角形 ABC をかこう。
- 2 右へ何マス、上へ何マスを、すべて 2 倍にして、三角形 DEF をかこう。
- 3 2 つの三角形の辺の長さや角の大きさを、定規と分度器ではかって、表にまとめよう。



ソラさんがはかった結果です（長さの単位は、方眼の 1 マス）。

	AB	BC	CA	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
三角形 ABC	4	4.2	3.2	72°	45°	63°
	DE	EF	FD	$\angle D$	$\angle E$	$\angle F$
三角形 DEF	8	8.5	6.3	72°	45°	63°

やってみようの答え：辺の長さは、DE が AB の 2 倍、EF が BC の約 2 倍、FD が CA の約 2 倍です（はかったときのずれがあるので「約」）。角の大きさは、3 つとも、もとの三角形と同じです。2 倍の拡大図は、「長さはすべて 2 倍、角はそのまま」の図形です。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-5** 比 $a : b$ の比の値は $a \div b$ 。比の両方に同じ数をかけても、わけても、等しい比になる。
- 2-15** 比例： x が 2 倍、3 倍になると、 y も 2 倍、3 倍。 $y = ax$ 。
- 3-5** 傾き = たての変化量 $\div$ 横の変化量。坂の急さを表す。
- 4-1** ぴったり重なる図形は合同。三角形は「3 辺」「2 辺とその間の角」「1 辺とその両はしの角」が決まると 1 つに決まる（合同条件）。平行線の同位角・錯角は等しい。対頂角は等しい。

📐 数学の道具

① 拡大図・縮図と縮尺

スマートフォンの写真を、2 本の指で広げて拡大すると、写っている人の顔は大きくなります。でも、顔の形は変わりません。目と目の間も、鼻の長さも、口のはばも、同じ倍率で大きくなるからです。

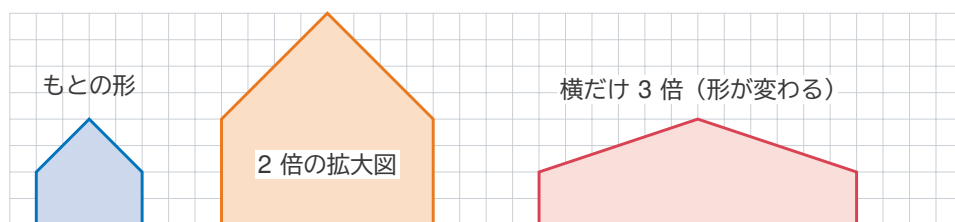


図1 たても横も 2 倍にすると、形は同じ（オレンジ）。横だけ 3 倍にすると、屋根の角が変わり、形がちがってしまう（赤）。

もとの形の、どの長さも同じ倍率で大きくした図を**拡大図**、同じ倍率で小さくした図を**縮図**といいます。拡大図や縮図では、

- 対応する（同じ場所どうしの）辺の長さは、すべて同じ倍率になります。
- 対応する角の大きさは、もとと同じです。

横だけ 3 倍にした赤い家は、横の長さは 3 倍、たての長さは 1 倍で、倍率がそろっていません。だから拡大図ではありません。屋根の角を分度器ではかると、もとの家とちがっています。

縮尺：地図や設計図

地図や建物の設計図は、本物の縮図です。本物をどれだけ縮めたかを表す比を、**縮尺**といいます。縮尺 1 : 25 000 の地図では、地図の上の 1 cm が、本物の 25 000 cm です。

$$\text{本物の長さ} = \text{図の上の長さ} \times 25\,000$$

$$\text{図の上の長さ} = \text{本物の長さ} \div 25\,000$$

地図の上で 4 cm なら、本物は、4 cm を 25 000 倍して、100 000 cm です。1 m = 100 cm、1 km = 1000 m なので (2-10)、

$$100\,000\text{ cm} \div 100\text{ cm/m} = 1000\text{ m} \quad 1000\text{ m} \div 1000\text{ m/km} = 1\text{ km}$$

1 km です。かけ算のあとは、cm のままになっていることに注意しましょう。建物の設計図では、1 : 100 や 1 : 50 の縮尺がよく使われます。

2 相似と相似比

2 つの図形があって、一方を拡大または縮小すると、もう一方にぴったり重なるとき、2 つの図形は**相似**（そうじ）であるといいます。「形が同じで、大きさだけがちがう」ということです。やってみようの三角形 ABC と三角形 DEF は相似です。記号 $\sim$ を使って、

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

と書きます。 $\sim$ は、英語で「にている」という意味の similar の頭文字 S を、横にねかせた形だといわれています。

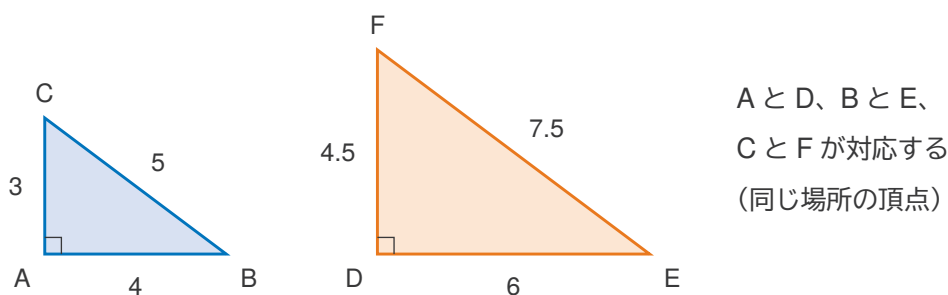


図2 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。辺はどれも1.5倍。対応する角は等しい（たとえば $\angle A$ と $\angle D$ はどちらも直角）。

相似の記号を書くときは、**対応する頂点を、同じ順番に書きます**。AとD、BとE、CとFが対応するなら、 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ です。こう書いておけば、「1番めどうし・2番めどうし」で対応がすぐわかります。

相似比

相似な図形の、対応する辺の長さの比を**相似比**といいます。図の2つの三角形では、

$$AB : DE = 4 : 6 = 2 : 3 \quad BC : EF = 5 : 7.5 = 2 : 3$$

$$CA : FD = 3 : 4.5 = 2 : 3$$

どの辺の比も2:3なので、相似比は2:3です。「大きい三角形は、小さい三角形の $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍」とも言えます。この倍率を k で表すことがあります。ここでは $k = 1.5$ です。

合同は、相似比1:1の相似

合同(4-1)は、形も大きさも同じ図形でした。相似比が1:1の相似が、合同です。合同の記号は $\equiv$ で、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ のように、これも対応する順に書きます。相似の記号 $\sim$ は、アルファベットのSを横にたおした形です。なみの形の「 $\sim$ 」とはちがい、両はしがぐるりと丸まっています。合同の記号 $\equiv$ は、横線が3本です。(外国の本では、合同を $\cong$ と書くこともあります。)

1つの図形の中の比も、同じになる

相似比は、2つの図形の「間」の比です。もう1つ、1つの図形の「中」の比も見てください。三角形ABCで $AB : CA = 4 : 3$ 、三角形DEFで $DE : FD = 6 : 4.5 = 4 : 3$ 。同じです。形が同じなら、「横の辺はななめの辺の何倍か」のような、1つの図形の中の比も同じになります。この見方は、⑦と4-6で大切になります。

比の式から、長さを求める

相似比が $2 : 3$ で、小さいほうの辺が 8 cm なら、大きいほうの対応する辺 $x\text{ cm}$ は、 $8 : x = 2 : 3$ です。比が等しいことは、比の値 (2-5) が等しいことなので、

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \quad \text{両辺に } 3x \text{ をかけて (2-14)} \quad 8 \times 3 = 2 \times x \quad x = 12$$

「 $a : b = c : d$ なら $a \times d = b \times c$ (外側どうしの積=内側どうしの積)」と、まとめて使えます。もっと簡単に、「大きいほうは $\frac{3}{2}$ 倍だから $8 \times \frac{3}{2} = 12$ 」と考えてもかまいません。

③ 三角形の相似条件

2つの三角形が相似かどうかを、3つの辺と3つの角を全部はかって確かめるのは大変です。合同のときは、「三角形が1つに決まる条件」が3つありました (4-1)。相似でも、「三角形の形が1つに決まる条件」を考えます。

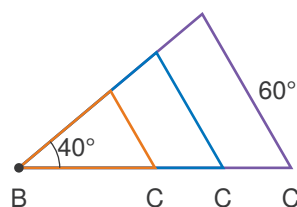
	合同条件 (4-1)	相似条件
①	3 辺がそれぞれ等しい	3 辺の比がすべて等しい
②	2 辺とその間の角がそれぞれ等しい	2 辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
③	1 辺とその両はしの角がそれぞれ等しい	2 つの角がそれぞれ等しい

表 1 合同条件の「長さが等しい」を、「長さの比が等しい」にかえたものが相似条件。

合同条件では、大きさまで決まります。相似条件では、形だけが決まり、大きさは決まりません。そのため、長さそのものではなく、長さの「比」が等しいことを条件にします。

① ③「2つの角」だけで、なぜ形が決まるの？（図で考える）

1辺BCの長さを、2、3、4と変えて、その両はしにいつも 40° と 60° の角をかいてみます。できる三角形は、大きさはちがっても、すべて同じ形です。辺の長さを自由に換えられるので、大きさは決まりません。でも、2つの角が決まると、3つめの角も



$180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$ に決まり

(4-1)、形は1つに決まります。

② ③「2つの角」だけで、なぜ形が決まるの？（数で考える）

どの三角形でも、辺の長さをはかって、比を計算してみます（コンピュータで計算した値）。

BC	AB	CA	$AB \div BC$	$CA \div BC$
2	1.76	1.31	0.879	0.653
3	2.64	1.96	0.879	0.653
4	3.52	2.61	0.879	0.653

表2 BCを2倍にすると、ABもCAも2倍。辺の比はいつも同じ。

BCが2から4に2倍になると、ABもCAも2倍です。どの大きさでも、 $AB \div BC$ は0.879、 $CA \div BC$ は0.653で同じです。辺の比がすべて等しいので、相似です。

？はてな？の答え

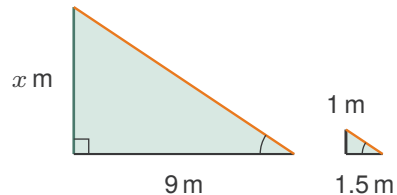
問い 棒 1 m の影が 1.5 m、木の影が 9 m。木の高さは？

答え 木の高さは 6 m

わけ① 2つの三角形は相似

太陽はとても遠いので、日光は平行にとどきます。木と棒は、どちらも地面に垂直に立っています。

- 木と地面の角も、棒と地面の角も 90° 。
- 日光と地面の角は、平行線の同位角なので等しい (4-1)。



2つの角がそれぞれ等しいので、2つの三角形は相似です (③)。

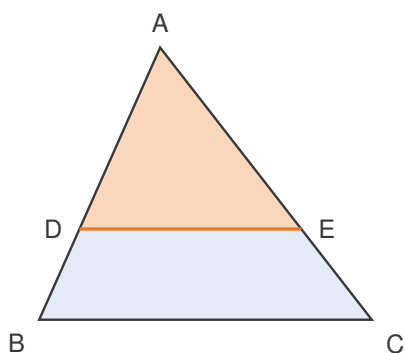
わけ② 対応する辺の比で計算する

対応する辺は、「高さ」として「影」とうしです。影の比は $9 : 1.5 = 6 : 1$ なので、木の三角形は、棒の三角形を 6 倍に拡大した形です。だから、木の高さも棒の 6 倍で、 $1 \times 6 = 6$ (m) です。

1つの三角形の中の比で考えることもできます。棒は「高さ $\div$ 影 $= 1 \div 1.5$ 」なので、木も同じ比になり、木の高さは $9 \times \frac{1}{1.5} = 6$ (m) です。どちらの考え方でも、答えは 6 m です。

4 平行線と線分の比

三角形 ABC の辺 AB、AC の上に点 D、E をとり、DE が BC に平行になるようにします。



DE // BC なので、同位角が等しく (4-1)、
 $\angle ADE = \angle ABC$ 、 $\angle AED = \angle ACB$ です。
 2つの角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

(相似条件③)。だから、対応する辺の比が
 等しくなります。

$$\boxed{AD : AB = AE : AC = DE : BC}$$

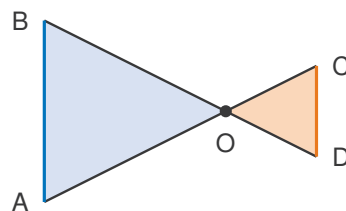
たとえば、 $AD = 4$ 、 $DB = 2$ なら、 $AB = 4 + 2 = 6$ です。だから、
 $AD : AB = 4 : 6 = 2 : 3$ です。DE は、BC の $\frac{2}{3}$ の長さになります。AE
 と EC についても、 $AE : EC = AD : DB = 2 : 1$ が成り立ちます。AE が AC
 の $\frac{2}{3}$ なら、EC は残りの $\frac{1}{3}$ だからです。

X 字形 (砂時計の形)

2本の直線が点 O で交わり、AB と DC が平
 行になっている形もよく出てきます。 $\angle AOB$
 $= \angle COD$ (対頂角)、 $\angle OAB = \angle OCD$ (平
 行線の錯角。4-1) なので、2つの角がそれぞ
 れ等しく、

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

です。三角形が、O を中心にさかさまになっ
 て、大きさを変えた形です。ピンホールカメ
 ラやレンズは、この形で像を作ります (例題
 6、物理・工学ではこう使う)。



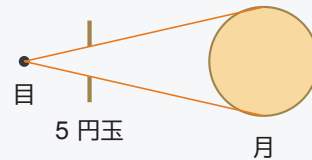
🔍 コラム 5 円玉の穴で、月の大きさをはかる

5 円玉の穴の直径は、約 5 mm です。満月の夜、5 円玉を目の前に持ち、ちょうど穴いっぱいに月が見える所をさがします。目から 5 円玉までが約 55 cm のとき、月がぴったり穴におさまりました。

目と穴のふち、目と月のふちを結ぶと、相似な 2 つの三角形ができます（④の平行線と線分の比）。月までの距離は約 384 000 km なので、相似比は 55 cm : 384 000 km です。単位を m にそろえると、月の直径は

$$0.005 \text{ m} \times \frac{384\,000\,000 \text{ m}}{0.55 \text{ m}} \approx 3\,490\,000 \text{ m}$$

で、約 3490 km。本当の月の直径は約 3474 km なので、5 円玉 1 まいで、ほぼ正しく求められます。



⑤ 面積の比は k^2 、体積の比は k^3

相似比が 1 : 2 のとき、長さは 2 倍です。では、面積は何倍になるでしょう。「2 倍」と答えたいくなりますが、方眼で確かめてみましょう。

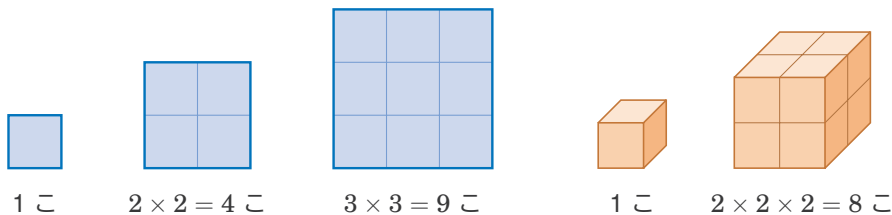


図 3 左：正方形の 1 辺を 2 倍、3 倍にすると、面積は 4 倍、9 倍。右：立方体の 1 辺を 2 倍にすると、体積は 8 倍。

1 1 辺を 2 倍にした正方形には、もとの正方形が、たてに 2 こ、横に 2 こで、 $2 \times 2 = 4$ こ入ります。たても横も 2 倍になるので、2 が 2 回かかるのです。1 辺を 3 倍にすると、 $3 \times 3 = 9$ 倍です。

① どんな形でも、面積は k^2 倍

三角形なら、面積は「底辺×高さ÷2」です。相似比が $1:k$ なら、底辺も高さも k 倍なので、面積は $k \times k = k^2$ 倍です。曲がった形でも、細かい方眼のマスに分けて考えます（4-2 の⑤と同じ「細かく分ける」考え方）。 k 倍に拡大すると、マスの 1 つ 1 つが k^2 倍になるので、全体も k^2 倍です。

② 体積は k^3 倍

立方体の 1 辺を 2 倍にすると、たて・横・高さのすべてが 2 倍なので、小さい立方体が $2 \times 2 \times 2 = 8$ こ入ります。2 が 3 回かかります。どんな立体でも、相似比が $1:k$ なら、体積は k^3 倍です。

長さの倍率 k	1	2	3	10	$\frac{1}{2}$
面積の倍率 k^2	1	4	9	100	$\frac{1}{4}$
体積の倍率 k^3	1	8	27	1000	$\frac{1}{8}$

表 3 相似比が $1:k$ のとき、面積の比は $1:k^2$ 、体積の比は $1:k^3$ 。

たいせつ

相似比が $1:k$ のとき

長さの比 $1:k$ 面積の比 $1:k^2$ 体積の比 $1:k^3$

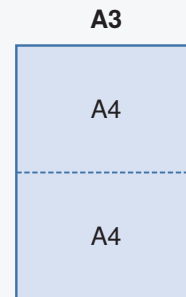
🔍 コラム コピー機の「141%」と、紙の大きさ

コピー機で A4 の紙を A3 の紙に拡大するとき
は、倍率を 141% (1.41 倍) にします。なぜ 2
倍ではないのでしょうか。

A3 の紙は、A4 の紙 2 まいをつなげた大きさ
で、面積がちょうど 2 倍です。A4 と A3 は相
似な長方形になるように決めてあります。面積
の倍率 k^2 が 2 なので、長さの倍率は
 $k = \sqrt{2} = 1.414\ldots$ (2-8) です。だから、長さ
を約 1.41 倍にすると、ぴったり A3 の大きさ
になります。反対に、A3 を A4 に縮小すると
きは、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ で、71% です ($\approx$ は「ほぼ
等しい」という意味。5-8 でくわしく)。

本当の大きさは、A4 が 210 mm × 297 mm、
A3 が 297 mm × 420 mm。

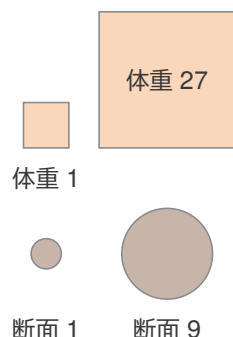
$297 \div 210 \approx 1.414$ 、 $420 \div 297 \approx 1.414$ で、
確かに $\sqrt{2}$ 倍です。



大きい動物の足が太いわけ

シカをそのまま3倍の大きさにした動物を考えます。体重は体積に比例するので、 $3^3 = 27$ 倍になります。体重をささえる足の骨の強さは、骨の断面の面積に比例するので、 $3^2 = 9$ 倍にしかありません。骨の断面 1cm^2 あたりにかかる重さは、 $27 \div 9 = 3$ 倍になってしまいます。だから、ゾウのような大きな動物は、体の大きさのわりに、ずっと太い足をしています。

このように「大きさを変えると、面積で決まる量と体積で決まる量の割合が変わる」ことを調べるのが、物理や工学の**相似則**です。



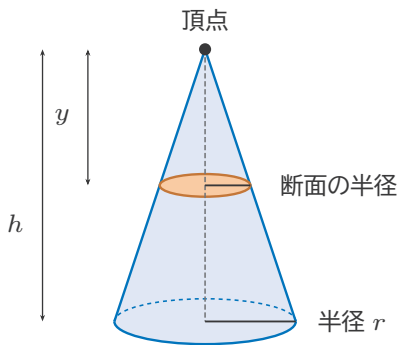
🔍 もっと知りたい ★★★

光の明るさと、距離の2乗

プロジェクターでスクリーンに映すとき、スクリーンまでの距離を2倍にすると、映る画面は相似なまま、たても横も2倍になります。面積は $2^2 = 4$ 倍です。同じ量の光が4倍の面積に広がるので、画面の明るさは $\frac{1}{4}$ になります。電球や星の光も同じで、「光の明るさは、距離の2乗に反比例する」のは、この相似の k^2 が理由です。物理の音の強さや、重力・電気の力が距離の2乗に反比例することにも、同じ考え方が出てきます。

6 すいを底面に平行に切ると

アイスクリームのコーンや、とんがり帽子のような形を**円すい**、ピラミッドのような、底面が四角形の形を**四角すい**といいます。とがった点を頂点といいます。円すいを、底面に平行な平面で切ってみましょう。切り口（断面）は円です。その半径は、どこで切ると、どれだけになるでしょう。



円すいを、頂点を通るたての平面で切って、横から見ます。頂点から y の所で、底面に平行に切った線は、三角形の底辺に平行です。

だから、④の平行線と線分の比が使えます。頂点からの長さの比 $y : h$ と、半径の比が等しくなります。高さ h で半径 r の円すいなら、

$$\text{断面の半径} = r \times \frac{y}{h} = \frac{r}{h} y$$

$\frac{r}{h}$ は、 y が変わっても変わらない数（定数）です。だから、**断面の半径は、頂点からの長さ y に比例します** (2-15)。頂点から切りとった小さい円すいは、もとの円すいと相似で、相似比は $y : h$ です。高さ 12 cm、底面の半径 4 cm の円すいで計算すると、次のようになります。

頂点からの長さ y (cm)	3	6	9	12
断面の半径 (cm)	1	2	3	4
断面の面積 (cm ²)	π	4π	9π	16π

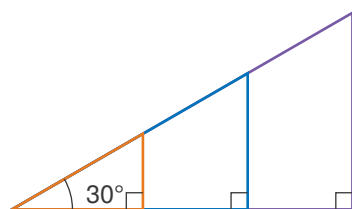
表 4 半径は y に比例 ($\frac{4}{12}y = \frac{1}{3}y$)。面積は y^2 に比例する (⑤の k^2)。

四角すいでも同じです。底面が 1 辺 a の正方形で、高さが h の四角すいを、頂点から y の所で底面に平行に切ると、断面は 1 辺 $\frac{a}{h}y$ の正方形です。第 5 巻の 5-10 では、この断面をうすい板にして積み重ね、すいの体積を積分で求めます。

7 直角三角形の辺の比は、角だけで決まる

直角三角形では、1 つの角は必ず 90° です。だから、もう 1 つの角 θ が同じなら、2 つの角がそれぞれ等しいので、相似です (③)。相似なら、1 つの三角形の中の辺の比も同じでした (②)。

直角三角形の辺の比は、直角でない 1 つの角 θ だけで決まる



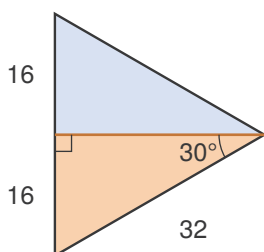
斜辺の長さ：2、3.6、5.2

図は、 30° の角をもつ直角三角形を、3つの大きさでかいたものです。直角に向かい合う、いちばん長い辺を**斜辺**といいます。どの三角形でも、

$$\text{たての辺} \div \text{斜辺} = 0.5$$

です。斜辺が2倍になれば、たての辺も2倍になるからです。

30° の三角形で、たての辺が斜辺のちょうど半分になるわけ



1辺32の正三角形は、3つの角がどれも 60° です。これを、まん中の線で半分に折ると、2つの直角三角形ができます（4-1の線対称）。

1つの直角三角形（オレンジ）の角は、 90° と 60° と、 $60^\circ \div 2 = 30^\circ$ です。たての辺は、正三角形の1辺32の半分の16。斜辺は32のままです。だから、 30° の直角三角形では、たての辺はいつも斜辺の半分です。

坂の傾きも、角だけで決まる

3-5では、坂の急さを、傾き（たての変化量 $\div$ 横の変化量）で表しました。坂の角が同じなら、直角三角形は相似なので、坂の長さに関係なく、傾き「たて $\div$ 横」も同じになります。たとえば、角が 20° の坂では、横に10m進むと約3.64m上がり、横に50m進むと約18.2m上がります。どちらも、たて $\div$ 横 $= 0.364$ です。

このように、直角三角形の「たて $\div$ 斜辺」「横 $\div$ 斜辺」「たて $\div$ 横」は、角 θ を決めると、1つに決まる数です。4-6では、この3つの比に $\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta$ という名前をつけて、坂や力の計算に使います。

たいせつ

相似：一方を拡大・縮小すると、もう一方に重なる。対応する辺の比はすべて等しく、対応する角は等しい。

三角形の相似条件：① 3 辺の比がすべて等しい ② 2 辺の比とその間の角が等しい ③ 2 つの角が等しい

$DE \parallel BC$ なら $AD : AB = AE : AC = DE : BC$

相似比 $1 : k$ なら、面積の比 $1 : k^2$ 、体積の比 $1 : k^3$

すいを底面に平行に切った断面の半径（1 辺）は、頂点からの長さに比例する。

直角三角形の辺の比は、直角でない 1 つの角だけで決まる。

 この章で出てきたことば

拡大図・縮図 どの長さも同じ倍率で大きく（小さく）した図。角の大きさはもとと同じ。

縮尺 本物の長さを、図の上でどれだけ縮めたかを表す比。1 : 25 000 など。

相似・相似比 形が同じで大きさがちがう図形どうしが相似。対応する辺の長さの比が相似比。

相似条件 三角形が相似になるための条件。3 辺の比、2 辺の比とその間の角、2 つの角。

相似則 大きさを変えたとき、長さ・面積・体積で決まる量がそれぞれ何倍になるかを使って、本物を調べる考え方。

斜辺 直角三角形で、直角に向かい合う、いちばん長い辺。

 記号カード

初めて出た章 4-3



読み方 そうじ
意味 相似。
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ のように、対応する頂点の順に書く
英語 similar

 記号カード

初めて出た章 4-3



読み方 ごうどう
意味 合同。形も大きさも同じ。相似比 1 : 1 の相似
英語 congruent

例題でたしかめよう

例題1 縮尺から長さを求める

縮尺 1 : 25 000 の地図があります。(1) 地図の上で 6 cm の道のりは、本物では何 km ですか。(2) 本物で 2 km の道のりは、地図の上で何 cm ですか。

考え方 本物は、地図の 25 000 倍です。単位は cm のまま計算して、最後に km に直します。

式 (1) $6 \text{ cm} \times 25\,000 = 150\,000 \text{ cm}$
 $150\,000 \text{ cm} \div 100 \text{ cm/m} = 1500 \text{ m}$
 $1500 \text{ m} \div 1000 \text{ m/km} = 1.5 \text{ km}$
 (2) $2 \text{ km} = 2000 \text{ m} = 200\,000 \text{ cm}$
 $200\,000 \text{ cm} \div 25\,000 = 8 \text{ cm}$

答え (1) 1.5 km (2) 8 cm

じぶんでこう1

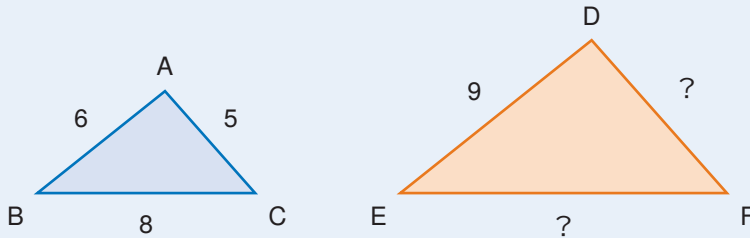
縮尺 1 : 50 の家の設計図があります。(1) 図の上で 9 cm の長さは、本物では何 m ですか。(2) 本物で 3 m の長さは、図の上で何 cm ですか。

ポイント 縮尺の計算は、① 長さの単位を cm にそろえる、② かける・わる、③ 最後に m や km に直す、の順にします。

例題 2 相似比から辺の長さを求める

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、 $AB = 6 \text{ cm}$ 、 $BC = 8 \text{ cm}$ 、 $CA = 5 \text{ cm}$ 、 $DE = 9 \text{ cm}$ です。相似比と、 EF 、 FD の長さを求めましょう。

考え方 記号の順番から、 AB と DE 、 BC と EF 、 CA と FD が対応します。長さがわかっている対応する辺 AB 、 DE から、相似比を求めます。



式 相似比は $AB : DE = 6 : 9 = 2 : 3$ (3 でわる)

$\triangle DEF$ は $\triangle ABC$ の $\frac{3}{2}$ 倍。 $EF = 8 \times \frac{3}{2} = 12$ 、 $FD = 5 \times \frac{3}{2} = 7.5$

確かめ： $8 : x = 2 : 3$ なら $2x = 24$ 、 $x = 12$

答え 相似比 $2 : 3$ 、 $EF = 12 \text{ cm}$ 、 $FD = 7.5 \text{ cm}$

じぶんでこう2

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、 $AB = 4 \text{ cm}$ 、 $BC = 6 \text{ cm}$ 、 $CA = 5 \text{ cm}$ 、 $DE = 10 \text{ cm}$ です。相似比と、 EF 、 FD の長さを求めましょう。

ポイント 相似比は、長さがどちらもわかっている「対応する辺」の組から作ります。どれとどれが対応するかは、記号の頂点の順番がヒントです。

例題3 相似条件を見つける

次の2つの三角形は相似ですか。相似なら、使った相似条件と相似比を答えましょう。

- (1) 3辺が4、6、8の三角形と、3辺が6、9、12の三角形
- (2) 2辺が3、4でその間の角が 60° の三角形と、2辺が6、8でその間の角が 60° の三角形
- (3) 2つの角が 50° 、 70° の三角形と、2つの角が 60° 、 70° の三角形

考え方 短い辺どうし、長い辺どうしを組にして、比を調べます。角だけのときは、3つめの角も計算します。

式 (1) $4:6 = 2:3$ 、 $6:9 = 2:3$ 、 $8:12 = 2:3$ 。3辺の比がすべて等しい

(2) $3:6 = 1:2$ 、 $4:8 = 1:2$ で、その間の角はどちらも 60°

(3) 1つめの3つめの角は $180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$

2つめの3つめの角は $180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$

どちらも 50° 、 60° 、 70° の三角形。2つの角が等しい

答え (1) 相似。3辺の比、相似比 $2:3$ (2) 相似。2辺の比とその間の角、相似比 $1:2$ (3) 相似。2つの角（相似比は、角だけではわからない）

じぶんでこう3

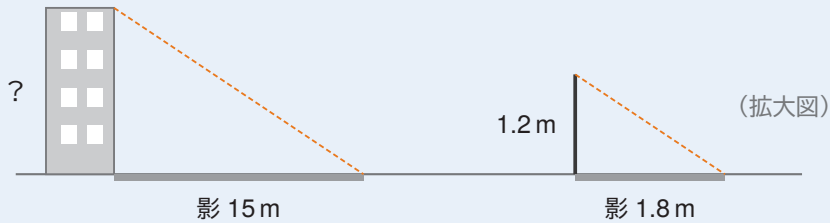
次の2つの三角形は相似ですか。相似なら、相似条件と相似比を答えましょう。(1) 3辺が3、5、6と、6、10、12 (2) 2辺が5、6でその間の角が 40° と、2辺が15、18でその間の角が 40° (3) 2つの角が 45° 、 80° と、 55° 、 80°

ポイント 角で調べるときは、3つめの角を 180° からひいて出してから比べます。辺の比は、短い辺どうし・まん中どうし・長い辺どうしを組にします。

例題 4 影の長さから高さを求める

長さ 1.2 m の棒をまっすぐ立てると、影の長さは 1.8 m でした。同じ時刻に、ビルの影の長さは 15 m でした。ビルの高さを求めましょう。

考え方 日光は平行で、棒もビルも地面に垂直なので、2 つの三角形は相似です（2 つの角）。「高さ÷影」が同じになります。



式 棒の高さ÷影 = $1.2 \div 1.8 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

ビルの高さ = $15 \times \frac{2}{3} = 10$

確かめ：影の比 15 : 1.8 と高さの比 10 : 1.2 は、どちらも $\frac{25}{3}$ 倍

答え 10 m

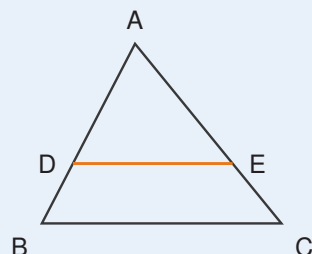
じぶんでこう 4

長さ 1 m の棒の影が 0.8 m のとき、同じ時刻に影の長さが 6.4 m の木の高さを求めましょう。

ポイント 影の問題では、「同じ時刻」なら日光のかたむきが同じです。だから「高さ÷影」が同じ数になります。

例題5 平行線と線分の比

三角形ABCで、辺AB上の点D、辺AC上の点Eを、 $DE \parallel BC$ となるようにとります。
 $AD = 4$ 、 $DB = 2$ 、 $AE = 6$ 、 $BC = 9$ のとき、ECとDEの長さを求めましょう。



考え方 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ です。 $AB = AD + DB$ を先に求め、 $AD : AB$ を相似比にします。

式 $AB = 4 + 2 = 6$ 。相似比は $AD : AB = 4 : 6 = 2 : 3$

$AE : AC = 2 : 3$ より、 $6 : AC = 2 : 3$ 。 $2 \times AC = 18$ 、 $AC = 9$

$EC = AC - AE = 9 - 6 = 3$

確かめ： $AE : EC = 6 : 3 = 2 : 1$ 、 $AD : DB = 4 : 2 = 2 : 1$ で同じ

$DE = BC \times \frac{2}{3} = 9 \times \frac{2}{3} = 6$

答え $EC = 3$ 、 $DE = 6$

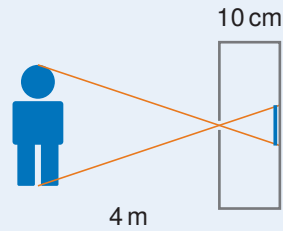
じぶんでこう5

三角形ABCで、 $DE \parallel BC$ (Dは辺AB上、Eは辺AC上)です。 $AD = 3$ 、 $DB = 6$ 、 $AE = 2$ 、 $BC = 12$ のとき、ECとDEの長さを求めましょう。

ポイント 平行線があったら、相似な2つの三角形を取り出して、ノートに別々にかき直すと、まちがえにくくなります。ABは $AD + DB$ です。

例題 6 ピンホールカメラの像の大きさ

小さな穴をあけた箱（ピンホールカメラ）で、穴から 4 m はなれた所に立つ、身長 1.6 m の人をうつします。穴から、像がうつる面までの深さは 10 cm です。像の高さは何 cm ですか。



考え方 光は穴を通してまっすぐ進むので、X 字形の 2 つの三角形ができます。相似比は、穴からの距離の比です。単位を cm にそろえます。

式 $4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$ 、 $1.6 \text{ m} = 160 \text{ cm}$

相似比は $400 : 10 = 40 : 1$ 。像は人の $\frac{1}{40}$

$$160 \times \frac{1}{40} = 4$$

答え 4 cm（上下がさかさまの像）

じぶんでこう 6

穴から 10 m はなれた高さ 5 m の木を、深さ 8 cm のピンホールカメラでうつします。像の高さは何 cm ですか。

ポイント X 字形は、上下がさかさまになった相似です。相似比は、交わる点（穴）からの距離の比です。

例題7 面積の比と体積の比

(1) 相似な2つの立体があり、相似比は2:3です。小さいほうの表面積が 36 cm^2 、体積が 24 cm^3 のとき、大きいほうの表面積と体積を求めましょう。

(2) 縮尺1:20の船の模型をぬるのに、ペンキが15 mL いました。本物の船を同じ厚さでぬるには、ペンキは何 L いらいますか。

考え方 面積は k^2 倍、体積は k^3 倍です。ペンキの量は、ぬる面積に比例します。

式 (1) $k = \frac{3}{2}$ 。表面積は $36 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36 \times \frac{9}{4} = 81$

体積は $24 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 24 \times \frac{27}{8} = 81$

(2) $k = 20$ 。面積は $20^2 = 400$ 倍なので、 $15 \times 400 = 6000\text{ mL}$

$6000\text{ mL} \div 1000\text{ mL/L} = 6\text{ L}$

答え (1) 表面積 81 cm^2 、体積 81 cm^3 (2) 6 L

じぶんでとこう7

(1) 相似比3:4の2つの立体で、小さいほうの表面積が 45 cm^2 、体積が 54 cm^3 です。大きいほうの表面積と体積を求めましょう。(2) 縮尺1:25の模型をぬるのに、ペンキが8 mL いました。本物には何 L いらいますか。

ポイント 長さが k 倍なら、面積は k^2 倍、体積は k^3 倍です。まず k を求めてから、2乗・3乗します。

例題 8 すいの断面

(1) 高さ 12 cm、底面の半径 4 cm の円すいを、頂点から 9 cm の所で底面に平行に切ります。断面の半径と面積を求めましょう。

(2) 高さ 10 cm、底面が 1 辺 6 cm の正方形の四角すいを、頂点から 5 cm の所で底面に平行に切ります。断面の 1 辺と面積を求めましょう。

考え方 頂点から切りとった小さいすいは、もとのすいと相似で、相似比は「頂点からの長さ：高さ」です。

式 (1) 相似比 $9 : 12 = 3 : 4$ 。半径は $4 \times \frac{3}{4} = 3$

面積は $\pi \times 3^2 = 9\pi \approx 28.3$

(2) 相似比 $5 : 10 = 1 : 2$ 。1 辺は $6 \times \frac{1}{2} = 3$ 、面積は $3 \times 3 = 9$

確かめ：底面の面積 36 の $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 倍で 9

答え (1) 半径 3 cm、面積 $9\pi \text{ cm}^2$ (約 28.3 cm^2) (2) 1 辺 3 cm、面積 9 cm^2

じぶんでとこう 8

(1) 高さ 15 cm、底面の半径 5 cm の円すいを、頂点から 6 cm の所で底面に平行に切ります。断面の半径と面積を求めましょう。(2) 高さ 8 cm、底面が 1 辺 4 cm の正方形の四角すいを、頂点から 6 cm の所で底面に平行に切ります。断面の 1 辺と面積を求めましょう。

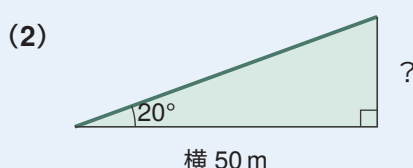
ポイント 頂点から切りとった小さいすいは、もとのすいと相似です。相似比は「頂点からの長さ：高さ」です。

例題9 直角三角形の辺の比を使う

(1) 長さ6mのすべり台が、地面と 30° の角をつくっています。すべり台のいちばん上の高さは何mですか。

(2) 角が 20° の直角三角形では、「たて÷横」が0.364です。角 20° の坂を、横に50m進むと、何m上がりますか。

考え方 (1) 30° の直角三角形では、たての辺は斜辺の半分です。すべり台が斜辺です。(2) たて＝横 $\times$ 0.364です。



式 (1) 高さ $= 6 \times \frac{1}{2} = 3$

(2) たて $= 50 \times 0.364 = 18.2$

答え (1) 3m (2) 約18.2m

じぶんでとこう9

(1) たこあげで、糸を8m出したら、糸がまっすぐにはって、地面と 30° の角をつくりました。たこは、手よりも何m高い所にありますか。(2) 角 20° の坂を、横に30m進むと、約何m上がりますか(たて÷横＝0.364。小数第1位まで)。

ポイント 30° の直角三角形は「正三角形の半分」と考えると、たての辺が斜辺の半分であることがすぐわかります。ほかの角では、比の値(0.364など)を使います。4-6では、この値を電卓で求めます。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

対応する辺を、図の見た目で決めてしまう

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ なのに、図が回っていたり、裏返っていたりすると、ちがう辺を組にしてしまいます。

✕ 図で下にある辺どうし、BC と DE を組にする

○ 記号の順番どおり、AB と DE、BC と EF、CA と FD を組にする
相似の記号は、対応する頂点の順に書く約束です。迷ったら、等しい角どうしを先に見つけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

面積の比を、相似比と同じにする

✕ 相似比 $1:2$ なので、面積も 2 倍

○ 面積は $2^2 = 4$ 倍。体積なら $2^3 = 8$ 倍

たても横も 2 倍になるので、 2 を 2 回かけます。方眼の図を思い出そう。

⚠ まちがえやすいところ

平行線と線分の比で、DE : BC を AD : DB にする

✕ $AD = 4$ 、 $DB = 2$ なので、 $DE : BC = 4 : 2$

○ $DE : BC = AD : AB = 4 : 6$

相似な三角形は $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ です。BC に対応するのは、辺 DB ではなく、辺 AB 全体 ($AD + DB$) です。

⚠ まちがえやすいところ

縮尺の計算で、単位を直しわすれる

✗ $1:25\,000$ の地図で 4 cm は、 $100\,000\text{ m}$

○ $4 \times 25\,000 = 100\,000\text{ cm} = 1\text{ km}$

地図の上の長さを cm ではかったら、かけ算の答えも cm です。 $100\,000\text{ m}$ は 100 km で、ありえないほど長くなります。

⚠ まちがえやすいところ

たてと横を別の倍率でのばしても、相似だと思う

✗ 写真を、横だけ2倍にのばしても、にた形

○ たても横も同じ倍率でのばしたときだけ、相似

横だけのぼすと、角の大きさが変わります。顔が横に太って見えるのは、そのためです。

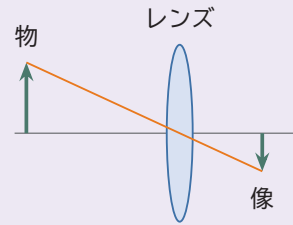
🔍 コラム 怪獣は、立っている？

身長 1.7 m の人を、身長 50 m まで、形を変えずに大きくしたとします。倍率は $k = 50 \div 1.7 \approx 29.4$ です。体重は $k^3 \approx 25\,400$ 倍、足の骨の断面の面積は $k^2 \approx 865$ 倍。骨の断面 1 cm^2 あたりにかかる重さは、 $k \approx 29$ 倍になります。人の骨は、ふだんかかる重さの何倍かには耐えられますが、 29 倍ではおれてしまうでしょう。映画の巨大な怪獣が立っているのは、映画の中だけかもしれません。反対に、アリが体重の何倍もの物を運べるのも、小さい生き物ほど、体重にくらべて筋肉や骨の断面が大きいからです。

物理・工学ではこう使う

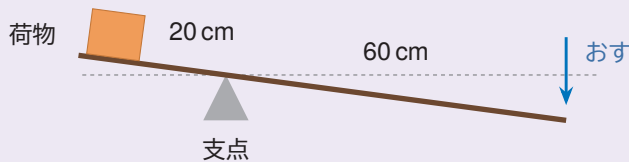
ピンホールカメラとレンズ

ピンホールカメラでは、物の上のはしと下のはしから出た光が、小さな穴で交わり、X 字形をつくります。2 つの三角形は相似なので、像の大きさは「穴から像までの距離 ÷ 穴から物までの距離」倍になります。カメラのレンズでも、レンズの中心を通る光はまっすぐ進むので、同じ X 字形の相似で像の大きさが決まります。スマートフォンのカメラでは、レンズから像までが約 4 mm なので、2 m 先の身長 1.6 m の人の像は、 $1.6 \times \frac{0.004}{2} = 0.0032 \text{ m}$ 、約 3.2 mm です。



てこ

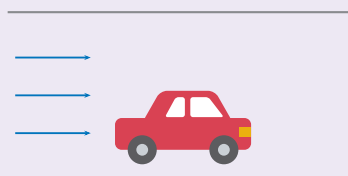
支点から 20 cm の所に荷物をのせ、支点から 60 cm の所をおします。おす側を 3 cm 下げると、棒は支点のまわりに回り、X 字形の相似な三角形ができます。相似比は $60 : 20 = 3 : 1$ なので、荷物は $3 \div 3 = 1 \text{ cm}$ 上がります。動く長さが $\frac{1}{3}$ になるかわりに、荷物を持ち上げる力は、おす力の 3 倍になります（力と動く長さの関係は、物理シリーズで「仕事」を使ってくわしく調べます）。



物理・工学ではこう使う

縮尺模型と風洞

新しい自動車や飛行機、高い建物を作るときは、縮尺 1 : 5 や 1 : 100 などの模型を作り、トンネルのような装置（風洞）で風を当てて、空気の流れ方を調べます。縮尺 1 : 5 の模型では、風を受ける正面の面積は $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ です。模型は、空気の流れ方まで本物とるように、風の速さなどを調節して実験します。これも相似則の使い方です。



風洞の中の模型

✓ 章末問題

4-3 のまとめ

基本 ★★

- 1 縮尺 1 : 50 000 の地図があります。(1) 地図の上で 3 cm は、本物で何 km ですか。(2) 本物で 4 km は、地図の上で何 cm ですか。(例題 1)
- 2 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ で、 $AB = 8\text{ cm}$ 、 $BC = 10\text{ cm}$ 、 $CA = 6\text{ cm}$ 、 $DE = 12\text{ cm}$ です。相似比と、 EF 、 FD を求めましょう。(例題 2)
- 3 相似かどうかと、相似条件・相似比を答えましょう。(1) 3 辺が 2、3、4 と、5、7.5、10 (2) 2 つの角が 35° 、 65° と、 65° 、 80° (例題 3)
- 4 長さ 1.5 m の棒の影が 2 m のとき、同じ時刻に影が 12 m の電柱の高さを求めましょう。(例題 4)
- 5 三角形 ABC で、 $DE \parallel BC$ (D、E は辺 AB、AC 上)、 $AD = 6$ 、 $DB = 3$ 、 $AE = 4$ 、 $BC = 15$ のとき、 EC と DE を求めましょう。(例題 5)

6 相似比 $1:3$ の2つの立体で、小さいほうの表面積が 20 cm^2 、体積が 8 cm^3 です。大きいほうの表面積と体積を求めましょう。( 例題 7)

7 高さ 9 cm 、底面の半径 6 cm の円すいを、頂点から 3 cm の所で底面に平行に切ります。断面の半径と面積を求めましょう。( 例題 8)

チャレンジ

8 穴から 20 m はなれた高さ 12 m の建物を、深さ 5 cm のピンホールカメラでうつします。像の高さは何 cm ですか。( 例題 6)

9 縮尺 $1:10$ の自動車の模型をぬるのに、ペンキが 40 mL いりました。本物を同じ厚さでぬるには、何 L いりますか。( 例題 7)

10 (1) 地面と 30° 、ななめの長さ 12 m の駅のエスカレーターは、何 m 上がりますか。(2) 角 20° の坂 (たて÷横 = 0.364) で、横に 80 m 進むと約何 m 上がりますか (小数第1位まで)。( 例題 9)

ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 拡大図・縮図と縮尺を使って、本当の長さや図の上の長さを求められる。→ 100 ページ
- ☐ 三角形の相似条件を見つけ、相似比や平行線と線分の比から、辺の長さを求められる。→ 103 ページ
- ☐ 面積の比は k^2 、体積の比は k^3 を使い、すいの断面や直角三角形の辺の比を説明できる。→ 107 ページ



デルタ

形が同じなら、比も同じ。次は三平方の定理だよ。

第1部 図形

★★★

4-4 三平方の定理

📌 道しるべ この章の前に 2-8 3-2 3-8 3-10 4-1 4-3
 この章の先に 4-6 4-8 4-10 4-13 5-16

📌 この章でできるようになること

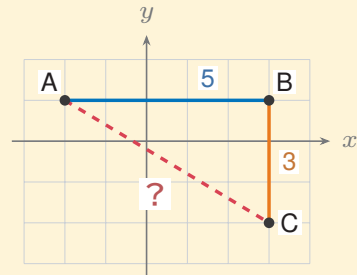
- ★★★ 方眼の正方形の面積から、直角三角形の3つの辺の関係 $a^2 + b^2 = c^2$ を見つけ、2通りの方法でわけを説明できる。
- ★★★ 三平方の定理を使って、辺の長さ・2点の距離・直方体の対角線を求められる。
- ★★★ 3辺の長さから直角三角形かどうかを見分けられ、円の式 $x^2 + y^2 = r^2$ のわけがわかる。

？ はてな？

3-2 では、方眼の上の 3 つの点 $A(-2, 1)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(3, -2)$ で、横に並んだ A と B の距離が 5、たてに並んだ B と C の距離が 3 だと求めました。

では、ななめに並んだ A と C の距離はいくつでしょう。 B を通って行くと $5 + 3 = 8$ ですが、まっすぐ行くほうが近道なので、8 より短いはずです。ものさしではかると、5.8 くらい。

たてと横の長さだけから、ななめの長さを計算で出す方法はあるでしょうか。



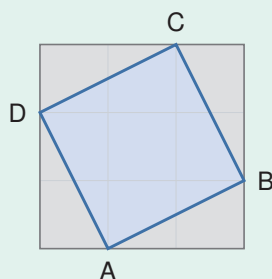
ななめの距離は、いろいろな所で必要になります。地図の上の 2 つの場所の近さ、テレビの画面の大きさ、ロボットの手が届くかどうか、地震の震源までの距離などです。この章では、直角三角形の 3 つの辺のあいだに成り立つ、とてもすっきりしたきまりを、方眼の上の正方形の面積から見つけます。そして、そのきまりがどんな直角三角形でも成り立つわけを、2 通りの方法で確かめます。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-8** 2 乗すると□になる正の数を $\sqrt{\square}$ と書く。1 辺 1 の正方形の対角線は $\sqrt{2}$ 。
- 3-2** 横に並んだ 2 点の距離は $|x_2 - x_1|$ 、たてに並んだ 2 点の距離は $|y_2 - y_1|$ 。
- 3-8** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1 辺 $a + b$ の正方形を 4 つに分けた面積の図)。
- 3-10** $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ ($\sqrt{\quad}$ の中はできるだけ小さい整数に)。
- 4-1** 定理は、証明されたきまり。「A ならば B」の逆は「B ならば A」。3 組の辺が等しい三角形は合同。三角形の内角の和は 180° 。
- 4-3** 2 組の角がそれぞれ等しい三角形は相似で、対応する辺の比が等しい。

Ⅷ やってみよう 方眼に、かたむいた正方形をかこう

- 1 方眼紙のマス目の角に、点 A をうつ。
- 2 A から「右へ 2、上へ 1」の所に点 B、B から「左へ 1、上へ 2」の所に点 C、C から「左へ 2、下へ 1」の所に点 D をうつ。
- 3 A、B、C、D を順に結ぶと、かたむいた正方形ができる（D から「右へ 1、下へ 2」で A にもどる）。
- 4 この正方形の面積は何マスかな？ 数えにくいときは、外側の大きな正方形から、すみの 4 つの直角三角形（灰色）をひこう。
- 5 「右へ 3、上へ 1」「右へ 3、上へ 2」でも、同じように正方形をかいて、面積を求めよう。



はじめの 1 歩	外側の正方形	すみの三角形 4 つ	かたむいた正方形
右へ 2、上へ 1	9 マス		
右へ 3、上へ 1			
右へ 3、上へ 2			

やってみようの答え：「右へ 2、上へ 1」では、外側の正方形は 1 辺が $2 + 1 = 3$ マスなので、 $3 \times 3 = 9$ マス。すみの直角三角形は、たて 1・横 2 の長方形の半分なので $2 \times 1 \div 2 = 1$ マス。それが 4 つで 4 マス。だから、かたむいた正方形は $9 - 4 = 5$ マスです。同じように計算すると、「右へ 3、上へ 1」は $16 - 4 \times 1.5 = 10$ マス、「右へ 3、上へ 2」は $25 - 4 \times 3 = 13$ マスになります。

数学の道具

1 方眼の正方形で、ななめの長さを調べる

やってみようで作った正方形を、もう一度ながめます。かたむいた正方形の1辺は、方眼の上を「右へ a 、上へ b 」進んだ線分です。この線分は、たて b ・横 a の直角三角形の、ななめの辺になっています。

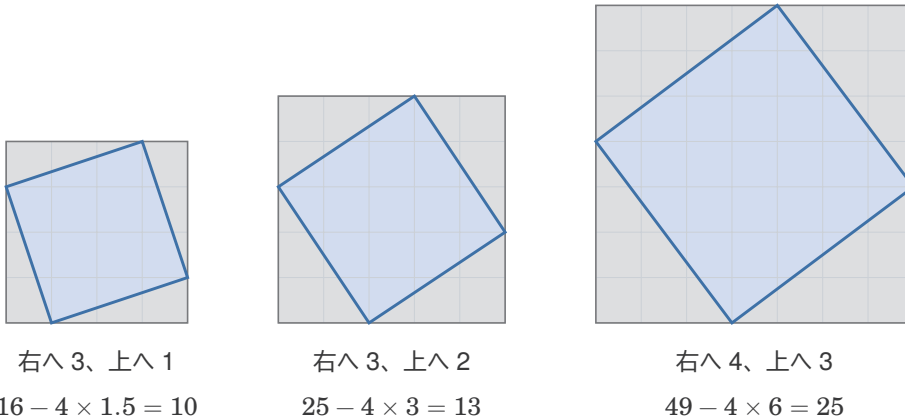


図 1 外側の正方形から、すみの直角三角形（灰色）4 つをひくと、かたむいた正方形（青）の面積になる。

いろいろな「はじめの 1 歩」で正方形をかき、面積を表にまとめます。 a^2 と b^2 の列も、となりにならべてみましょう。

右へ a	上へ b	a^2	b^2	かたむいた正方形の 面積
1	1	1	1	2
2	1	4	1	5
3	1	9	1	10
3	2	9	4	13
4	3	16	9	25

表 1 どの行も、 a^2 と b^2 をたすと、かたむいた正方形の面積になっている。

どの行でも、 $a^2 + b^2$ が、かたむいた正方形の面積と同じになっています。
 $1 + 1 = 2$ 、 $4 + 1 = 5$ 、 $9 + 1 = 10$ 、 $9 + 4 = 13$ 、 $16 + 9 = 25$ です。

面積がわかれば、1辺がわかる

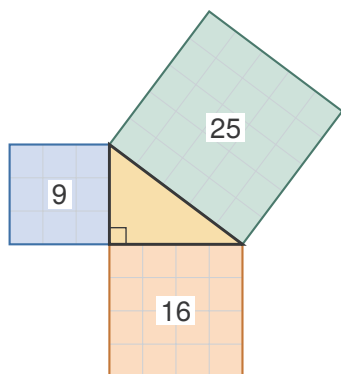
正方形の面積は「1辺×1辺」なので、1辺は「2乗すると面積になる正の数」、つまり $\sqrt{\text{面積}}$ です (2-8)。

- 右へ4、上へ3：面積25なので、1辺は $\sqrt{25} = 5$ 。ものさしではかって5マス分です。
- 右へ2、上へ1：面積5なので、1辺は $\sqrt{5} = 2.236\dots$ 。ものさしではかると2.2マス分くらいで、合っています。
- 右へ1、上へ1：面積2なので、1辺は $\sqrt{2}$ 。2-8で見た「正方形の対角線が $\sqrt{2}$ 」と同じです。

こうして、ななめの線分の長さが、たてと横の長さから計算できました。

直角三角形の3つの辺に、正方形をのせる

方眼の上の直角三角形（直角をはさむ辺が3と4）の、3つの辺のそれぞれに、正方形をのせてみます。



直角をはさむ辺にのせた正方形は、9マスと16マスです。いちばん長い辺にのせた、かたむいた正方形は、表の「右へ4、上へ3」と同じで25マスです。

$$9 + 16 = 25$$

小さい2つの正方形の面積をたすと、大きい正方形の面積とぴったり同じになります。

直角でないと、どうなる？

2つの辺を3cmと4cmにしたまま、そのあいだの角を変えてみます。3つめの辺の長さをはかり、2乗してみましょう。

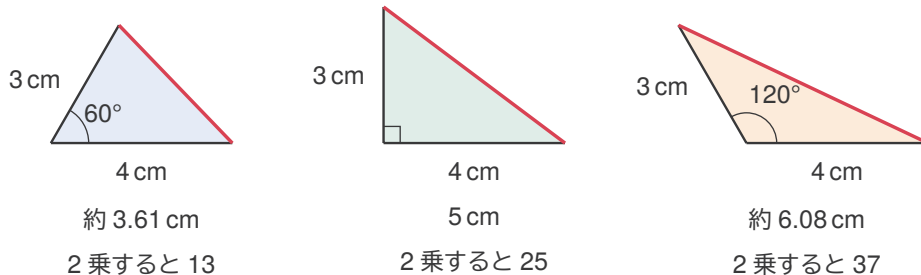


図2 2辺は3cmと4cm。間の角が60°・90°・120°のときの、3つめの辺(赤)。

$3^2 + 4^2 = 25$ になるのは、まん中の直角のときだけです。角が直角より小さいと、3つめの辺は短くなり、2乗は25より小さくなります(13)。角が直角より大きいと、長くなり、2乗は25より大きくなります(37)。 $a^2 + b^2$ が**3つめの辺の2乗と同じになるのは、直角三角形のときのきまり**です。

このきまりに、名前をつける

直角三角形で、直角の向かいにある辺を**斜辺(しゃへん)**といいます。直角をはさむ2辺の長さを a 、 b 、斜辺の長さを c とすると、表や図で見たことは、次のように書けます。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

これを**三平方の定理(さんへいほうのていり)**といいます。3つの辺の平方(2乗)のあいだのきまりなので「三平方」です。2500年ほど前のギリシャのピタゴラスの名前をとって、**ピタゴラスの定理**ともいいます。

c^2 は a^2 に b^2 をたした数なので、 a^2 よりも b^2 よりも大きくなります。だから、**斜辺は、3つの辺の中でいちばん長い辺**です。

ただし、ここまでは、いくつかの直角三角形で確かめただけです。4-1で学んだように、何回確かめても、それだけでは「どんな直角三角形でも必ず」とは言えません。「定理」とよぶためには、証明が必要です。

2 どんな直角三角形でも成り立つわけ：2通りの証明

ここでは、直角三角形の辺の長さを、数ではなく文字 a 、 b 、 c のままにして考えます。文字のまま説明できれば、どんな大きさ・どんな形の直角三角形にもあてはまります。

1 証明1：同じ板に、同じ三角形を4まいずつ置く

1 辺が $a + b$ の正方形の板を2まい用意します。そして、直角をはさむ辺が a と b 、斜辺が c の直角三角形（灰色）を、それぞれの板に4まいずつ置きます。置き方だけを変えます。

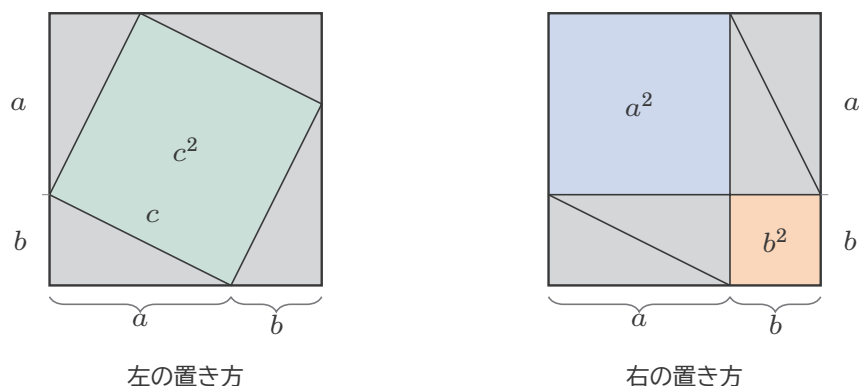


図3 同じ大きさの板に、同じ直角三角形（灰色）を4まいずつ置く。三角形にかくれていない部分は、左は c^2 、右は a^2 と b^2 。

- 1 **左の置き方**：板の4つのすみに三角形を置くと、まん中に、4つの辺がどれも c の四角形がのこります。この四角形の角は、どれも直角です。なぜなら、板の辺の上の1点に集まる角は「三角形の直角でない2つの角」と「四角形の角」で、合わせて 180° 。三角形の直角でない2つの角の和は $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ （内角の和、4-1）なので、四角形の角は $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ です。だから、のこった部分は1辺 c の正方形で、面積は c^2 です。
- 2 **右の置き方**：三角形を2まいずつ組にして、2辺が a と b の長方形を2つ作ります。すると、のこった部分は、1辺 a の正方形（面積 a^2 ）と、1辺 b の正方形（面積 b^2 ）です。

- ③ 板も、置いた三角形 4 まいも、左右で同じです。だから、三角形にかくれていない部分の面積も同じです。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

式でも確かめる (3-8 の展開)

左の板の面積を、2 通りに表します。板は 1 辺 $a + b$ の正方形なので、面積は $(a + b)^2$ 。いっぽう、まん中の正方形 c^2 と、三角形 4 まい (1 まい $\frac{ab}{2}$) を合わせた面積でもあります。

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} \quad (\text{板の面積を 2 通りに表した})$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad (\text{左は展開、3-8。右は } 4 \times \frac{ab}{2} = 2ab)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{両辺から } 2ab \text{ をひいた})$$

図で考えても、式で考えても、同じ結果になりました。



ミナ

証明を 1 つ読みきったね。ここまで来たら、もう 1 つ、ちがう見方の証明も見てみよう。

② 証明 2：相似な三角形を見つける (4-3)

直角三角形 ABC ($\angle C = 90^\circ$) で、直角の頂点 C から、斜辺 AB に垂直な線をひき、AB と交わる点を H とします。すると、大きな直角三角形の中に、小さな直角三角形が 2 つ (青とオレンジ) できます。

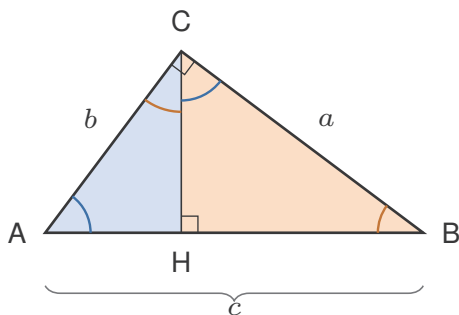


図 4 同じ色の角は、同じ大きさ。

大きな三角形 ACB と、青い三角形 AHC をくらべます。

- $\angle A$ は、どちらにも共通 (青い角)。
- $\angle ACB = \angle AHC = 90^\circ$ 。

2 組の角がそれぞれ等しいので、2 つの三角形は相似です (4-3)。のこりの角 (オレンジ) も等しくなります。

1 相似な三角形では、対応する辺の比が等しいので、「斜辺：Aをはさむ短いほうの辺」の比をくらべます。大きな三角形では $AB : AC$ 、青い三角形では $AC : AH$ です。

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH} \quad (\text{対応する辺の比が等しい})$$

$$AB \times AH = AC \times AC \quad (\text{両辺に } AC \times AH \text{ をかけた、2-14})$$

$$c \times AH = b^2$$

オレンジの三角形 BHC と大きな三角形 BCA でも、 $\angle B$ が共通で直角があるので相似です。同じように考えると、 $c \times BH = a^2$ です。2つの式をたします。

$$a^2 + b^2 = c \times BH + c \times AH$$

$$= c \times (BH + AH) \quad (c \text{ でくくった、3-8})$$

$$= c \times c = c^2 \quad (BH \text{ と } AH \text{ を合わせると、斜辺 } AB \text{ の長さ } c)$$

数で確かめる

3 辺が $3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}$ の直角三角形 ($b = 3$ 、 $a = 4$ 、 $c = 5$) で確かめます。 $c \times AH = b^2$ から $AH = 9 \div 5 = 1.8\text{ cm}$ 、 $c \times BH = a^2$ から $BH = 16 \div 5 = 3.2\text{ cm}$ です。たすと $1.8 + 3.2 = 5$ で、ちゃんと斜辺の長さになります。

証明ができたので「定理」

2つの証明は、どちらも文字 a 、 b 、 c のままで考えたので、どんな直角三角形にもあてはまります。何回はかっても言えなかった「必ず」が、これで言えるようになりました。証明されたきまりなので、「三平方の**定理**」とよびます（定義・定理・法則のちがいは4-1）。

せいかくに言うと

三平方の定理は、平らな面の上にかいた直角三角形のきまりです。地球の表面のように曲がった面の上に、とても大きな三角形をかくと、成り立ちません。たとえば、北極と、赤道の上で経度が 90° ちがう 2 つの点を結ぶ三角形は、3 つの角がすべて 90° で、3 つの辺がすべて約 10 000 km です。これでは $a^2 + b^2 = c^2$ になりません。内角の和が 180° になる (4-1) のも、平らな面のきまりです。ふつうの大きさの図形や機械を考えると、平らな面のきまりで十分です。

3 2つの辺から、のこりの辺を求める

直角三角形の 2 つの辺の長さがわかれば、三平方の定理で、のこりの辺の長さを計算できます。わかっている辺によって、2 つの場合があります。

はじめに、斜辺はどれかを確認する

斜辺は「直角の向かいにある辺」で、いちばん長い辺です。 $a^2 + b^2 = c^2$ の c は、いつも斜辺です。どの辺が斜辺かをまちがえると、答えがまったくちがってしまいます。

(ア) 直角をはさむ 2 辺がわかる

$a = 6$ 、 $b = 8$ (cm) のとき、

$$c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$c = \sqrt{100} = 10$$

斜辺は 10 cm。 c は、2 乗すると 100 になる正の数です (2-8)。

(イ) 斜辺と、もう 1 つの辺がわかる

$c = 10$ 、 $b = 6$ (cm) のとき、

$a^2 + b^2 = c^2$ を a^2 について解いて (2-14)、

$$a^2 = c^2 - b^2 = 100 - 36 = 64$$

$$a = \sqrt{64} = 8$$

のこりの辺は 8 cm。

2 乗して 100 になる数には、 -10 もあります ($(-10)^2 = 100$ 、2-8)。でも、長さはマイナスにならないので、正のほうの 10 だけが答えです。

答えが整数にならないとき

直角をはさむ辺が 1 cm と 2 cm のときは、

$$c^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad c = \sqrt{5} = 2.236\dots$$

なので、約 2.24 cm です ($\sqrt{5}$ の値は電卓で求める)。 $\sqrt{\quad}$ のまま答えるときは、中をできるだけ小さい整数にします (3-10)。2 辺が 2 と 4 なら、

$$c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

3 辺がどれも整数になる直角三角形

3 辺がどれも整数になる組は、とくべつです。よく出てくるものを表にしておきます。

直角をはさむ辺		斜辺	確かめ
3	4	5	$9 + 16 = 25$
5	12	13	$25 + 144 = 169$
8	15	17	$64 + 225 = 289$
7	24	25	$49 + 576 = 625$
6	8	10	$36 + 64 = 100$

表 2 6・8・10 は、3・4・5 を 2 倍にした相似な三角形 (4-3)。

④ 三角定規の直角三角形：1 : 1 : $\sqrt{2}$ と 1 : 2 : $\sqrt{3}$

三角定規は、2 まいで 1 組です。1 まいは直角二等辺三角形 (角が $45^\circ \cdot 45^\circ \cdot 90^\circ$)、もう 1 まいは角が $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の直角三角形です。この 2 つの辺の比を、三平方の定理で求めます。

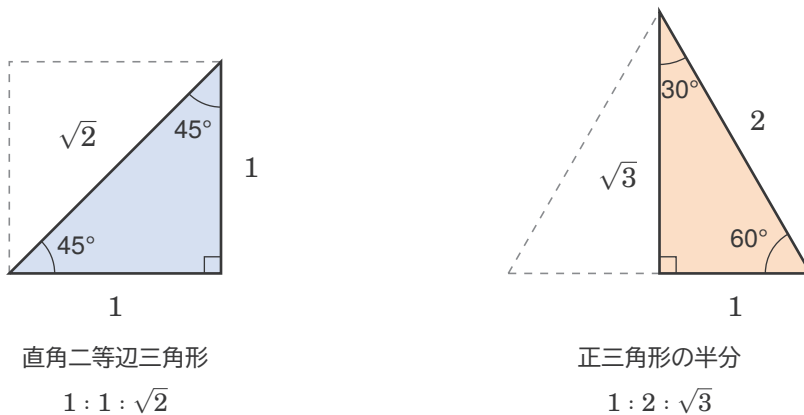


図5 左：1辺1の正方形を対角線で半分に。右：1辺2の正三角形を、頂点からまっすぐ下ろした線で半分に。

直角二等辺三角形：1：1： $\sqrt{2}$

1辺1の正方形を、対角線で半分に切ります。正方形は対角線について線対称(4-1)なので、直角が半分ずつに分かれて 45° になります。斜辺は

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \text{だから} \quad c = \sqrt{2}$$

2-8では、面積2の正方形を作って「1辺1の正方形の対角線は $\sqrt{2}$ 」と知りました。三平方の定理でも、同じ答えになります。

30°・60°・90°の直角三角形：1：2： $\sqrt{3}$

1辺2の正三角形（3つの角はどれも 60° ）を、上の頂点からまっすぐ下ろした線で半分にします。底辺は半分の1、斜辺はもとの辺の2のままです。上の角は 60° の半分の 30° になります。高さを h とすると、

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \quad h^2 = 4 - 1 = 3 \quad h = \sqrt{3}$$

いちばん短い辺：斜辺：のこりの辺 = 1：2： $\sqrt{3}$ です。斜辺は2で、 $\sqrt{3}$ ではありません。 $\sqrt{3} = 1.732\dots$ は2より小さいので、斜辺（いちばん長い辺）にはなりません。

大きさが変わっても、比は同じ

角が同じ直角三角形は、どれも相似です(4-3)。だから、大きさが変わっても、辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ 、 $1:2:\sqrt{3}$ のままです。たとえば、

- 直角をはさむ辺が 15 cm の 45° の三角定規の斜辺は、 $15 \times \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ で、約 21.2 cm。
 - 斜辺が 20 cm の $30^\circ \cdot 60^\circ$ の三角定規は、短い辺が $20 \div 2 = 10$ cm、のこりの辺が $10\sqrt{3}$ で約 17.3 cm。
 - 1 辺 a の正三角形の高さは、 $1:2:\sqrt{3}$ の「2」が a なので、 $\frac{a}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。
- 4-6 では、この比が、坂の急さを表す $\sin \cdot \cos$ という数になります(これから学ぶしるしです。いまはわからなくてもだいじょうぶ)。

⑤ 逆：3 辺の長さから直角を作る

4-1 で、「A ならば B」に対して「B ならば A」を逆ということを学びました。逆は、いつも正しいとはかぎりません。「正方形ならば長方形」は正しいけれど、逆の「長方形ならば正方形」は正しくありません(たて 2・横 3 の長方形が反例)。

三平方の定理は「三角形が直角三角形 ($\angle C = 90^\circ$) ならば、 $a^2 + b^2 = c^2$ 」でした。その逆は、

たいせつ

三角形の 3 辺の長さ a 、 b 、 c が $a^2 + b^2 = c^2$ をみたすならば、長さ c の辺の向かいの角は直角である。

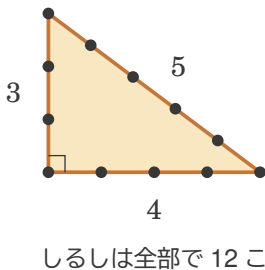
この逆は正しいことが、次のように説明できます。

- ① $a^2 + b^2 = c^2$ をみたす三角形を、三角形 P とします。
- ② 別に、直角をはさむ辺が a と b の直角三角形 Q を作ります。Q の斜辺を d とすると、三平方の定理から $d^2 = a^2 + b^2$ です。
- ③ ①と②から $d^2 = c^2$ 。 d も c も正の数なので、 $d = c$ です。

- 4 P と Q は、3 組の辺がそれぞれ等しいので合同です (4-1)。合同な三角形の対応する角は等しいので、P の角も直角です。

ひも 1 本で直角を作る

ひもに、同じ間かくで 12 のしるしをつけて、輪にします。しるしの所を 3 つ選び、辺の長さが 3 と 4 と 5 の三角形になるように、ピンと張ります。すると、3 の辺と 4 の辺のあいだに、直角ができます。 $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ だからです。



大昔のエジプトでも、こうして直角を作ったといわれます。今でも、建物の土台の線を引くときに、 $3\text{m} \cdot 4\text{m} \cdot 5\text{m}$ (または $0.9\text{m} \cdot 1.2\text{m} \cdot 1.5\text{m}$) で直角を確かめます。大工さんが使う大きな L 字の道具「おおがね」も、3:4:5 で作られています。

🔍 もっと知りたい ★★★

直角より小さいか、大きいか

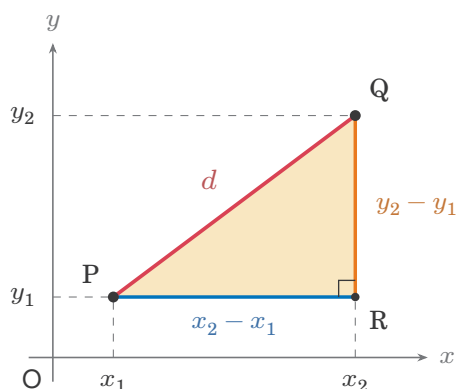
①で見たように、2 辺が 3 と 4 でも、間の角が直角より小さいと 3 つめの辺の 2 乗は 25 より小さく (13)、直角より大きいと 25 より大きく (37) になりました。いちばん長い辺を c として、 $a^2 + b^2$ と c^2 をくらべると、 c の向かいの角がわかります。

- $a^2 + b^2 = c^2$ なら、直角
- $a^2 + b^2 > c^2$ なら、直角より小さい角 (鋭角 (えいかく))
- $a^2 + b^2 < c^2$ なら、直角より大きい角 (鈍角 (どんかく))

どれだけ大きいか小さいかは、4-7 の余弦定理で、角の大きさといっしょに計算できるようになります。

6 座標の上の2点の距離

3-2では、横に並んだ2点、たてに並んだ2点の距離を求めました。ななめに並んだ2点も、三平方の定理を使えば求められます。



点 $P(x_1, y_1)$ と点 $Q(x_2, y_2)$ の距離を d とします。P から横へ、Q からたてへ線をのびし、交わる点を $R(x_2, y_1)$ とします。三角形 PRQ は、R が直角の直角三角形です。

● PR (横) の長さは $|x_2 - x_1|$

● RQ (たて) の長さは $|y_2 - y_1|$

斜辺が PQ なので、三平方の定理から

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2。$$

絶対値の記号は、なくしてよい

2乗すると、マイナスの数もプラスになります。たとえば $|-3|^2 = 3^2 = 9$ 、 $(-3)^2 = 9$ で同じです。だから、2乗するときは絶対値の記号 $||$ をつけなくてかまいません。両辺の $\sqrt{\quad}$ をとると (長さは正)、

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ひく順番を逆にしても、2乗すれば同じです $((x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2)$ 。だから、どちらの点からひいてもかまいません。

？はてな？ の答え

A(-2, 1) と C(3, -2) の距離を求めます。

$$x \text{ の差 } 3 - (-2) = 5$$

$$y \text{ の差 } -2 - 1 = -3$$

$$AC = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5.830 \dots$$

A と C の距離は $\sqrt{34}$ で、約 5.83 です。ものさしではかった 5.8 くらいと合っています。「B を通る道」の 8 より、約 2.2 短い近道です。

地図の上の直線距離

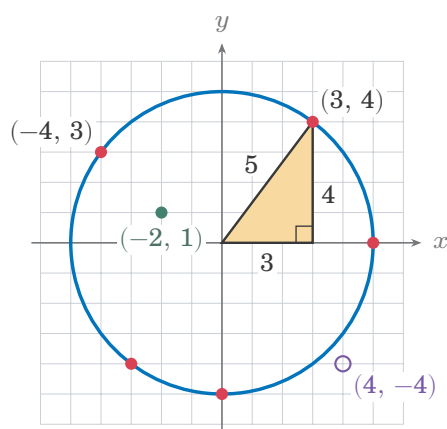
駅を原点にして、東を x 、北を y の向き (単位は km) とします。学校が (1.2, 0.5) にあるなら、駅から学校までのまっすぐの距離は

$$\sqrt{1.2^2 + 0.5^2} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \sqrt{1.69} = 1.3 \quad \text{だから } 1.3 \text{ km}$$

スマートフォンの地図アプリが表示する「直線距離」は、こうして計算できます。実際に歩く道のりは、道が曲がっている分、もっと長くなります。

7 原点を中心とする円の式

原点 O を中心とする、半径 5 の円を考えます。円は「中心から同じ距離にある点の集まり」です。だから、円上の点 (x, y) は、 O からの距離がちょうど 5 です。



点 (x, y) と O の距離は、⑥の式で $(x_1, y_1) = (0, 0)$ として $\sqrt{x^2 + y^2}$ です。これが 5 なので、両辺を 2 乗して、

$$x^2 + y^2 = 25$$

赤い点で確かめます。

- (3, 4) : $9 + 16 = 25$
- (-4, 3) : $16 + 9 = 25$
- (5, 0) : $25 + 0 = 25$
- (0, -5) : $0 + 25 = 25$

どれも円の上にあります。

円の内側の点は、 O からの距離が 5 より短いので、 $x^2 + y^2$ は 25 より小さくなります。緑の点 $(-2, 1)$ は $4 + 1 = 5$ で 25 より小さく、内側です。紫の点 $(4, -4)$ は $16 + 16 = 32$ で 25 より大きく、外側です。

半径を r にしても同じなので、**原点を中心とする半径 r の円の式は、**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

です。この r は円の半径です。3-15 の相関係数 r とは別の意味なので、気を付けましょう。

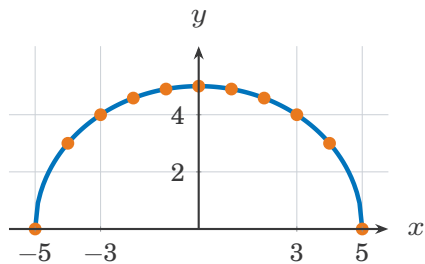
円の上半分を、 $y = \dots$ の形で書く

$x^2 + y^2 = r^2$ を y について解きます。 x^2 を右へ移すと $y^2 = r^2 - x^2$ 。2 乗して $r^2 - x^2$ になる数は 2 つあり (3-10)、 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ です。上半分 (y が 0 以上) は

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$r = 5$ で表を作ると、点は円の上半分にきれいに並びます。

x	$25 - x^2$	y
0	25	5
1	24	4.90
2	21	4.58
3	16	4
4	9	3
5	0	0



x がマイナスのときも、 x^2 は同じなので、 y は同じ値になります (左右対称)。

5-16 では、この $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ を使って、円の面積を計算します。

中心が原点でない円（軽く）

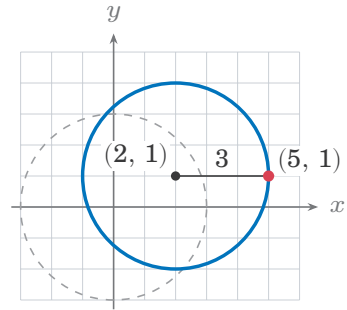
中心が (a, b) 、半径 r の円の上の点 (x, y) は、
中心との距離が r なので、⑥の式から

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

3-9 で、 $y = x^2$ を右へ p ずらすと x が $x - p$ になったのと同じです。円を右へ a 、上へ b ずらすと、 x が $x - a$ 、 y が $y - b$ になります。
たとえば、中心 $(2, 1)$ 、半径 3 の円は

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

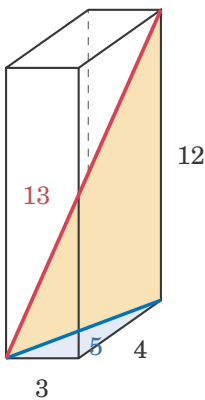
です。点 $(5, 1)$ を入れると $9 + 0 = 9$ で、円の上にあります。



点線の円（原点が中心）を、
右へ 2、上へ 1 ずらすと青い円

8 直方体の対角線

三平方の定理は、立体の中のななめの長さにも使えます。横 3 cm ・おく行き 4 cm ・高さ 12 cm の直方体で、いちばん遠い 2 つの頂点を結ぶ線分（対角線）の長さを求めます。



1 底面の対角線（青）

底面は、横 3 ・おく行き 4 の長方形です。その対角線は、直角をはさむ辺が 3 と 4 の直角三角形の斜辺なので、

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

2 立体の対角線（赤）

底面の対角線（ 5 ）と、高さの辺（ 12 ）は、直角に交わります（高さの辺は、底面にまっすぐ立っているから）。黄色の三角形は直角三角形なので、

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

対角線の長さは 13 cm です。三平方の定理を 2 回使いました。①で出てきた 5^2 は $3^2 + 4^2$ なので、まとめると

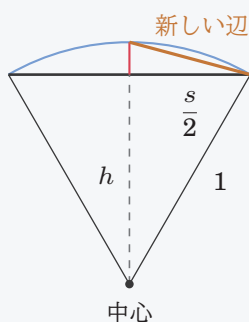
$$\text{横 } a \cdot \text{おく行き } b \cdot \text{高さ } c \text{ の直方体の対角線} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

確かめ： $\sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$ 。4-13 では、この考えを、空間の中の 2 点の距離に広げます。

🔍 もっと知りたい ★★★

三平方の定理をくり返して、 π を求める

2-9 で「12 角形から先の数は、4-4 で学ぶ三平方の定理をくり返し使うと計算できます」と書いた、その計算です。



半径 1 の円の内側に、1 辺 s の正多角形があるとします。角の数を 2 倍にした正多角形の 1 辺（オレンジ）を、三平方の定理で求めます。

- ① 中心から辺までの高さ

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

- ② 辺から円までのすき間（赤）： $1 - h$

- ③ 新しい辺： $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (1 - h)^2}$

正六角形（ $s = 1$ ）から始めて、表計算でこれをくり返すと、次のようになります。

角の数	6	12	24	48	96
1 辺の長さ	1	0.5176	0.2611	0.1308	0.0654
まわり÷直径	3	3.1058	3.1326	3.1394	3.1410

2-9 の表の「 π より小さい（内側）」の数と同じになり、3.14159…に近づいていきます。アルキメデスは 2200 年ほど前に、表計算も電卓もなしで、正 96 角形まで計算しました。

たいせつ

三平方の定理 直角三角形で、斜辺を c とすると $a^2 + b^2 = c^2$

逆 $a^2 + b^2 = c^2$ なら、 c の向かいの角は直角

三角定規 $1 : 1 : \sqrt{2}$ (45°) $1 : 2 : \sqrt{3}$ ($30^\circ \cdot 60^\circ$)

2 点の距離 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

円の式 原点が中心、半径 r の円は $x^2 + y^2 = r^2$

直方体 対角線 $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

 この章で出てきたことば

斜辺 直角三角形で、直角の向かいにある辺。いちばん長い。

三平方の定理 直角三角形で $a^2 + b^2 = c^2$ (c は斜辺)。ピタゴラスの定理ともいう。

逆 「A ならば B」に対する「B ならば A」。三平方の定理の逆は正しい。

対角線 多角形や立体で、となり合わない 2 つの頂点を結ぶ線分。

直線距離 2 点をまっすぐ結んだ長さ。座標から $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ で求める。

 記号カード

初めて出た章 4-4

in

読み方 インチ

意味 長さの単位。1 インチ
は 2.54 cm。画面の大きさは
対角線の長さで表す

英語 inch

🔍 コラム 3800 年前の粘土板

イラクで見つかった約 3800 年前の粘土板（プリンプトン 322）には、 $119^2 + 120^2 = 169^2$ のように、 $a^2 + b^2 = c^2$ をみたす数の組が 15 組も記されています。ピタゴラスより 1000 年以上前から、人々はこのきまりを知っていたようです。証明の方法は、知られているだけで数百通りもあります。

📖 例題でたしかめよう

📖 例題 1 斜辺を求める

直角をはさむ 2 辺が次の長さの直角三角形で、斜辺の長さを求めましょう。
 (1) 5 cm と 12 cm (2) 2 cm と 3 cm

考え方 斜辺を c として、 $c^2 = a^2 + b^2$ 。 c は、2 乗するとその数になる正の数です。

式 (1) $c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
 $c = \sqrt{169} = 13$ ($13^2 = 169$ だから)
 (2) $c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
 $c = \sqrt{13} = 3.605 \dots$ (電卓で計算)

答え (1) 13 cm (2) $\sqrt{13}$ cm (約 3.61 cm)

例題2 直角をはさむ辺を求める

斜辺と1つの辺が次の長さの直角三角形で、のこりの辺の長さを求めましょう。

(1) 斜辺 13 cm、1 辺 5 cm (2) 斜辺 6 cm、1 辺 2 cm

考え方 $a^2 + b^2 = c^2$ を、わからない辺について解く (2-14)。 $a^2 = c^2 - b^2$ 。
 $\sqrt{\quad}$ の中はできるだけ小さい整数にする (3-10)。

式 (1) $a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$$a = \sqrt{144} = 12$$

(2) $a^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$$a = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} = 5.656 \dots$$

答え (1) 12 cm (2) $4\sqrt{2}$ cm (約 5.66 cm)

じぶんでこう1

直角をはさむ2辺が次の長さの直角三角形で、斜辺の長さを求めましょう。

(1) 8 cm と 15 cm

(2) 1 cm と 3 cm

じぶんでこう2

斜辺と1つの辺が次の長さの直角三角形で、のこりの辺の長さを求めましょう。

(1) 斜辺 25 cm、1 辺 7 cm

(2) 斜辺 4 cm、1 辺 2 cm

例題3 三角定規の比を使う

(1) 1辺6cmの正方形の対角線の長さを求めましょう。

(2) 1辺8cmの正三角形の高さを求めましょう。

考え方 (1) 対角線で切ると直角二等辺三角形で、 $1:1:\sqrt{2}$ 。(2) 高さで半分にすると、 $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の直角三角形で、短い辺:斜辺:のこり $= 1:2:\sqrt{3}$ 。

式 (1) $1:\sqrt{2}=6:(\text{対角線})$ なので、対角線は $6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(2) 斜辺8、短い辺は $8 \div 2 = 4$

$1:\sqrt{3}=4:(\text{高さ})$ なので、高さは $4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

確かめ: $\sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

答え (1) $6\sqrt{2}$ cm (約 8.49 cm) (2) $4\sqrt{3}$ cm (約 6.93 cm)

例題4 直角三角形かどうかを見分ける

3辺が次の長さの三角形は、直角三角形ですか。(1) 9、12、15 (2) 4、5、6

考え方 いちばん長い辺を c にして、 $a^2 + b^2$ と c^2 をくらべる。等しければ、三平方の定理の逆から直角三角形 (⑤)。

式 (1) $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ 、 $15^2 = 225$ 。等しい

(2) $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ 、 $6^2 = 36$ 。等しくない

答え (1) 直角三角形 (15の辺の向かいが直角) (2) 直角三角形ではない

 じぶんでこう3

- (1) 1 辺 10 cm の正方形の対角線の長さを求めましょう。
- (2) 1 辺 6 cm の正三角形の高さを求めましょう。

 じぶんでこう4

- 3 辺が次の長さの三角形は、直角三角形ですか。
- (1) 7、24、25
- (2) 5、6、8

 例題5 座標の上の2点の距離

次の2点の距離を求めましょう。(1) A(1, 2)、B(4, 6) (2) P(-1, 3)、Q(3, -5)

考え方 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (⑥)。マイナスの数は、かっこをつけて入れる。

式 (1) x の差 $4 - 1 = 3$ 、 y の差 $6 - 2 = 4$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(2) x の差 $3 - (-1) = 4$ 、 y の差 $-5 - 3 = -8$

$$\sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

答え (1) 5 (2) $4\sqrt{5}$ (約 8.94)

例題6 原点を中心とする円の式

- (1) 原点を中心とし、点 $(6, 8)$ を通る円の式を求めましょう。
 (2) 点 $(2, 4)$ は、円 $x^2 + y^2 = 25$ の上・内側・外側のどれにありますか。

考え方 (1) 半径は、原点と $(6, 8)$ の距離。 $x^2 + y^2 = r^2$ の r^2 を求めればよい。(2) $x^2 + y^2$ を計算して、 $r^2 = 25$ とくらべる (⑦)。

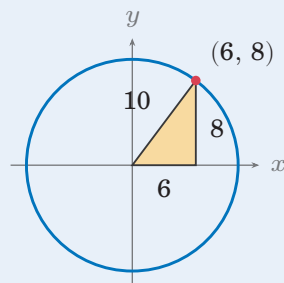
式 (1) $r^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

(2) $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

20 は 25 より小さい

答え (1) $x^2 + y^2 = 100$ (半径 10)

(2) 内側



じぶんでこう5

次の2点の距離を求めましょう。

- (1) $(2, 1)$ 、 $(8, 9)$
 (2) $(-4, 1)$ 、 $(2, -3)$

じぶんでこう6

- (1) 原点を中心とし、点 $(5, 12)$ を通る円の式を求めましょう。
 (2) 点 $(-8, 6)$ は、円 $x^2 + y^2 = 100$ の上・内側・外側のどれにありますか。

例題 7 直方体の対角線

横 3 cm、おく行き 4 cm、高さ 12 cm の直方体の対角線の長さを求めましょう。

考え方 底面の対角線を求めてから、高さと一緒に、もう一度三平方の定理 (⑧)。まとめて $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ でもよい。

式 底面の対角線： $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

立体の対角線： $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

答え 13 cm

じぶんでこう7

横 2 cm、おく行き 3 cm、高さ 6 cm の直方体の対角線の長さを求めましょう。

例題 8 かべに立てかけたはしご

長さ 5 m のはしごを、かべに立てかけます。はしごの下のはしを、かべから 1.4 m はなすと、上のはしは地面から何 m の高さに届きますか。

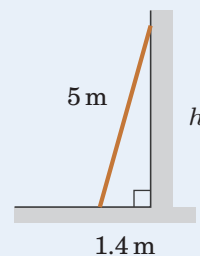
考え方 かべと地面は直角。はしごが斜辺になる。図をかいて、どこが斜辺かを確認する。

式 高さを h とすると、 $h^2 + 1.4^2 = 5^2$

$$h^2 = 25 - 1.96 = 23.04$$

$$h = \sqrt{23.04} = 4.8 \quad (4.8^2 = 23.04)$$

答え 4.8 m



じぶんでところ 8

長さ 6.5 m のはしごの下のはしを、かべから 2.5 m はなして立てかけます。上のはしは、地面から何 m の高さに届きますか。

例題 9 画面の大きさ（インチ）

タブレットの画面は、たて 16 cm、横 12 cm の長方形です。画面の大きさ（対角線の長さ）は何インチですか。四捨五入して小数第 1 位まで求めましょう。1 in = 2.54 cm です。

考え方 対角線は、たてと横を直角をはさむ辺とする直角三角形の斜辺。cm で求めてから、単位つきの 1 (2.54 cm/in) でわってインチに換算する (2-10)。

式 対角線： $\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$ (cm)

$$20 \text{ cm} \div 2.54 \text{ cm/in} = 7.87 \text{ in}$$

答え 約 7.9 インチ

じぶんでところ 9

たて 24 cm、横 18 cm の画面の大きさは何インチですか。四捨五入して小数第 1 位まで求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

マイナスの差を 2 乗するとき

✗ $(-3)^2 = -9$

○ $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

マイナス×マイナスはプラスです (2-2)。 -3^2 と書くと「 3^2 にマイナスをつけた -9 」になってしまうので、マイナスの数は必ずかっこをつけて 2 乗します。

⚠ まちがえやすいところ

斜辺でない辺を c にする

直角三角形で、直角をはさむ辺の 1 つが 3、斜辺が 5 のとき、のこりの辺は？

✗ $3^2 + 5^2 = 34$ なので、 $\sqrt{34}$

○ $5^2 - 3^2 = 16$ なので、 $\sqrt{16} = 4$

c はいつも斜辺 (直角の向かいの、いちばん長い辺) です。図をかいて、直角の向かいの辺に印をつけてから式を立てましょう。

⚠ まちがえやすいところ

$\sqrt{\quad}$ 中のたし算を、ばらばらにする

✕ $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$

○ $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{\quad}$ の中にたし算があるときは、先に中を計算します。7になるのは、Bを通る遠回りの道のりです。まっすぐの距離は、それより短くなります。

⚠ まちがえやすいところ

直角かどうかわからない三角形に使う

2辺が4と6の三角形の、3つめの辺は？

✕ $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$

○ 直角があるとわからなければ、三平方の定理は使えない

①で見たように、間の角が変わると、3つめの辺も変わります。三平方の定理は、直角三角形のときだけのきまりです。

⚠ まちがえやすいところ

$1:2:\sqrt{3}$ の斜辺をまちがえる

$30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の三角定規で、いちばん短い辺が5cmのとき、斜辺は？

✕ $5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ (約8.66cm)

○ $5 \times 2 = 10\text{cm}$

$1:2:\sqrt{3}$ は「短い辺：斜辺：のこりの辺」の順です。斜辺はいちばん長い辺なので、2にあたります。 $\sqrt{3} = 1.73\dots$ は2より小さいので、斜辺にはなりません。④の図で、どの辺が2かを確認しましょう。

物理・工学ではこう使う

ロボットの手は、届く？

2本のうでの長さが 0.35 m と 0.25 m のロボットは、肩から最大で

まで手をのばせます。肩を原点にして、物が

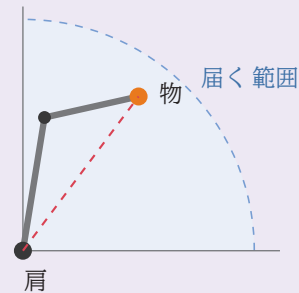
$$0.35 + 0.25 = 0.6 \text{ m}$$

(0.3, 0.4) (m) にあるとき、肩からの距離は

$$\sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = \sqrt{0.25} = 0.5 \text{ m}$$

です。0.6 m より短いので、手が届きます。

届くとわかったら、関節を何度曲げればよいかを、4-7 の余弦定理で計算します (4-0 の逆運動学)。

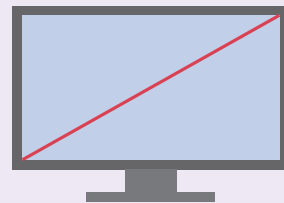


物理・工学ではこう使う

画面の「インチ」は対角線

テレビやスマートフォンの画面の大きさは、対角線の長さをインチで表します。「50 型」のテレビは、対角線が 50 インチ (約 127 cm) です。いまのテレビの画面は、横 : たて = 16 : 9 です。横 16 ・ たて 9 の長方形の対角線は $\sqrt{16^2 + 9^2} = \sqrt{337} = 18.36 \dots$ なので、50 型の横の長さは $50 \times \frac{16}{18.36} = 43.6$ インチ、約 111 cm です。テレビ台を選ぶときは、対角線ではなく、この横の長さを見ます。

対角線が 50 インチ



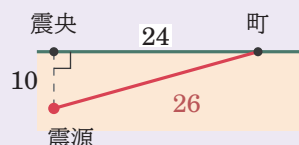
物理・工学ではこう使う

地震の震源までの距離

地震が起きた地下の場所を**震源**、その真上の地面の場所を**震央**といいます。深さ 10 km の震源で地震が起き、震央から 24 km はなれた町で、ゆれを観測したとします。震源と町の距離は、

$$\sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26 \text{ km}$$

最初の小さなゆれ（P 波）は 1 秒に約 7 km 進むので、町には約 3.7 秒で届きます。緊急地震速報は、この計算を一瞬で行います。



✓ 章末問題

4-4 のまとめ

基本 ★★★

- 1 直角をはさむ 2 辺が次の長さの直角三角形で、斜辺の長さを求めましょう (例題 1)。 (1) 9 cm と 12 cm (2) 1 cm と 2 cm
- 2 斜辺と 1 つの辺が次の長さの直角三角形で、のこりの辺の長さを求めましょう (例題 2)。 (1) 斜辺 17 cm、1 辺 8 cm (2) 斜辺 3 cm、1 辺 1 cm
- 3 (1) 1 辺 4 cm の正方形の対角線と、(2) 1 辺 10 cm の正三角形の高さを求めましょう (例題 3)。
- 4 3 辺が次の長さの三角形は、直角三角形ですか (例題 4)。 (1) 8、15、17 (2) 6、7、9
- 5 次の 2 点の距離を求めましょう (例題 5)。 (1) (0, 0)、(5, 12) (2) (-3, 4)、(3, -4)

6 (1) 原点を中心とし、点 $(-5, 12)$ を通る円の式を求めましょう。(2) 点 $(10, -5)$ は、(1) の円の上・内側・外側のどれにありますか ( 例題 6)。

7 横 4 cm、おく行き 4 cm、高さ 7 cm の直方体の対角線の長さを求めましょう ( 例題 7)。

チャレンジ

8 長さ 2.6 m のはしごの下のはしを、かべから 1 m はなして立てかけます。上のはしは、地面から何 m の高さに届きますか ( 例題 8)。

9 横 32 cm、たて 18 cm のパソコンの画面の大きさは何インチですか。四捨五入して小数第 1 位まで求めましょう ( 例題 9)。

10 深さ 16 km の震源で地震が起きました。震央から 30 km はなれた町と震源の距離を求めましょう ( 例題 1 ・  例題 8)。

ふりかえり できるようになったかな？

☐ 方眼の面積から $a^2 + b^2 = c^2$ を見つけ、2 通りに説明できる。

→ 134 ページ

☐ 辺の長さ・2 点の距離・直方体の対角線を求められる。

→ 142 ページ

☐ 直角三角形かを見分け、円の式のわけがわかる。

→ 143 ページ



ソラ

たてと横がわかれば、ななめもわかる。次は面積と体積だよ。

第1部 図形

★～★★

4-5

面積と体積：
細かく分けてたす

➤ 道しるべ この章の前に 1-21 2-7 2-9 2-10 4-2 4-3 4-4
この章の先に 5-4 5-6 5-9 5-10

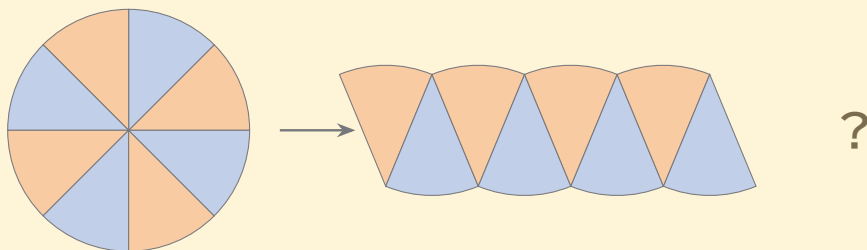
🚩 この章でできるようになること

- ★ 平行四辺形・三角形・台形・ひし形の面積を、長方形に直す考え方で求められる。
- ★★ 円の面積 πr^2 と、柱・すい・球の体積を、細かく分けて考えたわけといっしょに使える。
- ★★ 展開図から表面積を求め、体積を単位をつけて L などに換算できる。

? はてな?

長方形の面積は「たて×横」で求められました(1-21)。では、円の面積はどうでしょう。円には、まっすぐな辺がありません。

そこで、円をピザのように8つに切って、とがった所を上と下に交互に向けて並べてみます。すると、でこぼこしているけれど、長方形に少し似た形になりました。もっと細かく切ったら、どうなるでしょう。



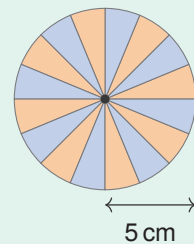
この章では、「細かく分けて、並べかえたり、たしたりする」という考え方で、いろいろな形の面積と体積を求めます。小学校で学ぶ面積や体積の公式も、すべてこの考え方から作られています。公式を覚えるのではなく、「どう分けて、どう並べかえたか」を理解すれば、わすれても自分で作り直せます。この「細かく分けてたす」考え方は、第5巻の積分（5-9・5-10）につながる、たし合わせの路線（+）の大切な駅です。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-21** 長方形の面積は「たて×横」。1 cm² の正方形が何こ並ぶかを数えている。
- 2-7** 体積の単位 cm³・m³。1 L = 1000 cm³、1 mL = 1 cm³。
- 2-9** 円周＝直径×π = 2πr（r は半径）。計算ではふつう π = 3.14 を使う。
- 2-10** 換算は単位つきの1で。1 m² = 10 000 cm²、1 m³ = 1 000 000 cm³。
- 4-2** おうぎ形の弧の長さや面積は、中心角に比例する。
- 4-3** すいを底面に平行に切ると、断面は底面と相似で、断面の半径（辺）は頂点からの距離に比例する。
- 4-4** 三平方の定理：直角三角形で、斜辺を c とすると $a^2 + b^2 = c^2$ 。原点が中心の円は $x^2 + y^2 = r^2$ 。

🏠 やってみよう 円を16に切って並べかえよう

- 1** 画用紙に半径 5 cm の円をかくて、切りぬく。
- 2** 半分に折ることを4回くり返し、16等分する。
- 3** 折り目で切り、16まいのおうぎ形にする。
- 4** とがった所を上・下・上…と交互に並べる。
- 5** 横の長さと高さをはかり、かけ算しよう。



ソラさんがはかると、横の長さは約 15.7 cm、高さは約 5 cm で、かけ算すると約 78.5 cm² でした。横の長さ 15.7 cm は、何の長さでしょう。円周は「直径×π」なので $10 \times 3.14 = 31.4$ cm（2-9）。横の長さは、ちょうどその半分です。高さの 5 cm は、半径と同じです。そのわけは、数学の道具の④で考えます。

数学の道具

1 平行四辺形：切って移すと長方形

向かい合う2組の辺が、どちらも平行な四角形を**平行四辺形**といいます(4-1)。平行四辺形の面積を、長方形に直して求めます。2つの方法で考えましょう。

① 方法1：三角形を切って、反対がわへ移す

方眼の上に、下の辺が6マス、高さが4マスの平行四辺形をかきます。左はしの直角三角形を切りとって、右はしへ移すと、たて4・横6の長方形になります。

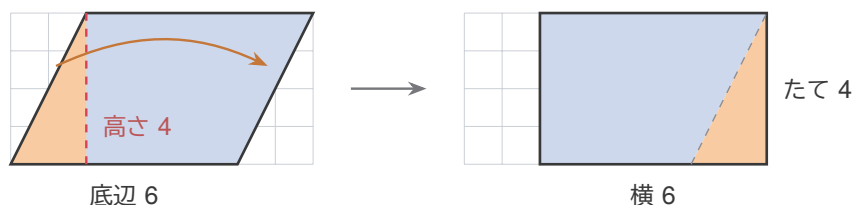


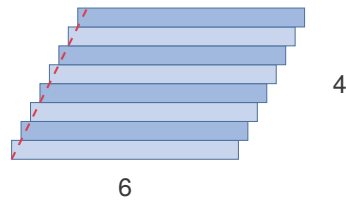
図1 左はしの三角形（オレンジ）を右はしへ移すと、たて4・横6の長方形。面積は $4 \times 6 = 24$ マス。

切って移しただけなので、面積は変わりません。だから、平行四辺形の面積は $6 \times 4 = 24$ マスです。マスを数えても、24マスになります（半分のマスは、2つで1マスと数える）。

ここで大事なのが、長方形の「たて」になったのが、ななめの辺ではなく、**下の辺に垂直にはかった長さ**だということです。平行四辺形で、1つの辺を**底辺**といい、底辺に垂直にはかった、向かいの辺までの長さを**高さ**といいます。

2 方法2：細い帯に分けて、ずらす

長方形を、横に細長い帯（はば6、高さ0.5）8本に分けたとします。それぞれの帯を、少しずつ右へずらしていくと、平行四辺形に近い形になります。帯の数をふやして細くするほど、ななめの辺はなめらかになります。ずらしても、1本1本の帯の面積は変わりません。だから、全部をたした面積も、もとの長方形と同じ $6 \times 4 = 24$ です。トランプの山を手でななめにずらしても、カードのまい数が変わらないのと同じです。



2つの方法から、

$$\text{平行四辺形の面積} = \text{底辺} \times \text{高さ}$$

2 三角形：同じ三角形を2つ合わせる

三角形の面積は、同じ三角形をもう1つ用意して、2つを合わせて考えます。

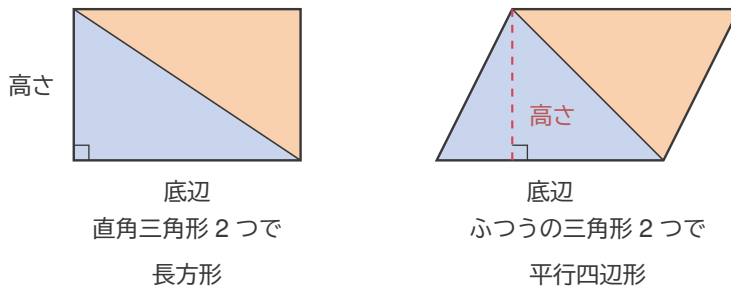


図2 青い三角形と同じ三角形（オレンジ）を、 180° 回して合わせる。

- **直角三角形**は、2つ合わせると長方形になります。長方形の横は底辺、たては高さです。

- **ふつうの三角形**は、2つ合わせると平行四辺形になります。その平行四辺形を、①のように切って移すと長方形になります。平行四辺形の底辺と高さは、もとの三角形の底辺と高さと同じです。

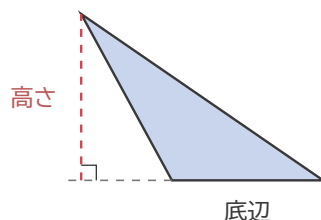
どちらも、三角形は長方形（平行四辺形）のちょうど半分です。だから、

$$\text{三角形の面積} = \text{底辺} \times \text{高さ} \div 2$$

「 $\div 2$ 」は、同じ三角形を2つ合わせたので、その半分にもどすためです。

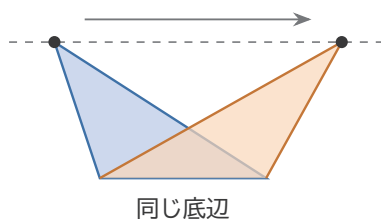
高さが三角形の外に出るとき

角の1つが直角より大きい三角形（鈍角三角形、4-4）では、上の頂点からまっすぐ下ろした線が、底辺の外に出ることがあります。それでも、高さは「底辺をのばした直線までの、垂直な長さ」です。同じ三角形を2つ合わせると、やはり平行四辺形になり、高さも同じなので、面積は「底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ 」で求められます。



面積を変えずに、形を変える（等積変形）

底辺が同じで、高さも同じ三角形は、形がちがっても面積が同じです。上の頂点を、底辺に平行な直線にそって動かしても、高さは変わりません。だから、面積も変わりません。このように、面積を変えずに形を変えることを**等積変形**といいます。土地の境界線を、面積を変えずにまっすぐに引き直すときなどに使われます。



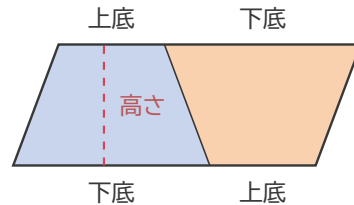
3 台形・ひし形・多角形

台形：同じ台形を2つ、さかさに合わせる
1組の向かい合う辺が平行な四角形を**台形**といいます。平行な2辺を上底・下底といい、そのあいだの垂直な長さを高さといいます。

同じ台形を2つ用意し、1つをさかさにして（180°回して）となり合わせると、平行四辺形になります。この平行四辺形の底辺は「上底+下底」、高さは台形と同じです。

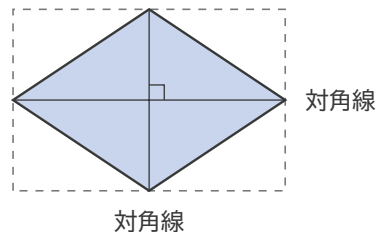
台形はその半分なので、

$$\text{台形の面積} = (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \div 2$$



ひし形：長方形の半分

4つの辺の長さがすべて等しい四角形を**ひし形**といいます。ひし形の2本の対角線は、垂直に交わります。ひし形のまわりに、対角線と平行な辺をもつ長方形をかくと、長方形は8つの直角三角形に分かれ、そのうち4つがひし形です。だから、ひし形は長方形の半分です。



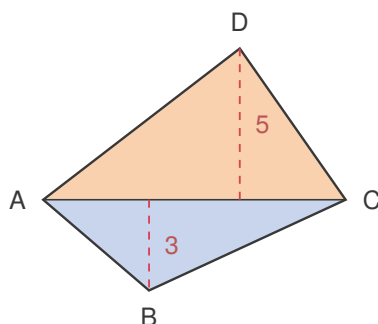
$$\text{ひし形の面積} = \text{対角線} \times \text{対角線} \div 2$$

多角形：三角形に分ける

どんな多角形も、対角線を引けば三角形に分けられます。三角形の面積を1つつ求めてたせば、全体の面積になります。

たとえば四角形 ABCD は、対角線 AC で、三角形 ABC と三角形 ACD に分けられます。どちらも底辺を AC にすると、高さは B と D から AC までの垂直な長さです。AC が 10、高さが 3 と 5 なら、

$$10 \times 3 \div 2 + 10 \times 5 \div 2 = 15 + 25 = 40$$



形	面積	どう考えたか
長方形	たて×横	1 マスが何こ並ぶか (1-21)
平行四辺形	底辺×高さ	切って移すと長方形
三角形	底辺×高さ÷2	2 つ合わせると平行四辺形
台形	(上底+下底)×高さ÷2	2 つ合わせると平行四辺形
ひし形	対角線×対角線÷2	長方形の半分
多角形	三角形の和	対角線で三角形に分ける

表1 どの公式も、長方形の「たて×横」から作られている。

④ 円の面積：細いおうぎ形に切って並べかえる

いよいよ円です。はてな？ とやってみようのように、円を細いおうぎ形に切って、交互に並べかえます。半径を r とします。

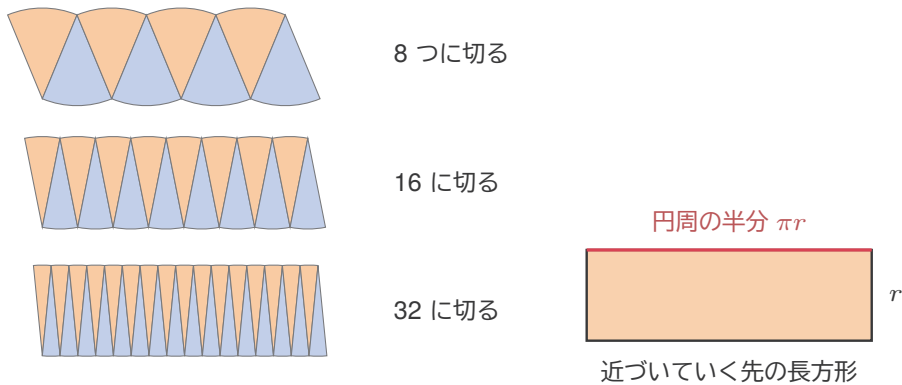


図3 切る数をふやすほど、でこぼこが小さくなり、横が πr ・たてが r の長方形に近づく。

1 横の長さは、円周の半分

並べた形の上のでこぼこは、とがった所が下を向いたおうぎ形（オレンジ）の弧です。オレンジは全体の半分なので、上のでこぼこを全部つなぐと、円周の半分になります。下のでこぼこ（青い弧）も円周の半分です。円周は $2\pi r$ （2-9）なので、横の長さは $2\pi r \div 2 = \pi r$ に近づいていきます。

2 たての長さは、半径

おうぎ形のとがった所から弧までの長さは、どれも半径 r です。細く切るほど、おうぎ形はまっすぐ立つので、形の高さは r に近づきます。

3 だから、円の面積は $\pi r \times r$

横 πr 、たて r の長方形の面積は、 $\pi r \times r = \pi r^2$ です。

$$\text{円の面積} = \text{半径} \times \text{半径} \times \pi = \pi r^2$$

数で確かめる

半径 10 cm の円で、おうぎ形を「同じ形の二等辺三角形」とみなして並べた形の面積を、コンピュータで計算しました（三角形の高さは、三平方の定理（4-4）で求められます）。

切る数	4	8	16	32	64	128
面積 (cm ²)	200.0	282.8	306.1	312.1	313.7	314.0

表2 切る数をふやすほど、 $\pi \times 10^2 = 314.159\dots$ に近づいていく。

πr^2 の式では、 $3.14159 \times 10 \times 10 = 314.159\dots$ です。切る数をふやすほど、表の数はこの値に近づいていきます。やってみようの約 78.5 cm^2 も、 $3.14 \times 5 \times 5 = 78.5$ と合っています。

❓ はてな? の答え

円を細いおうぎ形に切って並べかえると、細かく切るほど長方形に近づきます。その長方形は、横が円周の半分 πr 、たてが半径 r なので、円の面積は πr^2 です。どれだけ細かくしても、でこぼこは少しのこるので、ぴったり長方形になるわけではありません。「近づいていく先」の長方形の面積が、円の面積です。

せいかくに言うと

「どこまでも細かくしたときに、近づいていく先」を考えることを、第5巻では**極限**とよび、5-3でくわしく学びます。細かく分けたものをたし合わせて、その近づく先を求めるのが、5-10の**積分**です。円の面積の求め方は、積分の考え方そのものです。

おうぎ形の面積

おうぎ形の面積は、中心角に比例します (4-2)。

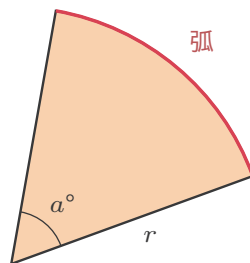
中心角が a° のおうぎ形は、円の $\frac{a}{360}$ なので、

$$\text{おうぎ形の面積} = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$

もう1つの見方もあります。おうぎ形を細く切って並べかえると、円と同じように「横が弧の長さの半分、たてが r 」の長方形に近づきます。だから、

$$\text{おうぎ形の面積} = \frac{1}{2} \times \text{弧の長さ} \times r$$

三角形の「底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ 」で、底辺を弧の長さ、高さを半径にしたのと同じ形です。

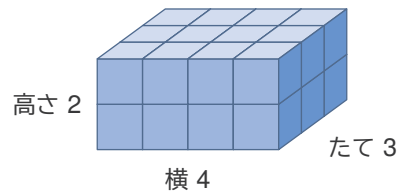


たとえば、半径 6 cm、中心角 60° なら、1 つめの式で $\pi \times 36 \times \frac{60}{360} = 6\pi$ 。
 弧の長さは $2\pi \times 6 \times \frac{60}{360} = 2\pi$ なので、2 つめの式でも $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 = 6\pi$ です。同じになりました。

5 柱の体積：底面積×高さ

直方体：1 辺 1 cm の立方体を数える

たて 3 cm・横 4 cm・高さ 2 cm の直方体に、
 1 辺 1 cm の立方体 (1 cm^3 、2-7) がいくつ
 入るかを数えます。1 だんめには、たて 3・横
 4 で $3 \times 4 = 12$ こ並びます。これが 2 だん
 重なるので $12 \times 2 = 24$ こ。体積は 24 cm^3
 です。



1 だんめの数「 3×4 」は、底の長方形の面積
 です。底の面の面積を**底面積**といいます。

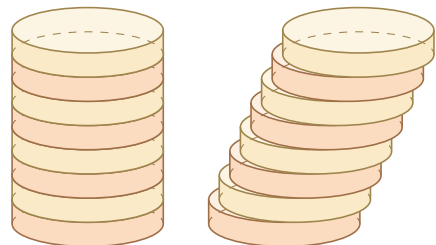
$$\text{直方体の体積} = \text{たて} \times \text{横} \times \text{高さ} = \text{底面積} \times \text{高さ}$$

角柱・円柱：うすい板を積み重ねる

底面が三角形や円の柱も、同じように考えま
 す。柱を、底面と平行に、とてもうすく輪切
 りにします。1 まい 1 まいは、底面と同じ形
 のうすい板で、その体積は「底面積×厚さ」
 です。柱は、この板を高さの分だけ積み重ね
 たものなので、

$$\text{柱の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ}$$

円柱では、底面積が πr^2 なので、体積は $\pi r^2 h$
 (h は高さ) です。5-10 では、この「うすい
 円板の体積＝底面積×厚さ」を使って、いろ
 いろな立体の体積を積分で求めます。



コインの山

ずらした山

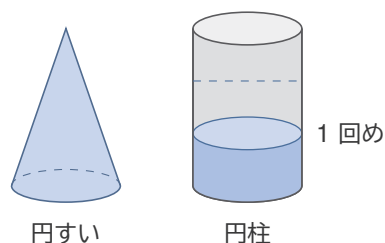
コインの山をななめにずらしても、コインのまい数は変わりません。だから、ななめにかたむいた柱の体積も、底面積×高さ（高さは底面に垂直にはかる）です。①の「帯をずらした平行四辺形」の、立体の場合です。

⑥ すいの体積：底面積×高さ× $\frac{1}{3}$

円すいのように、底面から頂点に向かって細くなっていく立体を**すい**といいます。底面が四角形なら四角すい、円なら円すいです。すいの体積は、同じ底面・同じ高さの柱の体積の何倍でしょう。3つの方法で調べます。

① 方法1：水を移してはかる

同じ底面・同じ高さの、円すいの容器と円柱の容器を用意します。円すいの容器に水をいっぱい入れて、円柱の容器に移します。これを何回くり返すと、円柱がいっぱいになるでしょう。やってみると、ちょうど3回でいっぱいになります。円すいの体積は、円柱の $\frac{1}{3}$ のようです。



② 方法2：立方体を、3つの同じ四角すいに分ける

1辺 a の立方体の、1つの頂点 P に注目します。 P をふくまない面は3つあります（下の面・右の面・おくの面）。この3つの面をそれぞれ底面にして、 P を頂点とする四角すいを3つ作ると、立方体がちょうど3つに分かれます。

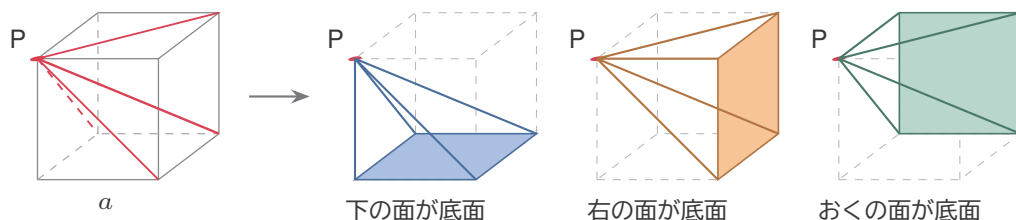


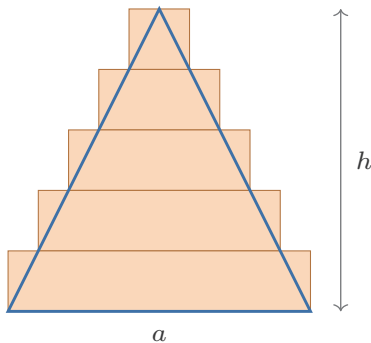
図4 3つの四角すいは、どれも「底面が1辺 a の正方形、高さ a 」で、合同。3つ合わせると立方体。

3つの四角すいは、どれも底面が1辺 a の正方形で、頂点 P から底面までの高さも a です。向きがちがうだけで、同じ形・同じ大きさ（合同）です。立方体の体積 a^3 を3等分したので、1つの体積は

$$\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3} \times \underbrace{a \times a}_{\text{底面積}} \times \underbrace{a}_{\text{高さ}}$$

で、ちょうど「底面積×高さ× $\frac{1}{3}$ 」になっています。

3 方法3：うすい板に分けて、たす



底面が1辺 a の正方形、高さ h の四角すいを、底面と平行に n まいのうすい板（厚さ $\frac{h}{n}$ ）に分けます。上から k まいめの板の1辺は、頂点からの距離に比例する（4-3）ので $a \times \frac{k}{n}$ 。その板の体積は

$$\left(a \times \frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n}$$

です。これを $k = 1$ から n まで、表計算でたし合わせます。図の階段（ $n = 5$ ）は、すいを外側からつつんでいます。

階段の体積が、底面積×高さ（ a^2h ）の何倍になるかを計算しました。板の1辺を1つ小さいほうにずらした「内側の階段」（すいの内側に入る）も求めます。

板の数 n	5	10	100	1000
外側の階段（ a^2h の何倍）	0.440	0.385	0.338	0.334
内側の階段（ a^2h の何倍）	0.240	0.285	0.328	0.333

表3 すいの体積は、内側と外側の階段のあいだ。板をふやすと、どちらも $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ に近づく。

すいは、内側の階段より大きく、外側の階段より小さいので、2つの数のあいだにあります。板をふやすほど、そのはばがせまくなり、 $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ にはさまれていきます。

3つの方法で、同じ $\frac{1}{3}$ が出てきました。方法2は立方体の形のときだけです
が、方法1と方法3は、どんな形のすいでも使えます。

$$\text{すいの体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

円すいなら $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 、底面が1辺 a の正方形の四角すいなら $\frac{1}{3}a^2 h$ です。 $\frac{1}{3}$ は、「すいは先に行くほど細くなるので、柱よりずっと少ない」ことを表しています。
5-10では、方法3を積分で計算して、ぴったり $\frac{1}{3}$ になることを確かめます。

7 球の体積と表面積

半球と「円柱から円すいをくりぬいた形」をくらべる

半径 r の半球（球の半分）と、底面の半径 r ・高さ r の円柱から、さかきの円すい（頂点が下の面のまん中）をくりぬいた形をくらべます。どちらも、床からの高さ y の所で、水平にうすく切ってみます。

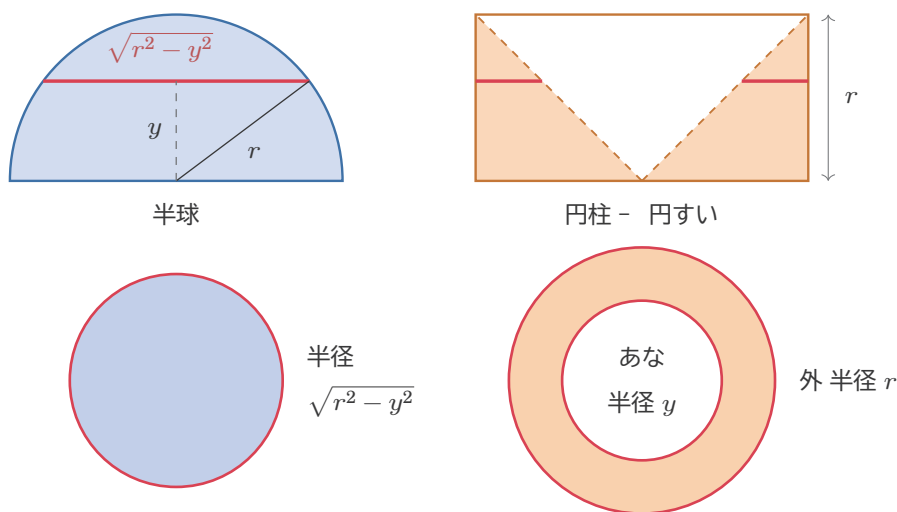


図5 上は横から見た図、下は高さ y の切り口（赤）を上から見た図。

- **半球の切り口**は円です。その半径を x とすると、中心から切り口のはしまでが r なので、三平方の定理 (4-4) から $x^2 + y^2 = r^2$ 、つまり $x^2 = r^2 - y^2$ 。切り口の面積は $\pi x^2 = \pi(r^2 - y^2)$ です。

- **円柱- 円すいの切り口**は、半径 r の円から、半径 y の円（円すいの切り口）をぬいた輪です。円すいの切り口の半径は、頂点からの高さ y に比例し（4-3）、高さ r で半径 r なので、ちょうど y です。輪の面積は $\pi r^2 - \pi y^2 = \pi(r^2 - y^2)$ です。

どの高さで切っても、2つの切り口の面積は同じです。たとえば $r = 10$ 、 $y = 6$ なら、半球の切り口は半径 $\sqrt{100 - 36} = 8$ で面積 64π 、輪は $100\pi - 36\pi = 64\pi$ 。

2つの立体を、同じ厚さのうすい板に分けると、どの高さの板も体積（切り口の面積×厚さ）が同じです。⑤のコインの山と同じで、板を全部たした体積も同じになります。だから、

$$\begin{aligned}\text{半球の体積} &= \text{円柱} - \text{円すい} = \pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r \quad (\text{高さはどちらも } r) \\ &= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

球は半球 2 つ分なので、 $\frac{2}{3}\pi r^3 \times 2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ です。

$$\text{球の体積} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

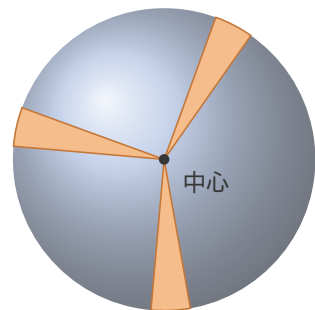
球の表面積：細いすいに分ける

球の表面を、とても小さな区画に分けます。それぞれの区画と、球の中心を結ぶと、球は、頂点がある、細いすいの集まりになります。どのすいも、高さは半径 r です。

すいの体積は「底面積×高さ× $\frac{1}{3}$ 」なので、全部たすと、

$$\text{球の体積} = (\text{底面積の合計}) \times r \times \frac{1}{3}$$

底面積の合計は、球の表面積 S です。だから $\frac{4}{3}\pi r^3 = S \times r \times \frac{1}{3}$ 。両辺に 3 をかけて r でわると（2-14）、 $S = 4\pi r^2$ です。



高さ r の細いすい（オレンジ）

$$\text{球の表面積} = 4\pi r^2$$

半径 r の円の面積 πr^2 の、ちょうど4倍です。オレンジの皮を細かくちぎって、同じ半径の円の中にしきつめると、だいたい4つ分になります。家で確かめてみましょう。

数で確かめる

半径 10 cm の球の体積は $\frac{4}{3} \times 3.14 \times 1000 = 4186.66\dots$ で、約 4190 cm^3 (約 4.2 L)。表面積は $4 \times 3.14 \times 100 = 1256 \text{ cm}^2$ です。5-4 では、球の体積の式を微分すると、表面積の式になることを確かめます。

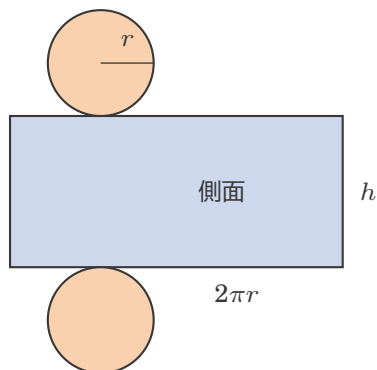
🔍 もっと知りたい ★★

相似な立体の体積は k^3 倍

半径を2倍にすると、円の面積は $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ で4倍、球の体積は $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ で8倍になります。円どうし・球どうしは相似で、相似比が2なので、面積比は $2^2 = 4$ 、体積比は $2^3 = 8$ です(4-3)。公式の r^2 、 r^3 の2と3は、「面積は長さを2回かけたもの、体積は3回かけたもの」(2-7)を表しています。

8 展開図と表面積・回転体

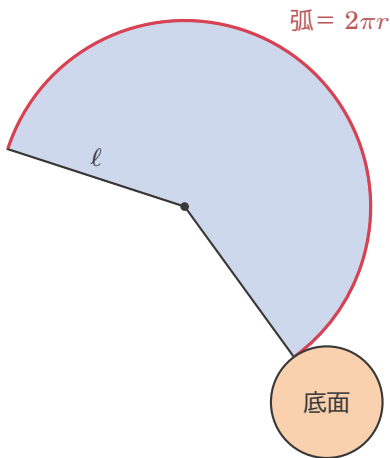
立体の表面全部の面積を**表面積**といいます。立体を切り開いて平面に広げた図(展開図)をかくと、表面積は平面の図形の面積の和として求められます。



円柱

円柱の展開図は、長方形1つ(側面)と、円2つ(底面)です。側面の長方形の横は、底面の円のまわりに巻きついていたので、円周と同じ $2\pi r$ 。たては高さ h です。

$$\text{表面積} = 2\pi r h + 2 \times \pi r^2$$



円すい

円すいの展開図は、おうぎ形（側面）と円（底面）です。おうぎ形の半径は、頂点から底面のふちまでの長さ l （母線（ぼせん））。おうぎ形の弧は、底面の円周 $2\pi r$ と同じです。④の「おうぎ形の面積 $= \frac{1}{2} \times$ 弧の長さ $\times$ 半径」から、

$$\text{側面積} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi r l$$

母線 l は、高さ h と底面の半径 r を直角をはさむ辺とする直角三角形の斜辺なので、三平方の定理（4-4）から $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ です。たとえば $r = 3$ 、 $h = 4$ なら $l = \sqrt{9 + 16} = 5$ 。側面積は $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ 、底面積は 9π で、表面積は 24π です。おうぎ形の中心角は、弧が円周 $2\pi l$ の $\frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$ なので、 $360^\circ \times \frac{3}{5} = 216^\circ$ です。

回転体：平面の図形を、軸のまわりに 1 回転させる

平面の図形を、1 本の直線（軸）のまわりに 1 回転させてできる立体を**回転体**といいます。ろくろで作る茶わんや、旋盤でけずる部品は、回転体です。

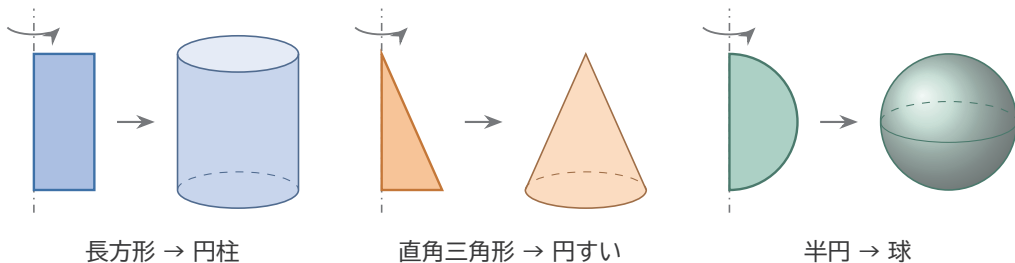
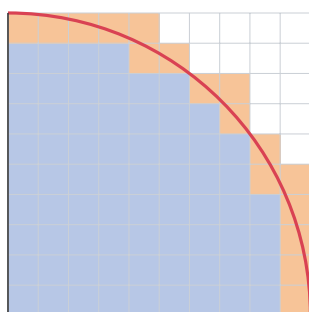


図 6 点線が回転の軸。軸にくっついた辺は、立体のまん中の線になる。

軸からいちばん遠い所が、回転体の半径になります。直角三角形を、直角をはさむ 1 辺を軸にして回すと、その辺が円すいの高さ、もう 1 つの辺が底面の半径になります。半円を、直径を軸にして回すと球です。

⑨ 方眼で数えて、細かくするほど正確に

円の面積は、別の方法でも確かめられます。半径 10 cm の円を、1 マス 1 cm の方眼にかいて、マス进行数えます。



10 cm

図は、円の $\frac{1}{4}$ です。

● 全部が円の内側にあるマス (青) : 69 こ

● 円のふちにかかるマス (オレンジ) : 17 こ

円全体ではこの 4 倍です。だから、円の面積は

青だけの $69 \times 4 = 276 \text{ cm}^2$ より大きく、

青とオレンジの $(69 + 17) \times 4 = 344 \text{ cm}^2$ より小さい

とわかります。

マスを小さくすると、ふちにかかるマスの面積がへって、はさむはばがせまくなります。コンピュータで数えた結果です。

1 マスの 1 辺 (cm)	1	0.5	0.25	0.1
内側のマスだけ (cm ²)	276	294	304	310.2
ふちまでふくむ (cm ²)	344	331	323.3	318.0

表 4 マスを細かくするほど、2 つの数は $\pi r^2 = 314.159 \dots$ をはさんで近づく。

④の「並べかえ」と、⑨の「方眼で数える」は、まったくちがう方法ですが、どちらも同じ πr^2 に近づきます。⑥の方法 3 でも、「外側の階段」と「内側の階段」で、すいの体積をはさみました。

🔍 もっと知りたい ★★

切り口の面積が同じなら、体積も同じ

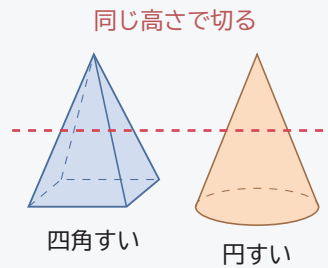
⑤のコインの山と、⑦の半球で使った考えを

まとめます。2つの立体を、同じ高さのところで水平に切ります。どの高さで切っても切り口の面積が同じなら、2つの立体の体積は

同じです。うすい板に分けると、どの高さの板も体積が同じだからです。400年ほど前の

イタリアの数学者の名前から、これを**カヴァリエリの原理**といいます。

たとえば、底面積と高さが同じ四角すいと円すいは、体積が同じです。どちらも、切り口の面積は「頂点からの距離の2乗」に比例して、同じようにふえていくからです(4-3)。



たいせつ

細かく分けて、たし合わせる。分け方を細かくするほど、答えは正確になる。

この考え方は、形がふくぎつで公式がない図形（池の面積、葉の面積、臓器の体積など）にも使えます。5-9では、グラフの下を面積を細い長方形の和で求め（区分求積）、5-10で、その近づく先を計算する方法（積分）を学びます。

たいせつ

平行四辺形	底辺×高さ	三角形	底辺×高さ÷2
台形	(上底+下底)×高さ÷2	ひし形	対角線×対角線÷2
円	πr^2	おうぎ形	$\frac{1}{2} \times \text{弧の長さ} \times r$
柱	底面積×高さ	すい	底面積×高さ× $\frac{1}{3}$
球	体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$	表面積	$4\pi r^2$

 この章で出てきたことば

底辺・高さ 1つの辺を底辺とすると、底辺（をのぼした直線）に垂直にはかった、向かいの頂点や辺までの長さが高さ。

等積変形 面積を変えずに形を変えること。

底面積 柱やすいの底の面の面積。

すい 底面から1つの頂点に向かって細くなる立体。四角すい・円すいなど。

母線 円すいの頂点と、底面の円のふちを結ぶ線分。

表面積・展開図 立体の表面全部の面積。立体を切り開いて平面に広げた図。

回転体 平面の図形を、軸のまわりに1回転させてできる立体。

 記号カード

初めて出た章 4-5

 $S \cdot V$

読み方 エス・ブイ

意味 面積を S 、体積を V で表すことが多い。物理では面積に A も使う

英語 surface, volume

🔍 コラム アルキメデスのお墓

2200 年ほど前のギリシャの数学者アルキメデスは、「球の体積は、それがぴったり入る円柱の体積の $\frac{2}{3}$ 、球の表面積も円柱の表面積の $\frac{2}{3}$ 」であることを見つけました。円柱は半径 r ・高さ $2r$ なので体積は $2\pi r^3$ 、球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ はその $\frac{2}{3}$ です。アルキメデスはこの発見がとても気に入っていて、お墓に「円柱の中に入った球」の図をきざんでほしいとたのんだと伝えられています。

例題でたしかめよう

例題では、 π をふくむ答えは「 $36\pi\text{cm}^2$ 」のように π のまま書き、およその大きさを $\pi = 3.14$ として「約」をつけて添えます。

例題1 平行四辺形と三角形の面積

次の面積を求めましょう。

(1) 底辺 8cm 、高さ 5cm の平行四辺形 (2) 底辺 6cm 、高さ 7cm の三角形

(3) 底辺 4cm 、高さ 6cm の三角形（高さが三角形の外に出る）

考え方 平行四辺形は底辺 $\times$ 高さ (①)。三角形はその半分なので $\div 2$ (②)。高さが外に出ても、計算は同じ。

式 (1) $8 \times 5 = 40$
 (2) $6 \times 7 \div 2 = 42 \div 2 = 21$
 (3) $4 \times 6 \div 2 = 24 \div 2 = 12$

答え (1) 40cm^2 (2) 21cm^2 (3) 12cm^2

例題2 台形とひし形の面積

(1) 上底 4cm 、下底 10cm 、高さ 6cm の台形と、(2) 対角線が 8cm と 6cm のひし形の面積を求めましょう。

考え方 台形は（上底 $+$ 下底） $\times$ 高さ $\div 2$ 、ひし形は対角線 $\times$ 対角線 $\div 2$ (③)。

式 (1) $(4 + 10) \times 6 \div 2 = 14 \times 6 \div 2 = 42$
 (2) $8 \times 6 \div 2 = 24$

答え (1) 42cm^2 (2) 24cm^2

**じぶんでところ1**

次の面積を求めましょう。

- (1) 底辺 12 cm、高さ 7 cm の平行四辺形
- (2) 底辺 9 cm、高さ 4 cm の三角形
- (3) 底辺 5 cm、高さ 8 cm の三角形（高さが外に出る）

**じぶんでところ2**

- (1) 上底 3 cm、下底 7 cm、高さ 5 cm の台形と、(2) 対角線が 10 cm と 7 cm のひし形の面積を求めましょう。

**例題3 四角形を三角形に分ける**

四角形 ABCD の対角線 AC の長さは 10 cm です。B と D から対角線 AC までの垂直な長さは、それぞれ 3 cm と 5 cm です。四角形 ABCD の面積を求めましょう。

考え方 対角線 AC で、三角形 ABC と三角形 ACD に分ける。どちらも底辺は AC (③)。

式 三角形 ABC : $10 \times 3 \div 2 = 15$

三角形 ACD : $10 \times 5 \div 2 = 25$

合わせて $15 + 25 = 40$

答え 40 cm^2

例題4 円とおうぎ形の面積

(1) 半径 6 cm の円の面積と、(2) 半径 6 cm、中心角 60° のおうぎ形の面積を求めましょう。

考え方 円は πr^2 (④)。おうぎ形は、円の $\frac{\text{中心角}}{360}$ 。

式 (1) $\pi \times 6^2 = 36\pi$

$$36 \times 3.14 = 113.04$$

(2) $36\pi \times \frac{60}{360} = 36\pi \times \frac{1}{6} = 6\pi$

$$6 \times 3.14 = 18.84$$

答え (1) $36\pi \text{ cm}^2$ (約 113 cm^2) (2) $6\pi \text{ cm}^2$ (約 18.8 cm^2)

じぶんでところ3

四角形 ABCD の対角線 AC は 12 cm、B と D から AC までの垂直な長さは 4 cm と 2 cm です。面積を求めましょう。

じぶんでところ4

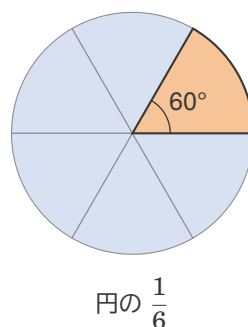
(1) 半径 5 cm の円の面積と、
(2) 半径 10 cm、中心角 72° のおうぎ形の面積を求めましょう。

π のまま答えるわけ

π は 3.14159... と、どこまでも続く数です (2-9)。

3.14 で計算すると、答えに小さなずれが入ります。36 π のように π のまま書いておけば、ずれのない正確な答えになり、あとで別の計算に使うときも便利です。

中心角 60° のおうぎ形は、右の図のように、円をピザのように 6 等分した 1 切れです (360 ÷ 60 = 6)。だから面積も円の $\frac{1}{6}$ で、36 π ÷ 6 = 6 π です。中心角が何分の 1 かを考えると、計算の見通しが立ちます。

**例題 5 柱の体積**

(1) 底面が、直角をはさむ辺 3 cm と 4 cm の直角三角形で、高さ 10 cm の三角柱と、(2) 底面の半径 3 cm、高さ 10 cm の円柱の体積を求めましょう。

考え方 柱の体積 = 底面積 × 高さ (⑤)。まず底面積を求める。

式 (1) 底面積 $3 \times 4 \div 2 = 6$ 、体積 $6 \times 10 = 60$

(2) 底面積 $\pi \times 3^2 = 9\pi$ 、体積 $9\pi \times 10 = 90\pi$

$90 \times 3.14 = 282.6$

答え (1) 60 cm³ (2) 90 π cm³ (約 283 cm³)

例題6 すいの体積

(1) 底面が1辺6 cmの正方形で、高さ10 cmの四角すいと、(2) 底面の半径3 cm、高さ4 cmの円すいの体積を求めましょう。

考え方 すいの体積＝底面積×高さ× $\frac{1}{3}$ (⑥)。 $\frac{1}{3}$ をわすれない。

式 (1) $6 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{3} = 360 \times \frac{1}{3} = 120$

(2) $\pi \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{3} = 36\pi \times \frac{1}{3} = 12\pi$

$12 \times 3.14 = 37.68$

答え (1) 120 cm^3 (2) $12\pi \text{ cm}^3$ (約 37.7 cm^3)

じぶんでところ5

(1) 底面が、底辺6 cm・高さ5 cmの三角形で、高さ8 cmの三角柱と、(2) 底面の半径2 cm、高さ5 cmの円柱の体積を求めましょう。

じぶんでところ6

(1) 底面が1辺5 cmの正方形で、高さ6 cmの四角すいと、(2) 底面の半径6 cm、高さ5 cmの円すいの体積を求めましょう。

例題 7 球の体積と表面積

半径 6 cm の球の体積と表面積を求めましょう。

考え方 体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 、表面積 $4\pi r^2$ (⑦)。 r^3 は r を 3 回かける。

式 体積 $\frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{4}{3} \times 216\pi = 288\pi$
 $288 \times 3.14 = 904.32$

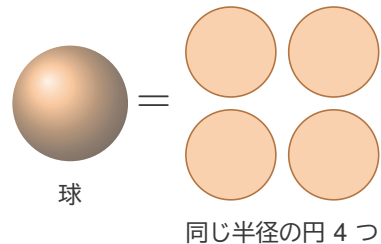
表面積 $4 \times \pi \times 6^2 = 4 \times 36\pi = 144\pi$
 $144 \times 3.14 = 452.16$

答え 体積 $288\pi \text{ cm}^3$ (約 904 cm^3)、表面積 $144\pi \text{ cm}^2$ (約 452 cm^2)

表面積は、同じ半径の円 4 つ分

例題 7 の表面積 144π は、半径 6 cm の円の面積 36π のちょうど 4 倍です ($4 \times 36\pi = 144\pi$)。⑦のオレンジの皮の実験のように、球の皮をはがして平らに広げると、同じ半径の円 4 つ分になります。

体積の答えは cm^3 、表面積の答えは cm^2 です。単位の 3 と 2 は、長さを 3 回かけたか、2 回かけたかを表しています (2-7)。



例題8 円柱と円すいの表面積

(1) 底面の半径 3 cm 、高さ 5 cm の円柱と、(2) 底面の半径 3 cm 、高さ 4 cm の円すいの表面積を求めましょう。

考え方 展開図で考える (⑧)。円柱の側面は横 $2\pi r \cdot$ たて h の長方形。円すいの側面は $\pi r \ell$ で、母線 ℓ は三平方の定理で求める。

式 (1) 側面 $2\pi \times 3 \times 5 = 30\pi$ 、底面 2 つ $2 \times 9\pi = 18\pi$

$$30\pi + 18\pi = 48\pi$$

(2) 母線 $\ell = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

側面 $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ 、底面 9π

$$15\pi + 9\pi = 24\pi$$

答え (1) $48\pi\text{ cm}^2$ (約 151 cm^2) (2) $24\pi\text{ cm}^2$ (約 75.4 cm^2)

じぶんでこう7

半径 10 cm の球の体積と表面積を求めましょう。

じぶんでこう8

(1) 底面の半径 2 cm 、高さ 6 cm の円柱と、(2) 底面の半径 5 cm 、高さ 12 cm の円すいの表面積を求めましょう。

例題 9 回転体の体積

(1) たて 4 cm、横 3 cm の長方形を、たての辺を軸にして 1 回転させた立体と、(2) 直角をはさむ辺が 6 cm と 8 cm の直角三角形を、8 cm の辺を軸にして 1 回転させた立体の体積を求めましょう。

考え方 どんな立体になるか、軸から遠い所が半径になることを、図をかいて確かめる (⑧)。

式 (1) 半径 3・高さ 4 の円柱。 $\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$
 (2) 半径 6・高さ 8 の円すい。 $\pi \times 6^2 \times 8 \times \frac{1}{3} = 96\pi$

答え (1) $36\pi \text{ cm}^3$ (約 113 cm^3) (2) $96\pi \text{ cm}^3$ (約 301 cm^3)

例題 10 タンクや水そうの容量を L で

(1) 直径 2 m、高さ 1.5 m の円柱形のタンクに入る水は何 L ですか ($\pi = 3.14$)。

(2) 内側の長さが、たて 30 cm・横 60 cm・深さ 36 cm の水そうに入る水は何 L ですか。

考え方 半径は直径の半分。体積を求めてから、単位つきの 1 で換算する (2-10)。 $1 \text{ m}^3 = 100 \times 100 \times 100 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$ 、 $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ なので、 $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$ 。

式 (1) 半径 1。 $\pi \times 1^2 \times 1.5 = 1.5\pi = 4.71 \text{ (m}^3\text{)}$
 $4.71 \text{ m}^3 \times 1000 \text{ L/m}^3 = 4710 \text{ L}$

(2) $30 \times 60 \times 36 = 64\,800 \text{ (cm}^3\text{)}$
 $64\,800 \text{ cm}^3 \div 1000 \text{ cm}^3/\text{L} = 64.8 \text{ L}$

答え (1) 約 4710 L (2) 64.8 L

じぶんでこう9

(1) たて 5 cm、横 2 cm の長方形を、たての辺を軸にして 1 回転させた立体と、(2) 直角をはさむ辺が 3 cm と 4 cm の直角三角形を、4 cm の辺を軸にして 1 回転させた立体の体積を求めましょう。

じぶんでこう10

(1) 直径 1 m、高さ 2 m の円柱形のタンクに入る水は何 L ですか ($\pi = 3.14$)。
(2) 内側が、たて 25 cm・横 50 cm・深さ 30 cm の水そうに入る水は何 L ですか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

ななめの辺を高さにする

底辺 8 cm、ななめの辺 6 cm、高さ 5 cm の平行四辺形の面積は？

✗ $8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$

○ $8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$

高さは、底辺に垂直にはかった長さです。ななめの辺は、高さより長くなります。①の図で、長方形のたてになったのは高さでした。

⚠ まちがえやすいところ

÷ 2 や $\frac{1}{3}$ をわすれる

底面の半径 3 cm、高さ 4 cm の円すいの体積は？

✕ $\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$

○ $\pi \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{3} = 12\pi$

36π は、同じ底面・同じ高さの円柱の体積です。円すいは、とがっている分、ずっと小さくなります。三角形の÷ 2 も同じで、「2 つ合わせると平行四辺形」を思い出しましょう。

⚠ まちがえやすいところ

直径を半径として使う

直径 10 cm の円の面積は？

✕ $\pi \times 10^2 = 100\pi$

○ 半径は 5 なので、 $\pi \times 5^2 = 25\pi$

πr^2 の r は半径です。問題に「直径」とあったら、まず半分にして半径を求めましょう。直径のまま計算すると、4 倍の大きさになってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

円すいの表面積に、高さを使う

✕ 側面積 = $\pi \times$ 半径 $\times$ 高さ

○ 側面積 = $\pi \times$ 半径 $\times$ 母線

側面のおうぎ形の半径は、頂点から底面のふちまでの母線 l です。高さ h ではありません。 $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ で、母線のほうが高さより長くなります。

⚠ まちがえやすいところ

m^3 と L の換算

✗ $1 \text{ m}^3 = 100 \text{ L}$

○ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ なので、100 を 3 回かけて $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$ 。これを 1 L の 1000 cm^3 でわると、1000 です。体積では、長さの換算の数を 3 回かけます (2-10)。

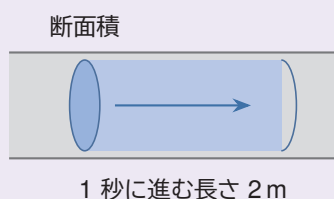
🌀 物理・工学ではこう使う

パイプの断面積と流量

水道管の中を、水が 1 秒に 2 m の速さで流れているとします。1 秒間に流れる水は、断面積を底面、長さ 2 m を高さとする円柱の形をしています (柱の体積)。内側の直径が 13 mm (半径 0.0065 m) なら、断面積は $3.14 \times 0.0065^2 = 0.000133 \text{ m}^2$ 。1 秒に流れる水は

$$0.000133 \times 2 = 0.000266 \text{ m}^3 \quad \text{で、約} \\ 0.27 \text{ L}$$

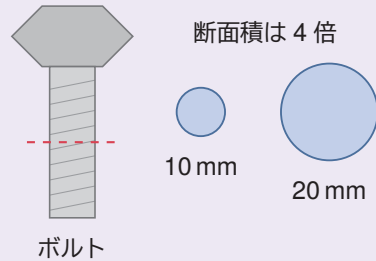
1 分では約 16 L です。流れる量 (流量) = 断面積 $\times$ 速さは、水道・空調・血管の血液の流れなど、流れを計算するときの基本の式です。



物理・工学ではこう使う

ボルトの太さと強さ

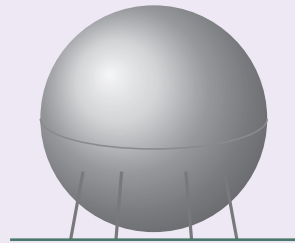
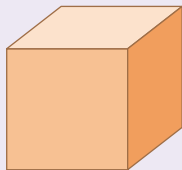
ボルトや鉄の棒が、引っばる力にどれだけのえられるかは、断面積に比例します。直径 10 mm の鉄の棒の断面積は $3.14 \times 5^2 = 78.5 \text{ mm}^2$ 。直径を 2 倍の 20 mm にすると、断面積は $2^2 = 4$ 倍の 314 mm^2 になり、4 倍の力にたえられます（相似比 2 なら面積比 4、4-3）。橋や建物の設計では、部品の断面積を計算して、必要な太さを決めます。



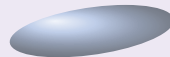
ガスタンクが球の形をしているわけ

同じ体積なら、球は、ほかのどんな形よりも表面積が小さくなります。体積 1 m^3 の立方体の表面積は 6 m^2 ですが、体積 1 m^3 の球（半径約 0.62 m）の表面積は約 4.84 m^2 で、約 2 割少なくすみます。表面積が小さいと、タンクを作る鉄板が少なくてすみ、中の圧力も、表面に均等にかかります。都市ガスをためる大きな球形タンクには、直径 30 m（体積約 14000 m^3 ）ほどのものもあります。

球形ガスタンク



体積 1 m^3 の立方体
表面積 6 m^2



体積 1 m^3 の球
表面積 約 4.84 m^2



章末問題

4-5 のまとめ

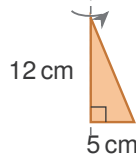
基本 ★

- 1 次の面積を求めましょう (例題 1)。 (1) 底辺 10 cm、高さ 6 cm の平行四辺形 (2) 底辺 7 cm、高さ 8 cm の三角形
- 2 (1) 上底 5 cm、下底 9 cm、高さ 4 cm の台形と、(2) 対角線が 12 cm と 9 cm のひし形の面積を求めましょう (例題 2)。
- 3 (1) 半径 4 cm の円と、(2) 半径 12 cm、中心角 30° のおうぎ形の面積を求めましょう (例題 4)。
- 4 (1) 底面の半径 5 cm、高さ 8 cm の円柱と、(2) 底面の半径 5 cm、高さ 9 cm の円すいの体積を求めましょう (例題 5・例題 6)。
- 5 半径 3 cm の球の体積と表面積を求めましょう (例題 7)。
- 6 底面の半径 6 cm、高さ 8 cm の円すいの表面積を求めましょう (例題 8)。
- 7 内側が、たて 40 cm・横 80 cm・深さ 45 cm の水そうに入る水は何 L ですか (例題 10)。

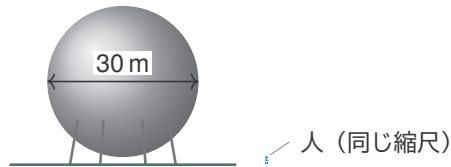
チャレンジ ★★

- 8 四角形 ABCD の対角線 AC は 14 cm、B と D から AC までの垂直な長さは 5 cm と 3 cm です。面積を求めましょう (例題 3)。

- 9 直角をはさむ辺が 5 cm と 12 cm の直角三角形を、12 cm の辺を軸にして 1 回転させます。できる立体の体積と表面積を求めましょう (例題 8・例題 9)。



- 10 直径 30 m の球形のガスタンクの体積と表面積を求めましょう ($\pi = 3.14$ 、例題 7)。



✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 平行四辺形・三角形・台形・ひし形の面積を、長方形に直して求められる。 → 163 ページ
- ☐ 円の面積と、柱・すい・球の体積を、わけといっしょに使える。 → 166 ページ
- ☐ 展開図から表面積を求め、体積を L に換算できる。 → 174 ページ

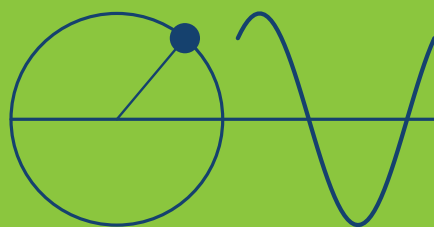
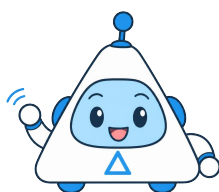


ミナ

細かく分けて、並べかえて、たす。円も球も、この考えで計算できたね。第 2 部では、坂道の急さを角度で表すよ。

三角比と三角関数

- ? 坂の上の荷物にかかる力を、2つに分けられる？
- ? 回る点の影は、なぜ行ったり来たりする？
- ? 2つの音を重ねると、なぜウワンウワンと聞こえる？



直角三角形の辺の比から、角度と長さを結びつけるよ。くるくる回る点の影を追いかけると、波の形のグラフ（三角関数）が現れるよ。

この部で学ぶこと

4-6 坂道と三角比

✓ ★★☆☆☆ p.196

坂の上の荷物にかかる力を、2 つに分ける

4-7 三角形を解く：正弦定理と余弦定理

✓ ★★☆☆☆ p.234

行けない場所までの距離をはかる

4-8 三角関数：円運動の影

✓ ★★☆☆☆ p.268

回る点の影は、行ったり来たりする

4-9 波をたし合わせる：加法定理とうなり

✓ ★★★★★ p.306

2 つの音を重ねると、ウワンウワンと聞こえる

この部を読むと…

坂道や力の向きを三角比で計算し、回転や波を三角関数で表せるようになります。三角関数は、第 5 巻の微分、第 6 巻の振動、第 9 巻のフーリエ解析の主役です。

第2部 三角比と三角関数

★★～★★★★

4-6 坂道と三角比

道しるべ この章の前に 3-5 4-1 4-3 4-4 この章の先に 4-7 4-8 5-17

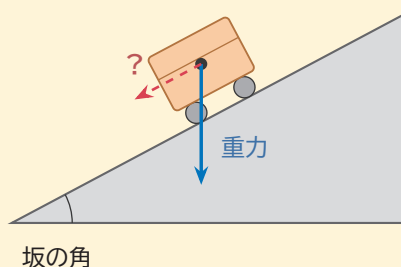
この章でできるようになること

- ★★ 直角三角形で、どの角から見るかに気をつけて、 $\sin \cdot \cos \cdot \tan$ を求められる。
- ★★★ 三角比と電卓を使って、辺の長さや角度を求められる。坂の傾きを角度に直せる。
- ★★★ 斜面にのった物の重力を、 $mg \sin \theta$ と $mg \cos \theta$ の2つに分けられる。

? はてな?

荷物をのせた台車を、坂の途中で止めておきたい。平らな所なら、手をはなしても台車は動きません。でも坂の上では、手をはなすと、台車は坂を下っていきます。

台車を引っばる重力は、まっすぐ下向きです。それなのに、なぜ坂にそって動くのでしょうか。台車を止めておくには、坂にそって、どれだけの力で支えればよいのでしょうか。



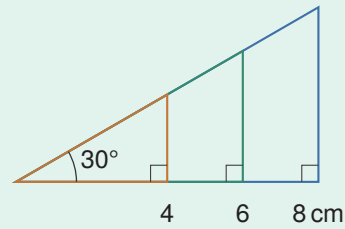
坂のような「ななめ」の形は、くらしの中にたくさんあります。車いすのスロープ、山の道路、屋根、すべり台。この章では、ななめの形を、直角三角形の辺の比で表します。その比を使うと、坂の角度から高さを計算したり、重力を2つに分けたりできます。

△ やってみよう 同じ角の直角三角形を3つかこう

用意するもの

ノート、定規、分度器、電卓

- ① 横の辺が4 cm で、左はしの角が 30° の直角三角形をかこう（右下を直角にする）。
- ② 横の辺を6 cm、8 cm にして、同じ 30° の直角三角形をかこう。
- ③ たての辺と、ななめの辺の長さをはかり、「たて÷ななめ」「横÷ななめ」「たて÷横」を電卓で計算しよう。
- ④ 角を 40° にして、もう1つかいてみよう。



ソラさんがはかった結果です（長さは0.1 cm まで、比は小数第2位まで）。

角	横	たて	ななめ	たて÷ななめ	横÷ななめ	たて÷横
30°	4.0	2.3	4.6	0.50	0.87	0.58
30°	6.0	3.5	6.9	0.51	0.87	0.58
30°	8.0	4.6	9.2	0.50	0.87	0.58
40°	6.0	5.0	7.8	0.64	0.77	0.83

30° の3つの三角形は、大きさがちがうのに、3つの比がほとんど同じです（0.51のような小さなずれは、はかるときのずれです）。角を 40° にすると、比が変わ

りました。直角三角形の辺の比は、大きさではなく、角だけで決まるようです。この章では、この比に名前をつけて使います。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-5 傾き = 上がる高さ ÷ 横に進む長さ (たての変化量 ÷ 横の変化量)。道路ではこう配ともいう。

4-1 三角形の3つの角(内角)をたすと 180° 。平行な2本の直線に1本の直線が交わってできる同位角・錯角は等しい。

4-3 2つの角がそれぞれ等しい三角形は相似。相似な図形では、対応する辺の比が等しい。直角三角形の辺の比は、角だけで決まる。

4-4 直角をはさむ辺が a 、 b 、斜辺が c なら $a^2 + b^2 = c^2$ (三平方の定理)。
三角定規の辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ と $1 : 2 : \sqrt{3}$ 。

4-2 電卓は DEG (度) と RAD (ラジアン) を切りかえて使う。表計算の SIN はラジアンで計算する。

極座標 (r, θ) : 中心からの距離 r と、 x 軸の正の向きから左回りの角 θ で場所を言う。

🔧 数学の道具

① 坂の急さの3つの言い方

町の中で、坂の急さは、いろいろな言い方で書かれています。



図1 同じ「坂の急さ」を、分数・百分率(%)・角度の3つの言い方で表している。

1 傾き (3-5)

上がる高さ÷横に進む長さです。スロープの「 $\frac{1}{12}$ 」は、横に 12 m 進むと 1 m 上がる、という意味です。傾きは $1 \div 12 = 0.083 \dots$ です。

2 こう配 (%)

道路の標識は、傾きを百分率 (%) で書いたものです。傾きを 100 倍すると % になります (2-5)。「こう配 10%」は、横に 100 m 進むと 10 m 上がる坂で、傾きは $10 \div 100 = 0.1$ です。スロープの $\frac{1}{12}$ は、 0.083×100 で約 8.3% です。

3 角度

坂と水平な線のあいだの角を、分度器ではかります。スキー場の「斜度 30°」は、この角が 30° という意味です。

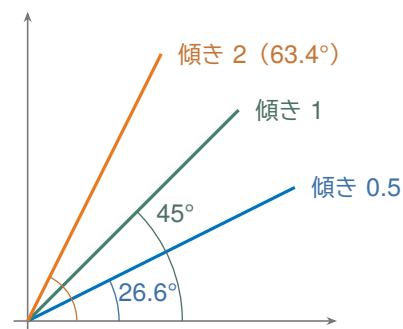
3 つの言い方を、表にまとめます。角度は、図を大きくかいて分度器ではかった値です (あとで計算でも求めます)。

	傾き	こう配	角度
スロープ $\frac{1}{12}$	0.083	8.3%	約 4.8°
道路の標識	0.1	10%	約 5.7°
横とたてが同じ坂	1	100%	45°
横 1 でたて 2 の坂	2	200%	約 63.4°

表 1 傾きとこう配は、100 倍するだけ。角度は、かんたんには計算できない。

表の下 の 2 行を見ましょう。傾きが 1 から 2 へ、2 倍になりました。角度は 45° の 2 倍の 90° になるでしょうか。

なりません。63.4° です。傾き 2 の坂は「横に 1 進むと 2 上がる」坂で、まだかべ (90°) ではないからです。



傾きをどんなに大きくしても、角度は 90° に近づくだけです。**傾きと角度は、比例しません。**傾きと角度を行き来するには、新しい道具が必要です。それが、この章で作る**三角比**です。

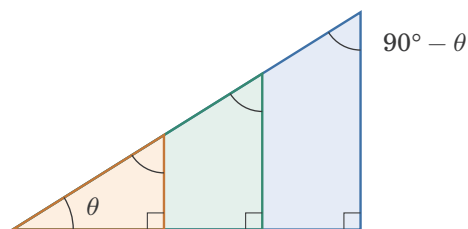
② 直角三角形の辺の比：sin・cos・tan

△やってみよう では、角が 30° なら、三角形の大きさを変えても、辺の比が同じになりました。なぜでしょう。2通りで考えます。

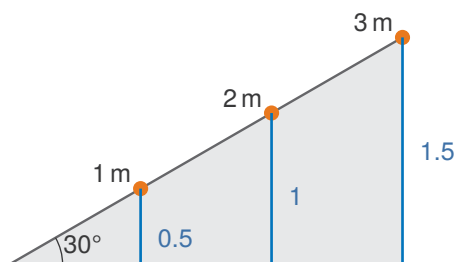
① 相似で考える (4-3)

角が θ (シータ。4-2) の直角三角形を、大きさを変えて3つかき、 θ の所を重ねます。3つの三角形は、どれも角が θ と 90° です。三角形の角をたすと 180° なので (4-1)、のこりの角は、どれも $180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$ です。

3つの角がそれぞれ等しいので、3つの三角形は相似です (4-3)。相似な図形は、対応する辺の比が等しいので、「たて÷ななめ」などの比は、3つとも同じです。



② 坂をのぼって考える



30° の坂を、坂にそって歩きます。1m 歩くと高さは 0.5m、2m 歩くと 1m、3m 歩くと 1.5m になります。同じ坂をのぼりつづけるので、歩いた長さと上がった高さは比例します (2-15)。だから「高さ÷歩いた長さ」は、どこではかっても 0.5 です。

どちらの考え方でも、**直角三角形の辺の比は、角 θ だけで決まる**ことがわかりました。そこで、この比に名前をつけます。

辺の名前：どの角から見るか

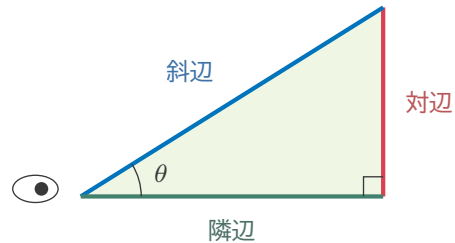
直角三角形の3つの辺に、角 θ から見た名前をつけます。 θ の所に目を置いて、三角形をながめてください。

- **斜辺**（しゃへん）：直角の向かいにある辺。いちばん長い辺。

- **対辺**（たいへん）： θ の向かいにある辺。目の正面に見える辺。

- **隣辺**（りんぺん）： θ のとなりの辺のうち、斜辺でないほう。

3つの辺の比のうち、よく使う3つに名前をつけます。



記号	読み方	式	坂なら
$\sin \theta$	サイン	$\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$	高さ÷ななめの長さ
$\cos \theta$	コサイン	$\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$	横÷ななめの長さ
$\tan \theta$	タンジェント	$\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$	高さ÷横（傾き）

表2 三角比の決め方（定義。4-1）。どれも θ から見た辺の名前で決める。

$\sin \theta$ を**正弦**（せいげん）、 $\cos \theta$ を**余弦**（よげん）、 $\tan \theta$ を**正接**（せいせつ）ともいいます。3つをまとめて**三角比**（さんかくひ）といいます。 $\sin \theta$ は「sin と θ のかけ算」ではありません。「角 θ のサイン」という1つの数です。 $f(x)$ (3-3) のように、 θ を入れると比が1つ出てくる、と考えるとよいでしょう。

🔄 やってみよう の表から、 30° と 40° の三角比は、次のようになります。

$$\sin 30^\circ = 0.50 \quad \cos 30^\circ = 0.87 \quad \tan 30^\circ = 0.58$$

$$\sin 40^\circ = 0.64 \quad \cos 40^\circ = 0.77 \quad \tan 40^\circ = 0.83$$

せいかくに言うと

三角比は、ここでは $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の角で決めた

直角三角形の直角でない角は、 0° より大きく 90° より小さい角（鋭角（えいかく））です。だから、ここで決めた三角比は、鋭角のときだけの決め方です。 90° より大きい角の三角比は、⑧で決め直します。

斜辺を 1 にすると、たては $\sin \theta$ 、横は $\cos \theta$

長さ 1 m の棒を、地面から角 θ だけ立

てかけます。棒の先の高さは、対辺÷斜

辺 = $\sin \theta$ で、斜辺が 1 なので、高さはそ

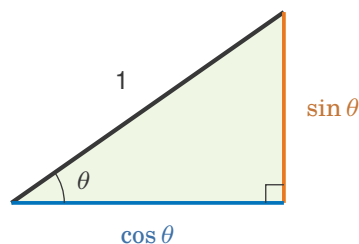
のまま $\sin \theta$ (m) です。棒の先までの横

の長さは $\cos \theta$ (m) です。

棒の長さが 5 m なら、三角形は相似なま

ま 5 倍になるので、高さは $5 \sin \theta$ 、横は

$5 \cos \theta$ です。



同じことを、式でも確かめます。 $\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ の両辺に斜辺をかけると (2-14)、

$$\boxed{\text{対辺} = \text{斜辺} \times \sin \theta}$$

$$\boxed{\text{隣辺} = \text{斜辺} \times \cos \theta}$$

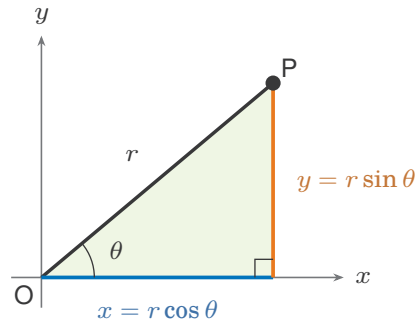
$$\boxed{\text{対辺} = \text{隣辺} \times \tan \theta}$$

となります。3 つめは、 $\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$ の両辺に隣辺をかけたものです。この「かけ算の形」は、このあと何度も使います。

$\sin \theta \cdot \cos \theta$ は、極座標を (x, y) に直す道具

4-2 の極座標を思い出しましょう。点 P を、原点 O からの距離 r と、 x 軸の正の向きから左回りの角 θ で、 (r, θ) と言いました。同じ点 P を、3-2 の座標 (x, y) (右へいくつ、上へいくつ) で言うと、どうなるでしょう。

P から x 軸へ垂直な線を下ろすと、直角三角形ができます。斜辺は OP で長さ r 、角 θ から見た隣辺が x 、対辺が y です。だから、上の「かけ算の形」から、次の式ができます。



$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

いまは、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の向きで考えています (⑧で 180° まで、4-8 でどの向きにも広げます)。極座標 (r, θ) がわかれば、 r に $\cos \theta$ と $\sin \theta$ をかけるだけで、 (x, y) が求められます。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は、距離と向きの言い方 (r, θ) と、横とたての言い方 (x, y) をつなぐ橋なのです。

数でも確かめます。4-2 のロボットのうでは、肩から 30 cm、向き 40° の所に手がありました (極座標 $(30, 40^\circ)$)。🔍 やってみよう ではかった $\cos 40^\circ = 0.77$ 、 $\sin 40^\circ = 0.64$ を使うと、

$$x = 30 \times 0.77 = 23.1 \quad y = 30 \times 0.64 = 19.2$$

手は、肩から右へ約 23 cm、上へ約 19 cm の所です。三平方の定理 (4-4) で確かめると、 $23.1^2 + 19.2^2 = 533.61 + 368.64 = 902.25$ で、 $30^2 = 900$ とほぼ同じです (0.77 と 0.64 は四捨五入した値なので、少しずれる)。方眼紙に図を大きくかいてはかっても、同じ長さになります。

③ $30^\circ \cdot 45^\circ \cdot 60^\circ$ の三角比と、電卓

$30^\circ \cdot 45^\circ \cdot 60^\circ$ の三角比は、三角定規の辺の比 (4-4) から、ぴったりの値が求められます。

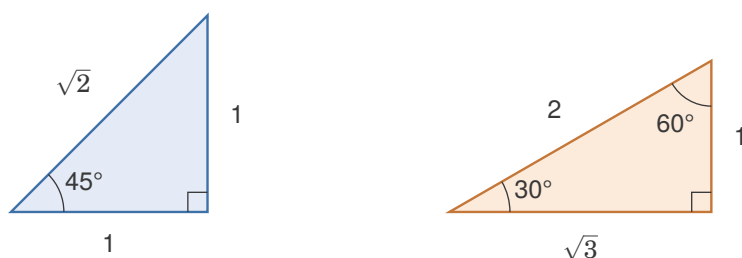


図2 左は正方形を対角線で半分にした形。右は正三角形を半分にした形(4-4)。

45°：左の三角形で、45° から見ると、対辺 1、隣辺 1、斜辺 $\sqrt{2}$ です。

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ の分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけて、分母を有理化しました(3-10)。

30°：右の三角形で、30° から見ると、対辺 1、隣辺 $\sqrt{3}$ 、斜辺 2 です。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

60°：同じ三角形を、こんどは 60° から見ます。60° の向かいの辺は $\sqrt{3}$ なので、対辺 $\sqrt{3}$ 、隣辺 1、斜辺 2 です。

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

同じ三角形でも、見る角が変わると、対辺と隣辺が入れかわります。

これから、 $\approx$ という記号を使います。 $\approx$ は「ほぼ等しい」という意味です(5-8でくわしく)。 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.732$ なので(2-8)、小数にすると次の表になります。 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.732 \div 2 = 0.866$ です。

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	$\frac{1}{2} = 0.5$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$	1	$\sqrt{3} \approx 1.732$

表3 ㊦ やってみよう ではかった 30° の比 (0.50、0.87、0.58) と合っている。

ほかの角は、電卓で

40° や 4.8° のような角の三角比は、関数電卓で求めます。手順は次のとおりです。

- 1 画面に「DEG」（度）と出ているか確かめる。「RAD」なら、度に切りかえる（4-2）。
- 2 sin のキーを押して、40 と入れ、= を押す。
- 3 0.6427876… と出る（やってみようの 0.64 と合う）。

DEG

sin(40) 0.6427876

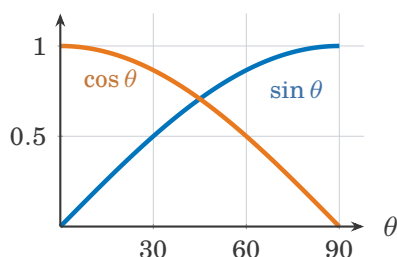
sin(30) -0.988

RAD のまま（まちがい）

RAD のまま $\sin 30$ を計算すると -0.988 になります。これは「30 ラジアン」のサインで、 30° のサインではありません。 30° は $\frac{1}{2} = 0.5$ と知っている
ので、 $\sin 30$ で 0.5 が出るかどうかで、モードを確かめられます。表計算なら
 $=\text{SIN}(\text{RADIANS}(40))$ のように、度をラジアンに直してから計算します（4-2）。
電卓で、 10° ごとの値を表にしました。

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \theta$	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985	1
$\cos \theta$	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.500	0.342	0.174	0
$\tan \theta$	0.176	0.364	0.577	0.839	1.192	1.732	2.747	5.671	なし

表 4 小数第 4 位を四捨五入した値。sin の列を右から読むと、cos の列になっている (⑤)。



θ が大きくなると、坂は急になります。だから高さの比 $\sin \theta$ は0から1へふえ、横の比 $\cos \theta$ は1から0へへります。斜辺がいちばん長い辺なので、 $\sin \theta$ も $\cos \theta$ も1より大きくはありません。 $\tan \theta$ は、 90° に近づくと、どこまでも大きくなります（横が0に近づくから）。 90° の $\tan$ は決まりません。

④ $\tan \theta$ は坂の傾き

坂の傾きは、高さ÷横でした（3-5）。坂の角を θ とすると、高さは θ の対辺、横は隣辺です。だから、

$$\text{傾き} = \frac{\text{高さ}}{\text{横}} = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} = \tan \theta$$

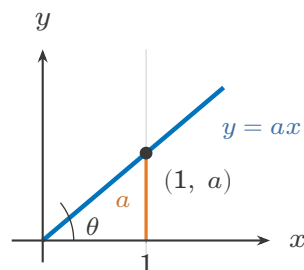
$\tan \theta$ は、**角 θ の坂の傾き**です。①の表の角度は、この関係で計算できます。電卓の表を使って確かめましょう。

- 傾き1の坂： $\tan 45^\circ = 1$ なので、角は 45° 。
- 傾き2の坂： $\tan 60^\circ = 1.732$ 、 $\tan 70^\circ = 2.747$ なので、角は 60° と 70° の

あいだ。電卓で求めると 63.4° です (⑦)。グラフの直線でも同じです。原点を通る直線 $y = ax$ (2-15) が、 x 軸の正の向きとつくる角を θ とします。直線の上の点 $(1, a)$ から x 軸へ垂直な線を下ろすと、横1、たて a の直角三角形ができます。だから

$$a = \frac{a}{1} = \tan \theta$$

直線の傾き a は、直線と x 軸がつくる角の $\tan$ です。



5 3つの三角比のつながり

$\sin \cdot \cos \cdot \tan$ は、同じ三角形の辺の比なので、たがいにつながっています。

$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$\sin \theta$ を $\cos \theta$ でわってみます。どちらも分母が斜辺なので、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} \div \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}} && (\sin \text{ と } \cos \text{ の決め方を入れる}) \\ &= \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} \times \frac{\text{斜辺}}{\text{隣辺}} = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} = \tan \theta && (\text{わり算は、逆数のかけ算。2-4}) \end{aligned}$$

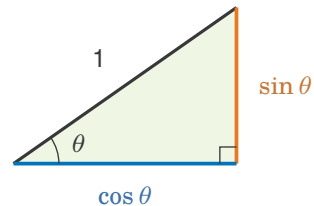
斜辺どうしが約分されて消えます。数で確かめます。 30° では、 $0.5 \div 0.866$ を計算すると 0.577 になり、 $\tan 30^\circ$ と合います。斜辺を 1 にした図で見れば、「たて $\sin \theta$ ÷ 横 $\cos \theta$ 」が傾き $\tan \theta$ です。

$$\textcircled{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

斜辺 1 の直角三角形 (②の棒の図) で、三平方の定理 (4-4) を使います。たてが $\sin \theta$ 、横が $\cos \theta$ 、斜辺が 1 なので、

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1^2 = 1$$

$(\sin \theta)^2$ を、かっこを省いて $\sin^2 \theta$ と書きます ($\sin$ の右上に 2)。 $\sin(\theta^2)$ のことではありません。



$$\boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1}$$

数で確かめます。

$$30^\circ: \quad 0.5^2 + 0.866^2 = 0.25 + 0.75 = 1$$

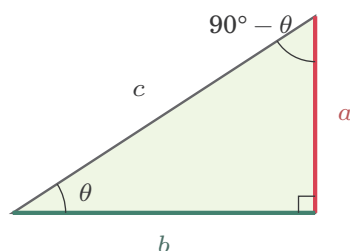
$$40^\circ: \quad 0.643^2 + 0.766^2 = 0.413 + 0.587 = 1.000$$

合っています。この式を使うと、 $\sin \theta$ がわかれば $\cos \theta$ がわかります。  例題 6

でためします。

③ $90^\circ - \theta$ から見ると、 $\sin$ と $\cos$ が入れかわる

直角三角形の直角でない2つの角は、 θ と $90^\circ - \theta$ です（内角の和が 180° だから。4-1）。
 $90^\circ - \theta$ の所に目を置くと、 θ のときの対辺が隣辺に、隣辺が対辺に入れかわります。斜辺は同じです。だから、



$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{b}{c} = \cos \theta \quad \cos(90^\circ - \theta) = \frac{a}{c} = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \theta}$$

③の電卓の表で、 $\sin 20^\circ = 0.342 = \cos 70^\circ$ のように、 $\sin$ の列を右から読むと $\cos$ の列になっていたのは、このためです（ $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ ）。

🔍 もっと知りたい ★★

「余弦」の「余」

θ と、たして 90° になる角 $90^\circ - \theta$ を、 θ の**余角**（よかく）といいます。上の式 $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$ は、「 θ のコサインは、余角のサイン」という意味です。余角（complement）のサイン（sine）なので、co-sine、日本語で余弦とよびます。 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ も同じ考え方で、 $\frac{1}{\tan \theta}$ を cotangent（コタンジェント）ということがあります。

⑥ 斜面の重力を2つに分ける

いよいよ、**？はてな？**の台車を考えます。

① 重力の大きさ mg

物を地球が引く力を**重力**といいます。質量約 100 g の物にはたらく重力は、約 1 N でした（2-15）。くわしくはかると、質量 1 kg の物にはたらく重力は 9.8 N です。9.8 は、地球の上ではかって決まった値です（物が落ちるとき、速さが 1 秒ごとに約 9.8 m/s ずつふえることと同じ数。第2巻の序章）。重力は質量に比例するので（2-15）、質量 m (kg) の物にはたらく重力は

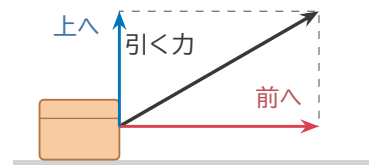
$9.8 \times m = mg$ (N) ($g = 9.8$ 。1 kg あたり 9.8 N なので、9.8 N/kg と書く)

です。 g は重力加速度ともよばれ、単位を m/s^2 と書くこともあります (N/kg と m/s^2 は同じ単位。5-5 でくわしく学びます)。質量 20 kg の台車なら、重力は $20 \times 9.8 = 196 \text{ N}$ です。質量 (kg) は物の量で、月へ行っても変わりません。重力 (N) は引っ張る力で、月では約 $\frac{1}{6}$ になります。

2 1本の力を、2本の力に分けて考える

重い荷物にロープをつけて、ななめ上へ引くと、荷物は前へ進みます。同時に、少し持ち上げられて軽くなります。ななめの1本の力が、「前へ引く力」と「上へ持ち上げる力」の2つの働きをしているのです。

力は矢印で表します。力の矢印を**長方形の対角線**にすると、長方形の2つの辺が、分けた2つの力になります。この分け方で、もとの力と同じ働きになることは、実験で確かめられています (法則。4-1。4-10 でくわしく)。力を2つに分けることを、力の**分解** (ぶんかい) といいます。

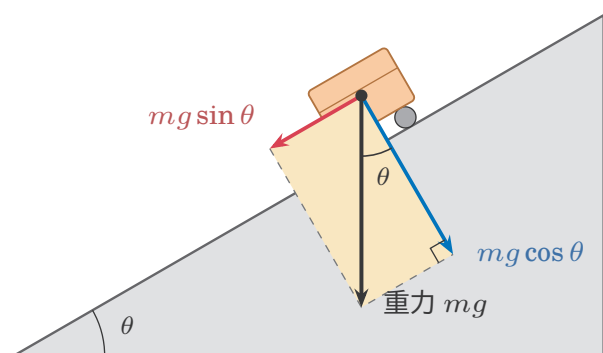


3 斜面にそった向きと、斜面に垂直な向きに分ける

斜面の上の台車では、重力 mg を、次の2つの向きに分けます。

- **斜面にそって下る向き**：台車を坂の下へ動かそうとする力。
- **斜面に垂直で、斜面へ押しつける向き**：台車を斜面に押しつける力。

重力の矢印 mg を対角線にして、この2つの向きに辺をもつ長方形をかきます。



赤：斜面にそって
下る向きの力
青：斜面へ
押しつける力
黒：重力
(長方形の対角線)

図3 重力(黒)を対角線とする長方形の2辺が、分けた2つの力。重力と青の矢印のあいだの角が、斜面の角 θ と同じになる。

図の、黒(重力)・青・長方形の辺でできる直角三角形を見ます。斜辺は重力 mg です。もし、黒と青のあいだの角が θ なら、 θ から見て、青は隣辺、赤と同じ長さの辺(点線)は対辺です。だから、②の「かけ算の形」で

$$\text{斜面にそった力} = mg \sin \theta$$

$$\text{斜面へ押しつける力} = mg \cos \theta$$

となります。この問題は、「黒と青のあいだの角は、ほんとうに斜面の角 θ と同じか」です。

④ なぜ、斜面の角と同じ θ が出てくるのか

考え方1：三角形の角の和(4-1)

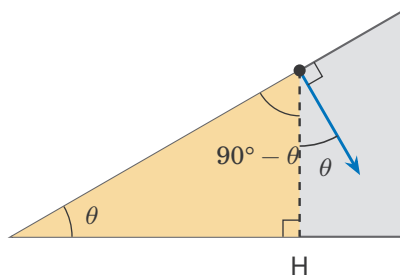
荷物から真下へ線を引き、地面とぶつかる点を H とします。斜面・地面・この線で、大きな直角三角形ができます。角は、ふもとで θ 、 H で 90° なので、荷物の所の角(斜面と真下の線のあいだ)は

$$180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$$

です。青の矢印は、斜面に垂直(90°)です。だから、真下の線(重力)と青のあいだの角は

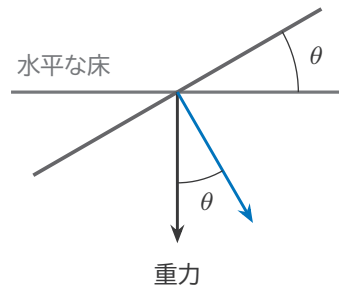
$$90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$$

となります。



考え方2：床をかたむける

はじめ、床は水平です。重力（真下）と、床に垂直な向きは、ぴったり重なっています。この床を θ だけかたむけて、斜面にします。床に垂直な向きも、床といっしょに θ だけ回ります。でも重力は、いつも真下のままです。だから、重力と「斜面に垂直な向き」のあいだには、床を回した角 θ だけずれができます。



考え方3：はしの場合で確かめる

$\theta = 0^\circ$ （平らな床）なら、 $\sin 0^\circ = 0$ で、斜面にそった力は 0。台車は動きません。 $\cos 0^\circ = 1$ で、重力はすべて床へ押しつける力です。 $\theta = 90^\circ$ （かべ）なら、 $\sin 90^\circ = 1$ で、重力はすべて「かべにそって下る力」になり、物はまっすぐ落ちます。どちらも、ふだんの経験と合います。

せいかくに言うと

斜面が押し返す力

台車が斜面にめりこまないのは、斜面が台車を、斜面に垂直な向きに押し返しているからです。この力を**垂直抗力**（すいちよくこうりよく）といいます。斜面に垂直な向きには台車は動かないので、垂直抗力の大きさは、押しつける力 $mg \cos \theta$ と同じです。物理シリーズでは、この力を N と書きます。

？はてな？の答え

重力はまっすぐ下向きでも、斜面の上では、その一部 $mg \sin \theta$ が「斜面にそって下る力」として働くので、台車は坂を下ります。止めておくには、坂にそって上向きに、 $mg \sin \theta$ の力で支えればよいのです（台車の車輪はよく回るので、まさは考えません）。質量 20 kg の台車なら、

- 30° の坂： $196 \times \sin 30^\circ = 196 \times 0.5 = 98 \text{ N}$ 。重力の半分です。
- 傾き $\frac{1}{12}$ のスロープ（約 4.76° ）： $196 \times \sin 4.76^\circ \approx 196 \times 0.083 = 16.3 \text{ N}$ 。重力の約 12 分の 1 です（**例題 8**）。

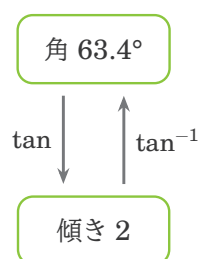
ゆるやかな坂ほど $\sin \theta$ が小さいので、小さな力で止めておけます。スロープがゆるやかに作られているのは、このためです。

⑦ 三角比から角度を求める： $\sin^{-1} \cdot \cos^{-1} \cdot \tan^{-1}$

④で、傾き 2 の坂の角は 60° と 70° のあいだ、とわかりました。ぴったりの角は、「 $\tan \theta = 2$ になる θ 」です。これを電卓で求めます。

関数電卓には、 $\sin^{-1} \cdot \cos^{-1} \cdot \tan^{-1}$ のキー

があります（SHIFT を押してから $\sin$ などを押すことが多い）。 $\tan^{-1} 2$ は「 $\tan$ が 2 になる角」という意味です。



- ① DEG になっているか確かめる。
- ② $\tan^{-1}$ を押して、2 と入れ、=を押す。
- ③ 63.43… と出る。角は約 63.4° 。

$\tan^{-1}$ は「アークタンジェント」と読みます。 $\tan$ が「角→傾き」なら、 $\tan^{-1}$ は反対の「傾き→角」です。右上の -1 は、 -1 乗 ($\frac{1}{\tan}$) ではありません。「反対向きの計算」というしるしです。 $\sin^{-1}$ （アークサイン）、 $\cos^{-1}$ （アークコサイン）も同じです。表計算では $=\text{DEGREES}(\text{ATAN}(2))$ のように書きます（ATAN の答えはラジアンなので、度に直す）。

これで、①の表の角度が計算できます。

	傾き	角度
スロープ	$\frac{1}{12}$	$\tan^{-1} \frac{1}{12} \approx 4.76^\circ$
道路の標識	0.1	$\tan^{-1} 0.1 \approx 5.71^\circ$
横 1 でたて 2 の坂	2	$\tan^{-1} 2 \approx 63.43^\circ$

8 0° から 180° までの三角比

直角三角形の三角比は、90° より小さい角でしか決まりませんでした。でも、次の章（4-7）では、120° のように 90° より大きい角（**鈍角**（どんかく））をもつ三角形を計算します。ロボットのうでのひじも、90° より大きく開きます。そこで、三角比の決め方を、180° まで広げます。

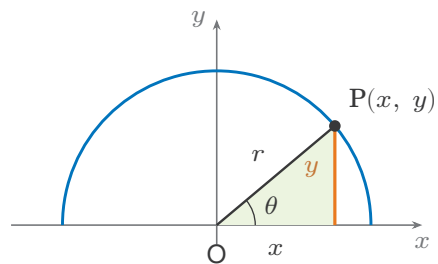
1 半円の上の点で、決め直す

原点 O を中心に、半径 r の半円をかきます。 x 軸の正の向きから、左回りに角 θ だけ回った所にある半円の上の点を $P(x, y)$ とします。このとき、

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

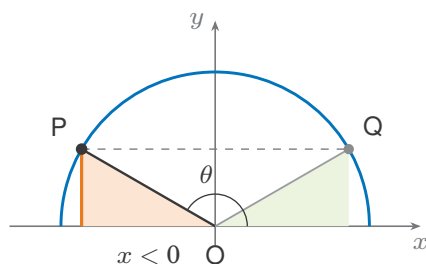
と決めます。

θ が鋭角のときは、 P から x 軸へ垂直な線を下ろすと、斜辺 r 、たて y 、横 x の直角三角形ができます。だから、この決め方は、②の決め方と同じ答えになります。



この決め方は、②の「極座標を (x, y) に直す式」 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ を、180° まで使えるように広げたものでもあります（両辺を r でわった形）。半径を 1 にすると、 $r = 1$ なので、 P の座標がそのまま $(\cos \theta, \sin \theta)$ になります。この見方は 4-8 で大活躍します。

2 鈍角では、 $\cos$ と $\tan$ が負になる



$\theta = 150^\circ$ の点 P は、 y 軸より左にあるので、 x 座標が負です。だから $\cos 150^\circ = \frac{x}{r}$ は負、 $\tan 150^\circ = \frac{y}{x}$ も負です。 y 座標は正なので、 $\sin 150^\circ$ は正です。

P を y 軸について折り返すと、 30° の点 Q に重なります。P と Q は、高さ y が同じで、 x は符号だけが反対です。 150° は $180^\circ - 30^\circ$ なので、

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta & \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

たとえば、

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ は直線 OP の傾きなので、鈍角では右下がりの直線になり、傾きが負になる (3-5)、と考えてもかまいません。

3 $0^\circ \cdot 90^\circ \cdot 180^\circ$

P が x 軸の上 ($\theta = 0^\circ$) なら $P(r, 0)$ 、真上 (90°) なら $(0, r)$ 、左はし (180°) なら $(-r, 0)$ です。表にまとめます。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

表5 90° では $x = 0$ になり、0 でわれないので $\tan 90^\circ$ は決まらない (1-14)。

$\sin \theta$ は 0° から 180° まで 0 以上で、 90° で最大の 1 です。そのため、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ になる角は、 30° と 150° の 2 つあります (P の高さが半径の半分になる点は、半円の上に 2 つあるから)。 $\cos \theta$ は、1 から -1 までへりつづけるので、 $\cos \theta$ の値から角は 1 つに決まります。鈍角の三角比も、電卓でそのまま計算できます ($\cos 150$ で -0.866)。

たいせつ

三角比 (θ から見た辺の比) : $\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ $\cos \theta = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ $\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$

対辺 = 斜辺 $\times \sin \theta$ 、隣辺 = 斜辺 $\times \cos \theta$ 。坂の傾き = $\tan \theta$ 。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

斜面の重力 : 斜面にそって $mg \sin \theta$ 、斜面へ押しつける向きに $mg \cos \theta$ 。

極座標 (r, θ) を (x, y) に直す : $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (鈍角の $\cos$ は負)

📖 この章で出てきたことば

斜辺・対辺・隣辺 直角三角形の、直角の向かいの辺・角 θ の向かいの辺・角 θ のとなりの辺 (斜辺でないほう)。

三角比 $\sin \theta$ (正弦)・ $\cos \theta$ (余弦)・ $\tan \theta$ (正接) のこと。角 θ だけで決まる。

こう配 傾きを百分率 (%) で表したもの。傾き 0.1 はこう配 10%。

力の分解 1 つの力を、同じ働きをする 2 つの力に分けること。

垂直抗力 面が物を、面に垂直な向きに押し返す力。

鋭角・鈍角 0° より大きく 90° より小さい角・ 90° より大きく 180° より小さい角。

$\sin^{-1} \cdot \tan^{-1}$ 三角比の値から、角を求める計算 (アークサイン・アークタンジェント)。

記号カード

初めて出た章 4-6

sin
cos

読み方 サイン・コサイン
 意味 角 θ の直角三角形の、
 斜辺に対する対辺・隣辺の比
 (正弦・余弦)
 英語 sine, cosine

記号カード

初めて出た章 4-6

tan

読み方 タンジェント
 意味 対辺÷隣辺の比(正接)。
 角 θ の坂の傾き
 英語 tangent

🔍 コラム ピラミッドの「セケド」

今から 4500 年ほど前、エジプトの人々は、ピラミッドの面の急さを「セケド」という数で決めていました。セケドは「高さを 1 キュービット (約 52 cm) 上がるあいだに、横へ何パーム進むか」で、1 キュービットは 7 パームです。ギザの大ピラミッドのセケドは $5\frac{1}{2}$ パームといわれます。高さ 7 に対して横 5.5 なので、傾きは $\frac{7}{5.5} \approx 1.27$ 、角度は $\tan^{-1} \frac{7}{5.5} \approx 51.8^\circ$ です。実際にはかった大ピラミッドの面の角度も約 51.8° です。4500 年前の人々も、「たて÷横」で坂を作っていたのです。

🔍 コラム スマートフォンは、重力の分け方でかたむきを知る

スマートフォンには、加速度センサーという、とても小さな半導体の部品が入っています。画面を水平から θ だけかたむけると、センサーは、重力 mg が「画面にそった向き」に $mg \sin \theta$ 、「画面に垂直な向き」に $mg \cos \theta$ だけ分かれているのをはかります (⑥と同じ分け方)。2 つの値の比は

$$\frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

なので、 $\tan^{-1}$ で角度がわかります。質量 1 kg あたりに直して、そった向きが 4.9 N、垂直な向きが 8.49 N なら、 $\tan \theta = \frac{4.9}{8.49} \approx 0.577$ で、 $\theta \approx 30^\circ$ です。画面を回すと表示が横向きになるのも、水平器のアプリが坂の角度を表示するのも、この計算のおかげです。

例題でたしかめよう

例題1 直角三角形の三角比

右の直角三角形 ABC (C が直角) で、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ と、 $\sin B$ 、 $\cos B$ 、 $\tan B$ を求めましょう。 $\sin A$ は「角 A の $\sin$ 」のことです。

考え方 どの角から見るかで、対辺と隣辺が変わります。角 A に目を置くと、向かいの辺は BC 、となりの辺は AC 。角 B に目を置くと、向かいの辺は AC 、となりの辺は BC です。斜辺は、どちらから見ても直角の向かいの AB です。

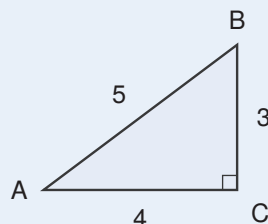
式 角 A から見る：対辺 $BC = 3$ 、隣辺 $AC = 4$ 、斜辺 $AB = 5$

$$\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{3}{4}$$

角 B から見る：対辺 $AC = 4$ 、隣辺 $BC = 3$ 、斜辺 $AB = 5$

$$\sin B = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}, \tan B = \frac{4}{3}$$

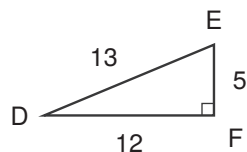
答え $\sin A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{3}{4}$ 、 $\sin B = \frac{4}{5}$ 、 $\cos B = \frac{3}{5}$ 、 $\tan B = \frac{4}{3}$



$\sin A = \cos B$ 、 $\cos A = \sin B$ になっています。 $A + B = 90^\circ$ なので、⑤の「 $90^\circ - \theta$ から見ると入れかわる」のとおりです。

じぶんでこう1

右の直角三角形 DEF (F が直角) で、 $\sin D$ 、 $\cos D$ 、 $\tan D$ と、 $\sin E$ 、 $\cos E$ 、 $\tan E$ を求めましょう。



ポイント 辺の長さが2つしかわからないときは、三平方の定理(4-4)でのこの辺を求めてから、三角比を作ります。どの角から見るかで、対辺と隣辺が入れかわることも、もう一度確かめましょう。

例題2 斜辺と角から、辺の長さを求める

(1) 長さ4mのはしごを、地面と 60° の角でかべに立てかけます。はしごの上のはしの高さと、はしごの下のはしからかべまでの距離を求めましょう。

(2) 高さ1.5mの台に、 30° の角で板をかけてすべり台を作ります。板の長さは何mですか。

考え方 はしごが斜辺、高さが対辺、かべまでの距離が隣辺です。(1)は「対辺=斜辺 $\times \sin \theta$ 」「隣辺=斜辺 $\times \cos \theta$ 」。(2)は対辺がわかっていて斜辺を求めるので、 $\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ を斜辺について解きます。

式 (1) 高さ $= 4 \times \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 2 \times 1.732 = 3.464$
 距離 $= 4 \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

(2) 板の長さを L とすると、 $\sin 30^\circ = \frac{1.5}{L}$
 両辺に L をかけて $L \sin 30^\circ = 1.5$ 。両辺を $\sin 30^\circ$ でわって

$$L = \frac{1.5}{\sin 30^\circ} = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

答え (1) 高さ約3.46m、距離2m (2) 3m

(2) は、「 30° の坂では、高さは斜辺の半分」と考えても、斜辺は高さの2倍で3mとわかります。

じぶんでこう2

- (1) 長さ 200 m の坂道が、水平と 5° の角をなしています。坂をのぼりきると何 m 高くなりますか。また、横に何 m 進みますか。電卓を使い、小数第 1 位まで求めましょう。
- (2) 高さ 2 m の所まで、 20° の角でまっすぐなスロープをかけます。スロープの長さは何 m ですか（小数第 1 位まで）。

ポイント 斜辺がわかっていて、たてや横を求めるときは「かけ算」（斜辺 $\times \sin \theta$ ）、たてがわかっていて斜辺を求めるときは「わり算」（たて $\div \sin \theta$ ）です。どちらも、もとの式 $\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ から作れます。

例題 3 極座標を (x, y) に直す

- (1) 灯台のレーダーに、船 A が極座標 $(3, 60^\circ)$ の所に見えました（距離の単位は km。4-2）。灯台を原点、東を x 軸の正の向き、北を y 軸の正の向きとして、船 A の (x, y) を求めましょう。
- (2) 長さ 50 cm のロボットのうでを、肩から 25° の向きにのぼしました。肩を原点として、手の (x, y) を電卓で求めましょう（小数第 1 位まで）。

考え方 斜辺 r の直角三角形で、横が $x = r \cos \theta$ 、たてが $y = r \sin \theta$ です (②)。(1) は三角定規の値 (③)、(2) は電卓 (DEG) で計算します。

式 (1) $x = 3 \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$
 $y = 3 \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx \frac{3 \times 1.732}{2} = 2.598$

(2) $x = 50 \cos 25^\circ = 50 \times 0.9063 = 45.31 \dots$

$y = 50 \sin 25^\circ = 50 \times 0.4226 = 21.13 \dots$

答え (1) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (約 (1.5, 2.6)) (2) 約 (45.3, 21.1)

(1) の答えは、4-2 で方眼に図をかいて読みとった「右へ約 1.5、上へ約 2.6」と同じです。図をかかなくても、計算で求められました。

じぶんでこう3

(1) 極座標が $(4, 30^\circ)$ の点の (x, y) を求めましょう ($\sqrt{\quad}$ を使って)。

(2) 長さ 40 cm のロボットのうでを、肩から 55° の向きにのばしました。

手の (x, y) を、電卓で小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント (r, θ) から (x, y) へは、「横は $r \cos \theta$ 、たては $r \sin \theta$ 」。答えは、 $x^2 + y^2 = r^2$ (三平方の定理) で確かめられます。(1) なら $1.5^2 + 2.598^2 \approx 9 = 3^2$ です。

例題 4 $\tan$ で高さをはかる

校庭の木から 20 m はなれた所に立ち、木のてっぺんを見上げると、水平から 35° の角でした。目の高さは 1.5 m です。木の高さは何 m ですか (小数第 1 位まで)。

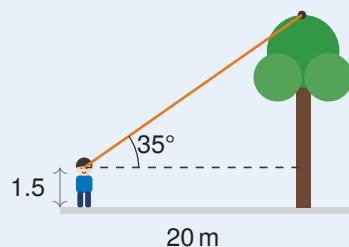
考え方 目の高さの水平な線と、木でできる直角三角形を考えます。 35° から見て、隣辺が 20 m、求めたい木の部分 (目より上) が対辺です。「対辺 = 隣辺 $\times \tan \theta$ 」を使い、最後に目の高さをたします。

式 目より上の部分 = $20 \times \tan 35^\circ$

$$= 20 \times 0.7002 = 14.004$$

$$\text{木の高さ} = 14.004 + 1.5 = 15.504$$

答え 約 15.5 m



見上げる角を**仰角**（ぎょうかく）といいます。仰角と距離がわかれば、のぼらなくても高さがわかります。目の高さをたしわすれないようにしましょう。

じぶんでとこう 4

ビルから 30 m はなれた所で、屋上を見上げると、仰角は 40° でした。目の高さを 1.6 m として、ビルの高さを小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント $\tan$ は「横がわかっているとき、たてを出す」道具です。仰角が 45° なら、 $\tan 45^\circ = 1$ なので、目より上の高さは、はなれた距離と同じになります。

コラム ストローと分度器で、仰角をはかろう

分度器のまっすぐな辺にストローをはり、中心の穴から糸をたらし、先にクリップなどのおもりをつけます。ストローで木のでっぺんをのぞくと、糸は分度器の 90° の目もりから少しずれた所を指します。このずれが仰角です。

わけは、⑥の「床をかたむける」と同じです。ストローを水平から θ だけ上に向けると、分度器の 90° の線も θ だけ回ります。でも糸は、重力でいつも真下を向いています。だから、糸と 90° の線のずれが θ になるのです。



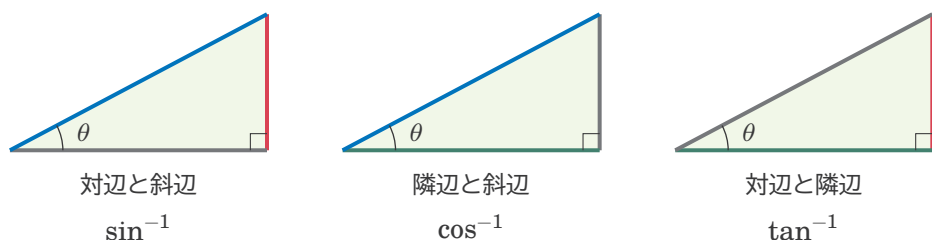


図4 色のついた2辺がわかっているとき、使うキー。赤は対辺、緑は隣辺、青は斜辺。灰色の辺は使わない。

例題5 三角比から角度を求める

- (1) 傾き $\frac{1}{12}$ のスロープの角度を求めましょう。
- (2) 長さ 3 m のはしごを立てかけると、上のはしが高さ 2.8 m になりました。はしごと地面の角度を求めましょう。
- (3) 長さ 4 m のはしごの下のはしを、かべから 1 m はなして立てかけました。はしごと地面の角度を求めましょう。
- どれも、小数第1位まで求めます。

考え方 (1) 傾き = $\tan \theta$ なので、 $\tan^{-1}$ で角を出します。(2) 斜辺 3 と対辺 2.8 がわかっているので、 $\sin \theta = \frac{2.8}{3}$ 。 $\sin^{-1}$ で角を出します。(3) 斜辺 4 と隣辺 1 (かべまでの距離) がわかっているので、 $\cos \theta = \frac{1}{4}$ 。 $\cos^{-1}$ で角を出します。電卓は DEG にします。

式 (1) $\tan \theta = \frac{1}{12} = 0.0833 \dots$
 $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{12} = 4.763 \dots$
 (2) $\sin \theta = \frac{2.8}{3} = 0.9333 \dots$
 $\theta = \sin^{-1} 0.9333 \dots = 68.96 \dots$
 (3) $\cos \theta = \frac{1}{4} = 0.25$
 $\theta = \cos^{-1} 0.25 = 75.52 \dots$

答え (1) 約 4.8° (2) 約 69.0° (3) 約 75.5°

(2) は、電卓に $2.8 \div 3$ を計算させてから $\sin^{-1}$ を押すと、途中で数を丸めずに済みます。

じぶんでこう 5

- (1) こう配 10% の道路の角度を求めましょう。
 (2) 長さ 5 m のはしごの下のはしを、かべから 1.5 m はなして立てかけました。はしごと地面の角度を求めましょう。
 どちらも小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント わかっている 2 辺が「対辺と斜辺」なら $\sin^{-1}$ 、「隣辺と斜辺」なら $\cos^{-1}$ 、「対辺と隣辺」なら $\tan^{-1}$ を使います。出てきた角を電卓で $\sin$ などに入れ直して、もとの比にもどるか確かめましょう。

例題 6 1 つの三角比から、ほかの三角比を求める

θ が鋭角で、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めましょう。

考え方 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に $\sin \theta$ の値を入れて、 $\cos \theta$ を求めます。鋭角なので $\cos \theta$ は正です。 $\tan \theta$ は $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ です。

式 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos \theta > 0$ なので $\cos \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

答え $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\tan \theta = \frac{3}{4}$

図でも確かめられます。斜辺 5、対辺 3 の直角三角形をかくと、隣辺は三平方の定理で $\sqrt{25 - 9} = 4$ 。 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ です ( 例題 1 の三角形と同じ)。

 じぶんでとこう6

θ が鋭角で、 $\cos \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ を求めましょう。

ポイント θ が鈍角なら、 $\cos \theta$ は負になります。 $\sqrt{\quad}$ をとったあと、角が鋭角か鈍角かで、符号を決めます。問題に「鋭角」と書いてあるのは、そのためです。

 例題7 $0^\circ \sim 180^\circ$ の三角比

(1) 次の値を求めましょう。

ア $\sin 60^\circ$ イ $\tan 45^\circ$ ウ $\sin 135^\circ$ エ $\cos 135^\circ$ オ $\tan 150^\circ$

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ になる θ を求めましょう ($\leq$ は「以下」)。

考え方 鈍角は $180^\circ - \theta$ の式で鋭角に直します。 $\sin$ はそのまま、 $\cos$ と $\tan$ は符号が反対になります。(2) は、半円の上で高さが同じ点が2つあることに注意します。

式 (1) ア $\frac{\sqrt{3}}{2}$ イ 1

$$\text{ウ } \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{エ } \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{オ } \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \text{ 鋭角では } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$ なので、 120° も

答え (1) ア $\frac{\sqrt{3}}{2}$ イ 1 ウ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ エ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ オ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

じぶんでこう7

(1) 次の値を求めましょう。 ア $\cos 30^\circ$ イ $\tan 60^\circ$ ウ $\sin 120^\circ$
エ $\cos 120^\circ$ オ $\tan 135^\circ$

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ になる θ を求めましょう。

ポイント 鈍角の三角比は、 $180^\circ - \theta$ の鋭角に直して、 $\sin$ はそのまま、 $\cos$ と $\tan$ には $-$ をつけます。半円の図をかいて、点が y 軸の右にあるか左にあるかを見れば、符号をまちがえません。

例題 8 斜面の重力を 2 つに分ける

重力の大きさは mg ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$) です。まさつは考えません。

(1) 30° の斜面に、質量 10 kg の荷物があります。斜面にそった力と、斜面へ押しつける力を求めましょう。

(2) 傾き $\frac{1}{12}$ のスロープに、質量 20 kg の台車があります。台車を止めておくのに、斜面にそって何 N の力が必要ですか。

考え方 斜面にそった力は $mg \sin \theta$ 、押しつける力は $mg \cos \theta$ (⑥)。(2) は、まず $\tan^{-1}$ で角を求めます (⑦)。

式 (1) $mg = 10 \times 9.8 = 98$

$$\text{そった力} = 98 \times \sin 30^\circ = 98 \times 0.5 = 49$$

$$\text{押しつける力} = 98 \times \cos 30^\circ = 98 \times 0.866 = 84.9$$

$$(2) \theta = \tan^{-1} \frac{1}{12} \approx 4.76^\circ, mg = 20 \times 9.8 = 196$$

$$196 \times \sin 4.76^\circ \approx 196 \times 0.0830 = 16.3$$

答え (1) 斜面にそって 49 N 、押しつける力約 84.9 N (2) 約 16.3 N

(1) で、 $49^2 + 84.9^2 = 2401 + 7208 = 9609$ 、 $98^2 = 9604$ で、ほぼ等しくなります (84.9 は四捨五入した値なので、少しずれる)。分けた 2 つの力は、長

方形の2辺なので、三平方の定理が成り立つのです。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺に $(mg)^2$ をかけた形です。

じぶんでこう8

(1) 45° の斜面に、質量 4 kg の物があります。斜面にそった力と、斜面へ押しつける力を求めましょう (小数第1位まで)。

(2) 傾き $\frac{1}{15}$ のスロープに、質量 30 kg の台車があります。止めておくのに必要な、斜面にそった力を求めましょう (小数第1位まで)。

ポイント 分けた2つの力は、どちらも重力 mg より大きくなりません ($\sin \theta$ も $\cos \theta$ も1以下だから)。角が大きくなるほど、そった力はふえ、押しつける力はへります。 45° で、ちょうど同じ大きさになります。

例題9 力から斜面の角を求める

質量 5 kg の荷物を斜面にのせると、斜面にそって下る力が 25 N でした。斜面の角を小数第1位まで求めましょう。まさつは考えません。

考え方 斜面にそった力 $mg \sin \theta$ が 25 です。この式から $\sin \theta$ を求め、 $\sin^{-1}$ で角にします。

式 $mg = 5 \times 9.8 = 49$

$$49 \times \sin \theta = 25 \text{ より } \sin \theta = \frac{25}{49} = 0.5102 \dots$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.5102 \dots = 30.68 \dots$$

答え 約 30.7°

確かめ： $\sin 30^\circ = 0.5$ なので、 30° なら $49 \times 0.5 = 24.5$ 。25 は少しだけ大きいので、角も 30° より少し大きい。合っています。

じぶんでこう9

質量 8 kg の物を斜面にのせると、斜面にそって下る力が 20 N でした。斜面の角を小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント 力から角を求めるときは、まず「そった力÷重力」で $\sin \theta$ を作ります。求めた角で $mg \sin \theta$ を計算し直して、はじめの力にもどるか確かめましょう。

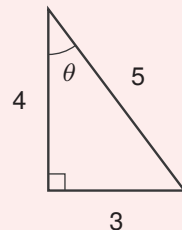
⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

いつも「たて÷ななめ」を $\sin$ にする

✗ 右の図で $\sin \theta = \frac{\text{たて}}{\text{ななめ}} = \frac{4}{5}$

○ θ の向かいの辺（対辺）は横の 3。 $\sin \theta = \frac{3}{5}$
 $\sin$ は「たて」ではなく「 θ の対辺」です。 θ が上にあると、対辺は横になります。いつも θ の所に目を置いて、向かいの辺をさがしましょう。



⚠ まちがえやすいところ

電卓が RAD のまま

✗ $\sin 30$ を計算したら -0.988 。だから $\sin 30^\circ = -0.988$

○ DEG に切りかえて $\sin 30 = 0.5$

鋭角の三角比は、0 より大きいはずです。 -0.988 は「30 ラジアン」のサインです。 $\sin 30$ で 0.5 が出るか、はじめに確かめる習慣をつけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

$\sin^{-1}$ を $\frac{1}{\sin}$ と読む

✗ $\sin^{-1} 0.5 = \frac{1}{\sin 0.5}$

○ $\sin^{-1} 0.5$ は「 $\sin$ が 0.5 になる角」で、 30°

-1 は「反対向きの計算」のしるしです。いっぽう $\sin^2 \theta$ の 2 は、 $(\sin \theta)^2$ という 2 乗です。右上の数の意味が、 -1 と 2 でちがうので気をつけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

斜面にそった力を $mg \cos \theta$ にする

✗ 斜面にそった力は $mg \cos \theta$

○ 斜面にそった力は $mg \sin \theta$

$\theta = 0^\circ$ (平ら) で確かめます。平らな床の上の物は動かないので、そった力は 0 のはず。 $\cos 0^\circ = 1$ では mg になって合いません。 $\sin 0^\circ = 0$ なら合います。

⚠ まちがえやすいところ

傾きと角度を比例させる

✗ 傾き 1 が 45° なので、傾き 2 は 90°

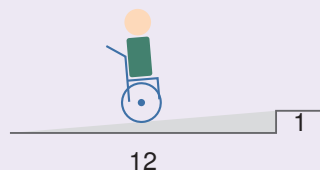
○ 傾き 2 は $\tan^{-1} 2 \approx 63.4^\circ$

傾きと角度は比例しません。傾き $\tan \theta$ は、 90° に近づくとき急に大きくなります。

物理・工学ではこう使う

車いすのスロープ

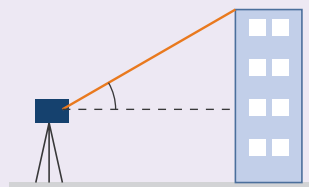
建物のスロープは、きまりで傾き $\frac{1}{12}$ より急にしないことになっています（屋外では、もっとゆるやかな $\frac{1}{15}$ がすすめられています）。人と車いすを合わせて質量 80 kg なら、重力は $80 \times 9.8 = 784 \text{ N}$ 。 $\frac{1}{12}$ のスロープ（約 4.76° ）では、坂にそって $784 \times \sin 4.76^\circ \approx 65 \text{ N}$ の力で押せばのぼれます。30° の坂なら 392 N もかかり、とても のぼれません。



物理・工学ではこう使う

測量：行けない所の高さをはかる

土地の高さや建物の高さをはかる人は、トランシットという道具で仰角をはかり、**例題 4**と同じように $\tan$ で高さを計算します。スマートフォンの「高さをはかるアプリ」も、画面のかたむき（加速度センサーではかる角度）と距離から、同じ計算をしています。



物理・工学ではこう使う

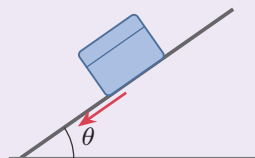
すべり出す角で、まさつの大きさをはかる

下じきに消しゴムをのせ、下じきを少しずつかたむけます。ある角 θ をこえると、消しゴムはすべり出します。まさつの力は、押しつける力 $mg \cos \theta$ の、最大で μ （ミュー）倍までしか出せません。 μ はすべりにくさを表す数（静止まさつ係数）です。すべり出す角では、そった力とまさつの最大がちょうど同じなので、

$$mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta \quad \text{より}$$

$$\mu = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

35° ですべり出したら、 $\mu = \tan 35^\circ \approx 0.70$ です。質量 m が消えるので、重い消しゴムでも同じ角ですべり出します。



コラム 身のまわりの坂を、角度でくらべよう

	傾き（高さ÷横）	角度
車いすのスロープ（ $\frac{1}{12}$ ）	0.083	約 4.8°
こう配 10% の道路	0.1	約 5.7°
すべり台（120 cm ÷ 240 cm）	0.5	約 26.6°
階段（16 cm ÷ 30 cm）	0.533	約 28.1°
エスカレーター	0.577	30°

傾き（3-5）を $\tan^{-1}$ で角度に直しました。エスカレーター・階段・すべり台は、どれも 30° 近くです。 30° の坂では重力の半分が坂にそってかかりますが、 5° のスロープなら約 12 分の 1 ですみます（⑥）。

🔍 コラム 自転車で坂をのぼると、どれくらい重い？

人と自転車を合わせて質量 70 kg とすると、重力は $70 \times 9.8 = 686\text{ N}$ です。こう配ごとに、坂にそって下る力 $686 \sin \theta$ を計算しました（角は $\tan^{-1}$ で求めた）。

こう配	角度	下る力
5%	2.86°	34.3 N
10%	5.71°	68.3 N
20%	11.31°	134.5 N

こう配 10% の坂では、平らな道より約 68 N （約 7 kg の物を持ち上げる力）多くペダルをふみます。ギアを軽くすると、進むのはおそくなるかわりに、ふむ力が小さくてすみます。

🔍 コラム 表計算で、三角比の表を作ろう

A 列に角度（度）を入れ、B2 に $=\text{SIN}(\text{RADIANS}(A2))$ 、C2 に $=\text{COS}(\text{RADIANS}(A2))$ 、D2 に $=\text{TAN}(\text{RADIANS}(A2))$ と入れて、下の行へコピーします。度をラジアンに直す RADIANS をわすれずに（4-2）。

	A	B	C	D
1	角度	sin	cos	tan
2	0	0.0000	1.0000	0.0000
3	30	0.5000	0.8660	0.5774
4	45	0.7071	0.7071	1.0000
5	60	0.8660	0.5000	1.7321

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (⑤) や三角定規の値が確かめられます。角度を 1° ずつにすれば、「三角比の表」がすぐにできます。



章末問題

4-6 のまとめ

基本

1 直角三角形 ABC で、C が直角、 $BC = 8$ 、 $AC = 15$ 、 $AB = 17$ です。 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ と、 $\sin B$ 、 $\cos B$ 、 $\tan B$ を求めましょう。(例題 1)

2 次の値を求めましょう。(1) $\sin 45^\circ$ (2) $\cos 60^\circ$ (3) $\tan 30^\circ$ (4) $\sin 150^\circ$ (5) $\cos 135^\circ$ (例題 7)

3 長さ 300 m のまっすぐな坂道が、水平と 6° の角をなしています。坂をのぼりきると何 m 高くなりますか。また、横に何 m 進みますか。小数第 1 位まで求めましょう。(例題 2)

4 極座標が次の点の (x, y) を求めましょう。(1) は $\sqrt{\quad}$ を使い、(2) は電卓で小数第 1 位まで求めます。(1) $(6, 45^\circ)$ (2) $(20, 70^\circ)$ (例題 3)

5 塔から 25 m はなれた所で、塔のてっぺんの仰角をはかると 32° でした。目の高さを 1.5 m とし、塔の高さを小数第 1 位まで求めましょう。(例題 4)

6 次の角度を、小数第 1 位まで求めましょう。
(1) 傾き 0.2 の坂の角度 (2) 長さ 4 m のはしごの上のはしが、高さ 3.5 m にあるときの、はしごと地面の角度(例題 5)

7 θ が鋭角で、 $\sin \theta = \frac{8}{17}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めましょう。(例題 6)

8 20° の斜面に、質量 40 kg の荷物があります。斜面にそった力と、斜面へ押しつける力を、小数第 1 位まで求めましょう ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、まさは考えない)。(例題 8)

チャレンジ ★★★★

9 高さ 0.75 m の入り口へ、傾き $\frac{1}{12}$ のスロープを作ります。(1) スロープの横の長さは何 m ですか。(2) スロープの角度を小数第 2 位まで求めましょう。(3) スロープの板の長さ(斜辺)は何 m ですか。小数第 2 位まで求めましょう。
(📖 例題 5 ・ 📖 例題 2)

10 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ になる θ を求めましょう。また、そのそれぞれについて $\cos \theta$ の値を求めましょう。(📖 例題 7)

11 質量 12 kg の荷物を斜面にのせると、斜面にそって下る力が 50 N でした(まさつは考えない)。(1) 斜面の角を小数第 1 位まで求めましょう。(2) 斜面へ押しつける力を小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 9 ・ 📖 例題 8)

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 直角三角形で、どの角から見るかに気をつけて、 $\sin \cdot \cos \cdot \tan$ を求められる。 → 200 ページ
- ☐ 三角比と電卓で、辺の長さや角度を求められる。坂の傾きを角度に直せる。 → 203 ページ
- ☐ 斜面の重力を、 $mg \sin \theta$ と $mg \cos \theta$ に分けられる。 → 208 ページ



ソラ

三角比があれば、行けない木の高さも、坂の上の力も計算できるね。
次の章では、直角のない三角形も計算するよ。

第2部 三角比と三角関数

★★★

4-7

三角形を解く： 正弦定理と余弦定理

道しるべ この章の前に [4-1](#) [4-4](#) [4-6](#) この章の先に [4-9](#) [4-10](#) [4-14](#)

この章でできるようになること

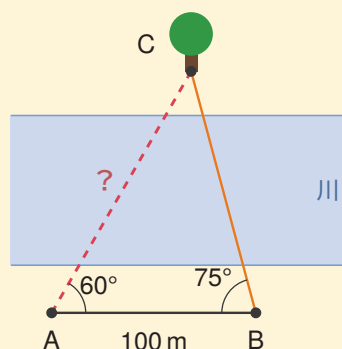
- ★★★ 鈍角の三角比を使い、三角形の面積を $\frac{1}{2}ab \sin C$ で求められる。
- ★★★ 正弦定理と余弦定理を使い分けて、三角形の辺や角を求められる。
- ★★★ 2つの関節をもつロボットのうでの角を、余弦定理で求められる。

? はてな?

川の向こう岸に、大きな木 C があります。木までの距離を知りたいのですが、川は渡れません。

そこで、こちらの岸に2つの点 A、B をとり、AB の長さと、A と B から木を見た角をはかりました。AB = 100 m、A の角は 60° 、B の角は 75° です。

直角のない三角形でも、A から C までの距離は計算できるでしょうか。



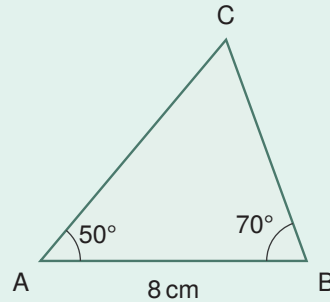
4-6 では、直角三角形の辺の比を使いました。この章では、直角のない三角形でも、辺と角の関係を式にします。三角形のわかっている辺や角から、のこりの辺や角を求めることを、**三角形を解く**といいます。

△ やってみよう 辺と、向かいの角の sin をくらべよう

用意するもの

ノート、定規、分度器、電卓

- ① $AB = 8\text{ cm}$ 、 A の角 50° 、 B の角 70° の三角形 ABC をかこう。
- ② 辺 BC 、 CA の長さと、 C の角をはかろう。
- ③ 「辺の長さ ÷ 向かいの角の $\sin$ 」を、3 つの辺について計算しよう。
- ④ $AB = 6\text{ cm}$ 、 A の角 30° 、 B の角 110° の三角形でもやってみよう。



ミナさんがはかった結果です（長さは 0.1 cm まで）。

	①の三角形	④の三角形
$BC \div \sin A$	$7.1 \div \sin 50^\circ = 9.27$	$4.7 \div \sin 30^\circ = 9.40$
$CA \div \sin B$	$8.7 \div \sin 70^\circ = 9.26$	$8.8 \div \sin 110^\circ = 9.36$
$AB \div \sin C$	$8 \div \sin 60^\circ = 9.24$	$6 \div \sin 40^\circ = 9.33$

どちらの三角形でも、3 つの値がほとんど同じになりました（小さなずれは、はかるときのずれ）。 C の角は、内角の和が 180° なので、①は $180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$ 、④は 40° です。 110° のような鈍角の $\sin$ も、4-6 ⑧の決め方で計算しています。この「同じになる値」のなぞを、③でときます。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 4-1** 三角形の内角の和は 180° 。合同条件は「3 辺」「2 辺とそのあいだの角」「1 辺とその両はしの角」で、どれも三角形が 1 つに決まる条件。
- 4-2** 円周角は中心角の半分。同じ弧に対する円周角は等しい。直径に対する円周角は 90° 。三角形の 3 つの頂点を通る円の中心が外心。
- 4-4** 2 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) の距離は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。
- 4-6** 対辺 = 斜辺 $\times \sin \theta$ 、隣辺 = 斜辺 $\times \cos \theta$ 。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。
半径 r の半円の上で角 θ の点は $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 。
 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ 、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (鈍角の $\cos$ は負)。

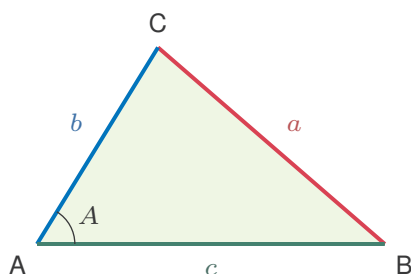
🏠 数学の道具

① 三角形の名前のつけ方と、鈍角の三角比

この章では、三角形 ABC の辺と角を、次のように書きます。

- 頂点 A の角 ($\angle BAC$ 。4-1) を、かんたんに A と書く。B、C も同じ。
- 角 A の向かいの辺 BC の長さを a 、角 B の向かいの辺 CA を b 、角 C の向かいの辺 AB を c と書く。

大文字の角と、同じ文字の小文字の辺は、いつも向かい合っています。4-6 で「 θ の対辺」とよんだ辺と同じ見方です。



① 三角形を座標の上に置く

三角形の頂点 C を原点に、辺 CB を x 軸の正の向きに置きます。B の座標は $(a, 0)$ です。A は、C から長さ b で、 x 軸から角 C だけ回った所にあります。半径 b の半円の上の点なので (4-6 ⑧)、

$$A(b \cos C, b \sin C)$$

です。この置き方は、 C が鋭角でも鈍角でも使えます。

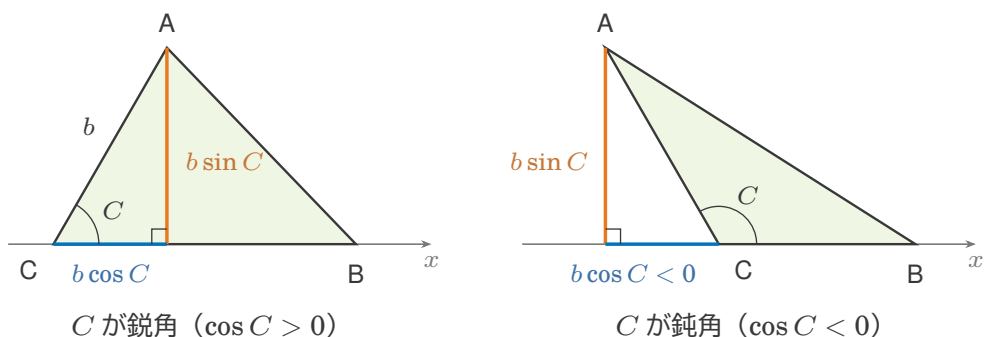


図1 Aから x 軸へ下ろした垂線の足は、 C が鈍角だと、 C より左(B の反対がわ)に出る。

2 鈍角の $\cos$ が負になるわけを、図で見る

C が鈍角のとき、 A の x 座標 $b \cos C$ は負です。図では、 A から下ろした垂線の足が、 C から見て B と反対がわに出ています。「 $\cos C$ が負」は、「 A の真下の点が、 C の向こうがわにある」という意味なのです。高さ $b \sin C$ は、鋭角でも鈍角でも正です。数で確かめます。 $b = 4$ とすると、

- $C = 60^\circ : A(4 \cos 60^\circ, 4 \sin 60^\circ) = (2, 3.46)$
- $C = 120^\circ : A(4 \cos 120^\circ, 4 \sin 120^\circ) = (-2, 3.46)$

60° と 120° で、高さは同じで、横の位置だけが左右反対になります。これは、 $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0.5$ だからです。

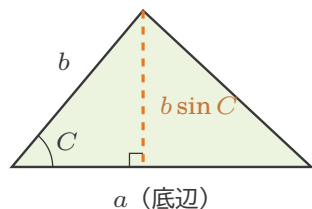
2 三角形の面積： $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

三角形の面積は、底辺×高さ÷2でした(4-5)。

①の置き方で、底辺を CB (長さ a) にすると、高さは A の y 座標 $b \sin C$ です。だから、

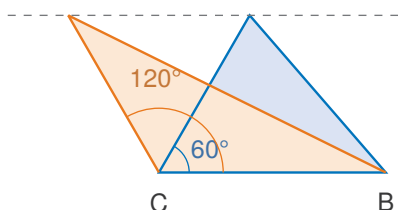
$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \sin C = \frac{1}{2}ab \sin C$$

2 辺と、そのあいだの角がわかれば、面積が求められます。



確かめ1：直角のとき $C = 90^\circ$ なら $\sin 90^\circ = 1$ で、 $S = \frac{1}{2}ab$ 。直角をはさむ2辺の積の半分で、長方形の半分と合います。

確かめ2：数で $a = 6$ 、 $b = 4$ 、 $C = 30^\circ$ なら、高さは $4 \sin 30^\circ = 2$ なので、面積は $6 \times 2 \div 2 = 6$ 。式でも $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$ です。



2辺の長さが同じで、あいだの角が 60° の三角形（青）と 120° の三角形（オレンジ）は、高さが同じなので、面積も同じです。 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$ だからです（4-6 ⑧）。

どの2辺を使ってもかまいません。2辺 b 、 c とそのあいだの角 A なら $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 、2辺 c 、 a とそのあいだの角 B なら $S = \frac{1}{2}ca \sin B$ です。この三角形を2つ合わせた平行四辺形の面積は $ab \sin C$ です。この形は、4-14の外積で、もう一度出てきます。

3 正弦定理

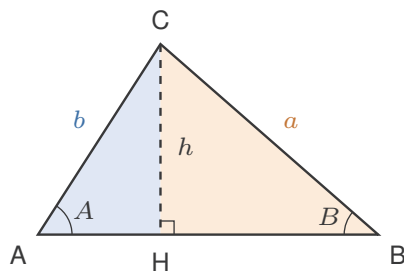
やってみよう で、「辺÷向かいの角の $\sin$ 」が、3つとも同じになりました。そのわけを、2通りで考えます。

1 高さを2通りで表す

C から AB へ垂直な線を下ろし、足を H とします。CH の長さ h を、2つの直角三角形で表します。

- 三角形 ACH：斜辺 b 、角 A の対辺が h 。
だから $h = b \sin A$ 。
- 三角形 BCH：斜辺 a 、角 B の対辺が h 。
だから $h = a \sin B$ 。

同じ h なので、 $a \sin B = b \sin A$ 。両辺を $\sin A \sin B$ でわると (2-14)、



$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} \quad \text{つまり} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

A から BC へ垂直な線を下ろして同じように考えると、 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ も出てきます。だから、3 つとも等しいのです。

せいかくに言うと

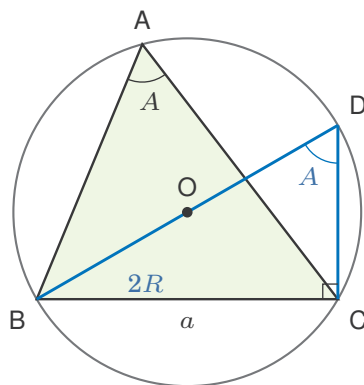
A が鈍角のとき

A が鈍角なら、H は辺 AB をのぼした先 (A の外がわ) に出ます。そのとき三角形 ACH の、A の所の角は $180^\circ - A$ なので、 $h = b \sin(180^\circ - A)$ 。 $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ (4-6 ⑧) なので、やはり $h = b \sin A$ です。だから、鈍角があっても同じ式になります。

② その値は、外接円の直径

三角形の 3 つの頂点を通る円を**外接円** (がいせつえん) といいます (中心は外心。4-2)。半径を R とします。

B から円の中心 O を通る直径 BD を引きます。



- ① D の角 $\angle BDC$ と、A の角 A は、同じ弧 BC に対する円周角なので等しい (4-2)。
- ② BD は直径なので、 $\angle BCD = 90^\circ$ (4-2)。
- ③ 直角三角形 BCD で、斜辺 BD は $2R$ 、D の対辺は $BC = a$ 。だから $a = 2R \sin D = 2R \sin A$ 。

③の式の両辺を $\sin A$ でわると $\frac{a}{\sin A} = 2R$ です。①で見たように、ほかの辺も同じ値なので、次の式が成り立ちます。これを**正弦定理** (せいげんていり) といいます (定理。4-1)。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

㊦ やってみよう の①の三角形では、値が約 9.24 でした。外接円の直径が約 9.24 cm、半径が約 4.6 cm ということです。コンパスで、半径 4.6 cm の円をかいて確かめてみましょう。3つの頂点の近くを通るはずです。

正弦定理が言っていること

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ です。**大きい角の向かいには、長い辺**があります。ただし、辺の長さは角の大きさに比例するのではなく、角の $\sin$ に比例します。たとえば、三角定規 ($30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$) の辺の比は、 $1 : 2 : 3$ ではなく、 $\sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$ です (4-4 と同じ)。

㊦ はてな? の答え

三角形 ABC で、 $c = AB = 100$ 、 $A = 60^\circ$ 、 $B = 75^\circ$ です。まず、内角の和から

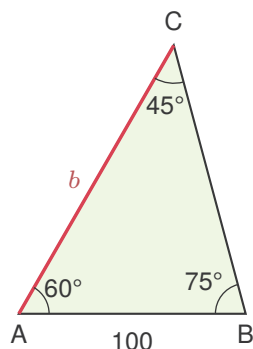
$$C = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

求めたい AC は、角 B の向かいの辺 b です。

正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ の両辺に $\sin B$ をかけて、

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{100 \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \times 0.9659}{0.7071} \approx 136.6$$

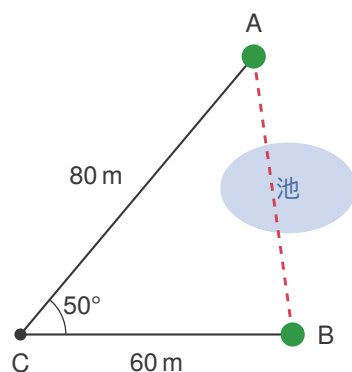
木までの距離は約 137 m です ($\approx$ は「ほぼ等しい」という記号。4-6、5-8)。川を渡らなくても、こちらの岸ではかった1つの長さで2つの角だけで、計算できました。



4 余弦定理

池をはさんで、2本の木 A、B があります。池の中は歩けないので、AB の長さを直接はかれません。そこで、両方が見える点 C に立ち、 $CA = 80\text{ m}$ 、 $CB = 60\text{ m}$ 、C の角 50° をはかりました。

こんどは、わかっている角 C の向かいの辺 c がわかりません。正弦定理には「角と、その向かいの辺」の組が必要なので、このままでは使えません。新しい道具を作ります。



1 座標と2点の距離で作る

①の置き方を使います。C を原点、B を $(a, 0)$ 、A を $(b \cos C, b \sin C)$ に置きます。 c は A と B の距離なので、2点の距離の式 (4-4) で

$$\begin{aligned}
 c^2 &= (b \cos C - a)^2 + (b \sin C - 0)^2 && \text{(2点の距離の2乗)} \\
 &= b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \sin^2 C && \text{(展開する。3-8)} \\
 &= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab \cos C && (b^2 \text{ でくくる}) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C && (\sin^2 C + \cos^2 C = 1. \text{ 4-6})
 \end{aligned}$$

これを**余弦定理**（よげんていり）といいます。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

2 辺と、そのあいだの角から、のこりの辺が求められます。ほかの辺についても、同じ形の式が成り立ちます。

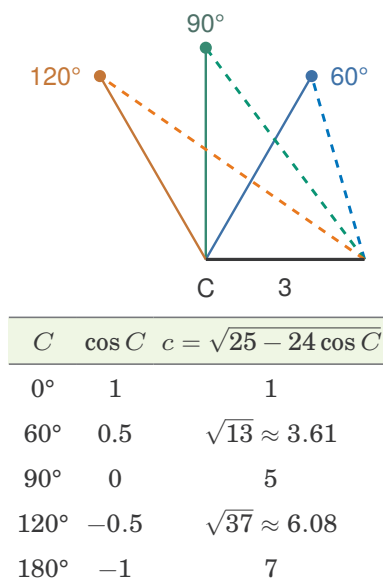
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

どの式でも、左の辺と、右の $\cos$ の角が向かい合っています。

2 三平方の定理からの「ずれ」

角 C を 90° にすると、 $\cos 90^\circ = 0$ なので $c^2 = a^2 + b^2$ 。三平方の定理にもどります。余弦定理は、三平方の定理を、直角でない三角形に広げた式なのです。 $-2ab \cos C$ は、直角からのずれを直す部分です。

コンパスを開くように、 $a = 3$ 、 $b = 4$ のまま角 C を変えると、 c は次の表のように変わります。 C が 90° より小さいと $\cos C > 0$ で、 c は 5 より短くなります。 90° より大きいと $\cos C < 0$ で、 $-2ab \cos C$ が正になり、 c は 5 より長くなります。



図は、長さ 3 の辺（黒）を横に置いたまま、長さ 4 の辺を $60^\circ \cdot 90^\circ \cdot 120^\circ$ に開いたところです。点線が、向かいの辺 c です。

開く角が大きいほど、点線は長くなります。 90° のときが三平方の定理の $c = 5$ で、それより閉じると短く、開くと長くなります。

0° では、2 辺が重なって

$c = 4 - 3 = 1$ 。 180° では、一直線になって $c = 3 + 4 = 7$ 。表のはしの値も、図で考えたとおりです。

池の答え

$a = 60$ 、 $b = 80$ 、 $C = 50^\circ$ を入れます ($\cos 50^\circ \approx 0.6428$)。

$$\begin{aligned} c^2 &= 60^2 + 80^2 - 2 \times 60 \times 80 \times \cos 50^\circ \\ &= 3600 + 6400 - 9600 \times 0.6428 = 10000 - 6170.9 = 3829.1 \end{aligned}$$

$c = \sqrt{3829.1} \approx 61.9$ なので、AB は約 61.9 m です。

3 3 辺から角を求める

余弦定理を $\cos C$ について解くと (2-14)、3 辺の長さから角が求められます。 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ で、 $2ab \cos C$ を左へ、 c^2 を右へ移すと $2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$ 。両辺を $2ab$ でわって、

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

たとえば、3 辺が 3、5、7 の三角形で、いちばん長い辺 7 の向かいの角を C とすると、

$$\cos C = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{9 + 25 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$\cos C$ が負なので、 C は鈍角です。4-6 ⑧の表から $C = 120^\circ$ です。 $\cos$ の値から、角は $0^\circ \sim 180^\circ$ でただ 1 つに決まるので (4-6 ⑧)、安心して $\cos^{-1}$ が使えます。

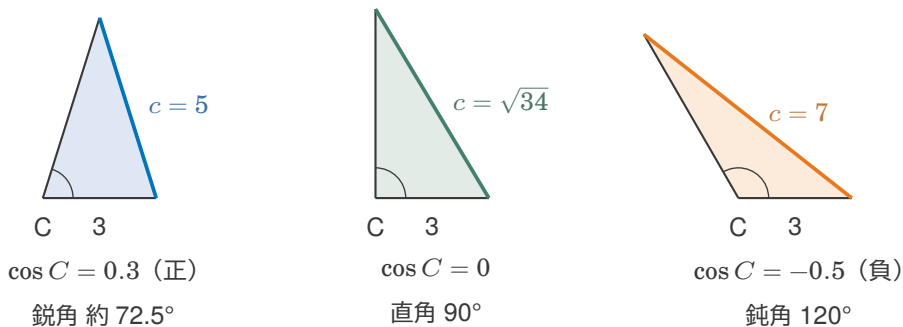


図2 $a = 3$ 、 $b = 5$ (Cからのびる2辺) のまま、向かいの辺 c を長くしていくと、 $\cos C$ が正 $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ 負と変わり、角 C が鋭角 $\rightarrow$ 直角 $\rightarrow$ 鈍角になる。

🔍 もっと知りたい ★★★

3 辺から面積：ヘロンの公式と内接円

3 辺 a 、 b 、 c がわかれば、余弦定理で $\cos C$ 、 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ で $\sin C$ が求まり、 $\frac{1}{2}ab \sin C$ で面積が出ます。この計算を文字のまま進めて 1 つの式にまとめたのが、**ヘロンの公式**です。 $s = \frac{a+b+c}{2}$ (周の長さの半分) として、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3 辺が 5、6、7 なら、 $s = 9$ で、 $S = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = \sqrt{216} \approx 14.70$ 。
 $\cos C = \frac{25 + 36 - 49}{60} = 0.2$ 、 $\sin C = \sqrt{1 - 0.04} \approx 0.9798$ から
 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times 0.9798 \approx 14.70$ と求めても同じです。

三角形の 3 つの辺にふれる円を**内接円**といいます。内接円の中心と 3 つの頂点を結ぶと、高さが半径 r の三角形が 3 つできるので、
 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 。5、6、7 の三角形なら、 $r = \frac{2S}{a+b+c} \approx \frac{29.39}{18} \approx 1.63$ です。

5 どの定理を使うか

4-1 で、「三角形が 1 つに決まる条件」(合同条件)を学びました。三角形が 1 つに決まるなら、のこりの辺や角も 1 つに決まるはずですが、その求め方を、表にまとめます。

わかっているもの	使う道具と順番
3 辺	余弦定理 ($\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$) で角を求める。
2 辺とそのあいだの角	余弦定理 ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$) で のこりの辺。面積は $\frac{1}{2}ab \sin C$ 。
1 辺とその両はしの角	内角の和で 3 つめの角。次に正弦定理で辺。

表 1 目じるしは「角と、その向かいの辺の組」がそろっているかどうか。そろっていれば正弦定理、なければ余弦定理。

🔍 もっと知りたい ★★★

2 辺と、そのあいだでない角がわかっているとき

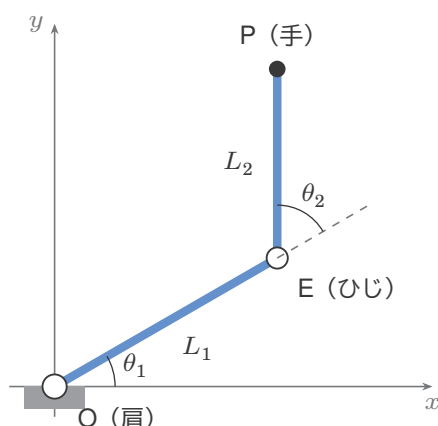
$a = 5$ 、 $c = 8$ 、 $A = 30^\circ$ のように、2 辺と「そのあいだでない角」がわかっている場合、合同条件ではないので、三角形は 1 つに決まるとはかぎりません。正弦定理で $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{8 \times 0.5}{5} = 0.8$ 。 $\sin C = 0.8$ になる角は、 $C \approx 53.1^\circ$ と $C \approx 126.9^\circ$ の 2 つあります (4-6 ⑧)。どちらも内角の和が 180° をこえないので、条件に合う三角形が 2 つできます。

6 ロボットのうでを動かす：順運動学と逆運動学

4-0 で、ロボットのうでについて、2 つの問題を考えました。

- **順運動学**：関節の角度から、手の位置を求める。
- **逆運動学**：手を置きたい位置から、関節の角度を求める。

ここでは、肩とひじの 2 つの関節をもつ、平面の上で動くうで (2 リンクのアーム) で、両方を計算します。



肩 O を原点にします。上のうで OE の長さを L_1 、下のうで EP の長さを L_2 とします。

- θ_1 : 上のうでが、 x 軸からどれだけ回っているか。
- θ_2 : 下のうでが、上のうでをまっすぐのばした向き (点線) から、さらにどれだけ回っているか。

どちらも左回りを正とします。うでをまっすぐのばすと $\theta_2 = 0^\circ$ です。

① 順運動学：角度から手の位置

ひじ E は、 O から長さ L_1 、角 θ_1 の所なので (4-6 ⑧)、 $E(L_1 \cos \theta_1, L_1 \sin \theta_1)$ です。下のうでは、上のうでの向き θ_1 から、さらに θ_2 回っているので、 x 軸から見ると $\theta_1 + \theta_2$ の向きです (角はたし算で重なる)。手 P は、 E から長さ L_2 、角 $\theta_1 + \theta_2$ の向きに進んだ所なので、

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

たとえば $L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm)、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 60^\circ$ なら、 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ なので、

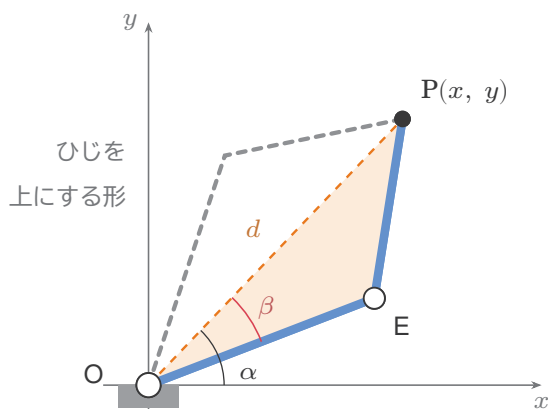
$$x = 40 \cos 30^\circ + 30 \cos 90^\circ = 34.6 + 0 = 34.6$$

$$y = 40 \sin 30^\circ + 30 \sin 90^\circ = 20 + 30 = 50$$

手は $(34.6, 50)$ にあります。下のうでがまっすぐ上 (90°) を向いているので、 x はひじと同じ、 y はひじより 30 上、と図からも読めます。 $\theta_1 + \theta_2$ が 90° をこえると $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ は負になり、手はひじより左へ出ます (例題 7)。この章では、 $\theta_1 + \theta_2$ が $0^\circ \sim 180^\circ$ のときを考えます (それより大きい角は 4-8)。

2 逆運動学：手の位置から角度

こんどは反対に、手を置きたい点 $P(x, y)$ から、 θ_1 と θ_2 を求めます。カギは、三角形 OEP です。この三角形の3辺は、 L_1 、 L_2 、それに OP の長さ d で、3 つともわかります。3 辺がわかれば、余弦定理で角が求められます（⑤の表の1行め）。



① $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4-4)

② 三角形 OEP で余弦定理。

ひじの所の角 $\angle OEP$ を求める。

$$\theta_2 = 180^\circ - \angle OEP$$

③ α : OP と x 軸の角。 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

β : OE と OP の角（余弦定理）

$$\theta_1 = \alpha - \beta$$

図3 三角形 OEP（オレンジの面）の3辺 L_1 、 L_2 、 d から、角を求める。点線は、もう1つの答え（ひじを上にする形）。

なぜ $\theta_2 = 180^\circ - \angle OEP$ なのでしょう。うでをまっすぐのばすと、 $\theta_2 = 0^\circ$ で、ひじの所の角は 180° です。下のうでを θ_2 だけ曲げると、ひじの所の角は 180° から θ_2 だけ小さくなります。だから $\angle OEP = 180^\circ - \theta_2$ です。

数で確かめる：手を (40, 30) に置く ($L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$)

① $d = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50$

② ひじの所の角は、余弦定理で

$$\cos \angle OEP = \frac{L_1^2 + L_2^2 - d^2}{2L_1L_2} = \frac{1600 + 900 - 2500}{2 \times 40 \times 30} = \frac{0}{2400} = 0$$

$\angle OEP = 90^\circ$ なので、 $\theta_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

③ $\tan \alpha = \frac{30}{40} = 0.75$ より $\alpha \approx 36.87^\circ$ 。三角形 OEP で、O の所の角 β は

$$\cos \beta = \frac{L_1^2 + d^2 - L_2^2}{2L_1d} = \frac{1600 + 2500 - 900}{2 \times 40 \times 50} = \frac{3200}{4000} = 0.8 \quad \beta \approx 36.87^\circ$$

だから $\theta_1 = \alpha - \beta = 0^\circ$ 。上のうでは x 軸の上になっすぐのび(ひじは $(40, 0)$)、下のうでは 90° 曲がってまっすぐ上を向き、手は $(40, 30)$ に届きます。図をかいても、そのとおりです。

答えは2つあることがある

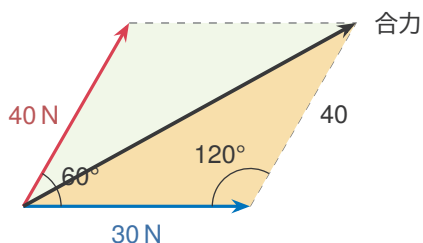
点線のように、ひじを上にする形でも、同じ点に手が届きます。そのときは $\theta_1 = \alpha + \beta$ 、 θ_2 は右回りの $-(180^\circ - \angle OEP)$ です。人のうでも、同じ所に手を置くのに、ひじの位置を変えられますね。ロボットでは、ぶつかる物がないほうを選びます。また、 d が $L_1 + L_2$ より大きい所には、うでをのぼしきっても届かないので、答えはありません。

7 力の三角形：合力と、3つの力のつり合い

4-6 では、1つの力を長方形の2辺に分けました。反対に、2つの力を1つにまとめることもできます。

1 合力の大きさ

2人で、ひもをつけた荷物を引きます。1人は 30 N 、もう1人は 40 N で、2本のひもの角は 60° です。荷物は、2つの力を2辺とする平行四辺形の、対角線の向きに動きます。この対角線が、2つの力を合わせた1つの力で、**合力**(ごうりょく)といっています(4-6と同じく、実験で確かめられた法則。4-10でくわしく)。



黄色の三角形を見ます。2辺は 30 と 40 (平行四辺形の向かい合う辺は等しい) で、そのあいだの角は 120° です。平行四辺形のとなり合う角をたすと 180°

になるからです（平行線の角。4-1）。2 辺とそのあいだの角がわかるので、余弦定理で

$$\begin{aligned} R^2 &= 30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 120^\circ \\ &= 900 + 1600 - 2400 \times (-0.5) = 2500 + 1200 = 3700 \end{aligned}$$

$R = \sqrt{3700} \approx 60.8$ で、合力は約 60.8 N です。30 + 40 = 70 より小さいのは、2 人の引く向きが少しずれているからです。

一般に、2 つの力 F_1 、 F_2 のあいだの角を θ とすると、三角形の中の角は $180^\circ - \theta$ です。 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (4-6 ⑧) なので、余弦定理の $-2F_1F_2 \cos(180^\circ - \theta)$ は $+2F_1F_2 \cos \theta$ になります。だから、

$$\boxed{\text{合力の大きさ } R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta}}$$

(θ は 2 つの力のあいだの角)。 $\theta = 0^\circ$ (同じ向き) なら $R = F_1 + F_2$ 、 $\theta = 90^\circ$ なら三平方の定理、 $\theta = 180^\circ$ (反対向き) なら R は大きいほうから小さいほうをひいた差になります。

② 3 つの力のつり合いと正弦定理

天井から、2 本のロープでランプをつります。ランプは止まっているので、ランプにはたらく 3 つの力 (2 本のロープが引く力と、重力 W) がつり合っています。

つり合うには、2 本のロープの力の合力が、重力と同じ大きさで、ちょうど真上を向いていなければなりません。合力の平行四辺形の半分の三角形 (図 4 の黄色) を見ると、3 辺が、2 本のロープの力と W の三角形になります。

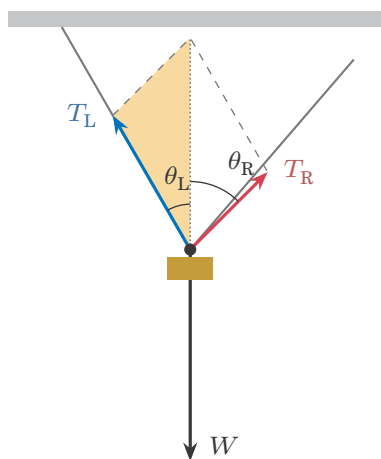


図 4 ランプにはたらく 3 つの力。黄色が力の三角形。

左のロープが真上からかたむいた角を θ_L 、右のロープの角を θ_R とします (L は左 left、R は右 right の頭文字)。ロープが引く力も、 T_L 、 T_R と書きます。黄色の三角形の角は、 W の向かいが $180^\circ - (\theta_L + \theta_R)$ 、 T_L の向かいが θ_R 、 T_R の向かいが θ_L です (平行四辺形の向かい合う辺は平行なので、平行線の錯角が等しい。4-1)。正弦定理を使うと、 $\sin(180^\circ - (\theta_L + \theta_R)) = \sin(\theta_L + \theta_R)$ なので、

$$\frac{T_L}{\sin \theta_R} = \frac{T_R}{\sin \theta_L} = \frac{W}{\sin(\theta_L + \theta_R)}$$

となります。ロープを左右に大きく開くと、 $\theta_L + \theta_R$ が 180° に近づき、 $\sin(\theta_L + \theta_R)$ が 0 に近づくので、 T_L 、 T_R はとても大きくなります。洗たく物のロープを、ぴんとまっすぐには張れないのは、このためです。

力の三角形のまとめ

力の矢印をつないで三角形を作ると、この章の2つの定理が、そのまま力の計算に使えます。

- 2つの力から合力を求める：2辺とそのあいだの角がわかるので、余弦定理。
- 3つの力のつり合いで、力の大きさを求める：角と向かいの辺の組があるので、正弦定理。

4-10・4-11では、力を矢印（ベクトル）として、たてと横の成分に分けて計算する方法を学びます。成分を使うと、三角形をかかなくても、たし算だけで合力が求められます。どちらの方法でも、同じ答えになります。

コラム 4-0 の「はてな？」に答える

4-0 では「うでの長さで関節の角度がわかれば、手の位置は決まる？ 反対に、手を置きたい場所から角度は決まる？」と問いかけました。答えは次のとおりです。

- 角度から位置（順運動学）は、三角比のたし算で、いつも 1 つに決まる。
- 位置から角度（逆運動学）は、余弦定理で求める。答えは、ふつう 2 つ（ひじを上か下か）。届かない所では答えがない。

みなさんのうでも、肩とひじの 2 つの関節をもつ 2 リンクのうでとみなせます。机の上の 1 点に指先を置いたまま、ひじを上げ下げしてみましょう。ひじの位置が 2 通りあることが、体で確かめられます。工場の溶接ロボットは、1 秒に何百回もこの計算をくり返して、手の先を決められた道すじにそって動かしています。関節が 6 つあるロボットの計算は、行列（第 7 巻）を使って整理します。

たいせつ

三角形 ABC：角 A の向かいの辺が a 。 C を原点、 B を $(a, 0)$ に置くと、 $A(b \cos C, b \sin C)$ 。

面積： $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ （2 辺とそのあいの角）

正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R は外接円の半径）

余弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

ロボットのうで（順運動学）：

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

この章で出てきたことば

三角形を解く 三角形のわかっている辺や角から、のこりの辺や角を求めること。

外接円 三角形の3つの頂点を通る円。中心は外心。

正弦定理 辺と、向かいの角の $\sin$ の比が、どの辺でも同じ（外接円の直径 $2R$ ）という定理。

余弦定理 2 辺とそのあいだの角から、のこりの辺を求める定理。 $C = 90^\circ$ で三平方の定理になる。

順運動学・逆運動学 関節の角度から手の位置を求めること・手の位置から関節の角度を求めること。

合力 2 つ以上の力を合わせて、同じ働きをする 1 つの力にしたもの。

例題でたしかめよう

例題 1 2 辺とあいだの角から面積

三角形 ABC の面積を求めましょう。(1) $a = 6$ 、 $b = 5$ 、 $C = 30^\circ$ (2) $a = 8$ 、 $b = 5$ 、 $C = 135^\circ$

考え方 2 辺とそのあいだの角なので、 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ 。(2) は鈍角なので、 $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ を使います。

式 (1) $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{30}{4} = 7.5$

(2) $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 135^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$

答え (1) 7.5 (2) $10\sqrt{2}$ (約 14.1)

じぶんでこう1

三角形 ABC の面積を求めましょう。

(1) $a = 4$ 、 $b = 7$ 、 $C = 150^\circ$

(2) $a = 6$ 、 $b = 4$ 、 $C = 60^\circ$

ポイント 面積の式に入れる角は、2 辺の「あいだ」の角です。鈍角でも $\sin$ は正なので、面積はいつも正になります。**例題 1** の (2) の三角形は、あいだの角を 45° にした三角形と、高さも面積も同じです (②の 60° と 120° の図と同じ考え方)。

例題 2 正弦定理で辺と外接円の半径

三角形 ABC で、 $a = 10$ 、 $A = 45^\circ$ 、 $B = 60^\circ$ です。 b と、外接円の半径 R を求めましょう。

考え方 角 A と向かいの辺 a の組がそろっているので、正弦定理。

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ の両辺に $\sin B$ をかけて b を出します。

$$\text{式} \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{2} = 5\sqrt{6}$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \quad \text{より} \quad R = 5\sqrt{2}$$

答え $b = 5\sqrt{6}$ (約 12.2)、 $R = 5\sqrt{2}$ (約 7.07)

じぶんでこう2

三角形 ABC で、 $a = 8$ 、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ です。 b と、外接円の半径 R を求めましょう。

ポイント 答えを確かめるには、大きい角の向かいに長い辺があるかを見ます。**例題 2** では $B = 60^\circ$ が $A = 45^\circ$ より大きいので、 b は $a = 10$ より長

いはずです。 $b \approx 12.2$ で、合っています。また、 $\frac{b}{\sin B} = \frac{12.25}{0.866} \approx 14.14$ と
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{10}{0.7071} \approx 14.14$ が等しいことも確かめられます。この値が外接円の
 直径 $2R = 10\sqrt{2} \approx 14.14$ です。

例題3 1辺と両はしの角から、遠くの距離

ABの長さは80mです。Aから見た角は 45° 、
 Bから見た角は 105° でした。ACとBCの長
 さを、小数第1位まで求めましょう。

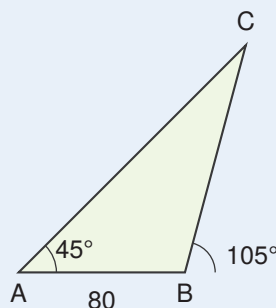
考え方 1辺とその両はしの角なので、まず
 内角の和でCを出し、次に正弦定理(⑤の表
 の3行め)。 105° は鈍角ですが、sinは電卓で
 そのまま計算できます。

式 $C = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$

$$AC = b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{80 \times \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{80 \times 0.9659}{0.5} \approx 154.5$$

$$BC = a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{80 \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{80 \times 0.7071}{0.5} \approx 113.1$$

答え AC 約 154.5 m、BC 約 113.1 m



図の角Bは、ABをBの先へのばした線から見ると 75° です。ABとBCの
 あいだの角は $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ です。

じぶんでこう3

ABの長さが50m、Aから見た角が 70° 、Bから見た角が 50° の三角形
 ABCで、ACとBCの長さを小数第1位まで求めましょう。

ポイント 1辺と両はしの角がわかっているときは、内角の和で3つめの角を
 出してから、正弦定理を使う、の2段です。答えを出したら、いちばん大きい角
 (105°)の向かいの辺(AC)がいちばん長いか確かめましょう。154.5、113.1、
 80の順で、合っています。

例題 4 余弦定理で辺

三角形 ABC で、 c を求めましょう。(1) $a = 5$ 、 $b = 8$ 、 $C = 60^\circ$ (2)
 $a = 3$ 、 $b = 5$ 、 $C = 120^\circ$

考え方 2 辺とそのあいだの角がわかっているので、余弦定理を使います。

(2) は $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ なので、ひき算がたし算に変わります。

式 (1) $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 25 + 64 - 40 = 49$

$$c > 0 \text{ なので } c = 7$$

(2) $c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 25 + 15 = 49$

$$c = 7$$

答え (1) 7 (2) 7

(1) と (2) は、ちがう三角形なのに、どちらも $c = 7$ になりました。 $-2ab \cos C$ の部分が、(1) は -40 、(2) は $+15$ で、ちょうど 49 になるように選んだ数です。

じぶんでこう 4

三角形 ABC で、 c を求めましょう。

(1) $a = 5$ 、 $b = 3$ 、 $C = 60^\circ$

(2) $a = 4$ 、 $b = 6$ 、 $C = 120^\circ$

ポイント $\cos C$ の符号に気をつけましょう。あいだの角が鋭角なら $-2ab \cos C$ はひき算、鈍角ならたし算になります。答えの c は、鋭角なら三平方の定理の $\sqrt{a^2 + b^2}$ より短く、鈍角なら長くなります。(1) は $\sqrt{89} \approx 9.4$ より短い 7、(2) は $\sqrt{34} \approx 5.8$ より長い 7 です。

例題5 3辺から角

3辺が $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 3$ の三角形 ABC で、いちばん大きい角を求めましょう。

考え方 いちばん長い辺の向かいの角が、いちばん大きい角です（正弦定理）。 $a = 7$ がいちばん長いので、角 A を求めます。 A の向かいの辺は a なので、 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ の形を使います。

式 $\cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$
 $\cos A$ が負なので鈍角。 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ より $A = 120^\circ$

答え $A = 120^\circ$

じぶんでこう5

3辺が $a = 7$ 、 $b = 8$ 、 $c = 3$ の三角形 ABC で、角 A を求めましょう。

ポイント 3辺から角を求めるときは、 $\cos$ の式を使えば、角が1つに決まります（ $\sin$ だと、鋭角と鈍角の2つが出ることもある）。いちばん長い辺の向かいの角の $\cos$ が、負なら鈍角三角形、0なら直角三角形、正なら鋭角三角形です。**例題5**で、のこりの角も求めてみましょう。
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 25}{42} = \frac{33}{42} \approx 0.786$ より $B \approx 38.2^\circ$ 、内角の和から $C \approx 180^\circ - 120^\circ - 38.2^\circ = 21.8^\circ$ です。

例題 6 池をはさんだ 2 点の距離

池をはさんだ 2 点 A、B の距離を知るために、点 C で $CA = 80 \text{ m}$ 、 $CB = 60 \text{ m}$ 、C の角 50° をはかりました。AB を小数第 1 位まで求めましょう (④の場面)。

考え方 2 辺とそのあいだの角なので、余弦定理。 $\cos 50^\circ$ は電卓で求めます。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad c^2 &= 60^2 + 80^2 - 2 \times 60 \times 80 \times \cos 50^\circ \\ &= 3600 + 6400 - 9600 \times 0.64279 \\ &= 10\,000 - 6170.8 = 3829.2 \\ c &= \sqrt{3829.2} \approx 61.88 \end{aligned}$$

答え 約 61.9 m

じぶんでこう 6

点 C から、 $CA = 120 \text{ m}$ 、 $CB = 90 \text{ m}$ 、C の角が 70° でした。AB を小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント 実際の測量では、はかった角の小さなずれも考えます。**例題 6** で、C の角が 51° なら約 62.9 m、 49° なら約 60.8 m です。角が 1° ずれると、答えは約 1 m 変わります。

例題7 ロボットのうで：順運動学

$L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm) の2リンクのうでで、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$ のとき、ひじ E と手 P の座標を、小数第1位まで求めましょう。

考え方 ひじは $(L_1 \cos \theta_1, L_1 \sin \theta_1)$ 。下のうでは $\theta_1 + \theta_2 = 120^\circ$ の向きなので、 $\cos 120^\circ$ は負で、手はひじより左へ出ます。

式 ひじ： $x = 40 \cos 30^\circ = 40 \times 0.8660 = 34.64$

$$y = 40 \sin 30^\circ = 40 \times 0.5 = 20$$

手： $x = 34.64 + 30 \cos 120^\circ = 34.64 + 30 \times (-0.5) = 19.64$

$$y = 20 + 30 \sin 120^\circ = 20 + 30 \times 0.8660 = 45.98$$

答え ひじ (34.6, 20.0)、手 (19.6, 46.0)

じぶんでところ7

$L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm) の2リンクのうでで、 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_2 = 60^\circ$ のとき、ひじと手の座標を小数第1位まで求めましょう。

ポイント $\theta_1 + \theta_2$ が 90° をこえると、下のうでは左上を向き、 $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ が負になります。手の x 座標がひじより小さくなるのは、そのためです。図をかいて、手がひじより左にあるか確かめましょう。

例題 8 □ボットのうで：逆運動学

$L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm) の 2 リンクのうでで、手を $P(42, 44)$ に置きます。ひじを下にする形の θ_2 と θ_1 を、小数第 1 位まで求めましょう。

考え方 ⑥の①②③の順。 d を出し、三角形 OEP で余弦定理を 2 回使います。

式 ① $d^2 = 42^2 + 44^2 = 1764 + 1936 = 3700$ 、 $d = \sqrt{3700} \approx 60.83$

② $\cos \angle OEP = \frac{1600 + 900 - 3700}{2 \times 40 \times 30} = \frac{-1200}{2400} = -0.5$

$\angle OEP = 120^\circ$ 、 $\theta_2 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

③ $\alpha = \tan^{-1} \frac{44}{42} \approx 46.33^\circ$

$\cos \beta = \frac{1600 + 3700 - 900}{2 \times 40 \times 60.83} = \frac{4400}{4866.4} \approx 0.9042$

$\beta \approx 25.28^\circ$

$\theta_1 = \alpha - \beta \approx 46.33^\circ - 25.28^\circ = 21.05^\circ$

答え $\theta_1 \approx 21.1^\circ$ 、 $\theta_2 = 60^\circ$

確かめ：順運動学の式に $\theta_1 = 21.05^\circ$ 、 $\theta_1 + \theta_2 = 81.05^\circ$ を入れると、

$$x = 40 \cos 21.05^\circ + 30 \cos 81.05^\circ \approx 37.33 + 4.67 = 42.0$$

$$y = 40 \sin 21.05^\circ + 30 \sin 81.05^\circ \approx 14.37 + 29.63 = 44.0$$

ねらった点に届いています。

じぶんでこう 8

$L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm) の 2 リンクのうでで、手を $(20, 30)$ に置きます。ひじを下にする形の θ_2 と θ_1 を小数第 1 位まで求めましょう。

ポイント 逆運動学の答えは、順運動学の式に入れて、ねらった点に届くかで確かめられます。また、 d が $L_1 + L_2$ (ここでは 70) より大きい点や、 $L_1 - L_2$

(ここでは10)より小さい点には、手が届きません。余弦定理で $\cos$ の値が1より大きく(または-1より小さく)になってしまうので、すぐにわかります。

例題9 合力の大きさ

1つの荷物を、30 N と 40 N の力で引きます。2つの力のあいだの角が 60° のとき、合力の大きさを小数第1位まで求めましょう。

考え方 平行四辺形の半分の三角形で考えます。三角形の中の角は $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。余弦定理を使います。

$$\begin{aligned}\text{式} \quad R^2 &= 30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 120^\circ \\ &= 900 + 1600 - 2400 \times (-0.5) = 3700 \\ R &= \sqrt{3700} \approx 60.83\end{aligned}$$

答え 約 60.8 N

じぶんでところ9

1つの荷物を、50 N と 50 N の力で引きます。2つの力のあいだの角が 120° のとき、合力の大きさを求めましょう。

ポイント 2つの力のあいだの角が大きいほど、合力は小さくなります。50 N と 50 N でも、あいだの角が 0° なら 100 N、 90° なら約 70.7 N、 120° なら 50 N、 180° なら 0 です。

例題 10 2本のロープでつるす

質量 10 kg のランプ（重力 $W = 98 \text{ N}$ ）を、2 本のロープでつるします。ロープが真上からかたむいた角は、 $\theta_L = 30^\circ$ 、 $\theta_R = 45^\circ$ です。2 本のロープが引く力 T_L 、 T_R を、小数第 1 位まで求めましょう。

考え方 ⑦の②の正弦定理の式 $\frac{T_L}{\sin \theta_R} = \frac{T_R}{\sin \theta_L} = \frac{W}{\sin(\theta_L + \theta_R)}$ を使います。 $\theta_L + \theta_R = 75^\circ$ です。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad \frac{W}{\sin 75^\circ} &= \frac{98}{0.96593} \approx 101.46 \\ T_L &= 101.46 \times \sin 45^\circ = 101.46 \times 0.70711 \approx 71.74 \\ T_R &= 101.46 \times \sin 30^\circ = 101.46 \times 0.5 = 50.73 \end{aligned}$$

答え T_L 約 71.7 N、 T_R 約 50.7 N

真上に近いロープ（ $\theta_L = 30^\circ$ ）のほうが、大きな力で引いています。確かめ：横向きの力は、 $71.74 \times \sin 30^\circ \approx 35.9$ と $50.73 \times \sin 45^\circ \approx 35.9$ で、左右の引き合いが釣り合っています。

じぶんでこう 10

重力 $W = 60 \text{ N}$ の物を 2 本のロープでつるします。 $\theta_L = \theta_R = 60^\circ$ のとき、 T_L 、 T_R を求めましょう。

ポイント 左右のロープを同じ角 θ でかたむけて、重力 60 N の物をつるすとき、ロープ 1 本が引く力は、 $\theta = 30^\circ$ なら約 34.6 N、 45° なら約 42.4 N、 60° なら 60 N です（どれも正弦定理で計算）。ロープを開くほど、ロープには大きな力がかかります。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

余弦定理で、あいだでない角を使う

✕ $a = 5$ 、 $b = 8$ 、 $A = 60^\circ$ なので $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos 60^\circ$

○ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ の角は、 a と b のあいだの角 C

余弦定理の $\cos$ の角は、左の辺 c の向かいの角で、右の2辺 a 、 b のあいだの角です。図をかいて、角がどの2辺にはさまれているか確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

鈍角の $\cos$ を正にする

✕ $\cos 120^\circ = 0.5$ なので $c^2 = 9 + 25 - 15 = 19$

○ $\cos 120^\circ = -0.5$ なので $c^2 = 9 + 25 + 15 = 49$

鈍角の $\cos$ は負です(4-6⑧)。鈍角の三角形では、向かいの辺は三平方の定理のときより長くなるはずです。 $19 < 34$ では短くなってしまい、合いません。

⚠ まちがえやすいところ

辺の比を、角の比にする

✕ 角が $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ なので、辺の比は $1 : 2 : 3$

○ 辺の比は $\sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ = 1 : \sqrt{3} : 2$

正弦定理で、辺は角の $\sin$ に比例します。角そのものには比例しません。

⚠ まちがえやすいところ

合力で、力のあいだの角をそのまま使う

✕ 60° で引く 30 N と 40 N の合力は $R^2 = 900 + 1600 - 2400 \cos 60^\circ$

○ 三角形の中の角 120° を使う。 $R^2 = 900 + 1600 - 2400 \cos 120^\circ$

×の式では $R = \sqrt{1300} \approx 36$ となり、 40 より小さくなります。同じような向きに引いて、片方の力より小さくなるのはおかしいですね。

🔗 物理・工学ではこう使う

屋根のトラス：部材の長さを決める

はば 8 m の屋根を、左が 30° 、右が 45°

の、左右ちがう傾きで作ります。上の角は

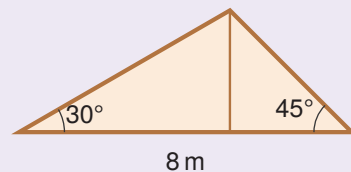
$180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$ です。正弦定理

で、ななめの部材の長さは、

$$\text{左} = \frac{8 \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 5.86\text{ m}$$

$$\text{右} = \frac{8 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 4.14\text{ m}$$

実際の家の屋根は、左右同じ 5 寸こう配（傾き 0.5 、約 26.6° ）などが多いのですが、どんな形でも計算のしかたは同じです。三角形は形が変わらない（4-1）ので、屋根や橋の骨組みは三角形を組み合わせて作ります。部材を切る長さは、このような計算で決めます。



物理・工学ではこう使う

三角測量：日本の地図を作る

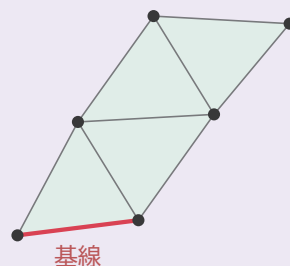
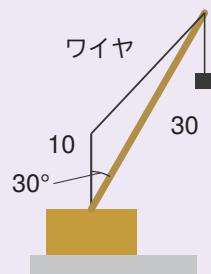
明治時代から、日本の地図は三角測量で作られてきました。山の上などに「三角点」を置き、2つの三角点のあいだの長さ（基線）を、とても正確にはかります。あとは、三角形の角だけをはかれば、正弦定理で次々に辺の長さが求められます。角は遠くからでもはかれるので、山や川をこえて、三角形を国じゅうにつないでいけるのです。今は人工衛星を使った測量も使われていますが、三角点は今も全国にあります。

クレーンの「ブーム」を支えるワイヤ

クレーンの長い腕（ブーム）は、根もとのピンを中心に回り、先をワイヤで引いて角度を変えます。ブームが 30 m、ピンの真上 10 m の所からワイヤを引くとき、ブームを水平から 60° に起こすと、ブームとピンの真上へのぼした線の角は 30° です。余弦定理で ($30^2 = 900$ 、 $10^2 = 100$ 、 $2 \times 30 \times 10 = 600$)、ワイヤの長さは

$$\sqrt{900 + 100 - 600 \cos 30^\circ} \approx 21.9 \text{ m}$$

ワイヤを巻き取って短くすると、ブームが起き上がります。



🔍 コラム スマートフォンの位置も、三角形で決める

スマートフォンの地図アプリは、人工衛星や Wi-Fi の電波から、「A から何 m」「B から何 m」という距離を求めて、今いる場所を決めています。2つの基地局 A、B のあいだの距離と、それぞれからの距離がわかると、3辺のわかった三角形ができます。たとえば $AB = 100$ m、A から 80 m、B から 60 m なら、余弦定理で

$$\cos A = \frac{100^2 + 80^2 - 60^2}{2 \times 100 \times 80} = \frac{12\,800}{16\,000} = 0.8$$

A の角は約 36.9° とわかり、A から B を見た向きから 36.9° 回った向きに 80 m の所にいる、と決まります（AB のどちらがわか、3つめの基地局で決める）。三角形を解く計算は、毎日あなたのポケットの中でも行われているのです。

🔍 コラム 星までの距離も、三角形ではかる

地球は太陽のまわりを回っているので、半年たつと、太陽をはさんで反対がわ（約 3 億 km 先）に移ります。そのあいだに、近くの星は、遠くの星を背景にして、ほんの少しだけ位置がずれて見えます。地球と太陽の距離（約 1.5 億 km）を底辺にした、とても細長い三角形ができるのです。太陽系にいちばん近い星プロキシマ・ケンタウリでは、このずれの角（年周視差）は約 0.77 秒（1 秒は 1° の 3600 分の 1）しかありません。それでも $\tan$ を使えば、距離は約 40 兆 km、光で約 4.2 年かかる遠さだと計算できます。三角形の計算は、宇宙のものさしにもなっています。



章末問題

4-7 のまとめ

基本 ★★★

- 1 三角形 ABC の面積を求めましょう。(1) $a = 7$ 、 $b = 4$ 、 $C = 30^\circ$ (2) $b = 6$ 、 $c = 5$ 、 $A = 120^\circ$ (📖 例題 1)
- 2 三角形 ABC で、 $a = 6$ 、 $A = 30^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ です。 b と、外接円の半径 R を求めましょう。(📖 例題 2)
- 3 $AB = 60$ m、 A から見た角が 50° 、 B から見た角が 60° の三角形 ABC で、 AC と BC の長さを小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 3)
- 4 三角形 ABC で、 c を求めましょう。(1) $a = 8$ 、 $b = 5$ 、 $C = 60^\circ$ (2) $a = 2$ 、 $b = 3$ 、 $C = 120^\circ$ (📖 例題 4)
- 5 3 辺が $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 8$ の三角形 ABC で、角 A を求めましょう。(📖 例題 5)
- 6 池をはさんだ 2 点 A 、 B について、点 C で $CA = 50$ m、 $CB = 70$ m、 C の角 40° をはかりました。 AB を小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 6)
- 7 20 N と 30 N の力が、あいだの角 60° で 1 つの物を引いています。合力の大きさを小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 9)

チャレンジ ★★★

- 8 $L_1 = 50$ 、 $L_2 = 40$ (cm) の 2 リンクのうでで、 $\theta_1 = 45^\circ$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$ のとき、手の座標を小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 7)
- 9 $L_1 = 40$ 、 $L_2 = 30$ (cm) の 2 リンクのうでで、手を $(30, 50)$ に置きます。ひじを下にする形の θ_2 と θ_1 を小数第 1 位まで求めましょう。(📖 例題 8)

10 重力 $W = 49 \text{ N}$ の物を 2 本のロープでつるします。ロープが真上からかたむいた角が $\theta_L = \theta_R = 45^\circ$ のとき、 T_L 、 T_R を小数第 1 位まで求めましょう。

( 例題 10)

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 鈍角の三角比を使い、三角形の面積を $\frac{1}{2}ab \sin C$ で求められる。

→ 237 ページ

☐ 正弦定理と余弦定理を使い分けて、三角形の辺や角を求められる。

→ 238 ページ

☐ ロボットのうでの関節の角を、余弦定理で求められる。

→ 245 ページ



ミナ

行けない場所までの距離も、ロボットのうでの角も、三角形で計算できたね。次の章では、回る点の動きを三角関数で表すよ。

第2部 三角比と三角関数

★★★★~★★★★

4-8

三角関数：
円運動の影

道しるべ この章の前に 1-15 3-9 4-2 4-6 4-7 この章の先に 5-15 5-16 6-6 7-6

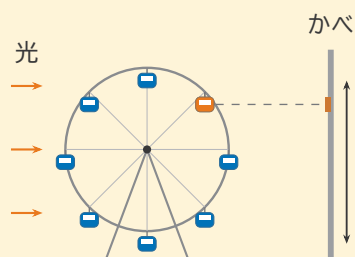
この章でできるようになること

- ★★★★★ 一般角で、単位円の上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を求められる。
- ★★★★★ 符号・周期、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ や 90° 回す式を、図で説明できる。
- ★★★★★ 角速度 ω と周期 T で、回る点の位置・速さを求められる。

？ はてな？

観覧車のゴンドラに真横から光を当てると、うしろのかべに影が映ります。ゴンドラは同じ速さで回るのに、影は、いちばん上と下ではゆっくり、まん中の高さでは速く動きます。

半径 50 m、1 周 20 分の観覧車に、いちばん下から乗ります。7 分後のゴンドラの高さは何 m？ 何周もしたあとの 105 分後は？



4-6 と 4-7 では、三角形の角の $\sin$ と $\cos$ を学びました。三角形の角は 180° より小さいので、そのままでは、何周も回る観覧車には使えません。この章では、 $\sin$ と $\cos$ を「円の上を回る点の位置」として決めなおします。すると、何周回っても、時間がたっても使える、回るもの・ゆれるもの・波の数学の道具になります。

△ やってみよう 回る点の高さをはかろう

用意するもの

方眼紙、コンパス、分度器、定規

- ① 方眼紙のまん中に点 O をとり、 O を通る横の線とたての線を引こう。
 O を中心に、半径 10 cm の円をかこう。
- ② 分度器で、 O から右へのびる線から左回りに 30° ずつ、円の上に点をとろう (0° 、 30° 、……、 330° の 12 こ)。
- ③ それぞれの点の高さ (横の線から点までの、たての長さ) を定規ではかろう。横の線より下の点は、高さにマイナスをつけて書こう。
- ④ 角を横軸、高さをたて軸にして点を打ち、なめらかにつなごう。どんな形になるかな？

角	0°	30°	60°	90°	120°	150°
高さ (cm)	0	5.0	8.7	10.0	8.7	5.0

角	180°	210°	240°	270°	300°	330°
高さ (cm)	0	-5.0	-8.7	-10.0	-8.7	-5.0

表1 ソラさんがはかった結果

30° の点の高さ 5.0 cm は、半径 10 cm のちょうど半分です。4-6 で学んだ $\sin 30^\circ = 0.5$ の「0.5」が、ここに出ています。 60° の 8.7 cm も、 $\sin 60^\circ$ (約 0.866) の約 10 倍です。

④でつないだ形は、山と谷がかわるがわるくる「波」の形になったはずです。 180° をこえると高さはマイナスになり、 360° で 0 にもどります。この章では、この波の正体を調べます。

この章では、「 $\approx$ 」という記号を使います。 $\approx$ は「ほぼ等しい」という意味です (5-8 でくわしく学びます)。たとえば $\sqrt{3} \approx 1.732$ は、「 $\sqrt{3}$ はほぼ 1.732 」と読みます。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

1-15 100 日後の曜日： $100 \div 7 = 14$ あまり 2。7 日ごとに同じ曜日にもどるので、あまりの 2 日だけ考えればよい。

4-2 1 周は $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ 。弧の長さ = 半径 $\times$ 角 ($s = r\theta$ 。角はラジアン)。
電卓は DEG (度) と RAD (ラジアン) を切りかえて使う。
極座標 (r, θ) ：原点からの距離 r と、 x 軸の正の向きから左回りの角 θ で場所を言う。

4-4 三平方の定理：直角三角形で (斜辺)² = (横)² + (たて)²。

原点を中心とする半径 r の円の式は $x^2 + y^2 = r^2$ 。

4-6 直角三角形で、角 θ から見て $\sin \theta = \frac{\text{たて}}{\text{斜辺}}$ 、 $\cos \theta = \frac{\text{横}}{\text{斜辺}}$ 。

$\sin 30^\circ = 0.5$ 、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 、 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 。

4-6 極座標 (r, θ) の点を (x, y) に直すと、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 。

半径 1 の半円の上で、角 θ の点の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0^\circ \sim 180^\circ$)。

4-7 鈍角 (90° より大きく 180° より小さい角) では、 $\cos$ は負。

3-9 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、右へ p 、上へ q だけ平行移動したもの。

🏠 数学の道具

① 何周しても使える角：一般角

分度器ではかる角は、 0° から 360° まででした (1-20)。でも、観覧車も、時計の針も、自転車のタイヤも、何周も回りつづけます。回った角をまとめて 1 つの数で言うには、 360° より大きい角が必要です。

たとえば、観覧車が 2 周して、さらに 30° 回ったとします。1 周は 360° なので、回った角は全部で

$$360^\circ \times 2 + 30^\circ = 750^\circ$$

です。このときのゴンドラの場合は、 30° だけ回った所と同じです。1 周回ると、もとの場所にもどるからです。

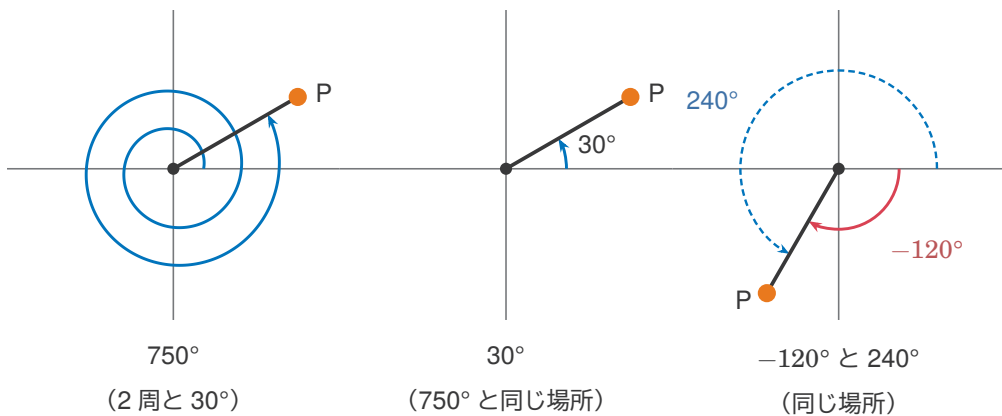


図 1 左とまん中： 750° 回った点 P は、 30° 回った点と同じ場所にいる。右：右回りに 120° (-120°) 回った点は、左回りに 240° 回った点と同じ場所。

これは、1-15 で考えた「100 日後の曜日」と同じ考え方です。曜日は 7 日ごとに同じにもどるので、「何週と何日」に分けて、あまりの日だけを見ればよかったのです。角は 360° ごとに同じ場所にもどるので、「何周と何度」に分けて、あまりの角だけを見ればよいのです。

	1 回りののはば	分け方	見ればよいもの
曜日	7 日	$100 \div 7 = 14$ あまり 2	あまりの 2 日
角	360°	$750 \div 360 = 2$ あまり 30	あまりの 30°

表 2 くり返すものは、あまりを見ればよい。

反対向きに回る：マイナスの角

時計の針は右回りに回ります。数学では、**左回り（時計の針と反対の向き）を正の向き**と決めます（4-2 の極座標でも、角は左回りにはかりました）。右回りに回った角には、マイナスをつけます。2-2 で「マイナスは反対の向き」と決めたのと同じ考え方です。

たとえば、右回りに 120° 回ることを -120° と書きます。図の右のように、 -120° 回った所は、左回りに 240° 回った所と同じです。1 周たして

$$-120^\circ + 360^\circ = 240^\circ$$

となるからです。マイナスの角は、 360° をたしていくと、 0° から 360° までの角に直せます。

はじめの線と、回る線

角をはかるときは、原点 O から右へのびる線 (x 軸の正の部分) を、はじめの線にします。これを**始線** (しせん) といいます。始線から回っていく半直線 OP を、**動径** (どうけい) といいます。「径」は半径の径で、動径は「動く半径」という意味です。

30° 、 390° 、 750° 、 -330° の動径は、どれも同じ位置です。どれも 30° に、 360° を何回かたしたり、ひいたりした角だからです。

360° をたす回数 n	-1	0	1	2
$30^\circ + 360^\circ \times n$	-330°	30°	390°	750°

このように、 360° より大きい角や、マイナスの角までふくめて考えた角を、**一般角** (いっぱんかく) といいます。ラジアンでは1周が 2π なので (4-2)、 30° と同じ位置の角は $\frac{\pi}{6} + 2\pi \times n$ と書けます。

せいかくに言うと

動径が同じ位置になる角は、ある角 θ に、 360° の整数倍をたした $\theta + 360^\circ \times n$ (n は $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ の整数) です。ラジアンでは $\theta + 2\pi n$ と書きます。

② 単位円で $\sin \cdot \cos$ を決めなおす

4-6 では、 $\sin$ と $\cos$ を直角三角形の辺の比で決めました。直角三角形のどがった角は 90° より小さいので、このままでは $\sin 210^\circ$ や $\cos 750^\circ$ は決められません。4-6 と 4-7 では、半円の上の点の座標を使って、 180° まで広げました。ここでは、それを円1周全部と、何周もする角にまで広げます。

半径 1 の円：単位円

原点 O を中心とする半径 1 の円を、**単位円**（たんいえん）といいます。「単位」は、ここでは「1」という意味です。

単位円上で、動径が角 θ の所にある点を P とします。 P の座標を (x, y) とするとき、

$$\cos \theta = P \text{ の } x \text{ 座標（横の位置）} \quad \sin \theta = P \text{ の } y \text{ 座標（高さ）}$$

と決めます。つまり、**単位円上の点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$** です。

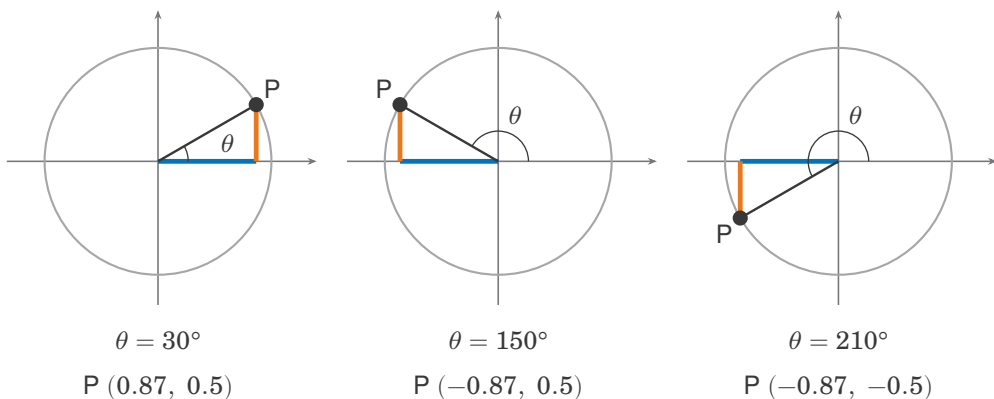


図 2 半径 1 の円（単位円）の上の点 P 。青い線の長さや向きが $\cos \theta$ （横の位置）、オレンジの線が $\sin \theta$ （高さ）。座標は小数第 3 位を四捨五入した。

三角形の決め方と同じになるわけ

θ が 0° と 90° のあいだのとき（図の左）、 P から x 軸に垂直な線を下ろした所を H とすると、直角三角形 OHP ができます。斜辺 OP は単位円の半径なので 1 です。4-6 の決め方では、

$$\cos \theta = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} = OH \quad \sin \theta = \frac{HP}{OP} = \frac{HP}{1} = HP$$

OH は P の x 座標、 HP は P の y 座標なので、新しい決め方と同じになります。斜辺が 1 だから、わり算をしても数が変わらないのです。半径を 1 にしたのは、このためです。

90°をこえても、同じきまりで決まる

$\theta = 150^\circ$ のとき (図のまん中)、動径 OP は、 x 軸の左の部分と 30° の角をつくっています。だから、P から x 軸に下ろした直角三角形は、 30° の三角形と同じ形です。横の長さは $\cos 30^\circ \approx 0.866$ 、高さは $\sin 30^\circ = 0.5$ 。ただし、P は原点より左にいたので、 x 座標はマイナスです。

$$\cos 150^\circ \approx -0.866 \quad \sin 150^\circ = 0.5$$

これは、4-7 で学んだ「鈍角の $\cos$ は負」と同じ値です。

$\theta = 210^\circ$ のとき (図の右) は、動径が x 軸の左の部分から、さらに 30° 下に回った所です。三角形はやはり 30° の形で、P は原点より左、そして下にいます。 x 座標も y 座標もマイナスです。

$$\cos 210^\circ \approx -0.866 \quad \sin 210^\circ = -0.5$$

(0.866 は、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ を小数第3位まで表した数です。)

750° なら、2 周と 30° なので、P は 30° の所にいます。だから、 $\cos 750^\circ$ は $\cos 30^\circ$ と同じ 0.866、 $\sin 750^\circ$ は $\sin 30^\circ$ と同じ 0.5 です。

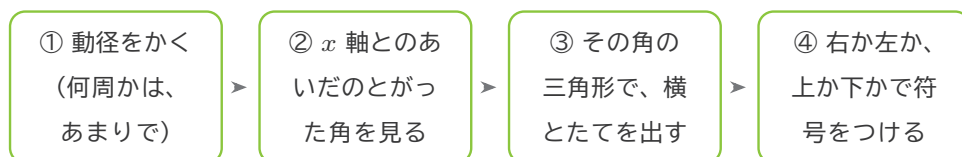


図3 どんな角でも、 $\sin \cdot \cos$ はこの順で求められる。

三角関数という名前

角 θ を1つ決めると、動径の位置が1つに決まり、P の座標 $(\cos \theta, \sin \theta)$ も1つに決まります。 x を決めると y が1つに決まるとき、 y は x の関数でした(3-3)。だから、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は、 θ の関数です。 $f(\theta) = \sin \theta$ と書くこともできます。

$\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ と、4-6 の $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ をまとめて、**三角関数** (さんかくかんすう) といいます。 $\tan \theta$ は、 $\frac{y}{x}$ 、つまり動径 OP の傾きです(4-6 の「 $\tan \theta =$ 傾

き』)。 $\cos \theta = 0$ になる 90° や 270° では、0 でわれないので、 $\tan \theta$ は決まりません。

半径が r の円：どの向きでも $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$

半径 r の円の上で、角 θ の所にある点 Q を考えます。 Q は、単位円の上の点 P を、 O を中心に r 倍に拡大した点です。拡大すると、どの長さも r 倍になるので (4-3)、 Q の座標は、 P の座標の r 倍です。

$$Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Q は、原点からの距離が r で、向きの角が θ の点です。つまり、 Q の極座標は (r, θ) です (4-2)。4-6 では、 θ が 90° より小さいとき (⑧では 180° まで)、極座標を (x, y) に直す式 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ を作りました。 $\sin$ と $\cos$ を単位円で決めなおしたので、この式が、**どの向きの点でも**そのまま使えるようになりました。

極座標 (r, θ) の点は $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$

(θ は何度でもよい。符号は $\cos \theta \cdot \sin \theta$ が自動でつけてくれる)

極座標 $(2, 210^\circ)$ の点なら、 $x = 2 \cos 210^\circ = 2 \times (-0.866) \approx -1.73$ 、 $y = 2 \sin 210^\circ = 2 \times (-0.5) = -1$ で、原点の左下にあります。左下にあることを、 $\cos$ と $\sin$ のマイナスが教えてくれるのです。

たとえば、半径 50 m の観覧車で、中心から見て 30° の所にあるゴンドラは、中心から横に約 43.3 m、たてに 25 m の所にいます。

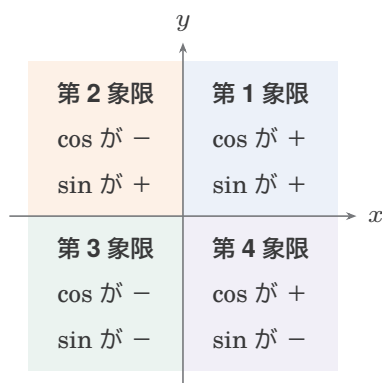
$$\text{横} : 50 \cos 30^\circ \approx 50 \times 0.866 = 43.3 \quad \text{たて} : 50 \sin 30^\circ = 50 \times 0.5 = 25$$

やってみようの半径 10 cm の円でも、 30° の点の高さは $10 \sin 30^\circ = 5$ cm でした。

3 符号と、くり返し（周期）

区画ごとの符号

x 軸と y 軸で、平面は 4 つの区画に分かれます。右上から左回りに、**第 1 象限**（しょうげん）、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限といいます。「象限」は、平面を 4 つに分けた 1 つ 1 つの区画のことです（軸の上の点は、どの象限にも入れません）。



覚えなくても、P の場所を見ればわかります。

- $\cos \theta$ は横の位置。P が y 軸より右なら正、左なら負。
- $\sin \theta$ は高さ。P が x 軸より上なら正、下なら負。

たとえば 250° は、 180° と 270° のあいだなので第 3 象限です。P は左下にいるので、 $\cos 250^\circ$ も $\sin 250^\circ$ も負です。電卓では $\cos 250^\circ = -0.342$ 、 $\sin 250^\circ = -0.940$ です。

1 周するともともにもどる：周期

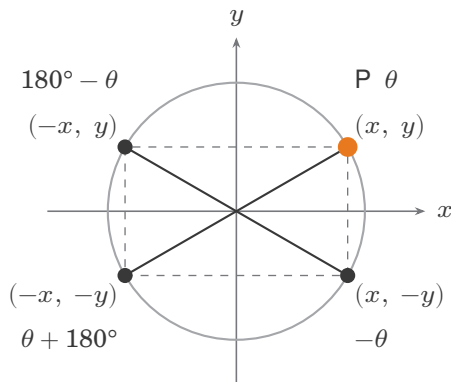
θ に 360° をたすと、動径は 1 周して同じ位置にもどります。P も同じ点なので、座標も同じです。

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta \quad \cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

電卓で $\sin 390^\circ$ を計算すると、 $\sin 30^\circ$ と同じ 0.5 になります。 $\sin$ と $\cos$ の値は、 360° ごとに同じ変わり方をくり返します。このように、同じ変わり方をくり返すとき、1 回分のはばを**周期**（しゅうき）といいます。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の周期は 360° 、ラジアンでは 2π です。

3つの「うつしかた」

角を変えると、P がどこへ動くかを、図で考えます。4-1 で学んだ「裏返す（線対称）」と「回す（点対称）」が使えます。



- $-\theta$ 始線から反対向きに同じだけ回る。 x 軸で裏返した位置なので、横はそのまま、高さは反対。
- $\theta + 180^\circ$ 半周回る。原点について点対称（4-1：点対称は 180° 回すこと）なので、横も高さも反対。
- $180^\circ - \theta$ y 軸で裏返した位置（4-6・4-7 でも使った）。横は反対、高さはそのまま。

角	うつしかた	cos	sin
$-\theta$	x 軸で裏返す	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\theta + 180^\circ$	原点のまわりに半周	$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$	$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$
$180^\circ - \theta$	y 軸で裏返す	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

表3 覚えるより、図をかいて考えるほうが確か。

数で確かめましょう。 $\theta = 30^\circ$ なら、 $\cos(-30^\circ)$ は $\cos 30^\circ$ と同じ約 0.866、 $\sin(-30^\circ)$ は $-\sin 30^\circ$ と同じ -0.5 です。 $\theta + 180^\circ = 210^\circ$ では、②で求めたとおり、 $\cos 210^\circ$ は約 -0.866 、 $\sin 210^\circ$ は -0.5 で、どちらも 30° の値の反対です。

④ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ：単位円で三平方の定理

単位円上の点 P は、どこにいても、原点 O からの距離が 1 です（半径だから）。P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ なので、三平方の定理（4-4）で OP の長さの 2 乗を計算すると、

$$OP^2 = (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1^2 = 1$$

4-4 の円の式 $x^2 + y^2 = r^2$ に、 $x = \cos \theta$ 、 $y = \sin \theta$ 、 $r = 1$ を入れたものと同じです。

P が第2・第3象限にいて、 $\cos \theta$ がマイナスの

ときも、この式は成り立ちます。三角形の横の

長さは「 $\cos \theta$ のマイナスをとった数」ですが、

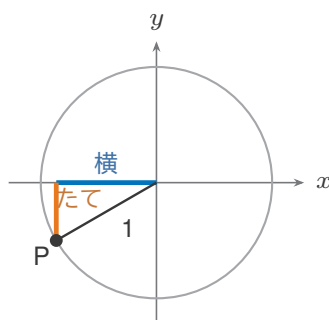
マイナスの数も2乗すると正になるので、

$(\cos \theta)^2$ は横の長さの2乗と同じになるからで

す。 $\sin \theta$ がマイナスのときも同じです。

$(\sin \theta)^2$ は、ふつう $\sin^2 \theta$ と書きます。2を

$\sin$ のすぐ右上に書きます。



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$\sin^2 \theta$ は「 $\sin \theta$ を2乗した数」です。 $\sin \theta^2$ と書くと、「 θ^2 の $\sin$ 」という、まったく別のものになってしまいます。

θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$
30°	0.866	0.5	$0.75 + 0.25 = 1$
135°	-0.707	0.707	$0.5 + 0.5 = 1$
210°	-0.866	-0.5	$0.75 + 0.25 = 1$

表4 どの象限の角でも、2乗してたすと1。(0.866² = 0.75、0.707² = 0.5 は、

$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$ 、 $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4}$ を小数にしたもの)

片方から、もう片方を求める

この式を使うと、 $\sin \theta$ がわかれば $\cos \theta$ が、 $\cos \theta$ がわかれば $\sin \theta$ が求められます。たとえば、 $\sin \theta = 0.6$ で、 θ が第 2 象限の角のとき、

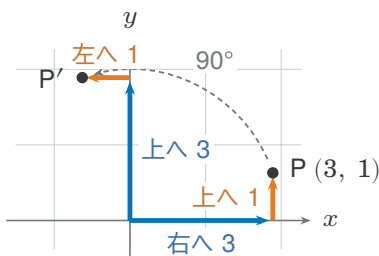
$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

2 乗して 0.64 になる数は、0.8 と -0.8 の 2 つです。単位円で見ると、高さ 0.6 の点は、単位円の右側と左側に 1 つずつあります。 θ は第 2 象限（左上）の角なので、 $\cos \theta$ は負で、 $\cos \theta = -0.8$ です。

5 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

ロボットのうちや、時計の針を、原点のまわりに左回りに 90° 回すと、先の点はどこへ動くでしょう。点 $P(3, 1)$ を、原点 O のまわりに左回りに 90° 回した点 P' （ピー・ダッシュ）を、2 通りで求めます。

見方 1：方眼の上で、道すじごと回す



P へは、 O から「右へ 3（青）、上へ 1（オレンジ）」と進めば着きます。この道すじを、まるごと左回りに 90° 回します。

● 「右へ 3」は、90° 回ると「上へ 3」

● 「上へ 1」は、90° 回ると「左へ 1」

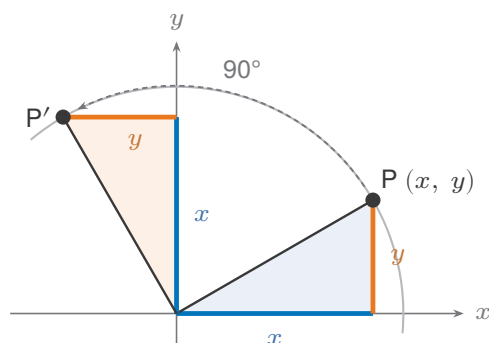
だから、 P' は「左へ 1、上へ 3」の所で、

$P'(-1, 3)$ です。

長さを確かめます。 $OP^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ 、 $OP'^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$ で、原点からの距離は変わっていません（4-4）。回しても、長さは変わらないからです。

見方2：直角三角形をまるごと90°回す

こんどは、点 $P(x, y)$ を一般に考えます（下の図は、 x も y も正のときの図です）。 P から x 軸に垂直な線を下ろすと、横が x （青）、たてが y （オレンジ）の直角三角形ができます。この三角形を、 O を中心に、まるごと90°回します。



青い辺の長さは、どちらも x 。

オレンジの辺の長さは、どちらも y 。

回した三角形では、

青い辺は、たてに O から上へ x

オレンジの辺は、横に左へ y

だから、 P' の座標は $(-y, x)$

図4 三角形（青い面）を90°回すと、オレンジの面の三角形になる。辺の長さはそのまま、たてと横が入れかわり、横は左向きになる。

左回りに90°回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

見方1の $P(3, 1)$ で確かめると、 $(-1, 3)$ になり、合っています。この90°回す式は、 P がどの象限にいても成り立ちます（ x や y がマイナスのときは、向きも反対になって、うまく合います）。

$\sin \cdot \cos$ で書くと

単位円の上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を、90°回します。回した点 P' は、動径が $\theta + 90^\circ$ の所にあるので、 x 座標は $\cos(\theta + 90^\circ)$ 、 y 座標は $\sin(\theta + 90^\circ)$ です。いっぽう、90°回す式 $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ からは、 x 座標が $-\sin \theta$ 、 y 座標が $\cos \theta$ です。2つは同じ点なので、

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta \quad \sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

$\theta = 30^\circ$ で確かめます。 $\theta + 90^\circ = 120^\circ$ です。

$$\cos 120^\circ = -0.5$$

$$-\sin 30^\circ = -0.5$$

$$\sin 120^\circ = 0.866$$

$$\cos 30^\circ = 0.866$$

左右が等しく、合っています。

90° 回すことを 2 回くり返すと、 $(x, y) \rightarrow (-y, x) \rightarrow (-x, -y)$ で、③の「 180° 回すと、横も高さも反対」と同じになります。この 90° 回す見方は、5-15 で回る点の速度の向きを調べるときと、4-15 の極座標で使います。

6 グラフ：回る点の影は、波になる

単位円の上を、P が左回りに回ります。P の高さ $\sin \theta$ は、真横から光を当てたときの、かべの上の影の高さです。横軸に角 θ 、たて軸に影の高さをとって、グラフにかきます。

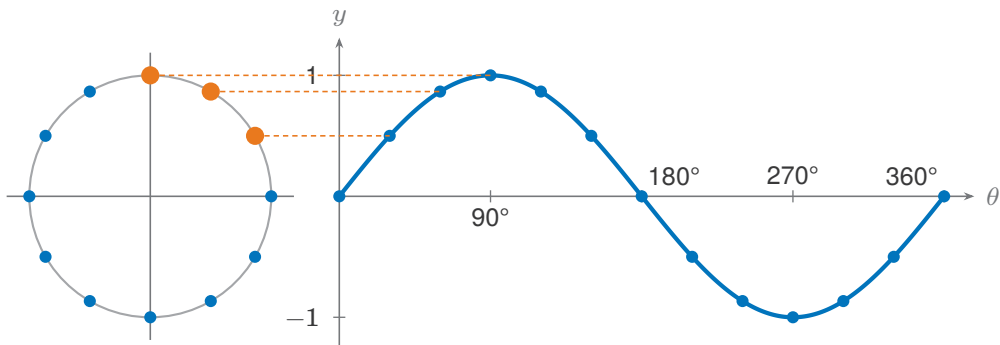


図5 単位円の上の点（左）の高さを、角ごとに右へならべると、 $y = \sin \theta$ のグラフになる。オレンジの点線は、 $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の点の高さ。

やってみようでつないだ形と同じ、山と谷のある波になりました。このグラフからわかることを書き出します。

- いちばん高いのは 90° で 1、いちばん低いのは 270° で -1 。 $\sin \theta$ の値は、 -1 から 1 までのあいだにある（P は半径 1 の円の上にいるから）。
- 0° 、 180° 、 360° で 0（P が x 軸の上にいるから）。

- 360° から先は、同じ形をくり返す（周期 360° ）。マイナスの角でも、左へ同じ形が続く。

影が、上と下ではゆっくり動くわけ

グラフは、 0° や 180° のあたりでは急で、 90° や 270° のあたりでは平らです。同じ 30° 回るあいだの高さの変わり方を、数でくらべます。

回るあいだ	高さ	高さの変化
$0^\circ \rightarrow 30^\circ$	$0 \rightarrow 0.5$	0.5
$30^\circ \rightarrow 60^\circ$	$0.5 \rightarrow 0.866$	0.366
$60^\circ \rightarrow 90^\circ$	$0.866 \rightarrow 1$	0.134

同じ 30° ずつ回っても、高さの変化は 0.5、0.366、0.134 と小さくなっていきます。P が真横 (0°) を通るときは、P はまっすぐ上に動いているので、高さがどんどん変わります。P がいちばん上 (90°) の近くでは、P はほとんど横に動いているので、高さはあまり変わりません。これが、**？はてな？** の「影が上と下ではゆっくり、まん中で速く動く」わけです。

$y = \cos \theta$ のグラフ

P の横の位置 $\cos \theta$ は、真上から光を当てたときの、床の上の影の位置です。 $y = \cos \theta$ のグラフは、 0° で 1 から始まり、 90° で 0、 180° で -1 になります。

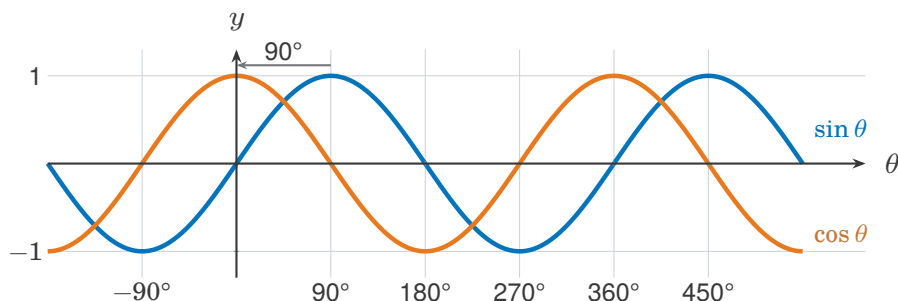


図6 $y = \sin \theta$ (青) と $y = \cos \theta$ (オレンジ)。 $\cos \theta$ の山 (0°) は、 $\sin \theta$ の山 (90°) より 90° 早く来る。

$\cos \theta$ のグラフは、 $\sin \theta$ のグラフと同じ形を、左へ 90° ずらしたものです。⑤で作った $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ が、このことを表しています。 $\theta = 0^\circ$ のとき、 $\cos \theta$ は、 $\sin$ のグラフの $\theta = 90^\circ$ の値（山の 1）と同じです。

θ	0°	30°	60°	90°
$\cos \theta$	1	0.866	0.5	0
$\theta + 90^\circ$	90°	120°	150°	180°
$\sin(\theta + 90^\circ)$	1	0.866	0.5	0

$\sin \theta$ のグラフの形を、**正弦曲線**（せいげんきょくせん）、英語でサインカーブといいます。 $\sin$ を日本語で正弦（せいげん）、 $\cos$ を余弦（よげん）といいます。

7 波をのばす・ずらす

3-9 では、放物線 $y = a(x - p)^2 + q$ が、 $y = ax^2$ を右へ p 、上へ q 動かしたものだ学びました。三角関数のグラフでも、同じことができます。4 つの変え方を、1 つずつ見ます。どの図も、灰色の線がもとの $y = \sin \theta$ です。

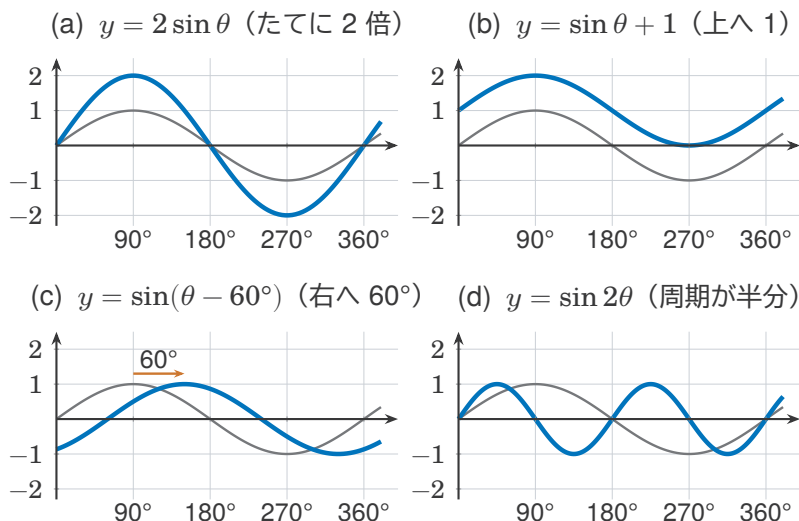


図 7 青い線が新しいグラフ、灰色の線がもとの $y = \sin \theta$ 。

● (a) $y = 2 \sin \theta$

どの値も 2 倍なので、山は 2、谷は -2 。半径 2 の円を回る点の高さ $2 \sin \theta$

と同じです (②の $r \sin \theta$)。中心の線から山までの高さを、**振幅** (しんぷく) といいます。 $y = 2 \sin \theta$ の振幅は 2 です。

● (b) $y = \sin \theta + 1$

どの値にも 1 をたすので、グラフ全体が上へ 1 動きます。3-9 の $+q$ と同じです。

● (c) $y = \sin(\theta - 60^\circ)$

$y = \sin \theta$ が $\theta = 0^\circ$ でしていたことを、 $y = \sin(\theta - 60^\circ)$ は、かつこの中が 0 になる $\theta = 60^\circ$ でします。どのできごととも 60° おそく起こるので、グラフは**右へ** 60° 動きます。3-9 で $y = (x - 3)^2$ の頂点が $x = 3$ (右) に動いたのと同じです。

● (d) $y = \sin 2\theta$

θ が 180° になると、 2θ が 360° になって、1 周分の波が終わります。2 倍の速さで回る点の高さと同じで、周期は $360^\circ \div 2 = 180^\circ$ です。

(c) を数で確かめます。 $y = \sin \theta$ は $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ で 0、0.5、1 でした。 $y = \sin(\theta - 60^\circ)$ に $\theta = 60^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ を入れると、 $\sin 0^\circ = 0$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ 、 $\sin 90^\circ = 1$ 。同じ値が、 60° ずつおくらせて出てきます。

式	グラフの変わり方	3-9 の放物線では
$y = a \sin \theta$	たてに a 倍 (振幅 a)	$y = ax^2$
$y = \sin \theta + q$	上へ q	$y = x^2 + q$
$y = \sin(\theta - p)$	右へ p	$y = (x - p)^2$
$y = \sin k\theta$	周期が $360^\circ \div k$	—

表 5 三角関数のグラフの動かし方。cos でも同じ。

8 $\sin \theta = 0.5$ になる角は、1 周に 2 つ

4-6 では、電卓の $\sin^{-1}$ で「 $\sin \theta = 0.5$ になる角」を求めると、 30° が出てきました。でも、一般角まで考えると、 $\sin \theta = 0.5$ になる角はほかにもあります。2 通りの見方で探します。

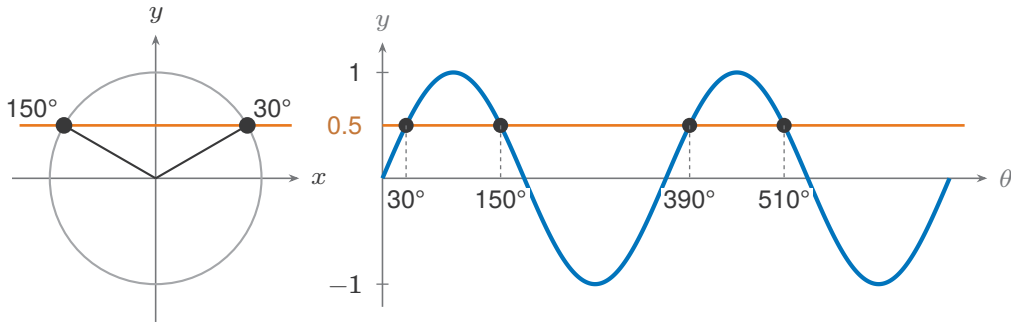


図 8 左：高さ 0.5 の横線（オレンジ）は、単位円と 2 点で交わる。右： $y = \sin \theta$ のグラフと横線 $y = 0.5$ は、1 周（ 360° ）ごとに 2 つずつ交わる。

- **単位円で** $\sin \theta$ は高さなので、高さ 0.5 の横線と単位円が交わる点を探します。交わる点は、右に 1 つ（ 30° ）、左に 1 つ（ 150° ）あります。左の点は、右の点を y 軸で裏返した位置で、 $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ です（③の表）。
- **グラフで** $y = \sin \theta$ のグラフと、横線 $y = 0.5$ が交わる所を探します。 0° から 360° のあいだに 2 つ（ 30° と 150° ）。さらに、 360° ずつ先に、 390° 、 510° 、……と続きます。

電卓の $\sin^{-1}$ は、1 つ（ 30° ）しか教えてくれません。もう 1 つは、自分で $180^\circ - 30^\circ$ と考えます。

$\cos \theta$ のときは

$\cos \theta$ は横の位置なので、 $\cos \theta = 0.5$ になる角は、たての線 $x = 0.5$ と単位円が交わる所です。上に 1 つ（ 60° ）、下に 1 つあります。下の点は、上の点を x 軸で裏返した位置で、 -60° 、つまり $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ です（③の $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ）。

式	電卓で出る角 θ_1	もう1つの角 ($0^\circ \sim 360^\circ$)
$\sin \theta = k$	$\sin^{-1} k$	$180^\circ - \theta_1$
$\cos \theta = k$	$\cos^{-1} k$	$360^\circ - \theta_1$

表6 θ_1 (シータ・いち) は、電卓で出た角。マイナスの角が出たときは、 360° をたして直す。

$\sin \theta$ がマイナスになる角も、同じように考えます。 $\sin \theta = -0.5$ なら、高さ -0.5 の横線と交わる2点で、 210° と 330° です (30° の三角形が、左下と右下にできる)。

9 回る点を時間で表す：角速度 ω

回転台が、4秒で1周する速さで、同じように回っています。回転台のふちの点は、 t 秒でどれだけの角を回るでしょう。

時間 t (s)	0	1	2	3	4
回った角 (度)	0°	90°	180°	270°	360°
回った角 (rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

同じ速さで回るので、回った角は時間に比例します (2-15)。1秒に $\frac{\pi}{2}$ rad (90°) ずつふえるので、 t 秒で回る角は

$$\theta = \frac{\pi}{2} t$$

です。この $\frac{\pi}{2}$ のように、**1秒あたりに回る角を角速度** (かくそくど) といい、 ω (オメガ) で表します。単位は rad/s (ラジアン毎秒) です。角速度 ω で回る点が t 秒で回る角は、

$$\theta = \omega t$$

「速さ $\times$ 時間 = 道のり」と同じ形です。角速度は「角の速さ」です。

周期 T と振動数 f

1 周にかかる時間を、回るときの**周期**といい、 T で表します（③の周期と同じことばです。時間でいうと、同じ動きをくり返す 1 回分の時間です）。1 周は $2\pi \text{ rad}$ で、1 秒に $\omega \text{ rad}$ ずつ回るので、 $\omega T = 2\pi$ 。両辺を ω でわって (2-14)、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

回転台なら $\omega = \frac{\pi}{2}$ なので、 $T = 2\pi \div \frac{\pi}{2} = 2\pi \times \frac{2}{\pi} = 4$ で、4 秒。合っています。

1 秒あたりに回る回数を**振動数**（しんどうすう）といい、 f で表します。単位は Hz （ヘルツ）で、「1 秒に何回」という意味です。1 周に T 秒かかるので、1 秒では $\frac{1}{T}$ 回です。また、1 回転は $2\pi \text{ rad}$ なので、1 秒に f 回転すると、 $2\pi \times f \text{ rad}$ 回ります。

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f$$

回転台なら、 $f = \frac{1}{4} = 0.25$ で 0.25 Hz 。 $\omega = 2\pi \times 0.25 = \frac{\pi}{2}$ で、合っています。

回る点の位置と、影のグラフ

半径 r の円の上を、角速度 ω で回る点は、 t 秒後に角 ωt の所にいます（0 秒で x 軸の上から出発したとき）。②の「半径 r の円するとき」の θ に ωt を入れると、

$$(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

影の高さ $y = r \sin \omega t$ を、横軸を時間 t にしてグラフにすると、振幅 r 、周期 T の波になります。

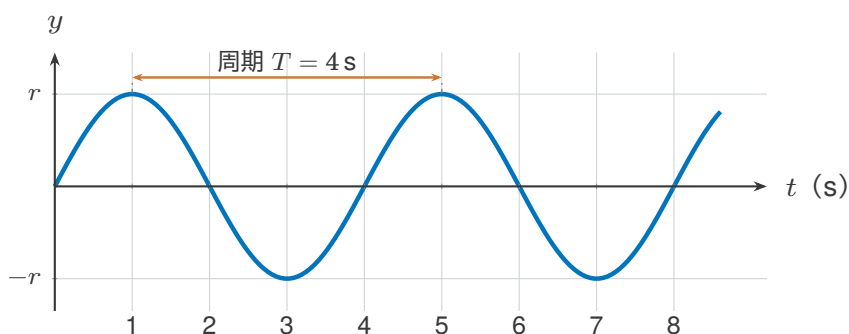


図9 回転台 ($T = 4 \text{ s}$, $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$) のふちの点の高さ $y = r \sin \omega t$ 。山から次の山まで4秒。

回る点の速さ $v = r\omega$

回る点は、1秒に $\omega \text{ rad}$ だけ回ります。半径 r の円で、角 ω の弧の長さは、4-2の「弧の長さ＝半径×角 ($s = r\theta$)」から $r\omega$ です。だから、1秒に進む道のり、つまり速さは

$$v = r\omega$$

別の考え方で確かめます。1周の道のりは円周の $2\pi r$ で、それを T 秒で進むので、速さは $\frac{2\pi r}{T} = r \times \frac{2\pi}{T} = r\omega$ 。同じになりました。

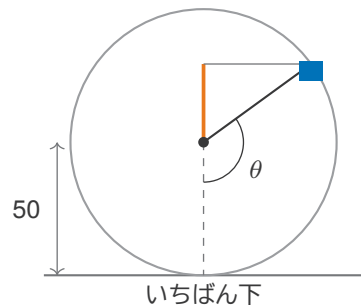
ここで、角をラジアンではかる理由がわかります。ラジアンなら、「弧＝半径×角」がそのまま使えるので、 $v = r\omega$ ときれいな形になります。度ではかると、 $v = r\omega \times \frac{\pi}{180}$ のように、余分な数がついてしまいます。

② はてな？ の答え

半径 50 m、1 周 20 分の観覧車です。1 周 360° を 20 分で回るので、1 分に $360^\circ \div 20 = 18^\circ$ 回ります。いちばん下から乗って t 分後には、いちばん下から $\theta = 18^\circ \times t$ だけ回っています。いちばん下は、中心から見て -90° の位置です。だから θ 回ったゴンドラの動径は、 $\theta - 90^\circ$ の所にあります。中心からの高さは $50 \sin(\theta - 90^\circ)$ で、中心はいちばん下より 50 m 高いので、いちばん下からの高さは

$$y = 50 \sin(\theta - 90^\circ) + 50$$

⑦の言い方では、 $y = 50 \sin \theta$ を右へ 90° 、上へ 50 動かしたグラフです。



7 分後は $\theta = 18^\circ \times 7 = 126^\circ$ で、 $\theta - 90^\circ = 36^\circ$ 。 $\sin 36^\circ = 0.588$ なので、

$$y = 50 \times 0.588 + 50 = 29.4 + 50 = 79.4$$

で、約 79 m です。105 分後は、 $105 \div 20 = 5$ あまり 5 なので、5 周と 5 分。5 周すると、いちばん下にもどるので、あまりの 5 分だけ考えます。 $\theta = 18^\circ \times 5 = 90^\circ$ で、 $y = 50 \sin 0^\circ + 50 = 50$ m。中心と同じ高さです。

この式は、⑤を使うと、もっと短く書けます。⑤の $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ で、 θ のかわりに $\theta - 90^\circ$ を入れると、 $\cos \theta = -\sin(\theta - 90^\circ)$ 、つまり $\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta$ です。だから

$$y = 50 - 50 \cos \theta$$

とも書けます。7分後なら $50 - 50 \cos 126^\circ = 50 - 50 \times (-0.588) = 79.4$ で、同じ答えです。5-15では、この形を使います。

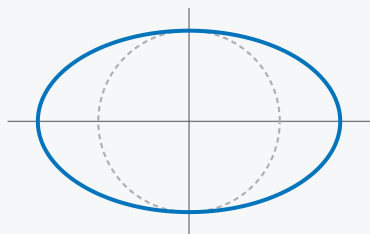
観覧車の速さも求めます。1周の時間は $20 \times 60 \text{ s/min} = 1200 \text{ s}$ です。だから、角速度は $\omega = \frac{2\pi}{1200} \approx 0.00524 \text{ rad/s}$ で、速さは $v = r\omega$ から、 $50 \times 0.00524 \approx 0.26 \text{ m/s}$ です。人が歩く速さ（約 1.3 m/s ）の $\frac{1}{5}$ ほどの、ゆっくりした速さです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

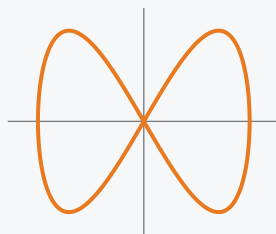
円をつぶすと、だ円

単位円上の点 $(\cos t, \sin t)$ を考えます。その横を a 倍、たてを b 倍にした点は、 $(a \cos t, b \sin t)$ です。 t を 0 から 2π まで変えると、この点は、円を横に a 倍、たてに b 倍にのばした（つぶした）形をえがきます。この形を**だ円**（だえん）といいます。 $\cos t = \frac{x}{a}$ 、 $\sin t = \frac{y}{b}$ を $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ に入れると、だ円の式 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ が出てきます。

このように、 x と y を、別の変数 t の式で表すやり方を、**媒介変数**（ばいまいへんすう）表示といいます。 t が、 x と y のなかだちをしています。 x と y でちがう角速度にした $(\sin t, \sin 2t)$ などの形は、**リサージュ図形**といいます。2つのゆれを組み合わせたときにできる形で、電気の波をくらべる機械（オシロスコープ）の画面で見られます。



$(2 \cos t, 1.2 \sin t)$ のだ円



$(\sin t, \sin 2t)$ のリサージュ図形

地球が太陽のまわりを回る道すじも、だ円です。ただし、太陽はだ円の中心ではなく、少しずれた所にあります（4-15・物理シリーズでくわしく）。

たいせつ

単位円	単位円の上の点の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$
極座標	(r, θ) の点は $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ (どの向きでも)
一般角	$\theta + 360^\circ \times n$ は、 θ と同じ位置。周期は 360° (2π)
三平方	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
90° 回す	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$ $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ 、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$
回る点	$\theta = \omega t$ 、 $(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ 、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 、 $f = \frac{1}{T}$ 、 $v = r\omega$

📖 この章で出てきたことば

一般角 360° より大きい角や、マイナスの角までふくめて考えた角。左回りが正。

動径 始線 (x 軸の正の部分) から回っていく半直線 OP。

単位円 原点を中心とする半径 1 の円。

象限 x 軸と y 軸で分けた平面の 4 つの区画。右上が第 1 象限で、左回りに第 2・第 3・第 4。

三角関数 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のこと。角 θ の関数。

周期 同じ変わり方をくり返すときの、1 回分のはば (角や時間)。

振幅 波の中心の線から山までの高さ。

角速度 1 秒あたりに回る角 ω (rad/s)。

振動数 1 秒あたりにくり返す回数 f (Hz)。 $f = \frac{1}{T}$ 。

📇 記号カード

初めて出た章 4-8

 ω

読み方 オメガ
意味 角速度。1 秒に回る角 (rad/s)
英語 angular velocity

📇 記号カード

初めて出た章 4-8

 $\sin^2 \theta$

読み方 サイン・にじょう・シータ
意味 $(\sin \theta)^2$ のこと。
 $\sin(\theta^2)$ ではない
英語 sine squared

コラム 時計の針と地球の角速度

いろいろなものの角速度を、 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ で計算してみます。

回るもの	周期 T	角速度 ω (rad/s)
時計の秒針	1 分 (60 s)	$\frac{2\pi}{60} \approx 0.105$
時計の長針	1 時間 (3600 s)	$\frac{2\pi}{3600} \approx 0.00175$
地球の自転	1 日 (86 400 s)	$\frac{2\pi}{86\,400} \approx 0.0000727$

地球の角速度はとても小さいのですが、半径が大きいので、赤道の上の地面は $v = r\omega$ で、 $6\,400\,000 \times 0.0000727 \approx 465 \text{ m/s}$ もの速さで動いています（地球の半径は約 6400 km）。わたしたちは、地面といっしょに動いているので、その速さを感じないのです。（地球がまわりの星に対して 1 周する時間は、くわしくは 23 時間 56 分ほどです。）

コラム 自転車のギアと角速度

自転車では、ペダルの前ギア（半径 0.10 m）と後ろのギア（半径 0.04 m）がチェーンでつながっています。チェーンは 1 本なので、2 つのギアのふちは同じ速さ v で動きます。

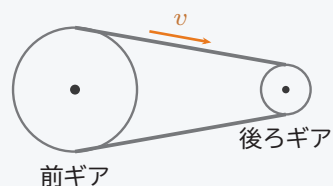
$v = r\omega$ なので、

$$0.10 \times \omega_{\text{前}} = 0.04 \times \omega_{\text{後}}$$

後ろのギアの角速度は、前の

$0.10 \div 0.04 = 2.5$ 倍です。ペダルを 1 秒に 1 回転こぐと、後ろの車輪は 1 秒に 2.5 回転し、半径 0.33 m のタイヤなら、

$0.33 \times 2.5 \times 2\pi \approx 5.2 \text{ m/s}$ （時速約 19 km）で進みます。



例題でたしかめよう

例題 1 一般角を $0^\circ \sim 360^\circ$ に直す

次の角の動径は、 0° から 360° までのどの角と同じ位置ですか。何周と何度かも答えましょう。

(1) 750° (2) -120° (3) $\frac{9\pi}{4} \text{ rad}$

考え方 360° (ラジアンでは 2π) ごとに同じ位置にもどるので、 360° でわったあまりを見ます。マイナスの角は、 360° をたして直します。

式 (1) $750 \div 360 = 2 \text{ あまり } 30$

確かめ： $360 \times 2 + 30 = 720 + 30 = 750$

(2) $-120^\circ + 360^\circ = 240^\circ$

右回りに 120° は、左回りに 240° と同じ位置。

(3) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$
 2π が 1 周なので、1 周と $\frac{\pi}{4}$ 。 $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ は 45° ($\pi \text{ rad}$ が 180° だから)。

答え (1) 30° (2 周と 30°) (2) 240° (3) 45° (1 周と $\frac{\pi}{4}$)

じぶんでこう 1

次の角の動径は、 0° から 360° までのどの角と同じ位置ですか。何周と何度かも答えましょう。

(1) 1000° (2) -45° (3) $\frac{7\pi}{3} \text{ rad}$

例題2 単位円で $\sin \cdot \cos$ を求める

次の角の $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を求めましょう。(1) 210° (2) 315° (3) 480°
 (4) 極座標が $(4, 210^\circ)$ の点と $(6, 315^\circ)$ の点の、 (x, y) を求めましょう。

考え方 (4) は $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ (②) に (1) (2) の値を入れます。(1) ~ (3) は、②の①~④の順。動径をかき、 x 軸とのあいだのとがった角の三角形で横とたてを出し、場所で符号をつけます。

式 (1) 210° は、 x 軸の左の部分から 30° 下。第3象限(左下)。

30° の三角形で、横 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、たて $\frac{1}{2}$ 。左にも下にもいるので、どちらも負。

(2) 315° は、 x 軸の右の部分から 45° 下。第4象限(右下)。

45° の三角形で、横もたても $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。右にいますので $\cos$ は正、下にいますので $\sin$ は負。

(3) $480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$ 。 120° は、 x 軸の左の部分から 60° 上。第2象限(左上)。

60° の三角形で、横 $\frac{1}{2}$ 、たて $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。左にいますので $\cos$ は負。

(4) $(4, 210^\circ) : x = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$ 、 $y = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

$(6, 315^\circ) : x = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ 、 $y = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$

答え (1) $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\cos 480^\circ = -\frac{1}{2}$ 、 $\sin 480^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $(-2\sqrt{3}, -2)$ 、 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

じぶんでこう2

次の角の $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を求めましょう。(1) 240° (2) -60° (3) 390° (4) 極座標が $(6, 240^\circ)$ の点と $(8, -60^\circ)$ の点の、 (x, y) を求めましょう。

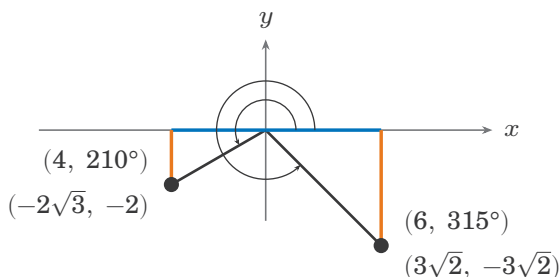


図10 例題2(4)の2つの点。青い横の線が $x = r \cos \theta$ 、オレンジのたての線が $y = r \sin \theta$ 。点が y 軸より左なら x が負、 x 軸より下なら y が負になる。

例題3 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使う

$\sin \theta = 0.6$ で、 θ は第2象限の角です。 $\cos \theta$ を求めましょう。

考え方 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\cos^2 \theta$ を求め、2つの候補のうち、象限に合う符号のほうを選びます。

式 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64$

2乗して0.64になる数は、0.8と-0.8

第2象限(左上)では、Pは原点より左にいるので、 $\cos \theta$ は負

確かめ： $0.6^2 + (-0.8)^2 = 0.36 + 0.64 = 1$

答え $\cos \theta = -0.8$

例題4 原点のまわりに 90° 回す

点 $(4, 2)$ を、原点のまわりに左回りに 90° 回した点 A を求めましょう。
さらに 90° 回した点 B も求めましょう。

考え方 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 x に 4 、 y に 2 を入れます。

式 $A: (-y, x) = (-2, 4)$

$B: A$ の x が -2 、 y が 4 なので、 $(-y, x) = (-4, -2)$

確かめ: B は 180° 回した点なので、もとの点の横も高さも反対の $(-4, -2)$ 。合っている。

答え $A(-2, 4)$ 、 $B(-4, -2)$

じぶんでこう3

$\cos \theta = 0.6$ で、 θ は第4象限の角です。 $\sin \theta$ を求めましょう。

じぶんでこう4

点 $(3, -1)$ を、原点のまわりに左回りに 90° 回した点 A と、さらに 90° 回した点 B を求めましょう。

例題5 グラフの振幅・周期・ずれ

(1) $y = 3 \sin(\theta - 30^\circ)$ の振幅、周期と、 $y = \sin \theta$ のグラフをどう動かしたかを答えましょう。また、 $\theta = 120^\circ$ のときの y の値を求めましょう。

(2) $y = \sin 2\theta$ の周期を求めましょう。

考え方 ⑦の表を使います。前の数が振幅、かっこの中の「 -30° 」は右へ 30° 。

式 (1) 振幅 3。周期は $y = \sin \theta$ と同じ 360° 。

たてに 3 倍にして、右へ 30° 動かしたグラフ。

$$\theta = 120^\circ \text{ のとき } y = 3 \sin(120^\circ - 30^\circ) = 3 \sin 90^\circ = 3 \times 1 = 3$$

(2) 2θ が 360° になるのは $\theta = 180^\circ$ のとき。 $360^\circ \div 2 = 180^\circ$

答え (1) 振幅 3、周期 360° 、たてに 3 倍して右へ 30° 。 $y = 3$

(2) 180°

じぶんでこう5

(1) $y = 2 \sin(\theta - 45^\circ)$ の振幅、周期と、 $y = \sin \theta$ のグラフをどう動かしたかを答えましょう。また、 $\theta = 135^\circ$ のときの y の値を求めましょう。

(2) $y = \sin 3\theta$ の周期を求めましょう。

例題6 $\sin \theta = k$ 、 $\cos \theta = k$ になる角

0° から 360° までで、次の式が成り立つ θ を求めましょう。

- (1) $\sin \theta = -0.5$ (2) $\cos \theta = -0.5$ (3) $\sin \theta = 0.8$ (電卓を使う)

考え方 単位円で、 $\sin$ は高さの横線、 $\cos$ は横の位置のたての線と交わる2点を探します。

式 (1) 高さ -0.5 の横線と交わる点。どちらも x 軸の下で、 30° の三角形ができる。

左下は $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ 、右下は $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

(2) $x = -0.5$ のたての線と交わる点。上は 120° ($\cos 120^\circ = -0.5$)。

下は、 x 軸で裏返した $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

(3) 電卓 (DEG) で $\sin^{-1} 0.8 = 53.13\dots$ なので、約 53.1° 。

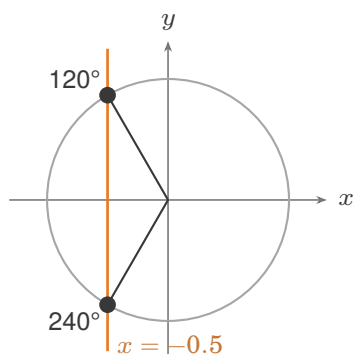
もう1つは $180^\circ - 53.1^\circ = 126.9^\circ$

答え (1) 210° 、 330° (2) 120° 、 240° (3) 約 53.1° 、約 126.9°

じぶんでこう6

0° から 360° までで、次の式が成り立つ θ を求めましょう。

- (1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos \theta = 0.5$ (3) $\sin \theta = 0.3$ (電卓を使う)



例題6の(2)を図で見る

$\cos \theta$ は横の位置なので、 $\cos \theta = -0.5$ になる点は、たての線 $x = -0.5$ (オレンジ) と単位円が交わる所です。上の点が 120° 、下の点は、上の点を x 軸で裏返した位置で、 -120° 、つまり 240° です。電卓の $\cos^{-1}(-0.5)$ は 120° だけを教えてください。

例題 7 角速度・周期・振動数・速さ

扇風機の羽根が、1 分に 1200 回転しています。羽根の先は、中心から 0.15 m です。振動数 f 、周期 T 、角速度 ω 、羽根の先の速さ v を求めましょう。

考え方 1 分を秒に直して、1 秒あたりの回転数（振動数）を出します。

$$T = \frac{1}{f}, \quad \omega = 2\pi f, \quad v = r\omega.$$

式 $f = \frac{1200 \text{ 回}}{60 \text{ s}} = 20 \text{ で } 20 \text{ Hz}$

$$T = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ で } 0.05 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi \times 20 = 40\pi \approx 125.7 \text{ で約 } 126 \text{ rad/s}$$

$$v = r\omega = 0.15 \times 125.7 \approx 18.8 \text{ で約 } 18.8 \text{ m/s}$$

$$\text{確かめ: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.05} = 40\pi. \text{ 同じ。}$$

答え $f = 20 \text{ Hz}$ 、 $T = 0.05 \text{ s}$ 、 $\omega = 40\pi \approx 126 \text{ rad/s}$ 、 $v \approx 18.8 \text{ m/s}$

羽根の先の速さ 18.8 m/s は、時速になおすと約 68 km/h です（1 m/s は 3.6 km/h）。回っている扇風機に指を入れてはいけないわけが、数でわかります。

じぶんでこう？

洗濯機のドラムが、脱水のとき 1 分に 600 回転しています。ドラムの半径は 0.25 m です。 f 、 T 、 ω 、ドラムのふちの速さ v を求めましょう。

例題8 観覧車の高さ

半径 30 m、1 周 12 分の観覧車に、いちばん下から乗ります。いちばん下からのゴンドラの高さは、 θ 回ったとき $y = 30 - 30 \cos \theta$ (m) です。

(1) 1 分に何度回りますか。(2) 4 分後の高さは。(3) 50 分後の高さは。

考え方 ⑨の **？はてな？** の答えと同じ式です (半径が 30)。何周もしたあとは、あまりの時間だけ考えます。

式 (1) $360^\circ \div 12 = 30^\circ$

(2) $\theta = 30^\circ \times 4 = 120^\circ$ 。 $\cos 120^\circ = -0.5$ なので

$$y = 30 - 30 \times (-0.5) = 30 + 15 = 45$$

(3) $50 \div 12 = 4$ あまり 2 なので、4 周と 2 分。 $\theta = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$

$$y = 30 - 30 \cos 60^\circ = 30 - 30 \times 0.5 = 30 - 15 = 15$$

答え (1) 30° (2) 45 m (3) 15 m

じぶんでこう8

半径 40 m、1 周 16 分の観覧車に、いちばん下から乗ります。高さは $y = 40 - 40 \cos \theta$ (m) です。(1) 1 分に何度回りますか。(2) 6 分後の高さは。(3) 50 分後の高さは ($\cos 45^\circ = 0.707$ 、 $\cos 135^\circ = -0.707$)。

例題 9 回る点の影の高さ

回転台のふちの点が、半径 0.1 m の円を、周期 4 s で左回りに回っています。 0 秒のとき、点は x 軸の上にあります。影の高さは $y = 0.1 \sin \omega t$ (m) です。

(1) ω を求めましょう。(2) 0.5 秒後と 3 秒後の影の高さを求めましょう。

考え方 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。 ωt はラジアンなので、電卓は RAD にするか、度に直して計算します ($\pi \text{ rad}$ は 180°)。

式 (1) $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(2) 0.5 秒後: $\omega t = \frac{\pi}{2} \times 0.5 = \frac{\pi}{4} \text{ rad } (45^\circ)$

$$y = 0.1 \sin 45^\circ = 0.1 \times 0.707 \approx 0.071$$

3 秒後: $\omega t = \frac{\pi}{2} \times 3 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad } (270^\circ)$

$$y = 0.1 \sin 270^\circ = 0.1 \times (-1) = -0.1$$

答え (1) $\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$ (2) 約 0.071 m 、 -0.1 m (中心より 0.1 m 下)

じぶんでこう 9

半径 0.2 m 、周期 6 s で回る点の影の高さは、 $y = 0.2 \sin \omega t$ (m) です。

(1) ω を求めましょう。(2) 1 秒後と 4.5 秒後の影の高さを求めましょう ($\sin 60^\circ = 0.866$)。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

cos の符号をわすれる

✗ $\cos 150^\circ = 0.866$

○ $\cos 150^\circ = -0.866$

150° の点 P は、原点より左にいます。単位円をかいて、P の場所で符号を決めましょう。

⚠ まちがえやすいところ

答えが 1 つだけ

✗ $\sin \theta = 0.5$ なら $\theta = 30^\circ$

○ $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

高さ 0.5 の点は、単位円の右と左に 1 つずつあります ($0^\circ \sim 360^\circ$ のとき)。

⚠ まちがえやすいところ

ずらす向き

✗ $\sin(\theta - 60^\circ)$ は左へ 60°

○ 右へ 60°

かっこの中が 0 になるのは $\theta = 60^\circ$ 。波の始まりが右へ動きます。

⚠ まちがえやすいところ

DEG と RAD

✗ DEG : $\sin 1.5708 = 0.027$

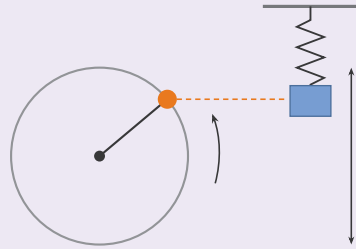
○ RAD : $\sin 1.5708 = 1$

ωt の角はラジアンです。答えが小さすぎたら、電卓の表示を確認しましょう。

物理・工学ではこう使う

ばねのおもりは、回る点の影と同じに動く
回転台のふちのくぎと、ばねにつるした

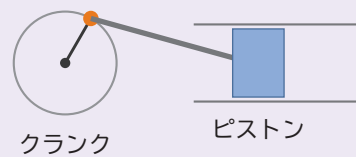
おもりを、同じ周期で動かして真横から光を当てると、2つの影はぴったり同じに上下します。おもりの高さも $r \sin \omega t$ の形で変わるのです。このゆれを**単振動**といいます（6-6 でくわしく）。



物理・工学ではこう使う

エンジンのクランク

自動車のエンジンでは、ピストンの往復の動きを、クランクという回る部品で回転に変えています。クランクのピンは半径 r の円を回り、ピンの横の位置は $r \cos \theta$ です。ピストンは、ピンの横の位置（影）とほとんど同じに動きます。ずれは、ピンとピストンをつなぐ棒（連接棒）が長いほど小さくなります。

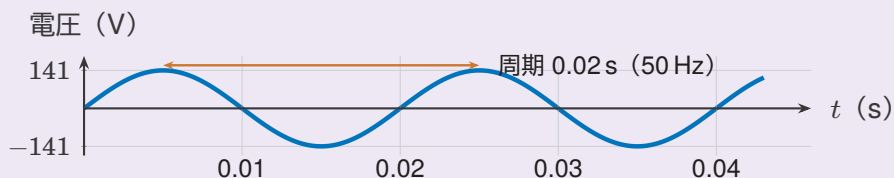


物理・工学ではこう使う

家のコンセントの交流

発電機の中では、磁石のあいだでコイル（巻いた電線）が回っています。コイルが角速度 ω で回ると、電圧は $V_0 \sin \omega t$ の形で変わり（ V_0 は山の高さ）、向きが半周ごとに入れかわります。これが交流です。

東日本では1秒に50回、西日本では60回くり返します。50 Hz なら、周期 $T = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ s}$ 、角速度 $\omega = 2\pi \times 50 \approx 314 \text{ rad/s}$ です。家の「100 V」は実効値で、山の高さは約 141 V です（3-10）。



✓ 章末問題

4-8 のまとめ

基本 ★★★

- 1 次の角の動径は、 0° から 360° までのどの角と同じ位置ですか（例題 1）。
 (1) 840° (2) -210° (3) $\frac{17\pi}{6} \text{ rad}$
- 2 次の角の $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を求めましょう（例題 2）。 (1) 225° (2) -30° (3) 510° (4) 極座標が $(10, 225^\circ)$ の点と $(4, 510^\circ)$ の点の (x, y)
- 3 $\sin \theta = -0.8$ で、 θ は第 3 象限の角です。 $\cos \theta$ を求めましょう（例題 3）。
- 4 点 $(5, 2)$ を、原点のまわりに左回りに 90° 回した点と、さらに 90° 回した点を求めましょう（例題 4）。

5 $y = 4 \sin(\theta - 60^\circ)$ の振幅、周期と、 $y = \sin \theta$ のグラフをどう動かしたかを答えましょう(例題 5)。また、 $\theta = 150^\circ$ のときの y の値を求めましょう。

6 0° から 360° までで、次の式が成り立つ θ を求めましょう(例題 6)。

(1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7 自転車のタイヤが、1 分に 180 回転しています。タイヤの半径は 0.33 m です。 f 、 T 、 ω と、タイヤのふちの速さ v を求めましょう(例題 7)。

チャレンジ ★★★★★

8 半径 50 m、1 周 20 分の観覧車に、いちばん下から乗ります。高さは $y = 50 - 50 \cos \theta$ (m) です(例題 8)。(1) 10 分後の高さは。(2) 65 分後の高さは。(3) 3 分後の高さは ($\cos 54^\circ = 0.588$)。

9 0° から 360° までで、 $\sin \theta = 0.6$ が成り立つ θ を、電卓を使って求めましょう(例題 6) (小数第 1 位まで)。

10 パソコンのハードディスクの円板が、1 分に 7200 回転しています。中心から 0.045 m の所の、 f 、 T 、 ω 、速さ v を求めましょう(例題 7)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 単位円上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を求められる。 → 272 ページ
- ☐ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ や 90° 回す式を説明できる。 → 277 ページ
- ☐ ω と T で、回る点の位置・速さを求められる。 → 286 ページ



ミナ

回る点の影が、 $\sin$ の波になった！ 次の章では、2 つの波をたし合わせてみよう。

第2部 三角比と三角関数

★★★★

4-9

波をたし合わせる：
加法定理とうなり

道しるべ この章の前に 3-9 4-4 4-7 4-8 この章の先に 5-15 6-10 9-1

この章でできるようになること

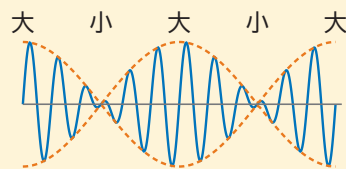
- ★★★★ 加法定理を単位円で導き、 $\sin(a \pm b) \cdot \cos(a \pm b)$ を計算できる。
- ★★★★ 2倍角の式と $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ を作り、使える。
- ★★★★ 合成と「積と和の式」で、波のたし算（うなり・電力）を説明できる。

？ はてな？

ギターの2本の弦を、ほとんど同じ高さの音で同時に鳴らすと、音が「ウワン、ウワン」と、大きくなったり小さくなったりします。これをうなりといいます。

2つの音の高さが近づくほど、ウワンウワンはゆっくりになり、ぴったり同じになると消えます。

2つの音を重ねると、なぜ音の大きさが、くり返し変わるのでしょう。1秒に何回ウワンと聞こえるかは、何で決まるのでしょうか。



4-8 では、1 つの回る点の影、つまり 1 つの波を調べました。音・光・電気の世界では、いくつもの波が重なり合います。この章では、2 つの波をたし合わせると何が起きるかを調べます。そのための道具が「加法定理」です。

🔧 やってみよう 表計算で、ずれた 2 つの波をたそう

- ❶ A 列に、角 θ を 0 から 360 まで、30 ずつ入れよう。
- ❷ B 列に `=SIN(RADIANS(A2))` と入れて、 $\sin \theta$ を計算しよう（4-2：表計算の SIN はラジアンで計算する）。
- ❸ C 列に `=SIN(RADIANS(A2+60))` と入れよう。60° 先に進んだ波 $\sin(\theta + 60^\circ)$ です。
- ❹ D 列に `=B2+C2` と入れて、2 つの波をたそう。B・C・D 列をグラフにしよう。たした波は、どんな形かな？ 山の高さは $1 + 1 = 2$ になるかな？

	A	B	C	D
1	θ	$\sin \theta$	$\sin(\theta + 60^\circ)$	たした値
2	0	0	0.866	0.866
3	30	0.5	1	1.5
4	60	0.866	0.866	1.732
5	90	1	0.5	1.5
6	120	0.866	0	0.866
7	150	0.5	-0.5	0
8	180	0	-0.866	-0.866

表 1 180° から先は、180° までの値にマイナスをつけたものになる（4-8 の $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$ ）。

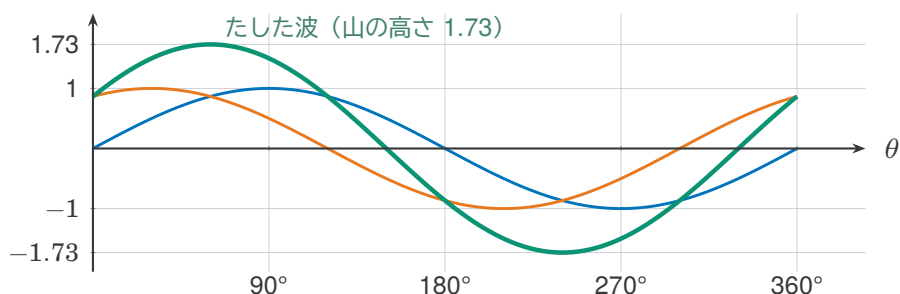


図1 青が $\sin \theta$ 、オレンジが $\sin(\theta + 60^\circ)$ 、緑が2つをたした波。

たした波（緑）も、同じ周期 360° の、なめらかな波になりました。でも、山の高さは2ではなく、約1.73です。2つの波の山の位置が 60° ずれているので、山と山がぴったりは重ならないからです。山の位置は 60° で、もとの $\sin \theta$ の山 (90°) より 30° 早くなっています。この1.73と 30° は、どこから出てくるのでしょうか。この章の⑥で答えます。

🔄 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

4-4 2点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) の距離 d は、 $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ 。

4-7 余弦定理：三角形で、角 C をはさむ2辺が a 、 b なら、向かいの辺 c は $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4-8 単位円の上の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。

$\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 。

90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ 、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ 。

3-8 展開： $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$ 。

3-9 投げ上げたボールの高さ： 20 m/s で真上に投げると、 t 秒後に $20t - 5t^2$ (m)。

3-10 家のコンセントの「 100 V 」は実効値。電圧の山の高さは $100\sqrt{2} \approx 141 \text{ V}$ 。

この章でも、「 $\approx$ 」(ほぼ等しい。5-8 でくわしく学びます) を使います。

数学の道具

① $\sin(a+b)$ は、 $\sin a + \sin b$ ではない

やってみようでは、 $\sin \theta$ と $\sin(\theta + 60^\circ)$ をたしました。この和を計算するには、 $\sin(\theta + 60^\circ)$ のように「2つの角の和の $\sin$ 」を、 θ の $\sin$ と $\cos$ で表す式がほしくなります。

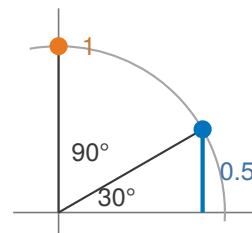
まず、思いつきやすい考えを、数で確かめます。

✗ $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$

$a = 30^\circ$ 、 $b = 60^\circ$ とすると、左は $\sin 90^\circ = 1$ 、右は $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ で、 $0.5 + 0.866 = 1.366$ 。ちがう数です。そもそも $\sin$ の値は 1 をこえないので、右のように 1.366 になることはありません。

図で考えると、わけがわかります。 $\sin$ は単位円の上の点の高さです。角を 30° から 90° へと 3 倍にしても、高さは 0.5 から 1 へと 2 倍にしかありません。円の上の点は、上へ行くほど横へ回りこむので、角と高さは比例しないのです（4-8 ⑥：上の近くでは、影はゆっくり動く）。

だから、 $\sin(a+b)$ を正しく計算するきまりを、単位円で作ります。それが**加法定理**（かほうていり）です。「加法」はたし算のことです。



② 加法定理を作る：道すじごと回す

単位円の上で、角 b の所にある点 Q は、原点 O から「横に $\cos b$ 進み、そこから上に $\sin b$ 進む」と着く点です（4-8 ②）。この道すじを、**まるごと角 a だけ回します**。回したあとの点 R は、角 $a+b$ の所にあるので、 R の座標は

$(\cos(a+b), \sin(a+b))$ です。いっぽう、回した道すじを1本ずつ調べても、 R の座標が出せます。2つを等しいとおけば、式ができます。

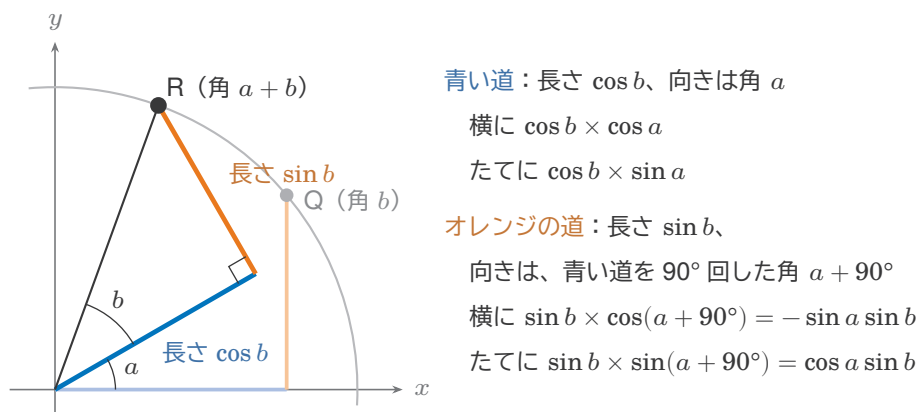


図2 Qへの道すじ（うすい色）を、まるごと角 a だけ回すと、 R への道すじ（こい色）になる。図は $a = 30^\circ$ 、 $b = 40^\circ$ 。

長さ r で角 θ の向きに進むと、横に $r \cos \theta$ 、たてに $r \sin \theta$ 進みます（4-8 ②）。オレンジの道で使った2つの式は、4-8 ⑤で作った 90° 回す式です。

$$\cos(a + 90^\circ) = -\sin a \quad \sin(a + 90^\circ) = \cos a$$

R の座標は、2本の道の横どうし、たてどうしをたしたものです。

	青い道	オレンジの道	R の座標（合計）
横（ x ）	$\cos a \cos b$	$-\sin a \sin b$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
たて（ y ）	$\sin a \cos b$	$\cos a \sin b$	$\sin a \cos b + \cos a \sin b$

R の座標は $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ でもあったので、

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

これを**加法定理**といいます。

数で確かめる

$a = 30^\circ$ 、 $b = 60^\circ$ では、 $\sin 90^\circ = 1$ のはずです。

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ &= 0.5 \times 0.5 + 0.866 \times 0.866 \\ &= 0.25 + 0.75 = 1\end{aligned}$$

$\cos 90^\circ = 0$ のはずです。

$$\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ = 0.866 \times 0.5 - 0.5 \times 0.866 = 0$$

どちらも合っています。

ひき算のとき

b のかわりに $-b$ を入れます。4-8 ③の $\cos(-b) = \cos b$ 、 $\sin(-b) = -\sin b$ を使うと、

$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

4つの式をまとめると、次のようになります。±（プラス・マイナス）を使うと、たし算とひき算の式を1つに書けます。 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ のように書き、上の符号どうし、下の符号どうしを組にして読みます。干は、±と上下が反対の記号で、 $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ と書きます。

たし算 ($a + b$)	ひき算 ($a - b$)
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

表2 $\sin$ は「sin cos と cos sin」で、符号は左と同じ。 $\cos$ は「cos cos と sin sin」で、符号は左と反対。

③ もう1つの作り方：距離を2通りに計算する

加法定理は、これからの巻で何度も使う大事な式なので、別の方法でも確かめておきます。単位円の上に、角 a の点 $P(\cos a, \sin a)$ と、角 b の点 $Q(\cos b, \sin b)$ をとります (a のほうが大きいとします)。P と Q の距離を、2通りの方法で計算します。

方法1：座標で (4-4 の2点の距離)

$$PQ^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$$

方法2：三角形 OPQ で (4-7 の余弦定理)

OP と OQ は半径なので 1。そのあいだの角は $a - b$ 。

$$PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(a - b)$$

方法1の式を、3-8の展開 $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$ で1つずつ広げます。2行めから3行めでは、4-8の $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使います。

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b) + (\sin^2 a - 2\sin a \sin b + \sin^2 b) \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= 1 + 1 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \end{aligned}$$

方法2の式は $2 - 2\cos(a - b)$ です。同じ長さの2乗なので、2つは等しくなります。両辺から2をひき、 -2 でわると、

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

②で作った $\cos(a - b)$ の式と、ぴったり同じです。ちがう道で考えても、同じ式にたどりつきました。

せいかくに言うと

$a - b$ が 180° より大きいときは、角 POQ は $360^\circ - (a - b)$ になります。でも、 $\cos(360^\circ - x)$ と $\cos x$ は同じ値なので、式は同じです。P、O、Q が一直線にならなくて三角形ができないときも、方法 1 の計算で、同じ式が成り立つことが確かめられます。だから、加法定理は、どんな角 a 、 b でも成り立ちます。

4 2倍角の式

加法定理で、 a も b も同じ角 θ にしてみます。 $a + b = 2\theta$ になります。

$$\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$\cos 2\theta$ の式は、4-8 の $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使って、 $\sin$ だけ、または $\cos$ だけの形にも書けます。

● $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ を入れると、 $\cos 2\theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

● $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を入れると、 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1\end{aligned}$$

これを **2倍角の式** といいます。 $\theta = 30^\circ$ で確かめます。

$$\sin 60^\circ = 0.866 \qquad 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \times 0.5 \times 0.866 = 0.866$$

$$\cos 60^\circ = 0.5 \qquad 1 - 2 \sin^2 30^\circ = 1 - 2 \times 0.25 = 0.5$$

どちらも合っています。

$\sin 2\theta$ は、 $2 \sin \theta$ ではありません。 $\theta = 30^\circ$ なら、 $\sin 60^\circ = 0.866$ ですが、 $2 \sin 30^\circ = 1$ です。4-8 ⑦のグラフで見たように、 $\sin 2\theta$ は「周期が半分」、 $2 \sin \theta$ は「たてに 2 倍」で、まったくちがう波です。

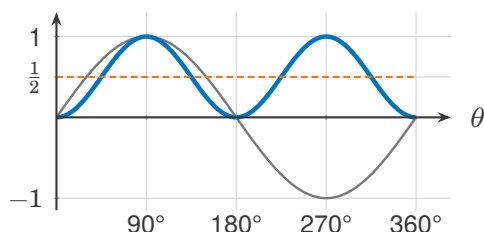
2乗を、2倍の角に直す

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を、 $\sin^2 \theta$ について解きます (2-14)。 $2\sin^2 \theta$ を左へ、 $\cos 2\theta$ を右へ移すと、 $2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ 。両辺を2でわって、

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

($\cos^2 \theta$ の式は、 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ を同じように解いて作ります。)

この式は、「2乗」という計算を、「2倍の角のcos」に直します。2乗のままでは扱いにくい式も、この形にすると、4-8で学んだ波のグラフの動かし方で考えられます。



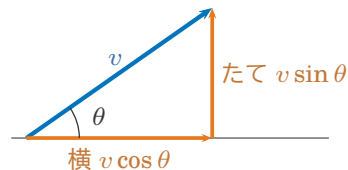
青い線が $y = \sin^2 \theta$ 、灰色の線が $y = \sin \theta$ です。

$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ なので、 $\sin^2 \theta$ のグラフは、周期 180° の波が、高さ $\frac{1}{2}$ の線（オレンジ）を中心にはねている形です。2乗するとマイナスがなくなるので、0と1のあいだでゆれます。

5 噴水は、なぜ 45° でいちばん遠くへ届く？

3-9で、「同じ速さでふき出す水は、ななめ 45° に向けたとき、いちばん遠くまで届く」と学びました。そのわけを、2倍角の式で説明します（空気の抵抗は考えません）。

水のつぶが、速さ v (m/s) で、地面から角 θ の向きにふき出します。4-6 で斜面の重力を 2 つの向きに分けたように、ななめの速さも、横とたての 2 つに分けて考えます。長さ v で角 θ の向きの矢印は、横に $v \cos \theta$ 、たてに $v \sin \theta$ の大きさを持ちます (4-8 の $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と同じ。くわしくは 4-11)。



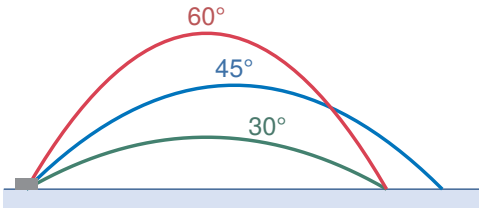
- ① **たての動き** 3-9 の投げ上げと同じで、 t 秒後の高さは $y = (v \sin \theta) t - 5t^2$ (m)。5 は、落ちる距離 $5t^2$ の 5 です (2-13・3-9。地球の重力の加速度 9.8 m/s^2 の半分を、まるめた数)。
- ② **地面にもどる時間** $y = 0$ になる時間を求めます。 $(v \sin \theta) t = 5t^2$ の両辺を t でわって (0 でない t を考える。2-14)、 $v \sin \theta = 5t$ 。だから $t = \frac{v \sin \theta}{5}$ 。
- ③ **横に進む距離** 横には、同じ速さ $v \cos \theta$ で進むので、 $x = v \cos \theta \times t$ 。これに②の t を入れて、 $x = \frac{v^2 \sin \theta \cos \theta}{5}$ 。
- ④ **2 倍角で書きかえる** $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ から、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$ 。これを入れると、

$$x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

v が同じなら、 x は $\sin 2\theta$ に比例します。 $\sin 2\theta$ がいちばん大きい 1 になるのは、 $2\theta = 90^\circ$ 、つまり $\theta = 45^\circ$ のときです。これが、 45° でいちばん遠くへ届くわけです。分母の 10 は、①の 5 の 2 倍です (重力の加速度を g と書くと、 $x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$)。

角 θ	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin 2\theta$	0.5	0.866	1	0.866	0.5
届く距離 (m)	5	8.66	10	8.66	5

表 3 $v = 10 \text{ m/s}$ のときの届く距離 $x = \frac{100 \sin 2\theta}{10} = 10 \sin 2\theta$ 。



30° と 60° の届く距離は同じです。
 $\sin 60^\circ$ と $\sin 120^\circ$ は等しいからで
す (4-8 ③の
 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$)。15° と 75°
も同じです。実際の球技では、空気
の抵抗や、投げる高さがあるので、
いちばん遠くへ飛ぶ角は 45° より少
し小さくなります。

6 2つの波を1つにまとめる：合成

やってみようの $\sin \theta + \sin(\theta + 60^\circ)$ にもどります。加法定理で $\sin(\theta + 60^\circ)$ を広げると、

$$\sin(\theta + 60^\circ) = \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ = 0.5 \sin \theta + 0.866 \cos \theta$$

だから、

$$\sin \theta + \sin(\theta + 60^\circ) = 1.5 \sin \theta + 0.866 \cos \theta$$

このように、 $a \sin \theta + b \cos \theta$ (a, b は数) の形になります。この形の波を、1
つの $\sin$ の波 $R \sin(\theta + \alpha)$ に書き直す方法を考えます。 α (アルファ) は、波
のずれを表す角です。

加法定理を逆向きに使う

$R \sin(\theta + \alpha)$ を加法定理で広げると、

$$R \sin(\theta + \alpha) = R \cos \alpha \sin \theta + R \sin \alpha \cos \theta$$

これが $a \sin \theta + b \cos \theta$ と同じになるには、 $\sin \theta$ の前の数どうし、 $\cos \theta$ の前の数どうしが等しければよいので、

$$R \cos \alpha = a \quad R \sin \alpha = b$$

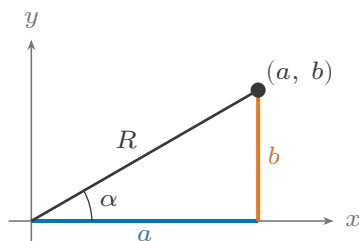
これは、「点 (a, b) は、原点から距離 R 、角 α の所にある」ということです (4-8 ②：半径 r の円の上の点は $(r \cos \theta, r \sin \theta)$)。だから、

- R は、点 (a, b) と原点の距離：

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4-4)$$

- α は、点 (a, b) の動径の角

となります。



$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\alpha \text{ は、点 } (a, b) \text{ の動径の角 } \left(\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

このように、 $a \sin \theta + b \cos \theta$ を 1 つの $\sin$ にまとめることを、三角関数の**合成** (ごうせい) といいます。

やってみようの答え

$a = 1.5$ 、 $b = 0.866$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) です。

$$R = \sqrt{1.5^2 + 0.866^2} = \sqrt{2.25 + 0.75} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

$\cos \alpha = \frac{1.5}{1.73} = 0.866$ なので、 $\alpha = 30^\circ$ です ($\sin \alpha = \frac{0.866}{1.73} = 0.5$ も合う)。だから

$$\sin \theta + \sin(\theta + 60^\circ) = \sqrt{3} \sin(\theta + 30^\circ)$$

たした波は、振幅 $\sqrt{3} \approx 1.73$ の波で、 $\sin \theta$ より 30° 早く進んでいます (4-8 ⑦: $\theta + 30^\circ$ は左へ 30°)。山は $\theta + 30^\circ = 90^\circ$ の $\theta = 60^\circ$ 。表とグラフで見た「山の高さ 1.73、山の位置 60° 」と、ぴったり合いました。

b がマイナスのとき

$\sin \theta - \cos \theta$ なら、 $a = 1$ 、 $b = -1$ です。点 $(1, -1)$ は、原点から $\sqrt{2}$ 、角 -45° の所にあるので、 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ)$ です。 $\theta = 45^\circ$ で確かめると、左は $0.707 - 0.707 = 0$ 、右は $\sqrt{2} \sin 0^\circ = 0$ 。合っています。

同じ周期の波は、いくつたしても、同じ周期の 1 つの波になります。たした波の振幅は、ふつう、振幅の和より小さくなります。山の位置がずれているからです。電気の回路では、ずれた電圧や電流をたす計算に、合成を毎日のように使います (6-10)。

7 積と和の式：うなりのしくみ

こんどは、周期が少しちがう 2 つの波をたします。そのために、加法定理から、もう 1 組の式を作ります。

積を和に直す式

$\sin(a + b)$ と $\sin(a - b)$ の加法定理をたすと、 $\cos a \sin b$ の部分が打ち消しあいます。

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

同じように、 $\cos(a - b)$ から $\cos(a + b)$ をひくと、 $\cos a \cos b$ の部分が打ち消しあって、

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$$

となります。左は和（や差）、右は積（かけ算）です。

和を積に直す式

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$ を、逆向きに読みます。 $a+b=A$ 、 $a-b=B$ とおくと、2つの式をたして $2a=A+B$ 、ひいて $2b=A-B$ なので、 $a = \frac{A+B}{2}$ 、 $b = \frac{A-B}{2}$ 。これを入れると、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

2つの波の和が、「2つの角のまん中の $\sin$ 」と「2つの角の差の半分の $\cos$ 」の積になりました。

2つの音を重ねる

音は、空気の圧力の波です。440 Hz の音は、1秒に440回ゆれる波で、 t 秒後の大きさは $\sin(360^\circ \times 440t)$ と書けます (4-8 ⑨：1秒に440回転する点の高さ。1回転は 360°)。440 Hz と 442 Hz の音を重ねます。和を積に直す式で、 $A = 360^\circ \times 442t$ 、 $B = 360^\circ \times 440t$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{2} &= 360^\circ \times \frac{442+440}{2} t = 360^\circ \times 441t \\ \frac{A-B}{2} &= 360^\circ \times \frac{442-440}{2} t = 360^\circ \times 1 \times t \end{aligned}$$

なので、

$$\sin A + \sin B = 2 \cos(360^\circ \times 1 \times t) \times \sin(360^\circ \times 441t)$$

- $\sin(360^\circ \times 441t)$ は、441 Hz の速い波。わたしたちには、2つの音のまん中の高さの音に聞こえます。
- その前の $2 \cos(360^\circ \times 1 \times t)$ は、1秒に1回の、とてもゆっくりした波。速い波の振幅（音の大きさ）を、ゆっくり変えます。

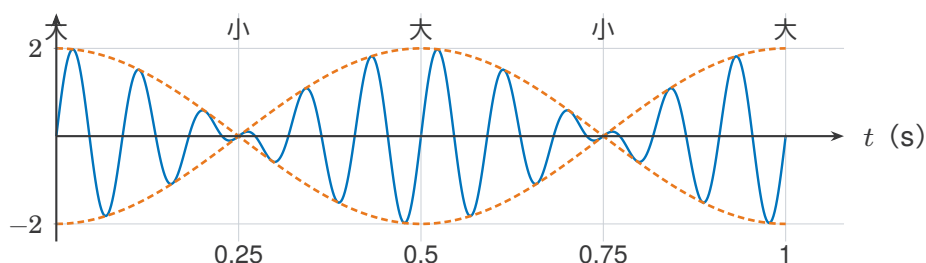


図3 10 Hz と 12 Hz の波の和（青）。見やすいように、ゆっくりした波でかいた。オレンジの点線は $\pm 2 \cos(360^\circ \times t)$ 。音は、点線のはばが広い所で大きく、せまい所で小さくなる。

△ やってみよう 表計算で、うなりを作ろう

- ① A 列に、時間 t を 0 から 1 まで、0.01 秒ずつ入れよう（101 行）。
- ② B 列に $=\text{SIN}(2*\text{PI}()*10*A2)$ 、C 列に $=\text{SIN}(2*\text{PI}()*12*A2)$ と入れよう。10 Hz と 12 Hz の波です（ $2*\text{PI}()$ は 1 回転の $2\pi \text{ rad}$ ）。
- ③ D 列に $=B2+C2$ と入れて、2 つの波をたそう。D 列をグラフにして、大きい所と小さい所が、1 秒に何回来るか数えよう。

	A	B	C	D
1	t (s)	10 Hz の波	12 Hz の波	たした値
2	0	0	0	0
3	0.01	0.588	0.685	1.272
4	0.02	0.951	0.998	1.949
26	0.24	0.588	-0.685	-0.097
28	0.26	-0.588	0.685	0.097
53	0.51	0.588	0.685	1.272

表4 0 秒と 0.5 秒のあたりでは、2 つの波の山がそろって、たした値は 2 近くになる。0.25 秒のあたりでは山と谷が打ち消しあって、0 近くになる。

0 秒、0.5 秒、1 秒のあたりで大きく、0.25 秒、0.75 秒のあたりで小さくなります。1 秒に 2 回、つまり $12 - 10 = 2$ 回です。2 つの波は、0 秒では山がそろっていますが、12 Hz の波が少しずつ先に進み、0.25 秒では半周（山と谷）ずれ

て打ち消しあいます。0.5 秒では、12 Hz の波がちょうど 1 周多く進んで、また山がそろいます。このようすを式で表したのが、上の「和を積に直す式」です。

？はてな？ の答え

音の大きさは、振幅 $2 \cos(360^\circ \times t)$ の「大きさ」（プラスかマイナスかは関係ない）で決まります。 $\cos(360^\circ \times t)$ は、 $t = 0$ で 1、 $t = 0.5$ で -1 、 $t = 1$ で 1。大きさが最大の 2 になるのは、0 秒、0.5 秒、1 秒、……と、**1 秒に 2 回**です。これがウワンウワンの正体です。

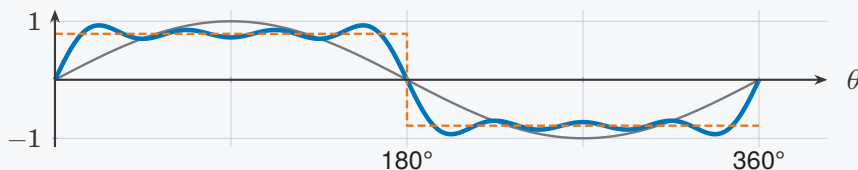
$$1 \text{ 秒あたりのうなりの回数} = 442 - 440 = 2 \text{ (回)}$$

一般に、振動数が f_1 と f_2 の音を重ねると、1 秒に $f_1 - f_2$ 回（大きいほうから小さいほうをひく）うなります。差の半分の振動数の $\cos$ は、大きさ（プラスかマイナスかは考えない）が、1 秒にその 2 倍の回数だけ最大になるからです。2 つの音の高さが近づくほど、うなりはゆっくりになり、同じ高さでは 0 回、つまりうなりは消えます。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

たくさんの波をたすと、どんな形も作れる

周期のちがう波をたしていくと、なめらかでない形も作れます。 $\sin \theta$ に、 $\frac{1}{3} \sin 3\theta$ 、 $\frac{1}{5} \sin 5\theta$ 、 $\frac{1}{7} \sin 7\theta$ 、……とたしていくと、山の上が平らになり、四角い波（方形波）に近づきます。 $\theta = 90^\circ$ で計算すると、 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \approx 0.724$ で、たす数をふやすと約 0.785 に近づきます。



（灰色が $\sin \theta$ 、青が 4 つの波の和、オレンジの点線が方形波。）デジタル回路の 0 と 1 の信号も、たくさんの $\sin$ の和で表せます。この考え方を**フーリエ級数**といい、第 9 巻 (9-1) で学びます。

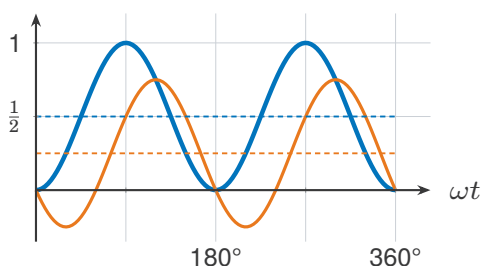
8 交流の電力と、 $\sin^2$ の平均

家のコンセントの交流では、電圧は $V_0 \sin \omega t$ の形で、プラスとマイナスを行ったり来たりします(4-8)。電気ストーブのような抵抗に流れる電流も、同じ形 $I_0 \sin \omega t$ で行ったり来たりします (V_0 、 I_0 は山の高さ)。電力(1秒あたりに使う電気のエネルギー)は、電圧×電流なので、

$$p = V_0 \sin \omega t \times I_0 \sin \omega t = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

④の $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ を使うと、

$$p = \frac{V_0 I_0}{2} - \frac{V_0 I_0}{2} \cos 2\omega t$$



青い線は $\sin^2 \omega t$ (電力を $V_0 I_0$ でわったもの)。高さ $\frac{1}{2}$ の点線を中心に、周期 180° でゆれています。山の $\frac{1}{2}$ より上の部分を切りとって、谷にうめると、ちょうど高さ $\frac{1}{2}$ の平らな形になります。オレンジの線は、あとで考える「電流が 60° おくれる」ときの電力です。

第2の部分 $-\frac{V_0 I_0}{2} \cos 2\omega t$ は、0を中心に、プラスとマイナスに同じだけゆれる波です。1周期で平均すると、プラスとマイナスが打ち消しあって0になります。だから、**電力の平均は $\frac{V_0 I_0}{2}$** 。 $\sin^2$ の平均が $\frac{1}{2}$ ということです。

数でも確かめます。 $\sin^2$ の値を 30° ごとに12こ ($0^\circ \sim 330^\circ$) 求めると、0、0.25、0.75、1、0.75、0.25、0、0.25、0.75、1、0.75、0.25。合計は6なので、平均は $6 \div 12 = 0.5$ です(積分を使った確かめは5-15)。

実効値

山の高さを $V_0 = \sqrt{2} V_e$ 、 $I_0 = \sqrt{2} I_e$ と書きます。平均の電力 $\frac{V_0 I_0}{2}$ に入れると、 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ なので、

$$\frac{\sqrt{2}V_e \times \sqrt{2}I_e}{2} = \frac{2V_e I_e}{2} = V_e I_e$$

となり、直流の「電圧×電流」と同じ形になります。この V_e 、 I_e が**実効値**です。

3-10 で学んだ「100 V は実効値で、山の高さは約 141 V」の $\sqrt{2}$ は、 $\sin^2$ の平均の $\frac{1}{2}$ から出てきたのです。

電流がおくれるとき

モーターのようにコイル（巻いた電線）をふくむ機械では、電流の波が電圧の波よりおくれます。電流が 60° おくれて $I_0 \sin(\omega t - 60^\circ)$ になると、電力は次のようになります。

$$p = V_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - 60^\circ)$$

⑦の「積を和に直す式」 $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ で、 $a = \omega t$ 、 $b = \omega t - 60^\circ$ とすると、 $a - b = 60^\circ$ 、 $a + b = 2\omega t - 60^\circ$ なので、

$$p = \frac{V_0 I_0}{2} \{ \cos 60^\circ - \cos(2\omega t - 60^\circ) \}$$

$\cos(2\omega t - 60^\circ)$ の部分は、やはり平均すると 0 です。だから平均の電力は $\frac{V_0 I_0}{2} \cos 60^\circ = \frac{V_0 I_0}{2} \times 0.5$ で、おくれがないときの半分になります（図のオレンジの線の平均 $\frac{1}{4}$ ）。一般に、平均の電力は $V_e I_e \times \cos$ （おくれの角）です。この $\cos$ （おくれの角）を**力率**（りきりつ）といいます。電流が同じでも、力率が小さいと、使える電力は小さくなります。

たいせつ

加法定理 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

2倍角 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 、 $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

合成 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$

和を積に $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

 専門書をのぞいてみよう 電気回路の教科書ふうの書き方

正弦波交流電圧

$$v = \sqrt{2}V \sin \omega t \text{ [V]}$$

を負荷に加えたとき、電流

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \theta) \text{ [A]}$$

が流れたとする。瞬時電力は

$$p = vi = VI \cos \theta - VI \cos(2\omega t - \theta)$$

となる。第2項の1周期の平均は0であるから、平均電力は $P = VI \cos \theta$ [W] である。 $\cos \theta$ を力率という。

訳 電圧の実効値を V 、電流の実効値を I と書いている（山の高さは $\sqrt{2}$ 倍）。 θ は、電流が電圧よりおくれる角。電力 p は、積を和に直す式で、一定の部分と、2倍の速さでゆれる部分に分かれる。ゆれる部分の平均は0なので、平均の電力は $VI \cos \theta$ 。

この章で出てきたことば

加法定理 2つの角の和や差の $\sin \cdot \cos$ を、それぞれの角の $\sin \cdot \cos$ で表す式。

2倍角の式 加法定理で2つの角を同じにした式。 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ を表す。

合成 $a \sin \theta + b \cos \theta$ を、1つの $\sin$ の波 $R \sin(\theta + \alpha)$ にまとめること。

うなり 振動数が少しちがう2つの音を重ねたとき、音の大きさがくり返し変わること。1秒に $f_1 - f_2$ 回。

力率 交流で、電圧と電流の波のおくれの角の $\cos$ 。平均の電力＝実効値の電圧×電流×力率。

記号カード

初めて出た章 4-9

 α

読み方 アルファ

意味 合成した波のずれの角。

点 (a, b) の動径の角

英語 phase angle

記号カード

初めて出た章 4-9

 $\pm$

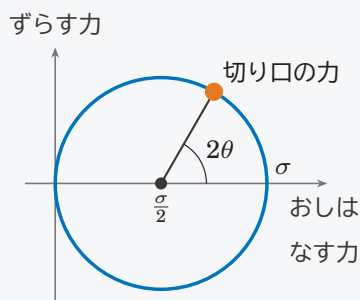
読み方 プラス・マイナス

意味 + と - の2つの式を
まとめて書く記号

英語 plus-minus

コラム モールの円：材料の中の力

金属の棒を強さ σ （面積1あたりの力）で引っぱると、角 θ だけかたむいた切り口には、おしはなす力 $\sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta$ と、ずらす力 $\sigma \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$ がはたらきます（2倍角の式）。この2つの組は、中心 $(\frac{\sigma}{2}, 0)$ 、半径 $\frac{\sigma}{2}$ の円の上の点です（4-8 ②）。この円を**モールの円**といい、設計で使います。ずらす力は $\theta = 45^\circ$ で最大で、やわらかい金属の棒は 45° の向きにすべります。



例題でたしかめよう

例題1 加法定理で値を求める

次の値を求めましょう。(1) $\sin 75^\circ$ (2) $\cos 15^\circ$

考え方 三角定規の角 ($30^\circ \cdot 45^\circ \cdot 60^\circ$) の和や差に分けて、加法定理を使います。 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ (3-10)。

式 (1) $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\text{確かめ: } \frac{2.449 + 1.414}{4} = \frac{3.863}{4} \approx 0.966$$

電卓の $\sin 75^\circ = 0.966$ と同じ。

答え (1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.966$ (2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.966$

$\sin 75^\circ$ と $\cos 15^\circ$ が同じになるのは、 $75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$ だからです (4-6 の $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$)。

じぶんでこう1

次の値を求めましょう。(1) $\cos 75^\circ$ (2) $\sin 15^\circ$

例題2 $\sin a$ 、 $\cos b$ から $\sin(a+b)$ を求める

a, b は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin a = \frac{3}{5}$ 、 $\cos b = \frac{5}{13}$ です。 $\sin(a+b)$ と $\cos(a+b)$ を求めましょう。

考え方 加法定理には $\cos a$ と $\sin b$ も必要です。 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ (4-8) で求めます。 $0^\circ \sim 90^\circ$ の角なので、 $\sin$ も $\cos$ も正。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad \cos^2 a &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \text{ より } \cos a = \frac{4}{5} \\ \sin^2 b &= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \text{ より } \sin b = \frac{12}{13} \\ \sin(a+b) &= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65} \\ \cos(a+b) &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65} \\ \text{答え} \quad \sin(a+b) &= \frac{63}{65}, \cos(a+b) = -\frac{16}{65} \end{aligned}$$

$\cos(a+b)$ が負なので、 $a+b$ は 90° より大きい角です。確かめに、 $\left(\frac{63}{65}\right)^2 + \left(-\frac{16}{65}\right)^2$ を計算すると、 $\frac{3969+256}{4225} = 1$ になり、 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ も成り立っています。

じぶんでこう2

a, b は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin a = \frac{5}{13}$ 、 $\cos b = \frac{4}{5}$ です。 $\sin(a+b)$ と $\cos(a+b)$ を求めましょう。

例題3 加法定理で式を短くする

$\sin(\theta + 120^\circ) + \sin(\theta - 120^\circ)$ を、加法定理で短くしましょう。

考え方 2 つを加法定理で広げてからたします。 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 、 $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$$\begin{aligned}\text{式} \quad \sin(\theta + 120^\circ) &= \sin \theta \cos 120^\circ + \cos \theta \sin 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \\ \sin(\theta - 120^\circ) &= \sin \theta \cos 120^\circ - \cos \theta \sin 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\end{aligned}$$

たすと、 $\cos \theta$ の部分が打ち消しあって、

$$-\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = -\sin \theta$$

確かめ： $\theta = 90^\circ$ なら、 $\sin 210^\circ + \sin(-30^\circ)$ で、

$$-0.5 - 0.5 = -1 = -\sin 90^\circ$$

答え $-\sin \theta$

じぶんでところ3

$\cos(\theta + 120^\circ) + \cos(\theta - 120^\circ)$ を、加法定理で短くしましょう。

例題3の答えを、グラフで確かめます。

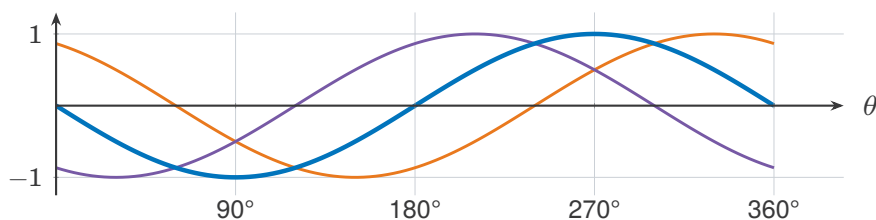


図4 オレンジが $\sin(\theta + 120^\circ)$ 、紫が $\sin(\theta - 120^\circ)$ 、青が2つの和。青い波は、 $\sin \theta$ を上下にひっくり返した $-\sin \theta$ になっている (90° で -1 、 270° で 1)。

例題 4 2倍角の式を使う

(1) θ は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin \theta = 0.6$ 、 $\cos \theta = 0.8$ です。 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を求めましょう。

(2) $\sin^2 15^\circ$ を求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$)。

考え方 (1) は 2 倍角の式。(2) は $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ で、 $2\theta = 30^\circ$ にします。

式 (1) $\sin 2\theta = 2 \times 0.6 \times 0.8 = 0.96$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \times 0.6^2 = 1 - 2 \times 0.36 = 1 - 0.72 = 0.28$$

確かめ： $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0.64 - 0.36 = 0.28$ 。同じ。

$$(2) \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - 0.866}{2} = \frac{0.134}{2} = 0.067$$

答え (1) $\sin 2\theta = 0.96$ 、 $\cos 2\theta = 0.28$ (2) 0.067

じぶんでこう 4

(1) θ は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin \theta = 0.8$ 、 $\cos \theta = 0.6$ です。 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を求めましょう。

(2) $\cos^2 15^\circ$ を求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$)。

2 倍角の式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ を、電卓でいろいろな角について確かめてみましょう (小数第 4 位まで)。

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\sin 2\theta$	$2 \sin \theta \cos \theta$
10°	0.1736	0.9848	0.3420	0.3420
20°	0.3420	0.9397	0.6428	0.6428
40°	0.6428	0.7660	0.9848	0.9848
70°	0.9397	0.3420	0.6428	0.6428

表 5 どの角でも、右の 2 列は同じ値になる。

例題5 ななめに投げた物の届く距離

水のつぶが、速さ 10 m/s で、地面から 30° の向きにふき出します。届く距離を求めましょう。また、同じ速さで、いちばん遠くへ届く角と、その距離を求めましょう ($\sin 60^\circ = 0.866$)。

考え方 ⑤の $x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$ を使います。

式 $x = \frac{10^2 \times \sin 60^\circ}{10} = \frac{100 \times 0.866}{10} = 8.66$

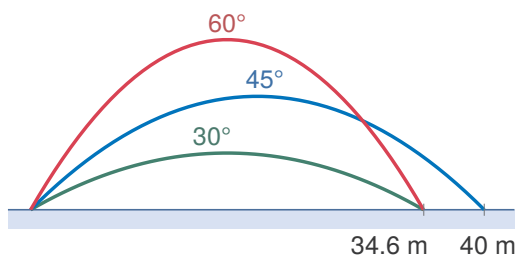
いちばん遠いのは $\sin 2\theta = 1$ のとき。 $2\theta = 90^\circ$ で $\theta = 45^\circ$

$$x = \frac{100 \times 1}{10} = 10$$

答え 約 8.7 m 。 45° のとき 10 m

じぶんでこう5

ボールを、速さ 20 m/s で、地面から 75° の向きに投げます（空気の抵抗は考えない）。届く距離と、いちばん遠くへ届くときの距離を求めましょう ($\sin 150^\circ = 0.5$)。



速さ 20 m/s で、 $30^\circ \cdot 45^\circ \cdot 60^\circ$ に投げたときの通り道です。 30° と 60° の届く距離は同じ約 34.6 m ですが、空中にいる時間（⑤の②の $t = \frac{v \sin \theta}{5}$ ）は、 30° では 2.0 秒、 60° では約 3.5 秒です。高く上がるぶん、時間がかかります。

例題 6 三角関数の合成

次の式を $R \sin(\theta + \alpha)$ の形にし、最大の値と、そのときの θ ($0^\circ \sim 360^\circ$) を求めましょう。

(1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ (2) $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$

考え方 点 (a, b) の、原点からの距離が R 、動径の角が α 。最大は $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のとき、つまり $\theta + \alpha = 90^\circ$ 。

式 (1) 点 $(1, \sqrt{3})$ 。 $R = \sqrt{1+3} = 2$ 。 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = 60^\circ$

最大は 2。 $\theta + 60^\circ = 90^\circ$ より $\theta = 30^\circ$

(2) 点 $(3, 4)$ 。 $R = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ 。 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

電卓で $\cos^{-1} 0.6 = 53.13 \dots$ より $\alpha \approx 53.1^\circ$

最大は 5。 $\theta = 90^\circ - 53.1^\circ = 36.9^\circ$

答え (1) $2 \sin(\theta + 60^\circ)$ 。最大 2 ($\theta = 30^\circ$)

(2) $5 \sin(\theta + \alpha)$ ($\alpha \approx 53.1^\circ$)。最大 5 ($\theta \approx 36.9^\circ$)

(2) の最大は、 $3 + 4 = 7$ ではなく 5 です。 $3 \sin \theta$ の山 (90°) と $4 \cos \theta$ の山 (0°) の位置がずれているので、山の高さはたし算になりません。

じぶんでこう 6

次の式を $R \sin(\theta + \alpha)$ の形にし、最大の値と、そのときの θ ($0^\circ \sim 360^\circ$) を求めましょう。

(1) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ (2) $4 \sin \theta + 3 \cos \theta$

例題7 うなりの回数

(1) 440 Hz と 443 Hz の音を同時に鳴らすと、1 秒に何回うなりますか。
聞こえる音の高さは、およそ何 Hz ですか。

(2) 440 Hz のおんさと、ギターの弦を同時に鳴らすと、1 秒に 2 回う
りました。弦の音は何 Hz ですか。

考え方 ⑦より、うなりの回数は振動数の差。聞こえる高さは、2 つの振
動数のまん中（和の半分）。

式 (1) $443 - 440 = 3$ 。 $\frac{440 + 443}{2} = 441.5$

(2) 差が 2 なので、弦は 440 より 2 高いか、2 低い。 $440 + 2 = 442$ 、
 $440 - 2 = 438$

答え (1) 1 秒に 3 回、約 441.5 Hz (2) 442 Hz か 438 Hz

(2) で、どちらかを決めるには、弦を少ししめて（音を高くして）みます。う
なりがゆっくりになれば 438 Hz、速くなれば 442 Hz です。調律では、うなり
が消えるまで弦を調節します。

じぶんでとこう7

(1) 262 Hz と 260 Hz の音を同時に鳴らすと、1 秒に何回うなりますか。
聞こえる音の高さは、およそ何 Hz ですか。

(2) 330 Hz の音と、ある音を同時に鳴らすと、1 秒に 3 回うりました。
ある音は何 Hz ですか。

例題 8 交流の平均の電力

実効値 100 V の電圧で、実効値 10 A の電流が流れます。平均の電力を求めましょう。

(1) 電流が電圧とずれないとき (2) 電流が電圧より 60° おくれるとき

考え方 ⑧より、平均の電力 = 実効値の電圧 $\times$ 実効値の電流 $\times \cos$ (おくれの角)。ずれないときは、おくれの角が 0° で $\cos 0^\circ = 1$ 。

式 (1) $100 \times 10 \times \cos 0^\circ = 100 \times 10 \times 1 = 1000$

(2) $100 \times 10 \times \cos 60^\circ = 1000 \times 0.5 = 500$

答え (1) 1000 W (2) 500 W

じぶんでとこう 8

実効値 100 V の電圧で、実効値 5 A の電流が流れます。(1) 電流が電圧とずれないとき、(2) 電流が 30° おくれるときの、平均の電力を求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$)。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

かっこの中を、そのまま分けてしまう

✗ $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$

○ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin$ は、かけ算ではないので、かっこの中のたし算を分けられません。

$a = 30^\circ$ 、 $b = 60^\circ$ で確かめると、左は 1、まちがいの右は 1.366 です。

⚠ まちがえやすいところ

$\cos(a+b)$ の符号

✕ $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

○ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos$ の加法定理は、かっこの中と符号が反対になります。 $a = b = 45^\circ$ で確かめると、 $\cos 90^\circ = 0$ 。○の式は $0.5 - 0.5 = 0$ で合いますが、✕の式は 1 になります。

⚠ まちがえやすいところ

$\sin 2\theta$ を $2 \sin \theta$ にする

✕ $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ = 1$

○ $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0.866$

角を2倍にしても、 $\sin$ の値は2倍になりません。 $\sin$ の値は1をこえないことから、✕はおかしいとわかります。

⚠ まちがえやすいところ

合成の最大を、係数の和にする

✕ $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ の最大は $3 + 4 = 7$

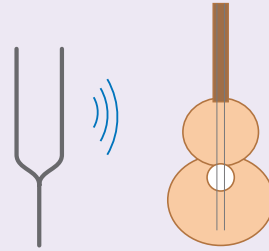
○ 最大は $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

2つの波の山は、ちがう角で来ます。山どうしは重ならないので、最大は和より小さくなります。

物理・工学ではこう使う

楽器の調律

ピアノの調律師は、おんさや、となりの弦と鳴らし比べて、うなりを聞きながら弦の張りを調節します。うなりの回数は振動数の差なので、1秒に1回のうなりなら、差は1Hz。耳では区別しにくい小さなちがいも、うなりなら数えられます。



ノイズキャンセル

ノイズキャンセル機能のあるイヤホンは、外の音をマイクで聞きとり、それと山と谷が反対の音を、スピーカーから出します。 $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$ (4-8) なので、2つをたすと $\sin \theta + (-\sin \theta) = 0$ となり、雑音が消えます。電車や飛行機の、低くて一定の音ほどよく消えます。

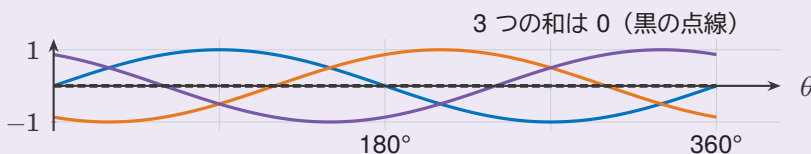
物理・工学ではこう使う

三相交流

発電所から工場へ送る電気は、山の位置が 120° ずつずれた3つの交流です（三相交流）。3つの電圧の和は、いつも0です。

$$\sin \theta + \sin(\theta - 120^\circ) + \sin(\theta - 240^\circ) = 0$$

$\sin(\theta - 240^\circ) = \sin(\theta + 120^\circ)$ (1周の 360° をたした) なので、**例題3** から、後ろの2つの和は $-\sin \theta$ です。だから全体は0。電線を6本でなく3本にでき、大きなモーターをなめらかに回せます。





章末問題

4-9 のまとめ

基本



- 1 加法定理を使って、次の値を求めましょう(例題1)。(1) $\sin 105^\circ$
(2) $\cos 105^\circ$
- 2 a, b は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin a = \frac{8}{17}$ 、 $\cos b = \frac{3}{5}$ です。 $\sin(a+b)$ と $\cos(a+b)$ を求めましょう(例題2)。
- 3 (1) θ は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin \theta = 0.28$ 、 $\cos \theta = 0.96$ です。 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を求めましょう(例題4)。
(2) $\sin^2 22.5^\circ$ を求めましょう ($\cos 45^\circ = 0.707$)。
- 4 $\sin \theta + \cos \theta$ を $R \sin(\theta + \alpha)$ の形にし、最大の値と、そのときの θ ($0^\circ \sim 360^\circ$) を求めましょう(例題6)。
- 5 速さ 15 m/s で、地面から 30° の向きにボールを投げます。届く距離と、いちばん遠くへ届くときの距離を求めましょう(例題5) ($x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$ 、 $\sin 60^\circ = 0.866$)。
- 6 $\sin(\theta + 60^\circ) + \sin(\theta - 60^\circ)$ を、加法定理で短くしましょう(例題3)。
- 7 330 Hz と 333 Hz の音を同時に鳴らすと、1秒に何回うなりますか。聞こえる音の高さは、およそ何 Hz ですか(例題7)。
- 8 a, b は 0° と 90° のあいだの角で、 $\sin a = \frac{4}{5}$ 、 $\cos b = \frac{12}{13}$ です。 $\sin(a+b)$ と $\cos(a+b)$ を求めましょう(例題2)。
- 9 θ は 90° と 180° のあいだの角で、 $\sin \theta = 0.6$ 、 $\cos \theta = -0.8$ です。 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を求めましょう(例題4)。

チャレンジ ★★★★

- 10** $5 \sin \theta + 12 \cos \theta$ を $R \sin(\theta + \alpha)$ の形にし、最大の値と、そのときの θ を求めましょう(📖 例題 6) (α は電卓で、小数第 1 位まで)。
- 11** $\sin \theta + \sin(\theta - 120^\circ) + \sin(\theta - 240^\circ) = 0$ を、加法定理で確かめましょう(📖 例題 3) ($\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)。
- 12** 実効値 200 V の電圧で、実効値 10 A の電流が流れます。電流が電圧より 60° おくれるときの平均の電力と、おくれがないときの平均の電力を求めましょう(📖 例題 8)。
- 13** 440 Hz のおんさとピアノの弦を同時に鳴らすと、1 秒に 4 回うなりしました。弦を少ししめて音を高くすると、うなりはゆっくりになりました。弦の音は何 Hz でしたか(📖 例題 7)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 加法定理を単位円で導き、 $\sin(a \pm b) \cdot \cos(a \pm b)$ を計算できる。 → 309 ページ
- ☐ 2 倍角の式と $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ を作り、使える。 → 313 ページ
- ☐ 合成と「積と和の式」で、うなりや電力を説明できる。 → 316 ページ

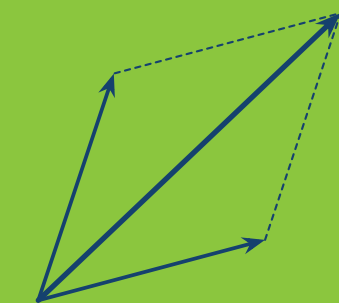
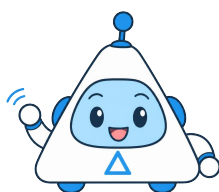


デルタ

波は、たしても波。次は、向きと大きさをもつ矢印、ベクトルの世界へ出発だ！

ベクトル

- ? 2人で引くと、荷物はどっちへ動く？
- ? 進む向きと直角に押しても、仕事は0？
- ? 部屋の中の1点を、3つの数で表せる？



向きと大きさをもつ量（ベクトル）を、矢印と数の組で表すよ。たし算・内積・外積を使うと、力・速さ・回す力を計算できるよ。

この部で学ぶこと

4-10 向きと大きさをもつ量：ベクトル

 ★★★★★ P.340

2人で引くと、荷物はどちらへ動く？

4-11 ベクトルを成分で計算しよう

 ★★★★★ P.374

川に流されながら渡る船は、どこに着く？

4-12 内積：どれだけ同じ向きか

 ★★★★★ P.408

進む向きと直角に押しても、仕事は0

4-13 空間の座標と3次元のベクトル

 ★★★★★ P.434

部屋の中の1点を、3つの数で表す

4-14 外積：回す力と右ねじ

 ★★★★★ P.468

ドアのノブは、なぜちょうつがいから遠い？

4-15 いろいろな座標：極座標・円柱座標・球座標

 ★★★★★ P.500

地球の上の場所は、緯度と経度で表す

この部を読むと…

力や速さを成分に分けて計算し、仕事（内積）と回す力（外積）を求められるようになります。

第7巻の行列、第8巻のベクトル解析は、ここから始まります。

第3部 ベクトル



4-10

向きと大きさをもつ量：
ベクトル

道しるべ この章の前に 2-2 3-2 4-4 4-7 この章の先に 4-11 7-2 8-5

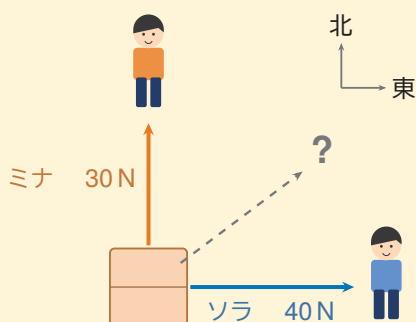
この章でできるようになること

- 向きと大きさをもつ量を矢印で表し、 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot |\vec{a}|$ の記号で書ける。
- 2つの力や移動を、矢印をつないで（平行四辺形で）たし、合わせた大きさを求められる。
- ベクトルの実数倍と差をかき、速度の変化や相対速度を求められる。

はてな？

ソラさんとミナさんが、床の上の重い荷物をロープで引きます。上から見た図のように、ソラさんは東へ40N、ミナさんは北へ30Nの力で引きます。

荷物は、どっちへ動き出すかな？ 東かな、北かな、それとも、そのあいだかな？ 2人の力を合わせると、 $40 + 30 = 70$ で70Nになるのかな？



長さや時間は、「3m」「5s」のように、数と単位だけで言いつくせます。ところが、力はちがいます。同じ40Nでも、東へ引くか北へ引くかで、荷物の動く向

きが変わります。力には、「どれだけの強さか」のほかに、「どっちを向いているか」があるのです。

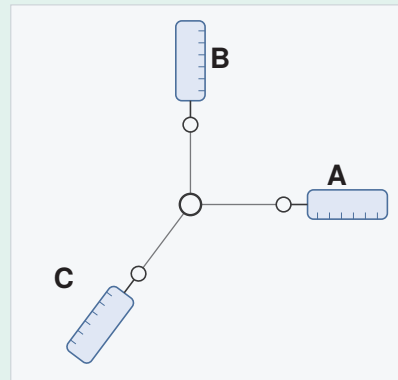
この章では、向きと大きさをもつ量を**矢印**で表します。そして、矢印どうしをたしたり、ひいたりする方法を作ります。この矢印の計算は、力・速度・電場や磁場など、物理と工学のほとんどすべての場面で使われます。

△ やってみよう 3つのばねばかりで、輪を引き合おう

用意するもの

ばねばかり 3 つ (10 N まではかれるもの)、小さな金属の輪 (キーホルダーの輪など)、糸、画用紙、定規、分度器

- ① 画用紙を机にテープでとめ、まん中に輪を置く。輪に糸を 3 本結び、それぞれの先にばねばかりをつける。
- ② 3 人で、ばねばかりを机と平行に引く。輪が止まったら、3 つの目もりを読み、糸の向きにそって鉛筆で線を引く。
- ③ 輪の中心から、糸の向きに、1 N を 1 cm として矢印をかく。
- ④ 矢印 A と B を 2 辺とする平行四辺形をかき、対角線の長さとし向きを、矢印 C とくらべよう。



ソラさんたちの結果です。

	A	B	C
目もり	3.0 N	4.0 N	5.0 N
矢印の長さ	3.0 cm	4.0 cm	5.0 cm

表 1 A と B の糸のあいだの角は 90° だった。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 2-2** マイナスは「反対の向き」を表す。東を+と決めると、西へ3mは-3m。+の向きは、はじめに決めて変えない。
- 2-15** 力の大きさはN（ニュートン）ではかる。質量約100gの物にはたらく重さ（重力）が約1N。
- 3-2** 点 (a, b) を右へ p 、上へ q 動かすと $(a + p, b + q)$ 。どれだけ動いたかは「あとーまえ」で求める。
- 4-4** 直角をはさむ2辺が a 、 b 、斜辺が c の直角三角形では、 $a^2 + b^2 = c^2$ （三平方の定理）。
- 4-6** 直角三角形で、 $\tan \theta = \text{向かいの辺} \div \text{となりの辺}$ 。電卓の $\tan^{-1}$ で、 $\tan$ の値から角を求められる。
- 4-7** 余弦定理：三角形の2辺 b 、 c と、そのあいだの角 A から、向かいの辺 a は $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。鈍角の $\cos$ は負（ $\cos 120^\circ = -0.5$ ）。

やってみようの答え：AとBを2辺とする長方形（平行四辺形の1つ）の対角線は、三平方の定理（4-4）で $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ なので5.0cmです。Cの矢印と同じ長さで、向きはちょうど反対になりました。AとBの2つの力を合わせると、5.0Nの力1つと同じ働きをします。その働きを、Cがちょうど打ち消していたので、輪は止まっていたのです。3 + 4 = 7の7Nではないことに注意しましょう。



ソラ

3 N と 4 N を合わせたのに、7 N じゃなくて 5 N なんだ。向きがちがうと、たし算のしかたも変わるんだね。

数学の道具

1 「どっちへ」がいる量と、いらぬ量

駅で待ち合わせをした友だちから、メッセージが来ました。「駅から 300 m 歩いた所にいるよ」。どこをさがせばいいかな？

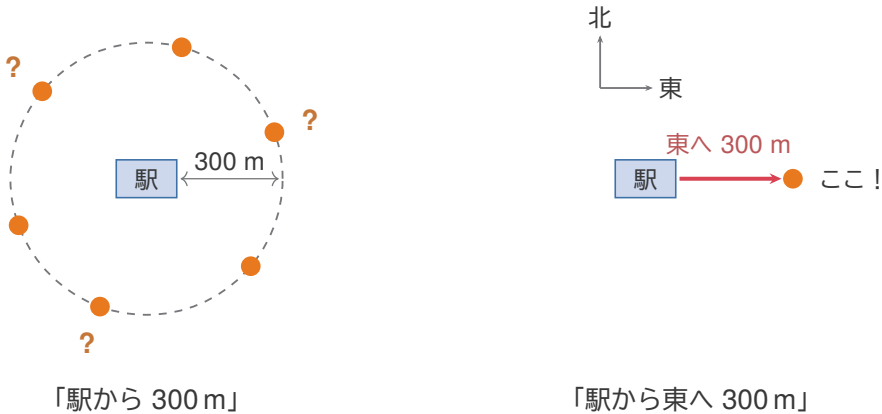


図 1 「300 m」だけでは、駅を中心とする円の上のどこかわからない。向きをそえると、1 つの点に決まる。

「300 m」だけでは、駅を中心とする半径 300 m の円の上の、どこにいるかわかりません。「東へ 300 m」と向きもそえると、場所はただ 1 つに決まります。**どこからどこへ動いたか**を伝えるには、「どれだけ」と「どっちへ」の 2 つが必要なのです。

力も同じです。机の上の消しゴムを、同じ強さで右から押すと左へ、手前から押すとおくへ動きます。力の働きを伝えるにも、「どれだけ」と「どっちへ」の 2 つが必要です。

身のまわりの量を、2 つに分けてみましょう。

量の種類	例
大きさだけで決まる量	長さ・道のり、時間、質量、温度、体積、面積、速さ、値段
向きと大きさに決まる量	移動（どこからどこへ）、速度、力

表 2 「速さ」と「速度」は、別の量として区別する。

速さと速度 「速さ 20 m/s」は、どちらへ走っているかを言っていません。「北へ 20 m/s」のように、向きまでふくめたものを、物理では**速度**とよびます。速さは、速度の「大きさ」だけを取り出したものです。北へ 20 m/s の車と、南へ 20 m/s の車は、速さは同じですが、速度はちがいます。

このように、向きと大きさをもつ量を**ベクトル** (vector) といいます。大きさだけで決まる量を**スカラー** (scalar) といいます。ベクトルはラテン語の「運ぶもの」ということばから、スカラーは「はしご・目もり」ということばから来ています。スカラーは、1 本の目もりの上の数で言いつくせる量、という意味です。

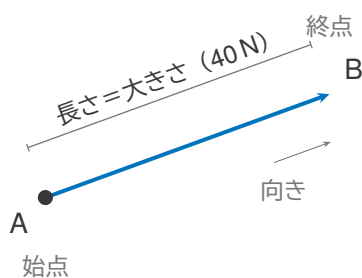
せいかくに言うと

数直線の上なら、向きは符号で表せた

1 本の道 (数直線) の上では、向きは「+の向き」と「-の向き」の 2 つしかありません。だから、2-2 では向きを符号で表せました。東へ 3 m は +3、西へ 3 m は -3 です。平面の上では、向きは東・北東・北・北北西…と、いくらでもあります。符号の 2 つだけでは足りないのです。矢印を使うのです。

2 ベクトルを矢印と記号で表す

ベクトルは、矢印でかきます。**矢印の向きがベクトルの向き、矢印の長さがベクトルの大きさ**です。力なら、「10 N を 1 cm」のように、長さの縮尺を決めてかきます。



矢印のもと (A) を**始点**、先 (B) を**終点**といいます。

左の図は、「10 N を 1 cm」の縮尺で、40 N の力を長さ 4 cm の矢印にかいたものです。

ベクトルは、次の記号で書きます。

- **始点と終点で書く** A から始まり B で終わる矢印を、 $\overrightarrow{AB}$ と書き、「ベクトル・エー・ビー」と読みます。文字の順番が大事です。 $\overrightarrow{BA}$ は、B から始まり A で終わる、反対向きの矢印です。

- **1つの文字で書く** $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{F}$ (力、force の F)、 $\vec{v}$ (速度、velocity の v) のように、文字の上に小さな矢印をのせて書きます。 $\vec{a}$ は「ベクトル・エー」と読みます。
- **大きさ** ベクトル $\vec{a}$ の大きさ (矢印の長さ) を $|\vec{a}|$ と書きます。 $|\overline{AB}|$ は、線分 AB の長さです。

$||$ は、3-2 の絶対値と同じ記号です。絶対値 $|-3| = 3$ は「数直線の上で、0 からどれだけはなれているか」でした。 $|\vec{a}|$ も「矢印のもとから先まで、どれだけはなれているか」です。どちらも、向き (符号) をすてて、大きさだけを取り出します。だから、 $|\vec{a}|$ はただの数 (スカラー) です。たとえば、 $\vec{F}$ が「東へ 40 N」の力なら、 $|\vec{F}| = 40 \text{ N}$ です。

方眼の上の矢印の大きさ

方眼の上にかいた矢印なら、大きさは三平方の定理 (4-4) で求められます。下の図の $\vec{p}$ は、始点から右へ 4 マス、上へ 3 マス進んだ所が終点です。右へ 4 と上へ 3 を 2 辺とする直角三角形の斜辺なので、

$$|\vec{p}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

1 マスが 1 cm なら、 $\vec{p}$ の長さは 5 cm です。

向きと大きさが同じなら、同じベクトル

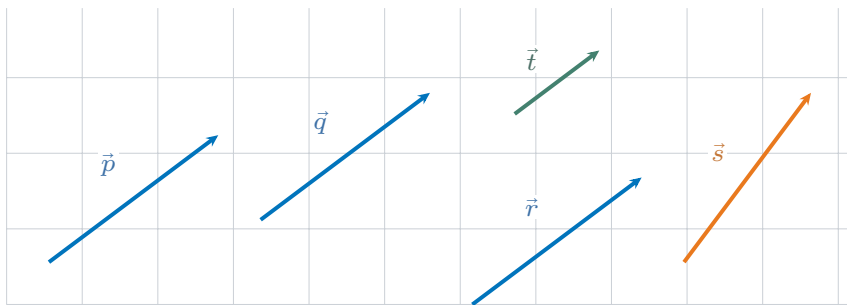


図 2 $\vec{p} \cdot \vec{q} \cdot \vec{r}$ は、どれも「右へ 4・上へ 3」で同じベクトル。 $\vec{s}$ は大きさ 5 で同じだが向きがちがう。 $\vec{t}$ は向きが同じだが大きさが半分。

図 2 の $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$ 、 $\vec{r}$ は、かいてある場所はちがいますが、どれも「右へ 4・上へ 3」の矢印です。3-2 で、ゲームのキャラクターが「右へ 4・上へ 3」動くとき、ど

こから動いても、その「動き」は同じでした。ベクトルも同じで、**向きと大きさが同じなら、どこにかいても同じベクトル**と考えます。 $\vec{p} = \vec{q} = \vec{r}$ と書きます。

$\vec{s}$ は、大きさは $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ で $\vec{p}$ と同じですが、向きがちがうので、 $\vec{s} \neq \vec{p}$ です。 $\vec{t}$ は、向きは同じですが、大きさが 2.5 で半分なので、 $\vec{t} \neq \vec{p}$ です。2つのベクトルが等しいのは、向きと大きさの**両方**が同じときだけです。

せいかくに言うと

力の矢印は、どこにかいてもよい？

ベクトルを計算するときは、矢印を平行に動かしてかき直してかまいません。ただし、力が物のどこにはたらくか（**作用点**）は、物を回す働きを考えると大事になります。ドアのノブを押すのと、ちょうつがいの近くを押すのとでは、同じ力でもドアの回り方がちがいます。これは 4-14 で調べます。この章では、物を回すことは考えず、物全体がどっちへ動くかだけを考えます。

記号カード

初めて出た章 4-10

 $\vec{a}$

読み方 ベクトル・エー
意味 向きと大きさをもつ量。
 $\overrightarrow{AB}$ は A から B への矢印。
英語 vector

記号カード

初めて出た章 4-10

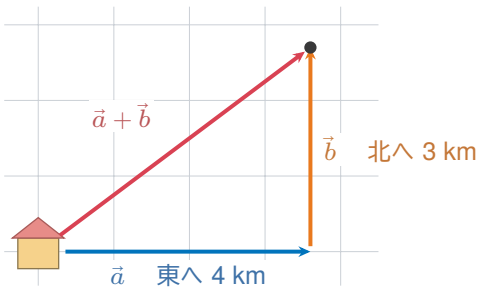
 $|\vec{a}|$

読み方 ベクトル・エーの大きさ
意味 矢印の長さ。向きをすてた数（スカラー）。
英語 magnitude

③ ベクトルのたし算：矢印をつなぐ

① 移動を続けると

ソラさんは、家から自転車で東へ 4 km 走り、そこから北へ 3 km 走りました。いま、ソラさんは家から見て、どこにいるでしょう。



1 マスは 1 km です。

東へ 4 km の移動を $\vec{a}$ (青)、北へ 3 km の移動を $\vec{b}$ (オレンジ) とします。

2 つの移動を続けた結果は、家から終わりの場所への 1 本の矢印 (赤) です。

赤い矢印は、直角をはさむ 2 辺が 4 と 3 の直角三角形の斜辺なので、長さは $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ です。ソラさんは、家から北東よりの向きへ、まっすぐはかって 5 km の所にいます。走った道のりは $4 + 3 = 7$ km ですが、家からの移動は 5 km です。

このように、1 つめのベクトル $\vec{a}$ の終点に、2 つめのベクトル $\vec{b}$ の始点をつなぎ、 $\vec{a}$ の始点から $\vec{b}$ の終点へ引いた矢印を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい、 $\vec{a} + \vec{b}$ と書きます。「 $\vec{a}$ だけ動いて、続けて $\vec{b}$ だけ動くのは、 $\vec{a} + \vec{b}$ だけ動くのと同じ」という意味です。

始点と終点の記号で書くと、とてもわかりやすくなります。

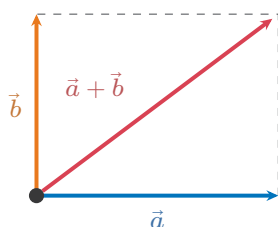
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

「A から B へ行き、続けて B から C へ行くのは、A から C へ行くのと同じ」です。まん中の B が、つなぎめになって消えます。

2 2 つの力を合わせると：平行四辺形

では、**？ はてな？** のように、1 つの荷物を 2 つの力が同時に引くときはどうでしょう。2 つの力は、同じ点から出る 2 本の矢印です。つなぐ形にはなっていません。

やってみようでは、2 つの力の矢印を 2 辺とする平行四辺形をかくと、その**対角線**が、2 つの力を合わせた働きになりました。この「力の平行四辺形」は、数学で決めたことではなく、実験で何度も確かめられてきた自然のきまり（法則、4-1）です。



平行四辺形の対角線

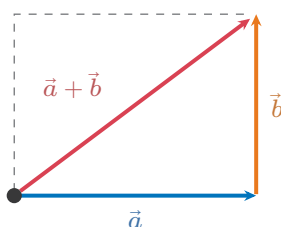
 $\vec{b}$ を平行に動かしてつなぐ

図3 平行四辺形の向かい合う辺は、平行で長さが等しい。だから右がわの辺は、 $\vec{b}$ と同じベクトル。

図3の左の平行四辺形の右がわの辺を見てください。平行四辺形の向かい合う辺は、平行で長さが等しいので、この辺は $\vec{b}$ と同じ向き・同じ大きさです。つまり、 $\vec{b}$ を平行に動かして $\vec{a}$ の先につないだ矢印です（右の図）。だから、**平行四辺形の対角線は、矢印をつないだ和と同じ**です。2つの方法は、同じ答えを出します。

2つ以上の力を合わせて1つにした力を、**合力**（ごうりょく）といいます。力の合力は、ベクトルの和です。

？はてな？ の答え

ソラさんの力を $\vec{a}$ （東へ40N）、ミナさんの力を $\vec{b}$ （北へ30N）とします。合力 $\vec{a} + \vec{b}$ は、2辺が40と30の長方形の対角線なので、大きさは

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$$

で50Nです。向きは、東から北へ角 θ だけ回った向きで、 $\tan \theta = \frac{30}{40} = 0.75$ です(4-6)。電卓で $\tan^{-1} 0.75$ を計算すると、 $\theta = 36.86 \dots^\circ$ です（電卓はDEGにしておく）。

荷物は、**東から約 37° 北へ回った向き**に、50Nの力1つで引かれたのと同じように動き出します。床との摩擦は、動きをじゃまする向きにはたらくので、動き出すかどうかは変えますが、動き出す向きは変えません。

✕ 2人の力を合わせると $40 + 30 = 70\text{N}$

大きさをそのまましてよいのは、2つの力が**同じ向き**のときだけです。

3 同じ向き・反対向きの和

一直線上の2つの力の和を、3つの場合でくらべます。

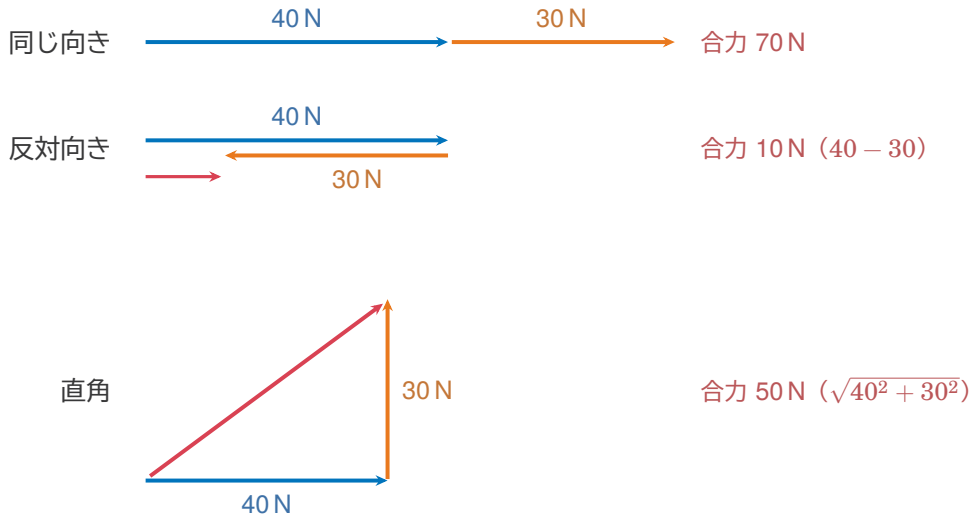


図4 同じ 40 N と 30 N でも、向きによって合力は 10 N から 70 N まで変わる（直角の図は縮尺を 0.8 倍にした）。

反対向きのときは、東を+とすると $(+40) + (-30) = +10$ で、東へ 10 N です (2-2)。綱引きで、強いほうへ少しずつ動いていくのと同じです。

三角形の2辺の長さの和は、残りの1辺より長くなります。だから、合力の大きさは、いつも「2つの力の大きさの和」以下です。和とちょうど同じになるのは、同じ向きのときだけです。

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

4 たす順番を入れかえても同じ

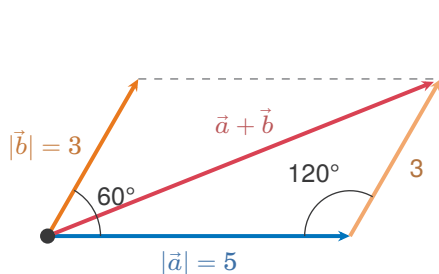
図3の平行四辺形で、左下から右上の角へ行く道は2通りあります。下の辺から右の辺へ行く道は $\vec{a} + \vec{b}$ 、左の辺から上の辺へ行く道は $\vec{b} + \vec{a}$ です。どちらも同じ対角線に着くので、

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

です。数のたし算と同じように、たす順番を入れかえてもかまいません。3つ以上のベクトルの和は、矢印を次々につないでいけば求められます。

5 角があるときの合力の大きさ：余弦定理

2つの力が直角でないときは、平行四辺形の対角線の長さを、余弦定理（4-7）で求めます。5Nの力 $\vec{a}$ と 3Nの力 $\vec{b}$ が、 60° の角をなしているとします。



$\vec{b}$ を平行に動かして $\vec{a}$ の先につなぐと（うすいオレンジ）、赤い対角線をふくむ三角形ができます。

この三角形の、 $\vec{a}$ の先の角は 120° です。平行四辺形のとなり合う角の和は 180° だからです（平行線と角、4-1）。

三角形の2辺5と3と、そのあいだの角 120° がわかったので、余弦定理で向かいの辺（合力の大きさ）を求めます。 $\cos 120^\circ = -0.5$ です。

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 25 + 9 - 30 \times (-0.5) = 25 + 9 + 15 = 49 \end{aligned}$$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{49} = 7$ で、合力は7Nです。 $5 + 3 = 8$ より小さく、直角のときの $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ より大きくなりました。

2つの力のなす角を θ としたときの合力の大きさを、表にします。（ $\approx$ は「ほぼ等しい」という記号です。5-8 でくわしく学びます。）

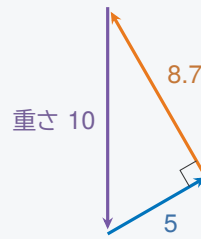
なす角 θ	0°	60°	90°	120°	180°
合力の大きさ (N)	8	7	$\sqrt{34} \approx 5.83$	$\sqrt{19} \approx 4.36$	2

表3 5Nと3Nの合力。2つの力の向きが開くほど、合力は小さくなる。

🔍 もっと知りたい ★★★

3つの力のつり合いは、三角形で解ける

重さ 10 N の荷物を、2 本のロープでつるします。2 本のロープは直角に開いていて、たての線から 30° と 60° かたむいています。荷物が止まっているとき、2 本のロープの力と重さの 3 つの力はつり合っているのです。矢印をつなぐと閉じた三角形になります (④で学びます)。この三角形は、斜辺が 10 (重さ)、角が 30° と 60° の直角三角形です。だから、ロープの力は $10 \cos 30^\circ \approx 8.7 \text{ N}$ と $10 \cos 60^\circ = 5 \text{ N}$ です (4-6)。たてに近いロープのほうが、大きな力で支えています。直角三角形にならないときは、4-7 の正弦定理を使って、同じように求められます。



④ 実数倍・反対のベクトル・ゼロベクトル

東へ 5 m/s で走る自転車が、同じ向きに 2 倍の速さで走ると、速度は東へ 10 m/s です。矢印でいうと、同じ向きで長さが 2 倍です。これは、同じ矢印を 2 本つないだ $\vec{a} + \vec{a}$ でもあるので、 $2\vec{a}$ と書きます。

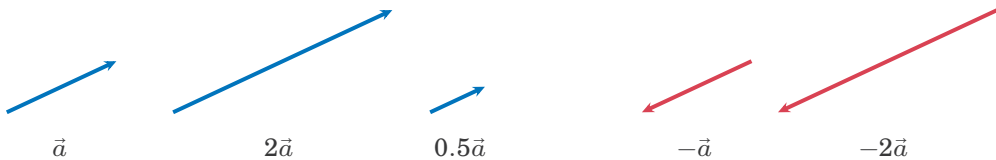


図 5 正の数をかけると同じ向き、負の数をかけると反対向き。長さは、かけた数の絶対値の倍。

ふつうの数 (0、正の数、負の数、分数、小数、 $\sqrt{2}$ など。まとめて**実数** (じっすう) といいます) を k とします。ベクトル $\vec{a}$ を k 倍した $k\vec{a}$ を、次のように決めます (これは定義です。4-1)。

- k が正のとき： $\vec{a}$ と同じ向きで、長さが k 倍の矢印。
- k が負のとき： $\vec{a}$ と**反対の向き**で、長さが $|k|$ 倍の矢印。
- $k = 0$ のとき：長さ 0 の「矢印」。これを**ゼロベクトル**といい、 $\vec{0}$ と書きます。

負の数をかけると向きが反対になるのは、2-2 の「マイナスは反対の向き」と同じ考えです。数直線の上で $\times(-1)$ をすると、 0 をはさんで反対がわへ移りました。とくに、 $(-1)\vec{a}$ を $-\vec{a}$ と書き、 $\vec{a}$ の**反対のベクトル**といいます。 $\vec{a}$ と大きさが同じで、向きが反対です。 $\overrightarrow{AB}$ の反対のベクトルは $\overrightarrow{BA}$ です。

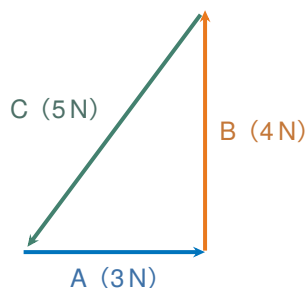
ゼロベクトル

東へ 3m 歩いてから、西へ 3m 歩くと、もとの場所にもどります。結果として、どこへも動いていません。

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

ゼロベクトル $\vec{0}$ は、大きさが 0 のベクトルです。長さがないので、向きは決まりません。数の 0 と同じように、どんなベクトルにたしても、相手を変えません ($\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$)。

やってみようの3つの力 A 、 B 、 C を、矢印を次々につないでみましょう。 A と B の和は C と同じ長さで反対向きなので、 C をつなぐと、出発した点にもどってきます。3つの力の和は $\vec{0}$ です。**力がつり合っている**とは、**合力が $\vec{0}$ になっている**ことです。つないだ矢印は、閉じた三角形になります。



A、B、C をつなぐと、
三角形が閉じて出発点にもどる。
 $A + B + C = \vec{0}$ (つり合い)

図6 つり合っている3つの力の矢印をつなぐと、閉じた三角形になる（ 1N を 8mm でかいた）。

平行なベクトル

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ が、同じ向きか反対の向きのとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといいます。このとき、 $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k があります。たとえば、図の $2\vec{a}$ も $-\vec{a}$ も、 $\vec{a}$ と平行です。

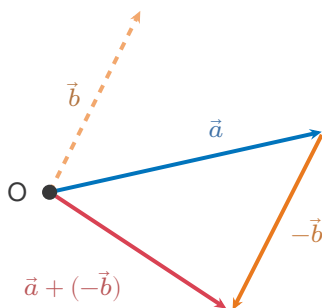
5 ベクトルのひき算：差と、速度の変化 $\Delta\vec{v}$

1 ひくことは、反対をたすこと

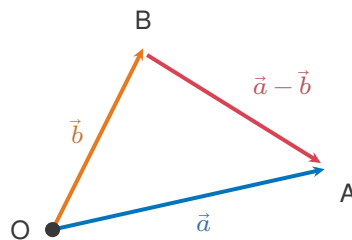
2-2 では、「ひくことは、反対の数をつなぐこと」でした。 $5 - 3 = 5 + (-3)$ です。ベクトルでも同じように決めます。

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$\vec{b}$ をひくことは、反対のベクトル $-\vec{b}$ をたすことです。



$\vec{a}$ に $-\vec{b}$ をつなぐ



$\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ

図7 2つの赤い矢印は、向きも大きさも同じ。 $\vec{a} - \vec{b}$ は、始点をそろえたとき「 $\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ」の矢印。

図7の左は、 $\vec{a}$ の先に $-\vec{b}$ をつないで、 $\vec{a} + (-\vec{b})$ を作ったものです。右は、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を O にそろえて、 $\vec{b}$ の先 B から $\vec{a}$ の先 A へ矢印を引いたものです。2つの赤い矢印は、向きも大きさも同じです。

② もう1つの見方：「何をたせば、そうなるか」

数のひき算 $5 - 3$ は、「3に何をたせば5になるか」の答えでした ($3 + 2 = 5$ なので2)。ベクトルでも、 $\vec{a} - \vec{b}$ は、 $\vec{b}$ に何をたせば $\vec{a}$ になるかの答えです。図7の右で、O から $\vec{b}$ だけ進んで B に着き、そこから赤い矢印だけ進むと、A に着きます。 $\vec{b} + (\text{赤い矢印}) = \vec{a}$ なので、赤い矢印が $\vec{a} - \vec{b}$ です。

始点と終点の記号で書くと、

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

「あと (A) - まえ (B)」で、B から A への矢印です。3-2 で、どれだけ動いたかを「あと - まえ」で求めたのと同じです。ひく順番を逆にすると、 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ で、向きが反対の矢印になります。

✕ $\vec{a} - \vec{b}$ は、 $\vec{a}$ の先から $\vec{b}$ の先へ

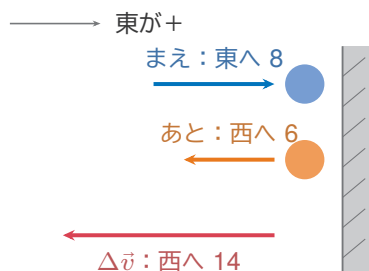
○ $\vec{a} - \vec{b}$ は、 $\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ (ひくほうから、ひかれるほうへ)

③ 速度の変化 $\Delta \vec{v}$ ：一直線上

2-3 で、変化量は「あと - まえ」でした。速度の変化も同じで、**速度の変化 = あとの速度 - まえの速度**です。速度はベクトルなので、変化もベクトルの差で求めます。

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} - \vec{v}_{\text{まえ}}$$

Δ は「変化量」の記号です (2-3)。



ボールが東へ 8 m/s で壁に当たり、西へ 6 m/s ではね返りました。東を + とすると、まえの速度は +8、あとの速度は -6 です。

$$\Delta v = (-6) - (+8) = -14$$

速度の変化は、西へ 14 m/s です。

速さだけを見ると、8 から 6 へ「2 へった」ように見えます。でも速度は、東へ 8 の状態から、まず 0 になり、さらに西へ 6 まで変わりました。変化は $8 + 6 = 14$ です。壁は、ボールの速度をこれだけ変える大きな力で、ボールを押し返したのです。

4 速度の変化 $\Delta \vec{v}$ ：向きが変わるとき

車が、速さ 10 m/s のまま、東向きから北向きへ、交差点を左に曲がりました。速さは変わっていません。では、速度は変わったでしょうか。

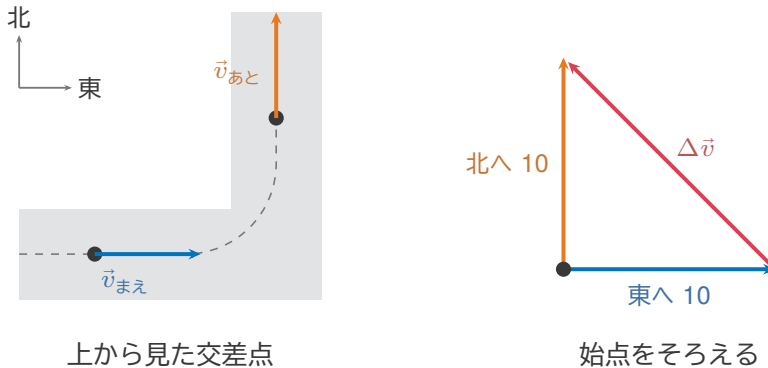


図 8 始点をそろえると、 $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} - \vec{v}_{\text{まえ}}$ は「まえの先からあとの先へ」の矢印（赤）。北西を向く。

まえの速度は東へ 10 m/s、あとの速度は北へ 10 m/s です。始点をそろえてかくと、 $\Delta \vec{v}$ は「まえの先から、あとの先へ」の矢印です (②)。この矢印は、直角をはさむ 2 辺が 10 と 10 の直角二等辺三角形の斜辺なので、

$$|\Delta \vec{v}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.1$$

です (1:1:√2、4-4)。速度は、北西の向きに 14.1 m/s も変わりました。

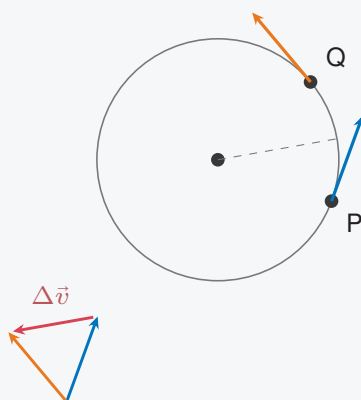
もう 1 つの考え方で確かめましょう。 $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} + (-\vec{v}_{\text{まえ}})$ です。 $-\vec{v}_{\text{まえ}}$ は西へ 10 m/s なので、「北へ 10」と「西へ 10」の和になり、やはり北西へ $10\sqrt{2}$ です。

速さが同じでも、向きが変われば速度は変わります ($\Delta \vec{v} \neq \vec{0}$)。物理シリーズの力学では、速度を変えるには力があることを学びます。カーブを曲がる車には、タイヤと道路のあいだの摩擦の力が、曲がる内がわへ向かってはたらい

ます。雪の日に道がすべりやすいと、この力がたりなくなって、車は曲がりきれずに外へ出てしまいます。

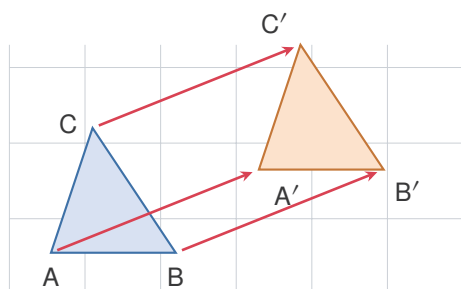
🔍 もっと知りたい ★★★

円を回る物の $\Delta \vec{v}$ は、円の中心を向く
 同じ速さで円を回る物の速度は、いつも円の接線の向きです（4-2）。円の上の点 P と、少し先の点 Q で、速度の矢印をかきます（右の図の青とオレンジ）。始点をそろえて差 $\Delta \vec{v}$ をかくと（赤）、その向きは、P と Q のまん中から**円の中心へ向かう**向きになります。
 P と Q を近づけても、 $\Delta \vec{v}$ はいつも中心を向いています。物理では、この中心を向く速度の変化を生む力を、**向心力**（こうしんりょく）とよびます。



6 平行移動

3-2 では、点を「右へ3・上へ2」のように動かしました。この「動かし方」は、まさにベクトルです。では、点を1つだけでなく、図形全体を同じベクトルで動かしてみましょう。



三角形 ABC の3つの頂点を、どれも「右へ5・上へ2」のベクトル $\vec{v}$ で動かします。動かした先を A' 、 B' 、 C' とします（ A' は「エー・ダッシュ」と読みます）。赤い3本の矢印は、どれも $\vec{v}$ です。

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$$

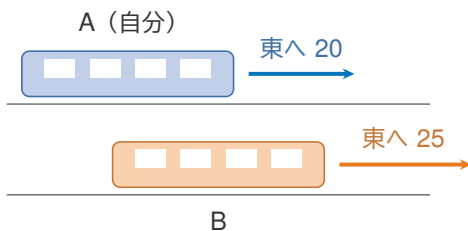
三角形 $A'B'C'$ は、三角形 ABC と形も大きさも同じ（合同、4-1）で、向きも変わっていません。4-1 の「ずらす」動かし方です。図形のすべての点を同じベクトルで動かすことを、**平行移動**といいます。

もう 1 つの見方をしてみましょう。駅の動く歩道に、荷物を 3 つ置きます。動く歩道が 20 m 進むと、3 つの荷物はどれも、同じ向きに 20 m 動きます。荷物どうしの並び方は変わりません。これが平行移動です。

7 動いている人から見た速度：相対速度

1 電車の窓から

電車に乗って、窓の外を見ています。となりの線路を、別の電車が走っています。



自分の電車 A は東へ 20 m/s、となりの電車 B は東へ 25 m/s で走っています（速度は地面に対するもの）。
A の窓から見ると、B はどう見えるかな？

1 秒ごとに、2 つの電車の先頭の位置を調べます。0 秒のとき、どちらも同じ所にいたとします。

時間 (s)	0	1	2	3
A の位置 (m)	0	20	40	60
B の位置 (m)	0	25	50	75
B は A より何 m 前か	0	5	10	15

表 4 B は A より、1 秒に 5 m ずつ前へ出ていく。

B は A より、1 秒に 5 m ずつ前へ出ていきます。だから、A に乗っている人には、B が東へ 5 m/s でゆっくり追いこしていくように見えます。 $25 - 20 = 5$ で、B の速度から A の速度をひいた値です。

Bが反対に、西へ 25 m/s で走っていたらどうでしょう。東を+とすると、Bの速度は -25 なので、

$$(-25) - (+20) = -45$$

Aから見ると、Bは西へ 45 m/s で、あっというまにすれちがっていきます。

このように、動いている人から見た相手の速度を、**相対速度**（そうたいそくど）といいます。

$$\text{Aから見たBの相対速度} = \text{Bの速度} - \text{Aの速度}$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

自分（A）の速度をひくのは、「自分が止まって見えるように、まわりの全部から自分の速度を取りのぞく」ためです。自分の速度から自分の速度をひけば、 $\vec{0}$ になります。

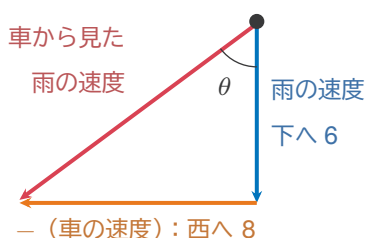
2 平面の上の相対速度：車の窓から見た雨

風のない日、雨つぶが真下へ 6 m/s で落ちています。そこへ車が東へ 8 m/s で走ってきます。車の窓から見ると、雨はどう見えるでしょう。

車から見た雨の速度は、雨の速度から車の速度をひいたものです。

「下へ6」に、車の速度の反対「西へ8」をたします。

2辺が6と8の直角三角形の斜辺なので、大きさは $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ で、 10 m/s です。



車の中から見ると、雨は 10 m/s で、車の後ろの向きへななめに落ちてくるように見えます。たてからの角 θ は、 $\tan \theta = \frac{8}{6}$ なので、電卓で約 53° です。止まっているときはまっすぐ落ちていた雨のすじが、走り出すと横の窓にななめにつくのは、このためです。フロントガラスに雨が多く当たるのも、車から見ると雨が前からやってくるからです。



ミナ

自分の速度をひくと、自分から見た世界になるんだね。電車の窓の景色が後ろへ流れていくのも同じだ！

たいせつ

ベクトル 向きと大きさをもつ量。矢印で表す。大きさは $|\vec{a}|$

和 矢印をつなぐ（平行四辺形の対角線）。 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

実数倍 $k\vec{a}$: $k > 0$ なら同じ向き、 $k < 0$ なら反対向き。長さは $|k|$ 倍

差 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ 。 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ ($\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ)

速度 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} - \vec{v}_{\text{まえ}}$ **相対速度** $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

📖 この章で出てきたことば

ベクトル・スカラー 向きと大きさをもつ量・大きさだけで決まる量。

始点・終点 矢印のもと・先。 $\vec{AB}$ は始点 A、終点 B。

合力 2つ以上の力を合わせて1つにした力。力のベクトルの和。

ゼロベクトル $\vec{0}$ 大きさ0のベクトル。向きは決まらない。

反対のベクトル 大きさが同じで向きが反対のベクトル。 $-\vec{a}$ 。

平行移動 図形のすべての点を、同じベクトルで動かすこと。

相対速度 動いている人から見た、相手の速度。相手の速度－自分の速度。

🔍 コラム 「北の風」は、どちらへふく？

天気予報の「北の風、風速 5 m/s」は、**北からふいてくる**風のことです。空気は北から南へ流れます。天気図の風の記号も、風のふいてくる向きを表します。ところが、風をベクトル（空気の速度）として矢印でかくと、矢印は**南**を向きます。「北の風」の「北」は、矢印の向きではなく、矢印の始まる向きなのです。ベクトルで計算するときには、天気予報のことばを、空気の動く向きに読みかえてから使いましょう。風向（ふうこう）と風速の2つで1つの風を表すのは、まさに「向きと大きさ」です。

例題でたしかめよう

例題1 ベクトルとスカラー

次の量は、ベクトルですか、スカラーですか。

(1) 教室の気温 22°C (2) 北へ 2 km の移動 (3) 時速 60 km という
速さ (4) 机を右へ押す 15 N の力

考え方 「どっちへ」を言わないと決まらない量がベクトル、数と単位だけで言いつくせる量がスカラー。

式 (1) 温度に向きはない。(2) 「北へ」と向きがある。
(3) 速さは、向きを言っていない。(4) 「右へ」と向きがある。

答え (1) スカラー (2) ベクトル (3) スカラー (4) ベクトル

(3) は、「北へ時速 60 km 」のように向きをそえれば、速度（ベクトル）になります。

じぶんでところ1

次の量は、ベクトルですか、スカラーですか。

(1) ペットボトルの水の体積 500 mL (2) 東へ 3 m/s の速度 (3) 質量
 40 kg (4) 物を真上へ持ち上げる 20 N の力

例題2 直角に引く2つの力の合力

荷物を、東へ12 N、北へ5 Nの力で同時に引きます。合力の大きさと、東から北へ何度回った向きかを求めましょう（電卓を使ってよい）。

考え方 2つの力を2辺とする長方形の対角線が合力。大きさは三平方の定理（4-4）、角は $\tan$ （4-6）。

式 大きさは $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
 東からの角を θ とすると、 $\tan \theta = \frac{5}{12} = 0.4166\ldots$
 電卓（DEG）で $\tan^{-1}(5 \div 12) = 22.61\ldots$

答え 13 N、東から約 23° 北へ回った向き

じぶんでこう2

荷物を、東へ15 N、北へ8 Nの力で同時に引きます。合力の大きさと、東から北へ何度回った向きかを求めましょう。

電卓で角を求めるときは、DEG を確かめる

電卓の $\tan^{-1}$ は、ふつう SHIFT（または 2nd）のキーを押してから $\tan$ のキーを押して使います。角が度で出るように、画面に DEG（度）の印が出ていることを確かめましょう。RAD（ラジアン、4-2）のままだと、同じ計算で $0.3947\ldots$ と出てきます。これは $0.3947 \times \frac{180}{\pi} \approx 22.6$ で、 22.6° をラジアンで表した数です。

DEG 22.61986495

RAD 0.394791119

例題3 角をなす2つの力の合力

3 N の力と 5 N の力が、同じ点に、なす角 60° ではたらいています。合力の大きさを求めましょう。

考え方 平行四辺形をかき、片方の力を平行に動かしてつなぐと、2 辺 3 と 5、そのあいだの角が $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ の三角形ができる（数学の道具③の段 5）。余弦定理（4-7）で向かいの辺を求める。

$$\begin{aligned}\text{式} \quad (\text{合力})^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 30 \times (-0.5) = 9 + 25 + 15 = 49 \\ \text{合力} &= \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

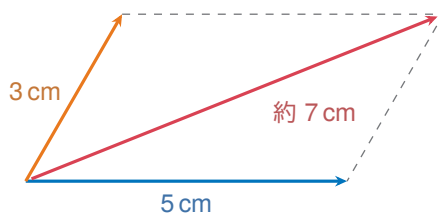
答え 7 N

じぶんでとこう 3

7 N の力と 8 N の力が、同じ点に、なす角 60° ではたらいています。合力の大きさを求めましょう。

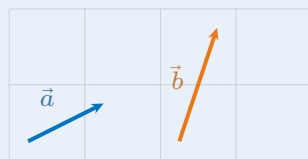
作図でも確かめよう

例題 3 を、ノートに作図して確かめます。1 N を 1 cm として、5 cm と 3 cm の矢印を、分度器で 60° 開いてかきます。平行四辺形を作って対角線を定規ではかると、約 7 cm になります。計算の答え 7 N と合います。作図は答えの見当をつけるのに、計算は正確な値を出すのに役立ちます。



例題 4 方眼の上の実数倍・和・差

右の方眼の $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ について、次のベクトルを「右へ○・上へ○」の形で答えましょう。(1) は大きさも求めましょう。左・下へ進むときは「左へ」「下へ」と書きます。



- (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $2\vec{a}$ (3) $-\vec{b}$ (4) $\vec{a} - \vec{b}$

考え方 $\vec{a}$ は「右へ2・上へ1」、 $\vec{b}$ は「右へ1・上へ3」。つなぐと、横の動きどうし、たての動きどうしがたされる(3-2)。

- 式** (1) $\vec{a}$ に $\vec{b}$ をつなぐ：右へ $2 + 1 = 3$ 、上へ $1 + 3 = 4$

大きさは $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

- (2) $\vec{a}$ を2本つなぐ：右へ $2 \times 2 = 4$ 、上へ $1 \times 2 = 2$

- (3) $\vec{b}$ と反対向き：左へ1、下へ3

- (4) $\vec{a} + (-\vec{b})$ ：横は $2 - 1 = 1$ 、たては $1 - 3 = -2$

右へ1、下へ2

- 答え** (1) 右へ3・上へ4、大きさ5 (2) 右へ4・上へ2 (3) 左へ1・下へ3 (4) 右へ1・下へ2

(4) を図でかくと、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点をそろえたとき、 $\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ向かう矢印になっています。ノートに方眼をかいて、確かめてみましょう。

じぶんでこう4

$\vec{a}$ が「右へ3・上へ1」、 $\vec{b}$ が「右へ1・上へ2」のとき、次のベクトルを「右へ○・上へ○」の形で答えましょう。(1) は大きさも求めましょう。

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $2\vec{a}$ (3) $-\vec{b}$ (4) $\vec{a} - \vec{b}$

例題5 一直線上の速度の変化

東へ 8 m/s で転がってきたボールが、壁に当たって、西へ 6 m/s ではね返りました。速度の変化 $\Delta \vec{v}$ を求めましょう。

考え方 東を+と決めて、向きを符号で表す (2-2)。速度の変化は「あと-まえ」。

式 まえの速度 $+8$ 、あとの速度 -6

$$\Delta v = (-6) - (+8) = -14$$

負なので西向き

答え 西へ 14 m/s

じぶんでとこう5

南へ 20 m/s で飛んできたテニスボールを、ラケットで北へ 30 m/s で打ち返しました。速度の変化を求めましょう。

例題6 向きが変わったときの速度の変化

自転車が、速さ 6 m/s のまま、北向きから東向きへ曲がりました。速度の変化 $\Delta \vec{v}$ の大きさと向きを求めましょう。

考え方 $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} - \vec{v}_{\text{まえ}} = \vec{v}_{\text{あと}} + (-\vec{v}_{\text{まえ}})$ 。始点をそろえてかく (図8)。

式 $\vec{v}_{\text{あと}}$ は東へ 6 、 $-\vec{v}_{\text{まえ}}$ は南へ 6

東へ 6 と南へ 6 の和なので、向きは南東

$$\text{大きさは } \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8.49$$

答え 南東の向きに約 8.5 m/s

速さは 6 m/s のままなのに、速度の変化は 0 ではありません。

じぶんでところ 6

車が、速さ 15 m/s のまま、南向きから東向きへ曲がりました。速度の変化 $\Delta \vec{v}$ の大きさと向きを求めましょう。

例題 7 電車から見た電車の速度

電車 A が東へ 15 m/s で走っています。(1) 電車 B が東へ 25 m/s で走っているとき、(2) 電車 B が西へ 25 m/s で走っているとき、A から見た B の相対速度を求めましょう。

考え方 A から見た B の相対速度 = B の速度 - A の速度。東を+とする。

式 (1) $(+25) - (+15) = +10$

(2) $(-25) - (+15) = -40$

答え (1) 東へ 10 m/s (2) 西へ 40 m/s

じぶんでところ 7

自転車 A が北へ 5 m/s で走っています。(1) 自転車 B が北へ 3 m/s で走っているとき、(2) 自転車 B が南へ 4 m/s で走っているとき、A から見た B の相対速度を求めましょう。



ソラ

同じ向きに走っていても、自分より遅い相手は、後ろへ下がっていくように見えるんだね。

例題8 車から見た雨の速度

雨つぶが真下へ 5 m/s で落ちています。人が自転車で東へ 5 m/s で走ると、人から見た雨の速度の大きさと向きはどうなるでしょう。

考え方 人から見た雨の速度 = 雨の速度 - 人の速度 = 雨の速度 + (人の速度の反対)。

式 「下へ5」と「西へ5」の和

$$\text{大きさは } \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7.07$$

2辺が等しい直角三角形なので、たてから 45° 西へかたむく

答え 大きさ約 7.1 m/s 。たてから 45° だけ西（人の後ろの向き）へかたむいて落ちる

じぶんでこう8

雨つぶが真下へ 6 m/s で落ちています。車が北へ 8 m/s で走ると、車から見た雨の速度の大きさと、たてから何度かたむくかを求めましょう。

例題 9 平行移動した点の座標

三角形 ABC の頂点は $A(-2, 1)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ です。この三角形を、「右へ 4・上へ 3」のベクトル $\vec{v}$ で平行移動した三角形 $A'B'C'$ の頂点の座標を求めましょう。また、1 つの頂点が動いた距離を求めましょう。

考え方 平行移動では、どの点も同じベクトルで動く（数学の道具⑥）。右へ 4 なら x 座標に 4 をたし、上へ 3 なら y 座標に 3 をたす（3-2）。動いた距離は $|\vec{v}|$ 。

式 $A' : (-2 + 4, 1 + 3) = (2, 4)$

$B' : (1 + 4, 0 + 3) = (5, 3)$

$C' : (0 + 4, 3 + 3) = (4, 6)$

動いた距離 $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

答え $A'(2, 4)$ 、 $B'(5, 3)$ 、 $C'(4, 6)$ 。どの頂点も 5 だけ動く

3 つの頂点がどれも同じ 5 だけ、同じ向きに動くので、三角形の形も大きさも向きも変わりません。ノートに方眼をかいて、2 つの三角形をかいて確かめましょう。

じぶんどこう 9

三角形 ABC の頂点は $A(1, 2)$ 、 $B(4, -1)$ 、 $C(-1, 0)$ です。この三角形を、「右へ 3・下へ 2」のベクトルで平行移動した三角形 $A'B'C'$ の頂点の座標と、1 つの頂点が動いた距離を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

大きさをそのままたしてしまう

✗ 東へ 6 N と北へ 8 N の合力は $6 + 8 = 14$ N

○ 合力は長方形の対角線。 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ N

大きさをそのままたしてよいのは、同じ向きするときだけです。向きがちがうと、引っぱり合う分だけ、合力は小さくなります。

⚠ まちがえやすいところ

差の矢印の向きを逆にかく

✗ $\vec{a} - \vec{b}$ を、 $\vec{a}$ の先から $\vec{b}$ の先へかく

○ $\vec{a} - \vec{b}$ は、 $\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の先へ

$\vec{b}$ に $\vec{a} - \vec{b}$ をたすと $\vec{a}$ になるはずですが、 $\vec{b}$ の先から出発して $\vec{a}$ の先に着く矢印でなければ、たして $\vec{a}$ になりません。

⚠ まちがえやすいところ

速さが同じなら、速度は変わっていないと思う

✗ 速さ 10 m/s のまま曲がったので、 $\Delta \vec{v} = \vec{0}$

○ 向きが変わったので、 $\Delta \vec{v} \neq \vec{0}$ (90° 曲がると $10\sqrt{2}$)

速度はベクトルなので、大きさ（速さ）が同じでも、向きが変われば別の速度です。

⚠ まちがえやすいところ

ベクトルとその大きさを、同じ記号で書く

✕ $\vec{F} = 40 \text{ N}$

○ $|\vec{F}| = 40 \text{ N}$ (向きもいうなら「 $\vec{F}$ は東へ 40 N」)

$\vec{F}$ は向きをもつ矢印、 $|\vec{F}|$ はただの数です。矢印と数を「=」で結ぶことはできません。

⚠ まちがえやすいところ

相対速度で、ひく順番を逆にする

✕ 東へ 20 m/s の電車 A から見た、東へ 25 m/s の電車 B の速度は $20 - 25 = -5$ で西へ 5 m/s

○ A から見た B は、B の速度 - A の速度。 $25 - 20 = 5$ で東へ 5 m/s
ひくのは「見ている自分 (A)」の速度です。A の窓から見ると、速い B は前へ出ていくので、東向きでなければおかしいと、答えを見て確かめましょう。

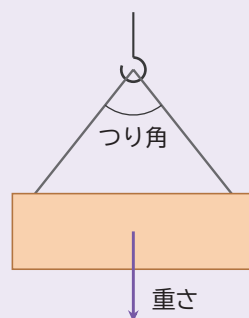
🔍 コラム 「ベクトル」という名前

「ベクトル」という名前を数学で使いはじめたのは、アイルランドのハミルトンで、180 年ほど前のことです。その後、アメリカのギブズとイギリスのヘビサイドが、電気と磁気の研究（マクスウェルの電磁気学）を計算しやすくするために、いま私たちが使っている矢印のたし算・ひき算や、4-12・4-14 で学ぶ 2 種類のかけ算を整理しました。力の平行四辺形はずっと昔から知られていましたが、「向きと大きさをもつ量」をまとめて 1 つの文字で計算できるようになったのは、意外に新しいのです。

物理・工学ではこう使う

● クレーンの2本のワイヤ

クレーンで重い荷物をつるとき、フックから2本のワイヤを荷物の両はしにかけます。2本のワイヤの力の合力が、荷物の重さと同じになります。2本のあいだの角（つり角）を広げると、合力を同じに保つために、1本1本の力は大きくなります。つり角 120° では、1本のワイヤに、荷物の重さと同じ大きさの力がかかります（2本の力と重さの3つの矢印で、正三角形ができるから）。現場では、つり角を原則として 60° 以内にするように決められています。



つり角	0°	60°	90°	120°
1本の力÷荷物の重さ	0.50	0.58	0.71	1.00

● 横風の中を飛ぶ飛行機

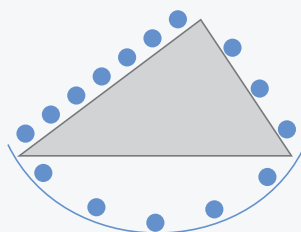
飛行機は空気の中を進みます。地面から見た飛行機の実速度は、「空気に対する飛行機の実速度」と「風の実速度」の和です。横風がふくと、機首の向きと実際に進む向きがずれるので、パイロットは機首を風上へ少し向けて、まっすぐ滑走路へ進みます（4-11で計算します）。

● ロボットの手の移動

工場のロボットは、手先を「いまの位置から、目標の位置まで」動かします。動かす向きと距離は、目標の位置から、いまの位置をひいたベクトル（あとーまえ）です。

🔍 コラム 斜面の首かざり

400 年あまり前、オランダのステヴィンは、右のような図を考えました。三角の台に、同じ玉をつないだ首かざりをかけます。もし首かざりがひとりでに回り出したら、いつまでも回り続けることになりますが、そんなことは起こりません。下にたれた部分は左右対称なので、それを取りのぞいても、斜面の上の玉はつり合っているはずです。ステヴィンはここから、斜面の上の物を支える力のきまりを見つけ、力を三角形で合わせる考えへ進みました。



章末問題

4-10 のまとめ

基本 ★★

- 1 次の量を、ベクトルとスカラーに分けましょう (📖 例題 1)。
 - (1) 北東へ 100 m の移動
 - (2) 30 s という時間
 - (3) 下向きの 9.8 N の重力
 - (4) 2 L という体積
- 2 荷物を、東へ 9 N、北へ 12 N の力で同時に引きます。合力の大きさと、東から北へ何度回った向きかを求めましょう (📖 例題 2)。
- 3 5 N の力と 3 N の力が、なす角 60° ではたらいています。合力の大きさを求めましょう (📖 例題 3)。
- 4 $\vec{a}$ が「右へ 1・上へ 2」、 $\vec{b}$ が「右へ 3・下へ 1」のとき、次のベクトルを「右へ○・上へ○」の形で答えましょう (📖 例題 4)。(1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $3\vec{a}$ (3) $\vec{a} - \vec{b}$

- 5 東へ 12 m/s で飛んできたボールを、バットで西へ 30 m/s で打ち返しました。速度の変化を求めましょう (例題 5)。
- 6 電車 A が東へ 20 m/s で走っています。電車 B が (1) 東へ 12 m/s 、(2) 西へ 12 m/s で走るとき、A から見た B の相対速度を求めましょう (例題 7)。
- 7 荷物を、東へ 20 N 、北へ 21 N の力で同時に引きます。合力の大きさと、東から北へ何度回った向きかを求めましょう (例題 2)。
- 8 三角形 ABC の頂点は $A(0, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(1, 4)$ です。「左へ 2・上へ 5」のベクトルで平行移動した三角形 $A'B'C'$ の頂点の座標と、1 つの頂点が動いた距離を求めましょう (例題 9)。

チャレンジ ★★★

- 9 速さ 20 m/s のまま、西向きから北向きへ曲がった車の、速度の変化の大きさと向きを求めましょう (例題 6)。
- 10 6 N の力と 10 N の力が、なす角 60° ではたらいています。合力の大きさを求めましょう (例題 3)。
- 11 雨つぶが真下へ 4 m/s で落ちています。人が自転車で西へ 3 m/s で走ると、人から見た雨の速度の大きさと、たてから何度かたむくかを求めましょう (例題 8)。

12 雨つぶが真下へ 8 m/s で落ちています。車が東へ 6 m/s で走ると、車から見た雨の速さと、たてからかたむく角を求めましょう (例題 8)。

13 5 N の力と 16 N の力が、なす角 60° ではたらいています。合力の大きさを求めましょう (例題 3)。

14 自転車が、速さ 12 m/s のまま、北向きから西向きへ曲がりました。速度の変化の大きさと向きを求めましょう (例題 6)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 向きと大きさをもつ量を矢印と記号で表せる。 → 344 ページ
- ☐ 矢印をつないで、合力の大きさを求められる。 → 346 ページ
- ☐ 差をかいて、速度の変化や相対速度を求められる。 → 353 ページ



デルタ

矢印の計算は、作図だけだと大変だね。次の章では、矢印を 2 つの数の組にして、計算だけで答えを出すよ。

第3部 ベクトル

★★～★★★★

4-11

ベクトルを成分で
計算しよう

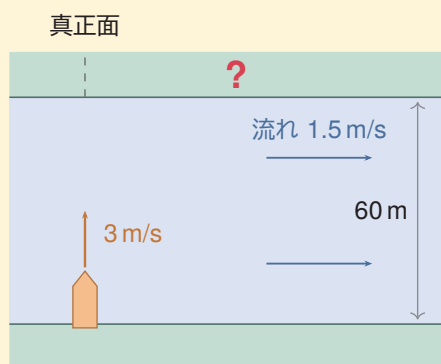
道しるべ この章の前に 3-2 3-6 4-4 4-6 4-10 この章の先に 4-12 5-15 7-2

この章でできるようになること

- ★★ ベクトルを成分 (a_x, a_y) で表し、和・差・実数倍・大きさを計算できる。
- ★★★ 力や速度を、 x 方向と y 方向の成分に分けて考えられる。
- ★★★ 位置ベクトルで、内分点・重心・まっすぐ進む点の位置を求められる。

？ はてな？

はば 60 m の川を、ボートでわたります。ボートは、水に対して 3 m/s の速さで、向こう岸へまっすぐ船首を向けてこぎます。ところが、川の水は 1.5 m/s で流れています。ボートは、向こう岸のどこに着くかな？ 真正面に着くには、どっちへ船首を向ければいいかな？



4-10 では、ベクトルを矢印でかいて、つないだり、平行四辺形をかいたりしました。図をかけば答えは見えますが、矢印が 3 本、4 本とふえると、作図はたいへんです。角が中途半端だと、長さを正確に読むこともできません。

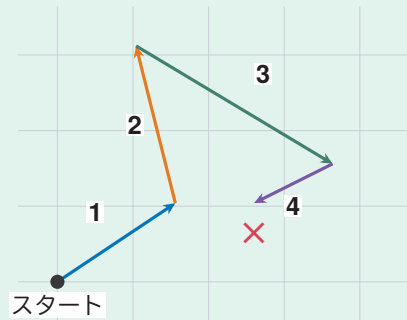
そこでこの章では、ベクトルを「横にどれだけ、たてにどれだけ」という**2つの数の組**で表します。すると、矢印のたし算もひき算も、ふつうの数の計算だけでできるようになります。物理シリーズで力や速度を計算するときは、ほとんどいつもこの方法を使います。

△ やってみよう 方眼の上で、宝さがし

宝の地図に、スタートからの進み方が4つ書いてあります（1マス1m）。

- ① 右へ3、上へ2
- ② 左へ1、上へ4
- ③ 右へ5、下へ3
- ④ 左へ2、下へ1

ノートの方眼に、矢印を順につないでかき、宝の場所をさがそう。宝は、スタートから見て、右へいくつ・上へいくつの所かな？



やってみようの答え：宝は×の所で、スタートから右へ5、上へ2です。図をかかなくても求められます。横の動きだけを集めると、右へ3、左へ1、右へ5、左へ2なので、右を+として $3 - 1 + 5 - 2 = 5$ 。たての動きだけを集めると、上を+として $2 + 4 - 3 - 1 = 2$ 。図をかいて求めた答えと同じです。**横どうし、たてどうしをたせばよい**のです。

進み方	1	2	3	4	合計
横（右が+）	3	-1	5	-2	5
たて（上が+）	2	4	-3	-1	2

表1 横の列とたての列を、別々にたす。矢印をつなぐ順番を変えても、合計は変わらない。



ミナ

図をかかなくても、たし算とひき算だけで宝が見つかった！

🌀 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 3-2** 点 (a, b) を右へ p 、上へ q 動かすと $(a + p, b + q)$ 。横の動きとたての動きは、おたがいにじゃまをしない。 x_1 の小さな1は名前の印。
- 4-4** 2点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) の距離は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。
- 4-6** 直角三角形で、斜辺を r 、角 θ のとなりの辺を a 、向かいの辺を b とすると、 $a = r \cos \theta$ 、 $b = r \sin \theta$ 。
- 4-8** 半径1の円の上で、 x 軸の正の向きから左回りに角 θ の所にある点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。 90° より大きい角でも使える。
- 4-10** ベクトルの和は矢印をつなぐ。 $k\vec{a}$ は長さ $|k|$ 倍 ($k < 0$ なら反対向き)。
 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ 。合力が $\vec{0}$ なら、力はつり合う。
- 3-6** 連立方程式：2つの式から、文字を1つずつ消して解く。

🏠 数学の道具

① ベクトルを2つの数で表す：成分

方眼の上の矢印 $\vec{a}$ は、始点から右へ4、上へ3進んだ所が終点です（図1）。この「右へ4・上へ3」を、座標と同じように2つの数の組 $(4, 3)$ で書くことにします。

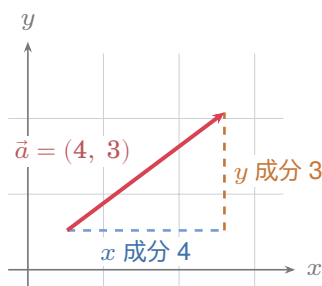


図1 矢印の横の進み（ x 成分）とたての進み（ y 成分）。

横の進みを **x 成分**、たての進みを **y 成分** といいます。

右や上へ進むときは正、左や下へ進むときは負の数にします（2-2）。

たとえば「左へ2・下へ5」は $(-2, -5)$ です。

一般に、ベクトル $\vec{a}$ の x 成分を a_x 、 y 成分を a_y と書き、

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

と表します。 a_x の小さな x は、「 x 方向の」という名前の印で、かけ算ではありません (3-2 の下つき文字)。

2 通りの見方

- **動き方として**：3-2 で、点を「右へ p 、上へ q 」動かしました。その動かし方が、ベクトル (p, q) です。
- **矢印として**：始点を原点 O に置くと、終点の座標が、そのまま成分になります。 $\vec{a} = (4, 3)$ なら、終点は点 $(4, 3)$ です。

4-10 で、向きと大きさが同じなら、どこにかいても同じベクトルでした。どこにかいても「右へ 4・上へ 3」は変わらないので、成分も変わりません。だから、**2つのベクトルが等しいのは、 x 成分どうしも、 y 成分どうしも等しいとき**です。ゼロベクトルは $\vec{0} = (0, 0)$ です。

2 点から成分を求める

点 $A(x_1, y_1)$ から点 $B(x_2, y_2)$ への矢印は、横に $x_2 - x_1$ 、たてに $y_2 - y_1$ 進みます (あと一まえ、3-2)。

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

たとえば $A(1, 5)$ 、 $B(4, 1)$ なら、 $\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 1 - 5) = (3, -4)$ です。右へ 3、下へ 4 です。

大きさ

ベクトルの大きさは、横 $|a_x|$ 、たて $|a_y|$ の直角三角形の斜辺の長さです。三平方の定理 (4-4) から、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

a_x が負でも、2 乗すれば正なので、そのまま入れてかまいません。 $\vec{a} = (4, 3)$ なら $|\vec{a}| = \sqrt{16+9} = 5$ 、 $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$ なら $\sqrt{9+16} = 5$ です。これは、4-4 の「2 点の距離」と同じ式です。

記号カード

初めて出た章 4-11

 (a_x, a_y)

読み方 エー・エックス、エー・ワイ

意味 ベクトル $\vec{a}$ の成分。横の進みとたての進み。

英語 components

記号カード

初めて出た章 4-11

 $\vec{e}$

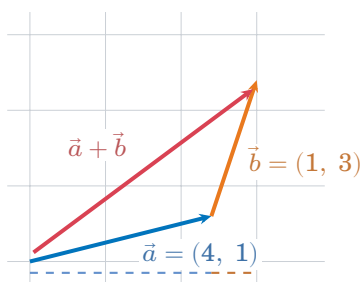
読み方 ベクトル・イー

意味 単位ベクトル。大きさが 1 のベクトル。向きだけを表す。

英語 unit vector

② 和・差・実数倍は、成分ごとに計算する

やってみようでは、横どうし、たてどうしをたすと、つないだ矢印の終点が変わりました。図で確かめましょう。



$\vec{a} = (4, 1)$ に $\vec{b} = (1, 3)$ をつなぎます。

横の進みは、 $\vec{a}$ の 4 と $\vec{b}$ の 1 を合わせて $4 + 1 = 5$ (下の点線)。

たての進みは $1 + 3 = 4$ 。

だから $\vec{a} + \vec{b} = (5, 4)$ です。

横の動きとたての動きは、おたがいにじゃまをしません (3-2)。だから、つないだ矢印の横の進みは、横の進みどうしの和です。たてについても同じです。実数倍と差も、同じように考えられます。

- **実数倍** : $2\vec{a}$ は、 $\vec{a}$ を 2 本つないだものなので、横もたても 2 倍で $(8, 2)$ 。長さが 2 倍の矢印は、相似 (4-3) で、横とたても 2 倍になる、と見ることもできます。
- **差** : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ 。 $-\vec{b}$ は $\vec{b}$ と反対向きなので $(-1, -3)$ 。だから $\vec{a} - \vec{b} = (4 - 1, 1 - 3) = (3, -2)$ 。

まとめると、 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 、 k を実数として、

計算	成分
和	$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$
差	$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$
実数倍	$k\vec{a} = (ka_x, ka_y)$

表 2 ベクトルの計算は、 x 成分は x 成分どうし、 y 成分は y 成分どうしで計算する。

4-10 の例題 4 で、方眼にかいて求めた答えを、成分で確かめてみましょう。

$\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ でした。 $\vec{a} + \vec{b} = (3, 4)$ 、 $2\vec{a} = (4, 2)$ 、 $-\vec{b} = (-1, -3)$ 、 $\vec{a} - \vec{b} = (1, -2)$ で、図で求めた答えとすべて同じです。

いくつかの計算を組み合わせるときは、まず実数倍を成分ごとに計算し、次にたしたりひいたりします。たとえば $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ で $3\vec{a} - 2\vec{b}$ は、

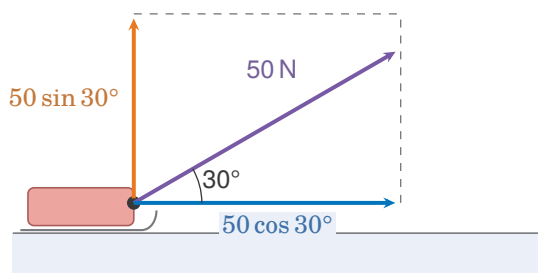
$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (6, 3) - (2, 6) = (6 - 2, 3 - 6) = (4, -3)$$

です。

3 力を、横とたての成分に分ける

1 ななめに引くひも

雪の上で、そりをひもで引きます。ひもは、地面から 30° 上を向いていて、ひもを引く力は 50 N です。この力は、そりを前へ進める働きと、そりを上へ持ち上げる働きの、両方をしています。それぞれ何 N ずつでしょう。



ひもの力の矢印（むらさき）を斜辺とする直角三角形を作ります。

横の辺（青）が、前へ進める働き。

たての辺（オレンジ）が、持ち上げる働きです。

斜辺が 50、角が 30° なので、4-6 から、横は $50 \cos 30^\circ$ 、たては $50 \sin 30^\circ$ です。

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ なので（ $\approx$ は「ほぼ等しい」。5-8 でくわしく）、

$$\text{横} : 50 \times 0.866 = 43.3 \quad \text{たて} : 50 \times 0.5 = 25$$

ひもの力は、成分で書くと $(43.3, 25)$ です。そりを前へ進めるのは 43.3 N 分だけで、残りの 25 N 分は、そりを持ち上げて、雪に押しつける力を軽くしています。

確かめてみましょう。 $\sqrt{43.3^2 + 25^2} = \sqrt{1874.9 + 625} = \sqrt{2499.9} \approx 50$ で、もとの 50 N にもどります。 $43.3 + 25 = 68.3$ にはならないことに注意しましょう（4-10）。

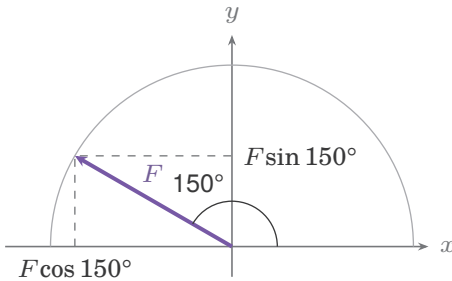
大きさ F の力が、 x 軸の正の向きから角 θ の向きにはたらくとき、

$$\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$$

これを、力を**成分に分ける**（分解する）といいます。

② 90° より大きい角でも使える

4-8 で、半径 1 の円の上の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ でした。大きさ F の力の矢印は、この半径 1 の矢印を F 倍にのばしたものです。だから、角 θ が 90° より大きくても、同じ式が使えます。



150° の向きの 50 N の力は、左上を向いています。

$\cos 150^\circ = -0.866$ 、 $\sin 150^\circ = 0.5$
(4-7・4-8) なので、

$$\begin{aligned} & (50 \times (-0.866), 50 \times 0.5) \\ & = (-43.3, 25) \end{aligned}$$

x 成分が負になり、「左へ 43.3」をちゃんと表しています。

直角三角形だけで考えると、「左向きだから - をつける」と自分で決めなければなりません。 $\cos \cdot \sin$ を 4-8 のように使えば、符号は式が自動でつけてくれます。

3 成分から、大きさと向きを求める

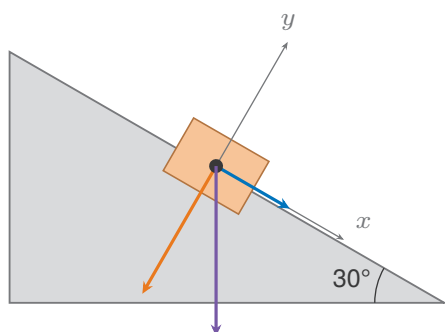
反対に、成分 (F_x, F_y) がわかっているときは、大きさは $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ です。向きの角 θ は、 $\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$ から求めます (4-6)。ただし、電卓の $\tan^{-1}$ は -90° から 90° までの角しか答えません。矢印がどっちを向いているか、図をかいて確かめることが大切です。

たとえば $\vec{F} = (-5, 12)$ は、左へ 5、上へ 12 で、左上を向いています。電卓で $\tan^{-1} \frac{12}{-5}$ を計算すると -67.4° と出ますが、これは右下の向きです。左上の向きは、そこから 180° 回した $-67.4^\circ + 180^\circ = 112.6^\circ$ です。 $\tan$ の値は、 180° 回しても同じになるからです (4-8)。大きさは $\sqrt{25 + 144} = 13$ です。

4 軸は、計算が楽になるように選ぶ

3-2 で、原点と + の向きは、自分で決めてよいのでした。軸の向きも、自分で決めてかまいません。4-6 では、斜面の上の荷物にはたらく重力 mg を、斜面にそった向きの $mg \sin \theta$ と、斜面に垂直な向きの $mg \cos \theta$ に分けました。これ

は、**斜面にそった向きを x 軸、斜面に垂直な向きを y 軸**にして、重力を成分に分けたのと同じことです。



むらさきが重力、青が斜面にそった成分、オレンジが斜面に垂直な成分です。

質量 2 kg の荷物なら、重力は $2 \times 9.8 = 19.6\text{ N}$ 。斜面が 30° なら、斜面にそった成分は $19.6 \times 0.5 = 9.8\text{ N}$ 、垂直な成分は $19.6 \times 0.866 \approx 17.0\text{ N}$ です。

軸を斜面にそわせると、荷物は x 方向（斜面にそった向き）にだけ動くので、 y 方向の動きを考えなくて済みます。**同じ力でも、軸の選び方で成分は変わります。**物理では、問題に合わせて、いちばん計算が楽になる軸を選びます。

4 速度を成分に分ける

速度は、向きと大きさをもつ量（ベクトル）です（4-10）。だから、力と同じように、 x 方向の成分と y 方向の成分に分けて考えられます。

1 位置の変化から速度の成分を求める

グラウンドの上を、ドローンが一定の速度でまっすぐ飛んでいます。真上から見た位置を、地面に方眼をかいて座標で表します（単位は m ）。0 秒のときは $(2, 1)$ 、4 秒のときは $(14, 6)$ にいました。

4 秒間の位置の変化は、あと一ま
えで

$$(14 - 2, 6 - 1) = (12, 5)$$

これを、かかった時間 4 秒でわると、1 秒あたりの位置の変化になります。

$$\left(\frac{12}{4}, \frac{5}{4}\right) = (3, 1.25)$$

これが、ドローンの**速度の成分**です。1 秒ごとに、横 (x 方向) へ 3 m、たて (y 方向) へ 1.25 m 進みます。 x 成分は $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 、 y 成分は $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ です。2-3 の「速さ = $\Delta x \div \Delta t$ 」を、横とたてで 1 回ずつ使ったのです。

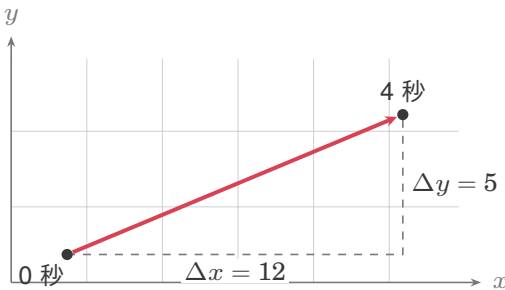
$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

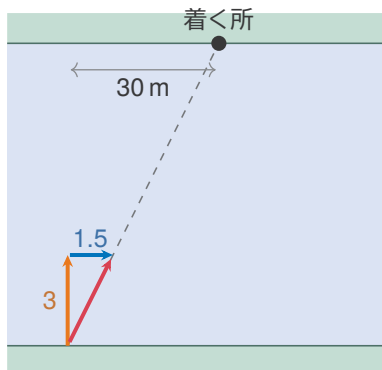
速さ (速度の大きさ) は $\sqrt{3^2 + 1.25^2} = \sqrt{10.5625} = 3.25$ で、3.25 m/s です。位置の変化の大きさ $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (m) を 4 秒でわっても、 $13 \div 4 = 3.25$ で同じになります。

2 ? はてな? の答え：横とたてを別々に考える

ボートの速度は、「水に対するボートの速度」と「水の流れの速度」の和です (4-10 の相対速度：地面から見たボートの速度 = 水から見たボートの速度 + 水の速度)。川の流れの向きを x 軸、向こう岸の向きを y 軸にとると、

$$(0, 3) + (1.5, 0) = (1.5, 3)$$





たて (y 方向) : 向こう岸までの 60 m を、1 秒に 3 m ずつ進みます。かかる時間は $60 \div 3 = 20$ s です。

横 (x 方向) : その 20 秒のあいだ、1 秒に 1.5 m ずつ下流へ流されます。

$1.5 \times 20 = 30$ m です。

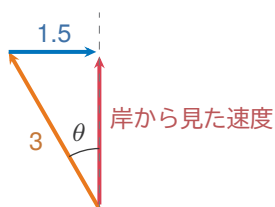
だから、ボートは**真正面から 30 m 下流**に着きます。

川の流れは、向こう岸へ着くまでの時間を変えません。流れは横向きなので、たての進み方にはじゃまをしないからです。岸から見たボートの速さは $\sqrt{1.5^2 + 3^2} \approx 3.35$ m/s ですが、たてと横を別々に考えれば、この数を使わなくても答えが出ます。

3 真正面に着くには

真正面に着くには、流される分を打ち消すように、船首を少し上流へ向けます。船首を、向こう岸の向きから上流へ角 θ だけかたむけると、水に対するボートの速度は $(-3 \sin \theta, 3 \cos \theta)$ です（上流は x の負の向き）。

これに流れ $(1.5, 0)$ をたした x 成分が 0 になればよいので、



$$-3 \sin \theta + 1.5 = 0$$

だから $\sin \theta = 0.5$ です。 $\theta = 30^\circ$ です。船首を 30° 上流へ向ければ、まっすぐ向こう岸へ進みます。

このとき、向こう岸へ進む速さは $3 \cos 30^\circ \approx 3 \times 0.866 = 2.598$ で、約 2.6 m/s になります。60 m わたるのにかかる時間は $60 \div 2.598 \approx 23.1$ s で、まっすぐ向けたときの 20 秒より長くなります。流れに逆らう分だけ、前へ進む力が使われるからです。

5 大きさ 1 のベクトル：単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを、**単位ベクトル**といいます。単位ベクトルは、「向き」だけを表す矢印です。この本では、単位ベクトルを $\vec{e}$ で表します（ e は「1 つ、単位」を意味するドイツ語 **Einheit** の頭文字）。

あるベクトルと同じ向きの単位ベクトル

$\vec{a} = (3, 4)$ の大きさは 5 です。 $\vec{a}$ を 5 でわる（ $\frac{1}{5}$ 倍する）と、向きはそのまま、大きさが 1 になります。

$$\vec{e} = \frac{1}{5}\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (0.6, 0.8)$$

確かめると、 $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = 1$ です。一般に、 $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは、 $\vec{a}$ をその大ききでわったものです。

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

（ベクトルを数でわるのは、その数分の 1 をかけるという意味です。）

向きと大きさから、ベクトルを作る

反対に、向きを表す単位ベクトル $\vec{e}$ に大きさをかければ、ベクトルができます。「 $(3, 4)$ の向きに、大きさ 15 N の力」は、 $15\vec{e} = 15 \times (0.6, 0.8) = (9, 12)$ です。**向き（単位ベクトル）と大きさ（数）を分けて考えられるのが**、単位ベクトルの便利なところです。

角 θ の向きの単位ベクトルは、4-8 の $(\cos \theta, \sin \theta)$ そのものです。③の $\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$ は、「大きさ $F \times$ 向きの単位ベクトル」だったのです。

x 方向と y 方向の単位ベクトル

とくに、 x 軸の正の向きの単位ベクトルを $\vec{e}_x = (1, 0)$ 、 y 軸の正の向きの単位ベクトルを $\vec{e}_y = (0, 1)$ と書きます。すると、どんなベクトルも

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

と書けます。「 x 方向の 1 を a_x 個と、 y 方向の 1 を a_y 個」という意味です。
 $(4, 3) = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ です。4-13 では、空間の 3 つの向きの単位ベクトルを $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ とも書きます。

6 位置ベクトル・内分点・重心

1 位置ベクトル

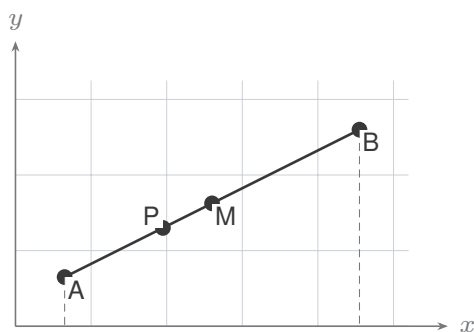
原点 O を 1 つ決めると、点 P の場所は、 O から P への矢印 $\overrightarrow{OP}$ で表せます。この矢印を、点 P の**位置ベクトル**といいます。始点が O なので、位置ベクトルの成分は、点 P の座標と同じです。点 $P(3, 2)$ の位置ベクトルは $(3, 2)$ です。

点 A 、 B 、…の位置ベクトルを、小文字で $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、…と書くことにします。すると、 A から B への矢印は、4-10 の「あとーまえ」で、

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

です。①の「 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 」は、これを成分で書いたものでした。

2 線分を分ける点：内分点



$A(1, 1)$ と $B(7, 4)$ を結ぶ線分 AB の、まん中の点 M を求めます。

A から B へは $\vec{b} - \vec{a} = (6, 3)$ です。

M は、 A から B への道のりの半分の所なので、

$$\begin{aligned}\vec{a} + \frac{1}{2}(6, 3) &= (1 + 3, 1 + 1.5) \\ &= (4, 2.5)\end{aligned}$$

文字のままで計算すると、

$$\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

まん中の点（中点）の位置ベクトルは、2 つの位置ベクトルの平均です。成分で見ると、 x 座標の平均 $\frac{1+7}{2} = 4$ と、 y 座標の平均 $\frac{1+4}{2} = 2.5$ です。

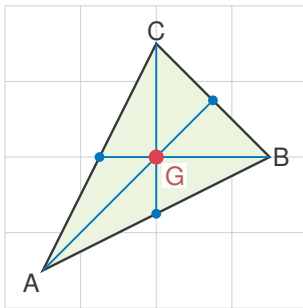
線分 AB を $m:n$ に分ける点も、同じように求められます。A から B への道のりの $\frac{m}{m+n}$ の所なので、

$$\vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{(m+n)\vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a}}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

このように線分を $m:n$ に分ける点を、 $m:n$ の**内分点**（ないぶんてん）といいます。たとえば、 AB を $1:2$ に分ける点 P は、A から B への道のりの $\frac{1}{3}$ の所なので、 $(1, 1) + \frac{1}{3}(6, 3) = (1+2, 1+1) = (3, 2)$ です。式で計算すると、 $\frac{2(1, 1) + 1(7, 4)}{3} = \frac{(9, 6)}{3} = (3, 2)$ で、同じです。

$\vec{a}$ には、遠いほうの数 n がかかることに注意しましょう。A に近い点ほど、A の位置ベクトルを多く混ぜるからです。

3 三角形の重心



三角形の頂点と、向かいの辺の中点を結ぶ線を、**中線**といいます。3 本の中線は、1 つの点 G で交わります。この点を、三角形の**重心**といいます。

図は、 $A(1, 1)$ 、 $B(7, 4)$ 、 $C(4, 7)$ の三角形で、重心は $G(4, 4)$ です。

3 つの頂点の位置ベクトルの平均を計算してみます。

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \left(\frac{1+7+4}{3}, \frac{1+4+7}{3} \right) = (4, 4)$$

重心 G と同じ点です。これは偶然ではありません。BC の中点 M は $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ です。中線 AM を $2:1$ に分ける点は、内分点の式で $m=2$ 、 $n=1$ として、

$$\frac{1 \times \vec{a} + 2 \times \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{2+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

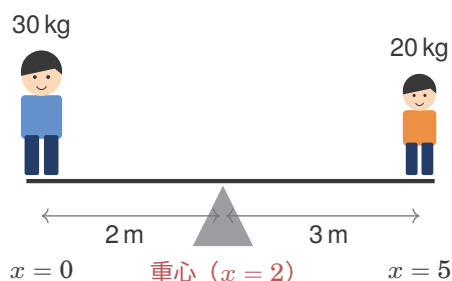
になります。ほかの 2 本の中線でも、同じ計算で同じ点になります。だから 3 本の中線は、どれも $2:1$ の点、つまり 3 つの位置ベクトルの平均の点を通るのです。

$$\text{三角形の重心 } \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad (\text{頂点の位置の平均})$$

厚さが一様な三角形の板を、重心の1点で下から支えたと、板は落ちずにつり合います。重心は、物の重さが全部そこに集まっていると考えてよい点です。

4 重さのちがう物の重心：重みをつけた平均

シーソーに、質量 30 kg のソラさんと 20 kg のミナさんが乗ります。2 人の間は 5 m です。どこを支えるとつり合うでしょう。



てこのつり合い（小学校の理科）では、「重さ×支点からの距離」が左右で等しくなります。

$30 \times 2 = 60$ 、 $20 \times 3 = 60$ なので、ソラさんから 2 m の所を支えるとつり合います。重いほうに近い所です。

ソラさんの位置を $x = 0$ 、ミナさんの位置を $x = 5$ とすると、支点は $x = 2$ です。これは、2 人の位置を、質量で重みをつけて平均したものです。

$$\frac{30 \times 0 + 20 \times 5}{30 + 20} = \frac{100}{50} = 2$$

平面や空間でも同じで、質量 m_1 、 m_2 の物が位置 $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ にあるとき、2 つを合わせた物の重心は

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

です。内分点の式と見くらべると、重心は 2 つの物を結ぶ線分を $m_2 : m_1$ に分ける点です。3 つ以上の物でも、分子に「質量×位置ベクトル」をたし、分母に質量の合計を書きます。質量がすべて等しいときは、ふつうの平均になり、三角形の重心の式にもどります。

せいかくに言うと

重心と質量中心

物理では、質量で重みをつけた位置の平均を、**質量中心**とよぶこともあります。地球の上のように、重力の強さがどこでも同じと考えてよい所では、質量中心と重心は同じ点です。物理シリーズの力学では、たくさんの部分でできた物の動きを、この1点の動きで考えます。

7 まっすぐ一定の速さで進む点： $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$

② はてな？ のボートは、出発点 (0, 0) から、速度 (1.5, 3) でまっすぐ進みました。 t 秒後の位置を表にします。

時間 t (s)	0	1	2	10	20
位置 (m)	(0, 0)	(1.5, 3)	(3, 6)	(15, 30)	(30, 60)

表 3 1 秒ごとに、速度 (1.5, 3) を 1 回ずつたしていく。

1 秒ごとに速度の分だけ進むので、 t 秒後には、はじめの位置に「速度の t 倍」をたした所にいます。はじめの位置を $\vec{p}_0$ (ピー・ゼロ)、速度を $\vec{v}$ とすると、 t 秒後の位置 $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$$

です。成分で書くと、 $\vec{p}_0 = (x_0, y_0)$ 、 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ として、

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t$$

横もたても、時間 t の 1 次関数 (3-5) です。 x の式の傾きが v_x 、 y の式の傾きが v_y です。このように、まっすぐ一定の速さで進む運動を、**等速直線運動**といいます。

t をいろいろ変えると、点 $\vec{p}$ は 1 本の直線をえがきます。 t は、点の場所を決めるための「なかだちの変数」なので、4-8 と同じように**媒介変数** (ばいかいへんすう) とよびます。 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ は、「点 $\vec{p}_0$ を通り、 $\vec{v}$ の向きにのびる直線」を表す式でもあります。

表計算で、少しずつ進める

速度が一定なら、1つ前の位置に「速度× Δt 」をたしていくと、次々に位置が求められます。 $\Delta t = 2\text{s}$ として、ボートの位置を表計算で求めてみましょう。2行めにはじめの時刻と位置を入れ、3行めに次の式を入れて、下へコピーします。

	A	B	C
1	$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$	$y \text{ (m)}$
2	0	0	0
3	$=A2+2$	$=B2+1.5*2$	$=C2+3*2$

1.5*2は「横の速度×2秒」、3*2は「たての速度×2秒」です。計算の結果は次のようになります。

	A	B	C
1	$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$	$y \text{ (m)}$
2	0	0	0
3	2	3	6
4	4	6	12
5	6	9	18
6	8	12	24
7	10	15	30

表4 2秒ごとに、 x は3ずつ、 y は6ずつふえる。さらに下へ続けると、 $t = 20$ で(30, 60)。

$y = 60$ （向こう岸）になるのは $t = 20$ の行で、そのとき $x = 30$ です。 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ で求めた答えと同じです。速度がとちゅうで変わるとき（たとえば川の流れが岸の近くでおそいとき）も、行ごとに速度を変えれば、同じやり方で計算できます。このように少しずつ位置を進める計算は、ゲームの中のボールの動き（物理・工学ではこう使う）や、5-13で学ぶ計算の出発点です。

8 数の組は、ベクトルと考えられる

ここまで、ベクトルは2つの数の組でした。でも、成分ごとに計算するやり方は、数がいくつあっても同じように使えます。

例1 5教科のテスト

ソラさんの1学期と2学期のテストの点を、(国語、数学、英語、理科、社会)の順に5つの数の組で書きます。

	国語	数学	英語	理科	社会
1学期 $\vec{s}_1$	70	85	60	90	75
2学期 $\vec{s}_2$	75	80	70	95	80
変化 $\vec{s}_2 - \vec{s}_1$	5	-5	10	5	5
平均 $\frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{2}$	72.5	82.5	65	92.5	77.5

表5 5つの数の組でも、ひき算や平均は、成分ごとに計算する。

「変化」は、教科ごとの「あとーまえ」です。5つの数を1つの組として、一度にまとめて扱えます。

例2 画面の色

スマートフォンの画面の1つの点の色は、赤(R)・緑(G)・青(B)の光の強さを、それぞれ0から255までの数で決めています。だいたい色は(255, 128, 0)のような3つの数の組です。2つの色をまぜたり、明るさを半分にしたりするのも、成分ごとの計算です。

例3 偏差の組 (3-15)

3-15で、10人の身長の変差は $(-14, -10, -7, -4, -2, 2, 4, 6, 9, 16)$ でした。これは、成分が10個のベクトルと考えられます。成分が3つ以上のときも、大きさは「成分の2乗の和の $\sqrt{\quad}$ 」と決めます(成分が3つのときに三平方の定理と合うことは、4-13で図をかいて確かめます)。この変差のベクトルの大きさは

$$\sqrt{(-14)^2 + (-10)^2 + \dots + 16^2} = \sqrt{758} \approx 27.53$$

です。3-14 の標準偏差 σ は「偏差の 2 乗の平均の $\sqrt{\quad}$ 」だったので、 $\sigma = \sqrt{758 \div 10} = \frac{\sqrt{758}}{\sqrt{10}} \approx 8.71$ (cm)。標準偏差は、偏差のベクトルの大きさを $\sqrt{10}$ でわったものなのです。

このように、数の組は、向きと大きさをもつ矢印（ベクトル）と考えることができます。成分が 3 つでも 10 個でも、ベクトルです。成分が 4 つ以上になると、もう矢印を絵にかくことはできません。それでも、和・差・実数倍・大きさは、2 つの成分のときと同じ式で計算できます。第 7 巻では、このような「たくさんの数の組」を、行列という道具でまとめて計算します。

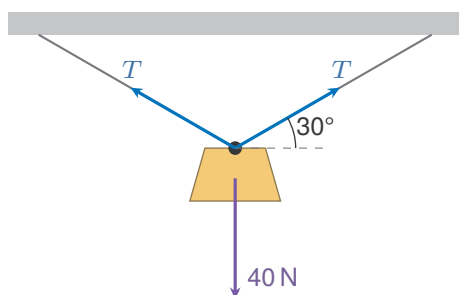
9 つり合いは、成分ごとに和が 0

4-10 で、力がつり合っているとは、合力が $\vec{0} = (0, 0)$ になることでした。成分で書くと、

$$x \text{ 成分の和} = 0 \quad \text{かつ} \quad y \text{ 成分の和} = 0$$

です。横とたての 2 つの式ができるので、わからない力が 2 つあっても求められます。

1 左右対称につるす



重さ 40 N の電灯を、水平から 30° 上向きの 2 本のひもでつるします。左右対称なので、2 本のひもの力の大きさは同じで、 T とします。

右のひもの力は $(T \cos 30^\circ, T \sin 30^\circ)$ 、

左のひもの力は $(-T \cos 30^\circ, T \sin 30^\circ)$ 、

重力は $(0, -40)$ です。

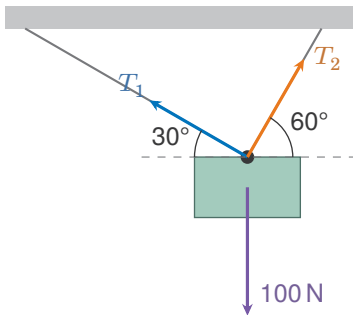
x 成分の和は $T\cos 30^\circ - T\cos 30^\circ + 0 = 0$ で、いつも 0 です。 y 成分の和が 0 になる条件は、

$$T\sin 30^\circ + T\sin 30^\circ - 40 = 0 \quad 2T \times 0.5 = 40 \quad T = 40$$

ひも 1 本が 40 N で、電灯の重さと同じです。2 本で支えているのに、1 本 1 本が全部の重さと同じ力で引いています。ひもが水平に近いと、上向きの成分が小さいので、そのぶん大きな力があるのです（4-10 のクレーンのつり角と同じ）。

2 左右で角がちがうとき：連立方程式

左のひもが水平から 30° 、右のひもが水平から 60° のとき、重さ 100 N の看板をつるします。左のひもの力を T_1 、右を T_2 とします。



左のひもの力： $(-T_1 \cos 30^\circ, T_1 \sin 30^\circ)$

右のひもの力： $(T_2 \cos 60^\circ, T_2 \sin 60^\circ)$

重力： $(0, -100)$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ を使います。}$$

$$x \text{ 成分の和} = 0: -\frac{\sqrt{3}}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y \text{ 成分の和} = 0: \frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - 100 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①から $T_2 = \sqrt{3}T_1$ 。これを②に入れると（代入法、3-6）、

$$\frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}T_1 = 100 \quad \frac{1}{2}T_1 + \frac{3}{2}T_1 = 100 \quad 2T_1 = 100$$

$T_1 = 50$ 、 $T_2 = 50\sqrt{3} \approx 86.6$ です。左のひもは 50 N、右のひもは約 86.6 N です。たてに近い右のひものほうが、多くの重さを受け持っています。

🔍 もっと知りたい ★★★

ななめの2本の物差しではかる

$\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ のように、平行でない2つのベクトルがあれば、平面のどんなベクトルも「 $\vec{a}$ を s 本と、 $\vec{b}$ を t 本」つないで作れます。たとえば $\vec{c} = (5, 5)$ を $s\vec{a} + t\vec{b}$ で表すと、成分ごとに

$$2s + t = 5, \quad s + 3t = 5$$

の連立方程式になり、 $s = 2$ 、 $t = 1$ です。 $(5, 5) = 2(2, 1) + 1(1, 3)$ で、確かに合っています。 $\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y$ のかわりに、ななめの $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を物差しにした「ななめの座標」を使ったことになります。第7巻では、この考えを行列で整理します。

たいせつ

成分 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \vec{b} - \vec{a}$

大きさ $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ 単位ベクトル $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

計算 和・差・実数倍は、成分ごとに計算する

分解 $\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$ 速度 $\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$

位置 中点 $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ 重心 $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ $\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$

つり合い x 成分の和 = 0、 y 成分の和 = 0

📖 この章で出てきたことば

成分 ベクトルの横の進み (x 成分) とたての進み (y 成分)。

単位ベクトル 大きさが1のベクトル。向きだけを表す。

位置ベクトル 原点 O から点 P へのベクトル。成分は点 P の座標と同じ。

内分点 線分を $m:n$ に分ける点。 $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ 。

重心 位置の平均。質量がちがうときは、質量で重みをつけて平均する。

等速直線運動 まっすぐ一定の速さで進む運動。 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ 。

📖 例題でたしかめよう

📖 例題 1 2点から成分と大きさを求める

$A(-1, 2)$ 、 $B(5, -6)$ のとき、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めましょう。

考え方 成分は「あと (B) - まえ (A)」。

式 $\overrightarrow{AB} = (5 - (-1), -6 - 2) = (6, -8)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

答え $\overrightarrow{AB} = (6, -8)$ 、大きさ 10

✎ じぶんでこう 1

$A(2, -3)$ 、 $B(-3, 9)$ のとき、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めましょう。

📖 例題 2 成分で計算する

$\vec{a} = (3, -1)$ 、 $\vec{b} = (-2, 4)$ のとき、次を求めましょう。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b}$ (3) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ (4) $|\vec{a} + \vec{b}|$

考え方 成分ごとに計算する。実数倍を先に計算してから、たしたりひいたりする。

式 (1) $(3 + (-2), -1 + 4) = (1, 3)$

(2) $(3 - (-2), -1 - 4) = (5, -5)$

(3) $2\vec{a} = (6, -2)$ 、 $3\vec{b} = (-6, 12)$

$(6 - (-6), -2 - 12) = (12, -14)$

(4) $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$

答え (1) $(1, 3)$ (2) $(5, -5)$ (3) $(12, -14)$ (4) $\sqrt{10}$ (約 3.16)

(3) では、 $-3\vec{b}$ の x 成分が $-3 \times (-2) = +6$ になるので、 $6 - (-6) = 12$ です。負の数の符号に気をつけましょう。

じぶんでこう2

$\vec{a} = (-1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$ のとき、次を求めましょう。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b}$ (3) $3\vec{a} - 2\vec{b}$ (4) $|\vec{a} + \vec{b}|$

例題3 力を成分に分ける

大きさ 80 N の力が、次の向きにはたらいています。 x 成分と y 成分を求めましょう (角は x 軸の正の向きから左回りにはかる)。(1) 30° (2) 120°

考え方 $\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$ 。 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 、 $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4-7・4-8)。

式 (1) $\left(80 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 80 \times \frac{1}{2}\right) = (40\sqrt{3}, 40) \approx (69.3, 40)$
 (2) $\left(80 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-40, 40\sqrt{3}) \approx (-40, 69.3)$

答え (1) $(69.3, 40)$ (2) $(-40, 69.3)$ (単位は N)

じぶんでこう3

大きさ 60 N の力が、(1) 60° 、(2) 135° の向きにはたらいています。 x 成分と y 成分を求めましょう ($\sqrt{2} \approx 1.414$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.732$)。

例題 4 成分から大きさと向きを求める

$\vec{F} = (-5, 12)$ (単位は N) の大きさと、向きの角 θ (x 軸の正の向きから左回り) を求めましょう。

考え方 大きさは $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ 。角は $\tan^{-1}$ で求め、図をかいて区画を確かめる。

式 大きさ $\sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
 x 成分が負、 y 成分が正なので、矢印は左上を向く
 電卓で $\tan^{-1}(12 \div (-5)) = -67.38 \dots^\circ$ (これは右下の向き)
 左上の向きは、 180° 回して $-67.4^\circ + 180^\circ = 112.6^\circ$

答え 大きさ 13 N、 $\theta \approx 112.6^\circ$

じぶんでこう 4

$\vec{F} = (-7, 24)$ (単位は N) の大きさと、向きの角 θ を求めましょう。

例題 5 位置の変化から速度の成分を求める

一定の速度でまっすぐ走るラジコンカーが、0 秒に点 (1, 3)、4 秒後に点 (9, 9) にいました (単位は m)。速度の成分と速さを求めましょう。

考え方 位置の変化は「あとーまえ」。それを時間でわると速度の成分。

式 位置の変化 $(9 - 1, 9 - 3) = (8, 6)$
 速度 $\left(\frac{8}{4}, \frac{6}{4}\right) = (2, 1.5)$
 速さ $\sqrt{2^2 + 1.5^2} = \sqrt{4 + 2.25} = \sqrt{6.25} = 2.5$

答え 速度 (2, 1.5) (m/s)、速さ 2.5 m/s

確かめ：位置の変化の大きさ $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (m) を 4 秒でわっても、 $10 \div 4 = 2.5$ で同じです。

じぶんでとこう 5

一定の速度でまっすぐ飛ぶ鳥が、0 秒に点 $(-3, 5)$ 、3 秒後に点 $(9, -4)$ にいました (単位は m)。速度の成分と速さを求めましょう。

例題 6 流れのある川をわたる

はば 80 m の川を、水に対して 4 m/s でこぐボートが、向こう岸へまっすぐ船首を向けてわたります。川の流れは 3 m/s です。わたるのにかかる時間、流される距離、岸から見た速さを求めましょう。

考え方 流れの向きを x 、向こう岸の向きを y にとる。たてと横は別々に考える。

式 岸から見た速度 $(0, 4) + (3, 0) = (3, 4)$

たて： $80 \div 4 = 20$ (s)

横： $3 \times 20 = 60$ (m)

速さ： $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (m/s)

答え 20 s、60 m、5 m/s

じぶんでとこう 6

はば 120 m の川を、水に対して 5 m/s でこぐボートが、向こう岸へまっすぐ船首を向けてわたります。川の流れは 2 m/s です。わたるのにかかる時間、流される距離、岸から見た速さを求めましょう。

例題 7 真正面に着くように船首を向ける

はば 100 m の川を、水に対して 4 m/s でこぐボートでわたります。川の流れるは 2 m/s です。真正面に着くには、船首を上流へ何度かたむければよいでしょう。また、わたるのにかかる時間を求めましょう。

考え方 上流へ θ かたむけると、水に対する速度は $(-4 \sin \theta, 4 \cos \theta)$ 。流れ $(2, 0)$ をたした x 成分が 0 になればよい。

式 $-4 \sin \theta + 2 = 0$ より $\sin \theta = 0.5$ 、 $\theta = 30^\circ$

向こう岸へ進む速さ $4 \cos 30^\circ = 4 \times 0.866 = 3.464$

時間 $100 \div 3.464 \approx 28.9$

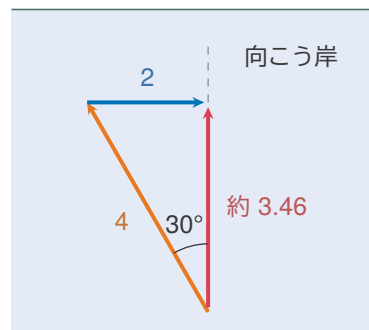
答え 上流へ 30° 、約 28.9 s

じぶんでとこう 7

はば 200 m の川を、水に対して 10 m/s で進むボートでわたります。川の流れるは 5 m/s です。真正面に着くには、船首を上流へ何度かたむければよいでしょう。また、わたるのにかかる時間を求めましょう。

例題 7 を図で見る

水に対する速度（オレンジ、大きさ 4）を上流へ 30° かたむけ、その先に流れの速度（青、大きさ 2）をつなぎます。和（赤）は、ちょうど向こう岸へまっすぐの向きになります。赤の長さは、斜辺 4・角 30° の直角三角形のたての辺なので、 $4 \cos 30^\circ \approx 3.46$ です。オレンジの横の成分 $4 \sin 30^\circ = 2$ が、流れの 2 をちょうど打ち消しています。



例題8 単位ベクトルと、向きと大きさから作るベクトル

$\vec{a} = (3, 4)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を求めましょう。また、 $\vec{a}$ の向きにはたらく大きさ 15 N の力 $\vec{F}$ の成分を求めましょう。

考え方 $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。力は「大きさ×単位ベクトル」。

式 $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16} = 5$
 $\vec{e} = \frac{1}{5}(3, 4) = (0.6, 0.8)$
 $\vec{F} = 15 \times (0.6, 0.8) = (9, 12)$

答え $\vec{e} = (0.6, 0.8)$ 、 $\vec{F} = (9, 12)$ (単位は N)

じぶんでとこう8

$\vec{a} = (5, -12)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ と、 $\vec{a}$ の向きにはたらく大きさ 26 N の力の成分を求めましょう。

例題9 中点・内分点・重心

A(1, 1)、B(7, 4)、C(4, 7) について、次の点の座標を求めましょう。

(1) AB の中点 (2) AB を 1 : 2 に分ける点 (3) 三角形 ABC の重心

考え方 中点は平均。 $m : n$ の内分点は $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ 。重心は 3 つの頂点の平均。

式 (1) $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = (4, 2.5)$
 (2) $\frac{2(1, 1) + 1(7, 4)}{1+2} = \frac{(9, 6)}{3} = (3, 2)$
 (3) $\left(\frac{1+7+4}{3}, \frac{1+4+7}{3}\right) = (4, 4)$

答え (1) (4, 2.5) (2) (3, 2) (3) (4, 4)

じぶんでとこう 9

$A(-2, 3)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(1, 6)$ について、(1) AB の中点、(2) AB を $2:1$ に分ける点、(3) 三角形 ABC の重心 の座標を求めましょう。

例題 10 質量のちがう物の重心

質量 2 kg の物が点 $(0, 0)$ に、質量 1 kg の物が点 $(6, 3)$ にあります (単位は m)。2 つを合わせた重心を求めましょう。さらに、質量 3 kg の物を点 $(4, -1)$ に加えると、重心はどこになりますか。

考え方 重心は、質量で重みをつけた位置の平均。分子は「質量×位置」の和、分母は質量の合計。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad \frac{2(0, 0) + 1(6, 3)}{2 + 1} &= \frac{(6, 3)}{3} = (2, 1) \\ \frac{2(0, 0) + 1(6, 3) + 3(4, -1)}{2 + 1 + 3} &= \frac{(6 + 12, 3 - 3)}{6} \\ &= \frac{(18, 0)}{6} = (3, 0) \end{aligned}$$

答え $(2, 1)$ 、加えたあとは $(3, 0)$

はじめの重心 $(2, 1)$ は、重い 2 kg の物に近く、2 つを結ぶ線分を $1:2$ に分ける点です ($m_2 : m_1 = 1:2$)。

じぶんでとこう 10

質量 3 kg の物が点 $(2, 0)$ に、質量 1 kg の物が点 $(6, 4)$ にあります。2 つを合わせた重心を求めましょう。さらに、質量 4 kg の物を点 $(-1, 1)$ に加えると、重心はどこになりますか。

例題 11 まっすぐ一定の速さで進む点

点 P は、はじめ $\vec{p}_0 = (-4, 2)$ にあり、速度 $\vec{v} = (3, 1)$ (m/s) でまっすぐ進みます。(1) 5 秒後の位置を求めましょう。(2) x 座標が 20 になるのは何秒後で、そのときの y 座標はいくつですか。

考え方 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ 。成分で書くと $x = -4 + 3t$ 、 $y = 2 + t$ 。

式 (1) $(-4, 2) + 5(3, 1) = (-4 + 15, 2 + 5) = (11, 7)$

(2) $-4 + 3t = 20$ より $3t = 24$ 、 $t = 8$

$$y = 2 + 8 = 10$$

答え (1) (11, 7) (2) 8 秒後、 $y = 10$

じぶんでとこう 11

点 P は、はじめ $\vec{p}_0 = (10, -3)$ にあり、速度 $\vec{v} = (-2, 1.5)$ (m/s) でまっすぐ進みます。(1) 4 秒後の位置を求めましょう。(2) x 座標が 0 になるのは何秒後で、そのときの y 座標はいくつですか。

例題 11 を図で見る

点 P の位置を、1 秒ごとに方眼にかき

こむと、点は 1 本の直線の上に、同じ間

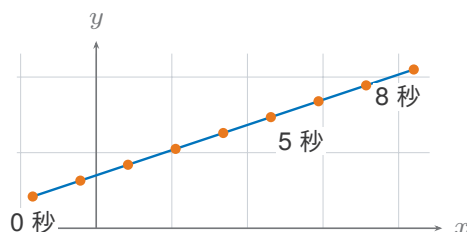
かくで並びます。1 秒ごとに、同じ速度

$(3, 1)$ をたしていくからです。5 秒後の

$(11, 7)$ と、8 秒後の $(20, 10)$ も、こ

の直線の上にあります。直線の傾きは

$\frac{1}{3}$ で、速度の y 成分 $\div$ x 成分と同じ
です (3-5)。



例題 12 2本のひもでつるした物のつり合い

重さ 100 N の看板を、左は水平から 30° 、右は水平から 60° の 2 本のひもでつるしました。左のひもの力 T_1 と右のひもの力 T_2 を求めましょう ($\sqrt{3} \approx 1.732$)。

考え方 x 成分の和 = 0、 y 成分の和 = 0 の連立方程式 (数学の道具⑨)。

式 $x: -\frac{\sqrt{3}}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 = 0$ より $T_2 = \sqrt{3}T_1$
 $y: \frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 = 100$ に入れて $\frac{1}{2}T_1 + \frac{3}{2}T_1 = 100$
 $2T_1 = 100$ より $T_1 = 50$ 、 $T_2 = 50\sqrt{3} \approx 86.6$

答え $T_1 = 50 \text{ N}$ 、 $T_2 \approx 86.6 \text{ N}$

じぶんでとこう 12

重さ 200 N の荷物を、左は水平から 60° 、右は水平から 30° の 2 本のひもでつるしました。左のひもの力 T_1 と右のひもの力 T_2 を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック**まちがえやすいところ**

$\overrightarrow{AB}$ を「まえ-あと」で計算する

✕ $A(1, 5)$ 、 $B(4, 1)$ で $\overrightarrow{AB} = (1 - 4, 5 - 1) = (-3, 4)$

○ $\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 1 - 5) = (3, -4)$ (あと-まえ)

A から B へ行く矢印です。B の座標 (あと) から A の座標 (まえ) をひきます。逆にすると、向きが反対の $\overrightarrow{BA}$ になります。

⚠ まちがえやすいところ

大きさを、成分の和で求める

✕ $\vec{a} = (3, 4)$ の大きさは $3 + 4 = 7$

○ $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

横とたては直角なので、大きさは直角三角形の斜辺です。成分をそのままたすと、遠回りの道のりになってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

角をはかる場所で、 $\cos$ と $\sin$ が入れかわる

✕ たての線から 30° かたむいた 10 N の力を $(10 \cos 30^\circ, 10 \sin 30^\circ)$

○ たての線からはかった角なら、 x 成分は $10 \sin 30^\circ$ 、 y 成分は $10 \cos 30^\circ$

$(F \cos \theta, F \sin \theta)$ の θ は、 x 軸（横）からはかった角です。図をかいて、角のとなりの辺が $\cos$ 、向かいの辺が $\sin$ と確かめましょう（4-6）。

⚠ まちがえやすいところ

$\tan^{-1}$ の答えを、そのまま向きの角にする

✕ $(-5, 12)$ の向きは $\tan^{-1} \frac{12}{-5} = -67.4^\circ$

○ 左上を向いているので、 $-67.4^\circ + 180^\circ = 112.6^\circ$

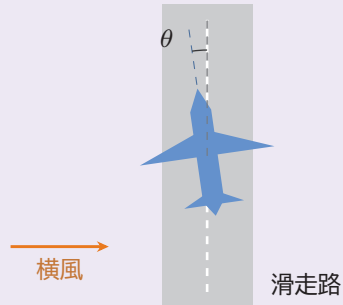
電卓の $\tan^{-1}$ は、右半分（ -90° から 90° ）の角しか答えません。矢印が左を向いているときは 180° をたします。

物理・工学ではこう使う

● 横風の中で着陸する飛行機

旅客機は、着陸のとき空気に対して約

70 m/s で進みます。滑走路に直角な横風が 10 m/s ふいていると、機首を滑走路の向きにしたままでは、横へ流されてしまいます。そこでパイロットは、機首を風上へ角 θ だけ向けます。横の成分が打ち消し合う条件は $70 \sin \theta = 10$ です。だから $\sin \theta = \frac{1}{7}$ で、 $\theta \approx 8.2^\circ$ です。⑤の「真正面に着くポート」と同じ計算です。



● ゲームの中のボール

コンピュータゲームでは、ボールの位置を、1 秒に 60 回 (1 コマ $\frac{1}{60}$ 秒ごとに) 計算しなおします。1 コマごとに、位置に「速度 $\times \frac{1}{60}$ 」をたします。速度が (3, 4) なら、1 コマで (0.05, 0.0667) ずつ進みます。 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ を、少しずつ計算しているのです。

● 斜張橋のケーブル

斜張橋では、塔からななめにはったケーブルが橋げたをつついています。水平から 30° のケーブルなら、ケーブルの力の $\sin 30^\circ = 0.5$ 倍が上向きの成分になって、橋げたの重さを支えます。残りの横向きの成分 ($\cos 30^\circ \approx 0.87$ 倍) は、橋げたを塔のほうへ押しつけます。設計では、ケーブル 1 本 1 本の力を、こうして成分に分けて計算します。

🔍 コラム やじろべえは、なぜたおれない？

やじろべえは、細い1点で支えられているのに、ゆらしてもたおれずにもどってきます。そのわけは、重心の位置にあります。両うでの先の重いおもりのおかげで、全体の重心は、支える点より**下**にあります。かたむくと、重心が支点の真下からずれて、重力が「もとにもどす向き」に回す働きをするのです。重心が支点より上にある物（えんぴつを立てたときなど）は、少しかたむくと、重力がもっとかたむける向きに回すので、たおれてしまいます。

✓ 章末問題

4-11 のまとめ

基本 ★★

- 1 $A(3, -2)$ 、 $B(-5, 4)$ のとき、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めましょう (📖 例題 1)。
- 2 $\vec{a} = (2, -3)$ 、 $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、次を求めましょう (📖 例題 2)。
 (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b}$ (3) $3\vec{a} + 2\vec{b}$ (4) $|\vec{a} - \vec{b}|$
- 3 大きさ 40 N の力が、(1) 30° 、(2) 150° の向きにはたらいています。x 成分と y 成分を求めましょう (📖 例題 3)。
- 4 一定の速度でまっすぐ進む船が、0 秒に点 $(1, -2)$ 、5 秒後に点 $(16, 18)$ にいました (単位は m)。速度の成分と速さを求めましょう (📖 例題 5)。
- 5 $\vec{a} = (-8, 6)$ と同じ向きの単位ベクトルと、 $\vec{a}$ の向きにはたらく大きさ 20 N の力の成分を求めましょう (📖 例題 8)。
- 6 $A(2, 5)$ 、 $B(8, -1)$ 、 $C(-1, 2)$ について、(1) AB の中点、(2) AB を 1 : 2 に分ける点、(3) 三角形 ABC の重心 を求めましょう (📖 例題 9)。

7 点 P は、はじめ (5, 0) にあり、速度 $(-1, 2)$ (m/s) でまっすぐ進みます。3 秒後の位置と、 y 座標が 10 になる時刻を求めましょう (例題 11)。

チャレンジ ★★★

8 $\vec{F} = (-6, 8)$ (単位は N) の大きさと、向きの角 θ (x 軸の正の向きから左回り) を求めましょう (例題 4)。

9 はば 90 m の川を、水に対して 6 m/s で進むボートでわたります。流れは 3 m/s です。(1) 船首を向こう岸へまっすぐ向けたとき、流される距離を求めましょう。(2) 真正面に着くための船首の向きと、かかる時間を求めましょう (例題 6・例題 7)。

10 質量 4 kg の物が点 (1, 2) に、2 kg の物が点 (7, -1) にあります。2 つを合わせた重心を求めましょう。さらに 2 kg の物を点 (-3, 3) に加えたときの重心を求めましょう (例題 10)。

11 重さ 60 N の電灯を、左は水平から 30° 、右は水平から 60° の 2 本のひもでつるしました。2 本のひもの力を求めましょう (例題 12)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 成分で、和・差・実数倍・大きさを計算できる。 → 378 ページ
- ☐ 力や速度を、成分に分けて考えられる。 → 379 ページ
- ☐ 内分点・重心・進む点の位置を求められる。 → 386 ページ



ソラ

横とたてに分ければ、ふつうの数の計算になるんだね。次は、2 つのベクトルの「向きのそろいぐあい」を計算するよ。

第3部 ベクトル

★★★★~★★★★

4-12

内積：
どれだけ同じ向きか

道しるべ この章の前に 3-15 4-7 4-10 4-11 この章の先に 5-12 8-7 9-2

この章でできるようになること

- ★★★★★ 仕事 W を「力×力の向きに動いた距離」で求め、ななめの力では $W = F s \cos \theta$ を使える。
- ★★★★★ 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を、大きさと角からも、成分からも計算できる。
- ★★★★★ 内積を使って、なす角・直交・正射影・相関係数を求められる。

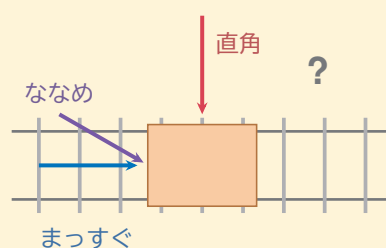
? はてな?

レール上のトロッキを動かします。

レールにそってまっすぐ押すと、トロッキはよく進みます。ななめに押すと、同じ力でも進みにくくなります。

では、レールに直角に、横から押したらどうでしょう。どんなに強く押しても、トロッキはレールにそってしか動けないので、1 mm も進みません。

力の「役に立つ分」は、力と動く向きの角で、どう決まるのかな?



上から見た図

4-11 では、力を成分に分けました。この章では、2つのベクトルが「どれだけ同じ向きを向いているか」を1つの数で表す計算、**内積**（ないせき）を作ります。

内積は、物理の「仕事」やエネルギーの計算に欠かせません。さらに、3-15 で学んだ相関係数も、じつは内積だったことがわかります。

△ やってみよう 台車をななめに引いてみよう

用意するもの

台車（またはキャスター付きのいす）、ばねばかり、ひも、分度器、メジャー

- ① 台車にひもをつけ、ばねばかりで、床と平行に、ゆっくり一定の速さで引く。目もりを読む。
- ② ひもを床から 30° 、 60° 上に向けて、台車が同じようにゆっくり進むように引く。目もりを読む。
- ③ ひもをほとんど真上（ 90° に近い角）にして引くと、台車は前へ進むかな？

ソラさんの結果です（台車が進むのに、前向きに 6 N がいるとき）。

ひもの角	0°	30°	60°
ばねばかりの目もり	6.0 N	6.9 N	12.0 N

表 1 ひもの角が大きいくほど、強く引かないと進まない。

やってみようの答え：角が大きくなるほど、強く引かなければなりませんでした。 60° では、 0° のときの 2 倍の力がいりました。ひもの力のうち、前へ進めるのに役立つのは、4-11 で分けた横の成分 $F \cos \theta$ だけだからです。 $\approx$ は「ほぼ等しい」という記号です（5-8 でくわしく）。 $12.0 \times \cos 60^\circ = 12.0 \times 0.5 = 6.0$ 、 $6.9 \times \cos 30^\circ \approx 6.9 \times 0.866 \approx 6.0$ で、どれも前向きの成分は 6 N です。 90° の真上に引くと、 $\cos 90^\circ = 0$ なので、前へ進める成分がなくなります。（実際の台車では、ひもを上に向けると、台車を床に押しつける力も変わるので、目もりは少しちがってきます。）

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

2-15 力の大きさは N (ニュートン) ではかる。質量 m の物にはたらく重力の大きさは mg (g は約 $9.8 N/kg$ 。4-6)。

4-7 余弦定理：三角形の2辺 b 、 c と、そのあいだの角 A から、
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。 $\cos 90^\circ = 0$ 、鈍角の $\cos$ は負。

4-8 点 (x, y) を原点のまわりに左へ 90° 回すと $(-y, x)$ 。

4-11 $\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$ 。 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ 。単位ベクトル $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。数の組はベクトルと考えられる。

3-15 相関係数 $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ 。共分散 σ_{xy} は偏差の積の平均。 $-1 \leq r \leq 1$ 。

🔧 数学の道具

① 仕事：力×力の向きに動いた距離

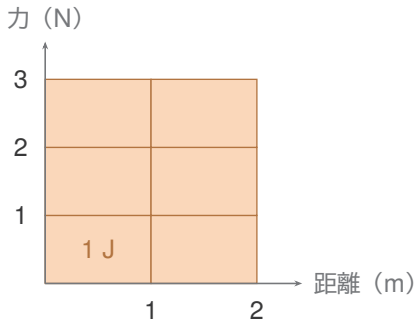
引っこしで、段ボール箱を運びます。重い箱ほど、たいへんです。高い所へ運ぶほど、たいへんです。この「たいへんさ」を、数で表してみましょう。

① 2 倍の力、2 倍の距離

- 同じ箱を2つ重ねて(2倍の力で)1m持ち上げるのは、1つを1m持ち上げるのを2回くり返すのと同じたいへんさです。**力が2倍なら、たいへんさも2倍**です。
- 1つの箱を2m持ち上げるのは、1m持ち上げるのを2回続けるのと同じです。**距離が2倍なら、たいへんさも2倍**です。

どちらにも比例する(2-15)ので、たいへんさは「力×距離」で表すのがよさそうです。

2 「1 N で 1 m」のブロックを数える



1 N の力で 1 m 動かしたいへんさを、1 つのブロックとします。

3 N の力で 2 m 動かすと、たて 3 こ・横 2 こで、ブロックは $3 \times 2 = 6$ こです。力×距離は、この長方形の面積です。

そこで物理では、

$$\text{仕事 } W = \text{力} \times \text{力の向きに動いた距離}$$

$$W = Fs$$

と決めています。これを**仕事**（しごと）といいます。W は英語の work、s は動いた距離を表すのによく使う文字です（5-12 では x とも書きます）。これは「定義」です（4-1）。

仕事の単位は **J（ジュール）** です。1 N の力で、物を力の向きに 1 m 動かしたときの仕事が 1 J です。単位も $\text{N} \times \text{m}$ なので、

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

と書けます（ $\text{N} \cdot \text{m}$ は「ニュートン・メートル」と読みます）。

身近な 1 J

質量 100 g (0.1 kg) のりんごにはたらく重力は、 $0.1 \times 9.8 = 0.98 \text{ N}$ で、ほぼ 1 N です。このりんごを、ゆっくり 1 m 持ち上げる仕事は、 $0.98 \times 1 = 0.98 \text{ J}$ で、ほぼ 1 J です。1 J は、「りんご 1 こを、ゆかから腰の高さまで持ち上げるくらい」の仕事です。

ゆっくり一定の速さで持ち上げるとき、手が上に引く力は、物にはたらく重力と同じ大きさです。質量 5 kg の荷物を 2 m 持ち上げるなら、

$$F = mg = 5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ N/kg} = 49 \text{ N}, \quad W = Fs = 49 \text{ N} \times 2 \text{ m} = 98 \text{ J}$$

力と反対の向きに動くと、仕事は負

同じ荷物を、ゆっくり 2m 下ろすとき、手は上向きに 49N で支えています。荷物は下へ動きます。力と反対の向きに動いたのも、手のした仕事は -98J と、負の数で表します (2-2 の「マイナスは反対の向き」)。手は、荷物に「仕事をされた」のです。

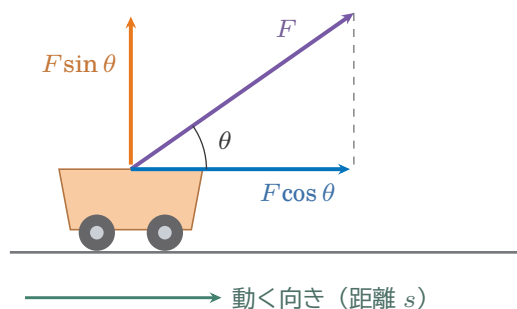
仕事は、力の向きと動く向きの関係で決まる**ただの数 (スカラー)** です。仕事そのものには、向きはありません。

2 ななめの力の仕事

では、力の向きと動く向きがずれているときは、どうなるでしょう。

② はてな? のトロッキを、レールから角 θ だけずれた向きに、大きさ F の力で押して、レールにそって s だけ動かします。

1 力を、動く向きとそれに直角な向きに分ける



4-11 のように、力 F を 2 つに分けます。

動く向きの成分 $F \cos \theta$ (青) : トロッキを前へ押す。

直角な成分 $F \sin \theta$ (オレンジ) : トロッキをレールに押しつけるだけで、前へは 1 mm も進めない。

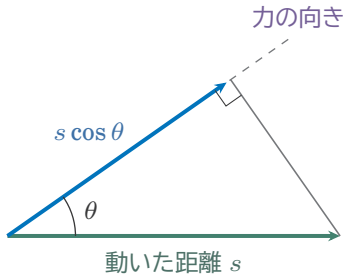
仕事は「力 $\times$ **力の向きに動いた距離**」でした。前へ進めるのに働いたのは青の成分だけなので、

$$W = (F \cos \theta) \times s = F s \cos \theta$$

です。

2 もう1つの見方：動きを、力の向きに分ける

今度は、力のほうはそのままにして、動き（距離 s の矢印）を、力の向きとそれに直角な向きに分けてみます。



動いた距離 s のうち、力の向きに進んだ分は、直角三角形のとなりの辺 $s \cos \theta$ (青) です (4-6)。

だから、

$$W = F \times (s \cos \theta) = Fs \cos \theta$$

で、同じ式になります。

力を分けても、動きを分けても、同じ $Fs \cos \theta$ になりました。 $Fs \cos \theta$ は、 F と s の両方に対して「同じ向きの分だけ」をかけた数です。

3 角を変えてみる

$F = 10 \text{ N}$ 、 $s = 2 \text{ m}$ として、角 θ を変えて仕事を計算します。

角 θ	0°	30°	60°	90°	120°	180°
$\cos \theta$	1	0.866	0.5	0	-0.5	-1
仕事 W (J)	20	17.3	10	0	-10	-20

表2 力と動く向きがそろうほど、仕事は大きい。直角なら0、反対向きなら負。

- $\theta = 0^\circ$ (同じ向き) : $\cos 0^\circ = 1$ で、 $W = Fs$ 。①の仕事と同じです。
- $\theta = 180^\circ$ (反対向き) : $\cos 180^\circ = -1$ で、 $W = -Fs$ 。①の「下ろすとき」と同じです。
- $90^\circ < \theta < 180^\circ$: $\cos \theta$ が負 (4-7) なので、仕事も負です。動きをじゃまする向きの力です。

？はてな？の答え

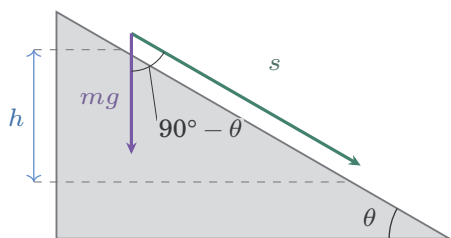
レールに直角に押すと、 $\theta = 90^\circ$ で $\cos 90^\circ = 0$ なので、

$$W = Fs \cos 90^\circ = Fs \times 0 = 0$$

です。力が動く向きに直角なら、どんなに強くても、**仕事は0**です。力の「役に立つ分」は $F \cos \theta$ で、角が 90° に近づくほど小さくなり、 90° でちょうど0になります。

4 斜面をすべり下るとき、重力のする仕事

質量 m の物が、角 θ の斜面にそって、距離 s だけすべり下ります。このあいだに、重力（大きさ mg 、真下向き）がする仕事を求めましょう。



重力の向き（真下）と、動く向き（斜面にそって下）のなす角は $90^\circ - \theta$ です（斜面が水平から θ かたむいているから）。

4-6 で、 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ でした。

$$W = mg \times s \times \cos(90^\circ - \theta) = mg \times s \sin \theta$$

ここで、 $s \sin \theta$ は、斜面を下りるあいだに下がった**高さ** h です（斜辺 s 、角 θ の向かいの辺。4-6）。だから、

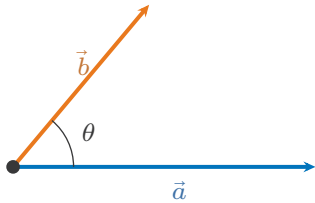
$W = mgh$

となります。斜面の角や長さが変わっても、**重力のする仕事は、下がった高さ h だけで決まる**のです。急な斜面は短く、ゆるい斜面は長くなりますが、どちらも同じ高さを下りれば、重力のする仕事は同じです。物理シリーズでは、これが「位置エネルギー」の考え方の出発点になります。

3 内積：2つのベクトルから1つの数を作る

1 内積の定義

仕事の式 $W = F s \cos \theta$ は、「力のベクトル $\vec{F}$ の大きさ」×「動いた距離のベクトル $\vec{s}$ の大きさ」×「2つのなす角の $\cos$ 」でした。この計算に名前をつけます。



2つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の始点をそろえたときにできる角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角といいます。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積（ないせき）といいます。「エー・ドット・ビー」と読みます。まん中の点「 $\cdot$ 」は省略できません（ $\vec{a}\vec{b}$ とは書きません）。この記号を使うと、仕事は

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

と書けます。

内積の答えは、ベクトルではなく**ただの数（スカラー）**です。2つの矢印から、「大きさの積」と「向きのそろいぐあい（ $\cos \theta$ ）」をかけた1つの数を作るのです。

記号カード

初めて出た章 4-12

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

読み方 エー・ドット・ビー
意味 内積。 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 。答えは数（スカラー）。
英語 inner product

例

$|\vec{a}| = 4$ 、 $|\vec{b}| = 3$ で、なす角が 60° なら、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 12 \times 0.5 = 6$ 。
 なす角が 120° なら、 $12 \times (-0.5) = -6$ 。 90° なら $12 \times 0 = 0$ です。

自分自身との内積

$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は 0° なので、 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ です。自分自身との内積は、大きさの2乗です。

② 成分で計算すると：表で見つける

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ のとき、内積を成分で計算できないでしょうか。
 なす角がわかっているベクトルの組で、 $a_x b_x + a_y b_y$ (x 成分どうしの積と、 y 成分どうしの積の和) を計算して、くらべてみます。

$\vec{a}$	$\vec{b}$	なす角	$ \vec{a} \vec{b} \cos \theta$	$a_x b_x + a_y b_y$
(4, 0)	(3, 3)	45°	$4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 12$	$12 + 0 = 12$
(1, $\sqrt{3}$)	(2, 0)	60°	$2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$	$2 + 0 = 2$
(2, 1)	(-1, 2)	90°	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times 0 = 0$	$-2 + 2 = 0$

表3 どの組でも、2つの列が同じ数になる。

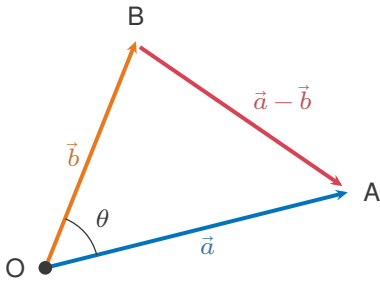
(なす角は、方眼に図をかけばわかります。(3, 3) は 45° の向き、(1, $\sqrt{3}$) は 60° の向き (1 : 2 : $\sqrt{3}$ の三角形、4-4)、(-1, 2) は (2, 1) を左へ 90° 回した向き (4-8) です。)

どうやら、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

となりそうです。角がわからなくても、成分のかけ算とたし算だけで内積が求められるのです。

3 なぜ同じになるのか：余弦定理で確かめる



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とします。三角形 OAB の辺 AB は、 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ です (4-10)。

辺 AB の長さの 2 乗を、**2 通りの方法**で計算します。

方法 1 余弦定理 (4-7)：2 辺 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ とそのあいだの角 θ から、

$$AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \cdots\textcircled{1}$$

方法 2 成分 (4-11)： $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$ の大きさの 2 乗なので、展開 (3-8) して、

$$\begin{aligned} AB^2 &= (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 \\ &= a_x^2 - 2a_x b_x + b_x^2 + a_y^2 - 2a_y b_y + b_y^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - 2(a_x b_x + a_y b_y) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y) \quad \cdots\textcircled{2} \end{aligned}$$

①と②は同じ長さの 2 乗なので、等しくなります。両方にある $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ をひき、 -2 でわると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

表で見つけたきまりが、いつでも成り立つことがわかりました (これは「定理」です。4-1)。

数で確かめる

$\vec{a} = (4, 2)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ で確かめます。 $\vec{a} - \vec{b} = (3, -1)$ なので、 $AB^2 = 9 + 1 = 10$ 。いっぽう、 $|\vec{a}|^2 = 20$ 、 $|\vec{b}|^2 = 10$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 6 = 10$ なので、②の右辺は $20 + 10 - 2 \times 10 = 10$ 。ぴったり合います。

4 内積の符号と、直交

$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ はいつも正なので、内積の符号は $\cos \theta$ の符号で決まります。

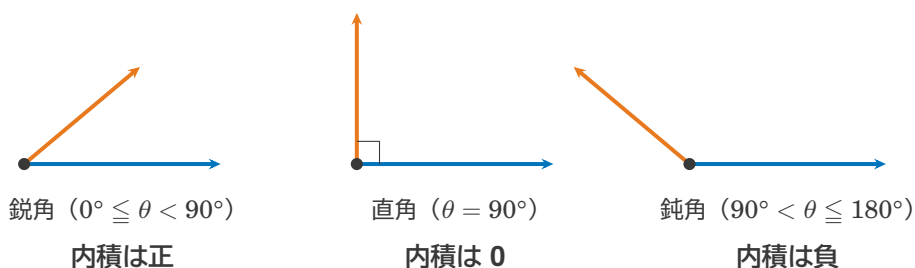


図1 青を $\vec{a}$ 、オレンジを $\vec{b}$ とする。向きがそろっているほど内積は大きい。

とくに大事なのは、**直角のとき内積が 0** になることです。0 でない 2 つのベクトルが直角に交わることを、**直交する**といいます。

$$\vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ が直交する} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

「 $\iff$ 」は、「左が成り立つなら右も成り立ち、右が成り立つなら左も成り立つ」という記号です。角を調べなくても、成分の計算だけで「直角かどうか」がわかります。

例

4-8 で、点 (x, y) を左へ 90° 回すと $(-y, x)$ になりました。 $(3, 4)$ を 90° 回した $(-4, 3)$ との内積は、 $3 \times (-4) + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$ で、確かに直交しています。

「直交」は、ベクトルだけのことではありません。第9巻では、 $\sin$ や $\cos$ の波どうしの「直交」を使って、複雑な波を単純な波に分けます。その計算の中心にあるのも、この「内積が 0」という考えです。

5 なす角を求める

内積の定義の式を、 $\cos \theta$ について解くと、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

です。成分がわかれば、右辺は計算できるので、 $\cos \theta$ がわかり、電卓の $\cos^{-1}$ で角が求められます ($\sin^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ と同じ使い方。4-6)。

たとえば $\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$ なら、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 = 5, \quad |\vec{a}| = \sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

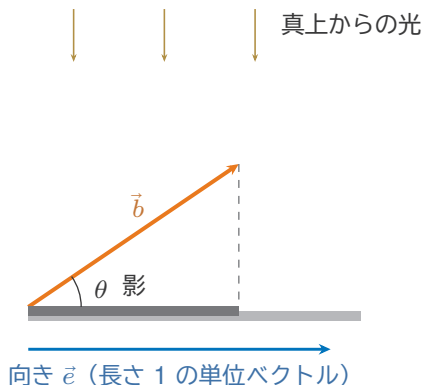
$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ になる角は 45° です ($1:1:\sqrt{2}$ 、4-4)。方眼に 2 本の矢印をかいて、分度器で確かめてみましょう。

$\cos^{-1}$ は、 0° から 180° までの角を答えるので、なす角 (0° から 180°) を求めるのに、ちょうど合っています ($\tan^{-1}$ のように、区画を考え直さなくてよい)。

6 ある向きへの影の長さ：正射影

太陽が真上にあるとき、ななめに立てかけた棒の影は、地面に落ちます。影の長さは、棒の長さ $\times \cos$ (棒と地面の角) です。



ベクトル $\vec{b}$ に、ある向き (単位ベクトル $\vec{e}$ の向き) に直角な光を当てたときの影を考えます。

影の長さは $|\vec{b}| \cos \theta$ です。 $|\vec{e}| = 1$ なので、

$$|\vec{b}| \cos \theta = |\vec{e}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{e} \cdot \vec{b}$$

このように、ベクトル $\vec{b}$ を、ある向きの直線の上に、直角に落とした影を、 $\vec{b}$ の**正射影** (せいしゃえい) といいます。影の長さ (向きもこめて、負にもなる) は

$$\boxed{\vec{e} \text{ の向きへの } \vec{b} \text{ の正射影の長さ} = \vec{e} \cdot \vec{b}}$$

です。 θ が 90° より大きいときは、影が反対がわにできるので、負の数になります。

成分は、正射影だった

$\vec{e}_x = (1, 0)$ との内積は、 $\vec{e}_x \cdot \vec{b} = 1 \times b_x + 0 \times b_y = b_x$ です。 x 成分は、 x 軸の向きへの正射影の長さだったのです。4-11 で、斜面にそった軸で重力を分けたのも、「斜面の向きの単位ベクトル」との内積で、成分を取り出したことになります。**どんな向きの成分でも、その向きの単位ベクトルとの内積で求められます。**

例：ななめの力の、ある向きの成分と仕事

力 $\vec{F} = (6, 8)$ (N) の、 $(4, 3)$ の向きの成分を求めます。 $(4, 3)$ の大きさは 5 なので、その向きの単位ベクトルは $\vec{e} = (0.8, 0.6)$ です (4-11)。

$$\vec{e} \cdot \vec{F} = 0.8 \times 6 + 0.6 \times 8 = 4.8 + 4.8 = 9.6$$

この向きの成分は 9.6 N です。物がこの向きに 5 m 動いたなら、仕事は $9.6 \times 5 = 48$ J です。動いた距離のベクトル $\vec{s} = 5\vec{e} = (4, 3)$ との内積 $\vec{F} \cdot \vec{s} = 24 + 24 = 48$ でも、同じ答えになります。

⑦ 相関係数は、偏差のベクトルの向きのそろいぐあい

3-15 で、10 人の身長と 50 m 走のタイムの相関係数を求めました。その計算を、ベクトルの目で見直します。

① 偏差を、10 個の成分のベクトルにする

4-11 の⑧で、数の組はベクトルと考えられました。10 人の身長の偏差と、タイムの偏差を、それぞれ成分が 10 個のベクトルにします。

$$\vec{d}_x = (-14, -10, -7, -4, -2, 2, 4, 6, 9, 16)$$

$$\vec{d}_y = (0.2, 0.3, 0.6, -0.1, -0.5, -0.1, -0.1, 0.5, -0.2, -0.6)$$

成分が 10 個になっても、内積は「同じ番号の成分どうしの積の和」、大きさは「成分の 2 乗の和の $\sqrt{\quad}$ 」と決めます。

2 内積と大きさを計算する

- 内積 $\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y = (-14) \times 0.2 + (-10) \times 0.3 + \dots + 16 \times (-0.6) = -17.6$ 。

これは、3-15 の「偏差の積の合計」そのものです。

- $|\vec{d}_x| = \sqrt{196 + 100 + \dots + 256} = \sqrt{758} \approx 27.53$

- $|\vec{d}_y| = \sqrt{0.04 + 0.09 + \dots + 0.36} = \sqrt{1.42} \approx 1.192$

2 つのベクトルのなす角を θ とすると、⑤の式から、

$$\cos \theta = \frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{|\vec{d}_x| |\vec{d}_y|} = \frac{-17.6}{27.53 \times 1.192} = \frac{-17.6}{32.81} \approx -0.536$$

3-15 で求めた相関係数 $r = -0.536$ と、ぴったり同じです。

3 なぜ同じになるのか

3-15 の式は $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ でした。人数を n とすると、

- 共分散 σ_{xy} は、偏差の積の合計 $\div n$ なので、 $\frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{n}$ 。

- 標準偏差 σ_x は、偏差の 2 乗の合計 $\div n$ の $\sqrt{\quad}$ なので、 $\frac{|\vec{d}_x|}{\sqrt{n}}$ (4-11 の⑧)。
 σ_y も同じ。

$$r = \frac{\frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{n}}{\frac{|\vec{d}_x|}{\sqrt{n}} \times \frac{|\vec{d}_y|}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{n}}{\frac{|\vec{d}_x| |\vec{d}_y|}{n}} = \frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{|\vec{d}_x| |\vec{d}_y|} = \cos \theta$$

n が分母と分子で消えて、なす角の $\cos$ だけが残ります。つまり、

相関係数 $r = 2$ つの偏差のベクトルの、なす角の $\cos$

同じ向きなら $r = 1$ 、反対向きなら $r = -1$ 、直角（直交）なら $r = 0$ です。3-15 で「いつも $-1 \leq r \leq 1$ 」だったのは、 $\cos \theta$ が -1 から 1 までの値しかとらないからです。身長とタイムの偏差のベクトルは、 $\cos^{-1}(-0.536) \approx 122^\circ$ の角をなして、「やや反対向き」なのです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

点と直線の距離、直交する2直線

直線 $ax + by + c = 0$ の上の2点を $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ とすると、 $ax_1 + by_1 + c = 0$ 、 $ax_2 + by_2 + c = 0$ です。ひくと $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ 。これは、 (a, b) と $\overrightarrow{PQ}$ の内積が0、つまりベクトル (a, b) は直線に直交するということです。この向きの単位ベクトルへの正射影を使うと、点 (x_0, y_0) から直線までの距離は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

になります。たとえば、点 $(3, 4)$ と直線 $3x + 4y - 5 = 0$ の距離は $\frac{|9 + 16 - 5|}{5} = 4$ です。

また、傾き m_1 の直線の向きは $(1, m_1)$ 、傾き m_2 の直線の向きは $(1, m_2)$ です (3-5)。2直線が直交する条件は、内積 $1 + m_1 m_2 = 0$ 、つまり $m_1 m_2 = -1$ です。 $y = 2x + 1$ と $y = -\frac{1}{2}x + 3$ は、 $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ なので直交します。

たいせつ

仕事 $W = \text{力} \times \text{力の向きに動いた距離}$ 。単位 **J** ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$)

ななめなら $W = F s \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (直角なら0)

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$ (答えは数)

直交 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ なす角 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

正射影 $\vec{e}$ の向きの成分 $= \vec{e} \cdot \vec{b}$ ($\vec{e}$ は単位ベクトル)

相関 相関係数 $r = \text{偏差のベクトルのなす角の} \cos$

この章で出てきたことば

仕事 力×力の向きに動いた距離。単位は J（ジュール）。

なす角 2つのベクトルの始点をそろえたときの角。 0° から 180° 。

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ 。成分では $a_x b_x + a_y b_y$ 。

直交 2つのベクトルが直角に交わること。内積が 0。

正射影 ベクトルを、ある向きの直線の上に直角に落とした影。

例題でたしかめよう

例題 1 持ち上げる仕事

質量 5 kg の荷物を、ゆっくり一定の速さで 2 m 持ち上げます。手のする仕事を求めましょう ($g = 9.8 \text{ N/kg}$)。また、同じ荷物をゆっくり 2 m 下ろすときの、手のする仕事を求めましょう。

考え方 ゆっくり持ち上げるとき、手の力は重力と同じ大きさで上向き。仕事＝力×力の向きに動いた距離。下ろすときは、力（上向き）と動き（下向き）が反対なので負。

式 手の力 $F = mg = 5 \times 9.8 = 49 \text{ (N)}$

持ち上げる： $W = 49 \times 2 = 98 \text{ (J)}$

下ろす： $W = 49 \times 2 \times \cos 180^\circ = -98 \text{ (J)}$

答え 持ち上げるとき 98 J、下ろすとき -98 J

じぶんでこう 1

質量 3 kg の荷物を、ゆっくり一定の速さで 1.5 m 持ち上げます。手のする仕事を求めましょう。また、同じ荷物をゆっくり 1.5 m 下ろすときの、手のする仕事を求めましょう。

例題2 ななめに引く力の仕事

台車を、床から 60° 上向きのひもで、大きさ 40 N の力で引き、床にそって 5 m 動かしました。ひもの力のした仕事を求めましょう。

考え方 動く向き（床にそった向き）の成分 $F\cos\theta$ だけが仕事をする。

$$W = Fs \cos \theta.$$

式 $W = 40 \times 5 \times \cos 60^\circ = 200 \times 0.5 = 100$

答え 100 J

じぶんでとこう2

台車を、床から 30° 上向きのひもで、大きさ 50 N の力で引き、床にそって 8 m 動かしました。ひもの力のした仕事を求めましょう ($\cos 30^\circ \approx 0.866$)。

例題3 大きさと角から内積を求める

$|\vec{a}| = 4$ 、 $|\vec{b}| = 3$ のとき、なす角が (1) 60° 、(2) 120° 、(3) 90° の場合の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めましょう。

考え方 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ 。 $\cos 60^\circ = 0.5$ 、 $\cos 120^\circ = -0.5$ 、 $\cos 90^\circ = 0$ 。

式 (1) $4 \times 3 \times 0.5 = 6$ (2) $4 \times 3 \times (-0.5) = -6$ (3) $4 \times 3 \times 0 = 0$

答え (1) 6 (2) -6 (3) 0

じぶんでとこう 3

$|\vec{a}| = 6$ 、 $|\vec{b}| = 4$ のとき、なす角が (1) 30° 、(2) 150° 、(3) 90° の場合の内積を求めましょう ($\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)。

例題 4 成分で内積と仕事を求める

(1) $\vec{a} = (2, -1)$ 、 $\vec{b} = (3, 4)$ の内積を求めましょう。

(2) 力 $\vec{F} = (3, 4)$ (N) がはたらいている物が、 $\vec{s} = (5, -2)$ (m) だけ動きました。力のした仕事を求めましょう。

考え方 内積は「 x 成分どうしの積 + y 成分どうしの積」。仕事は $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ 。

式 (1) $2 \times 3 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$

(2) $3 \times 5 + 4 \times (-2) = 15 - 8 = 7$

答え (1) 2 (2) 7 J

(2) では、力の大きさは 5、動いた距離は $\sqrt{29} \approx 5.39$ ですが、向きがずれているので、仕事は 5×5.39 よりずっと小さい 7 J です。

じぶんでとこう 4

(1) $\vec{a} = (-3, 2)$ 、 $\vec{b} = (4, 5)$ の内積を求めましょう。

(2) 力 $\vec{F} = (6, -2)$ (N) がはたらいている物が、 $\vec{s} = (3, 4)$ (m) だけ動きました。力のした仕事を求めましょう。

例題5 なす角を求める

次の2つのベクトルのなす角を求めましょう。(1) $\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$

(2) $\vec{a} = (1, 1)$ 、 $\vec{b} = (0, -1)$

考え方 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ を計算してから、角を求める。

式 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 = 5$ 、 $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{10}$

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ なので } \theta = 45^\circ$$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 - 1 = -1$ 、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{b}| = 1$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ なので } \theta = 135^\circ$$

答え (1) 45° (2) 135°

(2) は、 $\cos \theta$ が負なので鈍角です。 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ になる角は、 180° から 45° をひいた 135° です (4-7)。

じぶんでとこう5

次の2つのベクトルのなす角を求めましょう。(1) $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$

(2) $\vec{a} = (2, -1)$ 、 $\vec{b} = (-1, 3)$

例題6 直交する条件

$\vec{a} = (3, k)$ と $\vec{b} = (2, -6)$ が直交するように、 k の値を決めましょう。

考え方 直交する $\Leftrightarrow$ 内積が0。成分で内積を作り、 $=0$ の方程式を解く (2-14)。

式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + k \times (-6) = 6 - 6k$

$$6 - 6k = 0 \text{ より } 6k = 6, k = 1$$

答え $k = 1$

確かめ： $(3, 1) \cdot (2, -6) = 6 - 6 = 0$ です。

じぶんでこう 6

$\vec{a} = (k, 4)$ と $\vec{b} = (6, -3)$ が直交するように、 k の値を決めましょう。

例題 7 ある向きの成分と仕事

力 $\vec{F} = (6, 8)$ (N) の、 $(4, 3)$ の向きの成分を求めましょう。また、物がこの向きに 5 m 動いたときの、この力のした仕事を求めましょう。

考え方 $(4, 3)$ の向きの単位ベクトル $\vec{e}$ との内積が、その向きの成分（正射影の長さ）。仕事は成分 $\times$ 距離。

式 $|(4, 3)| = 5$ より $\vec{e} = (0.8, 0.6)$

$$\text{成分 } \vec{e} \cdot \vec{F} = 0.8 \times 6 + 0.6 \times 8 = 4.8 + 4.8 = 9.6$$

$$\text{仕事 } 9.6 \times 5 = 48$$

答え 成分 9.6 N、仕事 48 J

じぶんでこう 7

力 $\vec{F} = (10, 5)$ (N) の、 $(3, 4)$ の向きの成分を求めましょう。また、物がこの向きに 3 m 動いたときの、この力のした仕事を求めましょう。

例題8 相関係数を内積で求める

4人の勉強時間 x (時間) とテストの点 y (点) です。偏差のベクトルの内積とそれぞれの大きさから、相関係数 r を求めましょう。

	A	B	C	D
x (時間)	1	2	4	5
y (点)	50	70	60	80

考え方 平均を求めて偏差のベクトルを作る。 $r = \frac{\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y}{|\vec{d}_x| |\vec{d}_y|}$

式 平均 $\bar{x} = 12 \div 4 = 3$ 、 $\bar{y} = 260 \div 4 = 65$

$$\vec{d}_x = (-2, -1, 1, 2), \vec{d}_y = (-15, 5, -5, 15)$$

$$\vec{d}_x \cdot \vec{d}_y = 30 - 5 - 5 + 30 = 50$$

$$|\vec{d}_x| = \sqrt{4 + 1 + 1 + 4} = \sqrt{10},$$

$$|\vec{d}_y| = \sqrt{225 + 25 + 25 + 225} = \sqrt{500}$$

$$r = \frac{50}{\sqrt{10} \times \sqrt{500}} = \frac{50}{\sqrt{5000}} = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

答え $r \approx 0.71$ (偏差のベクトルのなす角は 45°)

じぶんでとこう8

4人の x と y が、 $x: 2, 4, 6, 8$ 、 $y: 9, 7, 8, 4$ です。偏差のベクトルの内積と大きさから、相関係数 r を求めましょう (電卓を使ってよい)。

例題 9 斜面で重力のする仕事

質量 2 kg の物が、 30° の斜面にそって 5 m すべり下りました。重力のした仕事を求めましょう ($g = 9.8\text{ N/kg}$)。

考え方 重力と動く向きのなす角は $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 。 $W = mgs \cos 60^\circ$ 。
下がった高さ $h = s \sin 30^\circ$ を使って $W = mgh$ でもよい。

式 重力の大きさ $mg = 2 \times 9.8 = 19.6\text{ (N)}$

$$W = 19.6 \times 5 \times \cos 60^\circ = 19.6 \times 5 \times 0.5 = 49$$

$$\text{確かめ：} h = 5 \times \sin 30^\circ = 2.5, mgh = 19.6 \times 2.5 = 49$$

答え 49 J

じぶんでこう 9

質量 3 kg の物が、 30° の斜面にそって 6 m すべり下りました。重力のした仕事を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

内積の答えをベクトルにしてしまう

✗ $(2, -1) \cdot (3, 4) = (6, -4)$

○ $(2, -1) \cdot (3, 4) = 6 + (-4) = 2$ (ただの数)

内積は、成分どうしの積を**たして**、1つの数にします。仕事にも向きはありませんでした。

⚠ まちがえやすいところ

なす角を、矢印をつないだ所の角ではかる

✕ $\vec{a}$ の先に $\vec{b}$ をつないで、その間の角をなす角とする

○ 始点をそろえてかいてから、角をはかる

矢印をつなぐと、はかった角は、なす角を 180° からひいた角になってしまいます。そのまま内積を計算すると、符号が逆になります。

⚠ まちがえやすいところ

仕事を「力×動いた距離」だけで計算する

✕ 40 N でななめ 60° に引いて 5 m 動かしたので、 $40 \times 5 = 200\text{ J}$

○ $40 \times 5 \times \cos 60^\circ = 100\text{ J}$

仕事に使えるのは、動く向きの成分だけです。力の向きと動く向きが同じかどうか、いつも確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ を $|\vec{a}|$ にする

✕ $\vec{a} = (3, 4)$ なら $\vec{a} \cdot \vec{a} = 5$

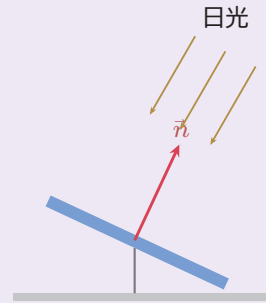
○ $\vec{a} \cdot \vec{a} = 9 + 16 = 25 = |\vec{a}|^2$

自分自身との内積は、大きさの2乗です。大きさは、その $\sqrt{\quad}$ をとって5です。

物理・工学ではこう使う

● 太陽電池パネルの向き

太陽電池パネルが受ける光の量は、パネルに垂直な向き（法線）の単位ベクトル $\vec{n}$ と、太陽の光の向きとのなす角の $\cos$ に比例します。真正面から光を受けると、面積 1.6 m^2 、変換の効率 20% のパネルで、強さ 1000 W/m^2 の日光から約 $1000 \times 1.6 \times 0.2 = 320 \text{ W}$ の電力が出ます。光がパネルの法線から 60° ずれると、 $\cos 60^\circ = 0.5$ で約 160 W に半減します。



● スピードガンと、音の高さが変わるドップラー効果

野球のスピードガンは、はね返ってくる電波の振動数の変化から速さをはかります。はかれるのは、ボールの速度の「ガンの向きの成分」、つまり速度とガンの向きの単位ベクトルとの内積だけです。40 m/s の球を、ボールの進む向きから 30° ずれた所ではかると、 $40 \cos 30^\circ \approx 34.6 \text{ m/s}$ と小さく出てしまいます。救急車のサイレンの音の高さが変わる（ドップラー効果）のも、救急車の速度の「自分に向かう成分」によって決まります。

● 仕事をしない力

ジェットコースターのレールが車両を押す力（垂直抗力）は、いつもレールに垂直で、車両の動く向きと直交しています。円運動で中心へ引く力（向心力、4-10）も、動く向き（接線）と直交しています。どちらも内積が 0 なので、**仕事をしません**。人工衛星が円の軌道を同じ速さで回り続けられるのは、地球の引力が、いつも動く向きに直角だからです。

🔍 コラム ジュールは、ビール工場の息子

仕事の単位 J (ジュール) は、イギリスのジュール (1818~1889 年) の名前からとりました。ジュールは、ビール工場の家に生まれ、工場の仕事をしながら研究を続けました。おもりを落として水の中の羽根車を回すと、水の温度がわずかに上がることを、とても正確にはかりました。そして、「仕事をする、それと決まった割合で熱が生まれる」ことを確かめました。いまでは、熱の量も、仕事と同じ J で表します。食品の表示の「kcal」も、 $1 \text{ kcal} = \text{約 } 4184 J$ です。

✓ 章末問題

4-12 のまとめ

基本 ★★★

- 1 質量 4 kg の荷物を、ゆっくり一定の速さで 3 m 持ち上げるときと、ゆっくり 3 m 下ろすときの、手のする仕事を求めましょう (📖 例題 1)。
- 2 床から 60° 上向きのひもで、大きさ 30 N の力で台車を引き、床にそって 6 m 動かしました。ひもの力のした仕事を求めましょう (📖 例題 2)。
- 3 $|\vec{a}| = 5$ 、 $|\vec{b}| = 2$ のとき、なす角が (1) 60° 、(2) 120° の場合の内積を求めましょう (📖 例題 3)。
- 4 (1) $\vec{a} = (4, -3)$ 、 $\vec{b} = (2, 5)$ の内積を求めましょう。(2) 力 $\vec{F} = (2, 7)$ (N) がはたらく物が $\vec{s} = (4, -1)$ (m) だけ動きました。力のした仕事を求めましょう (📖 例題 4)。
- 5 $\vec{a} = (3, 1)$ と $\vec{b} = (1, 2)$ のなす角を求めましょう (📖 例題 5)。
- 6 $\vec{a} = (4, k)$ と $\vec{b} = (-3, 6)$ が直交するように、 k の値を決めましょう (📖 例題 6)。

チャレンジ ★★★★★

- 7 質量 1 kg の物が、 30° の斜面にそって 10 m すべり下りました。重力のした仕事を求めましょう (例題 9)。
- 8 $\vec{a} = (1, -1)$ と $\vec{b} = (0, 1)$ のなす角を求めましょう (例題 5)。
- 9 力 $\vec{F} = (5, 10)$ (N) の、 $(4, 3)$ の向きの成分を求めましょう。また、物がこの向きに 2 m 動いたときの、この力のした仕事を求めましょう (例題 7)。
- 10 4 人の $x: 1, 3, 5, 7$ と $y: 2, 4, 2, 8$ について、偏差のベクトルの内積と大きさから、相関係数 r を求めましょう (例題 8)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 仕事を求め、 $W = Fs \cos \theta$ を使える。 → 412 ページ
- ☐ 内積を、大きさと角からも、成分からも計算できる。 → 415 ページ
- ☐ 内積で、なす角・直交・相関係数を求められる。 → 418 ページ



ミナ

内積は「どれだけ同じ向きか」の数なんだね。次の章では、ベクトルを 3 次元の空間に広げるよ。

第3部 ベクトル

★★★★

4-13

空間の座標と
3次元のベクトル

道しるべ この章の前に 3-2 4-4 4-11 4-12 この章の先に 4-14 4-15 7-7 8-5

この章でできるようになること

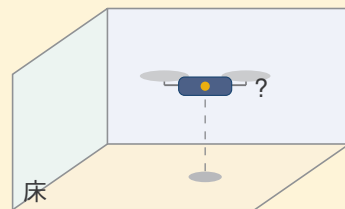
- ★★★★★ 空間の点を3つの数 (x, y, z) で表し、2点の距離を求められる。
- ★★★★★ 3次元のベクトルを成分で計算し、内積からなす角を求められる。
- ★★★★★ 基本ベクトル・単位ベクトル・法線ベクトルで、向きや平面を表せる。

? はてな?

部屋の中を、小さなドローンが飛んでいます。となりの部屋にいる友だちに、ドローンがいまどこにいるかを、電話で正しく伝えたい。

床の上の場所なら、3-2の座標のように「右へいくつ、奥へいくつ」の2つの数で言えました。でも、ドローンは宙にういています。

ドローンの場所を言うには、数がいくつあればいいかな?



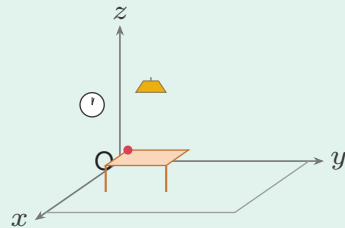
2-2 の数直線では、1 つの数で場所が決まりました。3-2 の座標では、2 つの数で平面の上の場所が決まりました。この章では、部屋や空の中のような「空間」の場所を数で表します。そして、4-10~4-12 で学んだベクトル（向きと大きさをもつ量）を、空間でも使えるようにします。

△ やってみよう 部屋の中の物の場所を、数ではかろう

用意するもの

メジャー（2 m 以上）、ふせん、ノート

- ① 部屋の床の 1 つのすみを「原点 O」に決めよう。
- ② すみから出る 3 本の線（床とかべの境目 2 本と、かべとかべの境目）にふせんで名前をつけよう。手前へ x 、右へ y 、上へ z 。
- ③ 机の角、電灯、かべの時計の場所を、 x 、 y 、 z の順にメジャーではかろう。高さ z は、物の真下の床に印をつけてからはかるとよい。



ソラさんの部屋ではかった結果です（単位は m）。

	手前へ x	右へ y	上へ z
机の角（赤い点）	1.2	0.8	0.7
電灯	2.0	1.8	2.5
かべの時計	1.5	0	2.0

どの物も、3 つの数がそろって、部屋の中の場所が 1 つに決まりました。 x と y だけでは、「床のどこの真上か」しかわかりません。机の角と、その真上の天井

の点は、 x と y が同じで、 z だけがちがいます。かべの時計は、 $y = 0$ のかべにかかっているの、 y が 0 です。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-2 平面の点は、原点から右へ x 、上へ y の所で、 (x, y) と書く。原点と+の向きは自分で決め、決めたら変えない。

4-4 三平方の定理：直角三角形で $(\text{斜辺})^2 = (\text{たて})^2 + (\text{横})^2$ 。

2 点の距離は $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

4-11 ベクトルは成分 (a_x, a_y) で書ける。大きさは $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ 。和・差・実数倍は成分ごとに計算する。大きさが 1 のベクトルが単位ベクトル。 x の向きの単位ベクトルは $\vec{e}_x = (1, 0)$ 、 y の向きは $\vec{e}_y = (0, 1)$ 。

4-12 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$ 。直交すると 0。仕事は $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ 。

この章では、角度や長さの計算で $\approx$ を使います。 $\approx$ は「ほぼ等しい」というしるしです (5-8 でくわしく)。

🏠 数学の道具

① 空間の場所は、3 つの数で決まる

場所を言うのに、数がいくつ必要かを、3 つの場面であらべてみます。

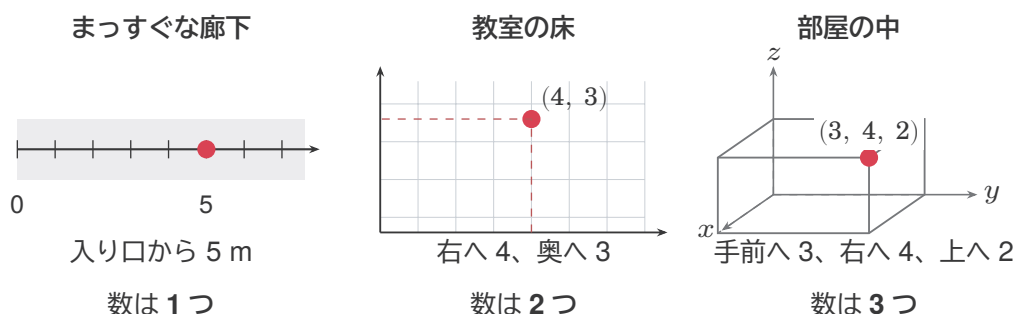


図 1 動ける向きが 1 つ (前・後ろ) なら数は 1 つ、2 つ (前後・左右) なら 2 つ、3 つ (前後・左右・上下) なら 3 つ。

まっすぐな廊下では、前か後ろにしか動けません。だから「入り口から何 m」の 1 つの数で場所が決まります。床の上では、前後と左右の 2 つの向きに動け

るので、数が 2 つ必要です (3-2)。部屋の中を飛ぶドローンは、前後・左右に加えて、上下にも動けます。だから数が 3 つ必要です。

	動ける向き	必要な数	名前
直線 (廊下)	前後	1 つ	1 次元
平面 (床)	前後・左右	2 つ	2 次元
空間 (部屋)	前後・左右・上下	3 つ	3 次元

表 1 場所を決めるのに必要な数の個数を、次元 (じげん) という。

場所を決めるのに必要な数の個数を**次元** (じげん) といいます。直線は 1 次元、平面は 2 次元、わたしたちのいる**空間** (くうかん) は 3 次元です。映画の「3D」の D は、次元を表す英語 dimension の頭文字です。

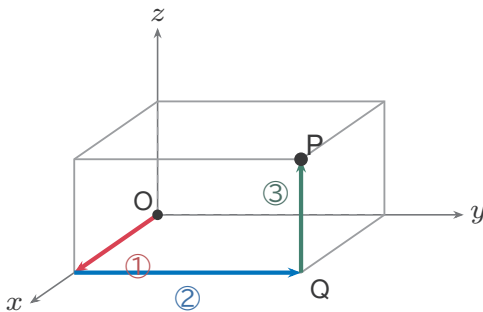
1 3 本の軸と、3 つの数

平面では、原点 O で直角に交わる 2 本の数直線 (x 軸と y 軸) を使いました (3-2)。空間では、原点 O でたがいに直角に交わる **3 本の数直線** を使います。3 本めを z 軸といい、ふつうは上向きにとります。

点 $P(3, 4, 2)$ へは、原点 O から次の順に進みます。

- ① x 軸にそって 3 (手前へ)
- ② y 軸の向きに 4 (右へ)
- ③ z 軸の向きに 2 (上へ)

3 つの矢印は、たて・横・高さが $3 \cdot 4 \cdot 2$ の箱 (直方体) の辺です。P は、O と反対がわの箱の角にあります。



図の箱の点線は、見えない向こうがわの辺です。この本の図では、 x 軸を左下へななめにかいています。紙は平らなので、手前に出てくる向きを、ななめの線でかくのです。ななめにかいた x 軸は、ほかの軸より短く見えるようにかいて

あります（1目もりが、ほかの軸の約0.6倍）。目で長さをくらべないように気をつけましょう。

2 反対に、点から3つの数を読む

こんどは、空間の点 P が先にあって、その座標を読みとります。

- 1 P から床（ $z = 0$ の平面）へ、まっすぐ下に線をおろす。床にとどいた点を Q とする。 Q は、真上から照らしたときの P の「影」です。
- 2 Q は床の上の点なので、3-2 と同じように、 x と y を読む。図では $Q(3, 4, 0)$ 。
- 3 PQ の長さ（床からの高さ）が z 。図では2。

だから、 P の座標は $(3, 4, 2)$ です。進んで作っても、影から読んでも、同じ3つの数になりました。

このように、原点 O で直角に交わる3本の軸を決めると、

空間の中の場所は、高さの z を加えた3つの数 (x, y, z) で表せる

これを点の座標といい、 $P(x, y, z)$ と書きます。かっこの中の順番は、いつも x, y, z です。 $(3, 4, 2)$ と $(4, 3, 2)$ は別の点です。

② はてな？ の答え

ドローンの場所を言うには、3つの数が必要です。たとえば部屋のすみを原点にして「手前へ2m、右へ3m、床から1.6mの高さ」、つまり $(2, 3, 1.6)$ と伝えれば、友だちはドローンの場所を1つに決められます。電話の前に「原点はどのすみか、どっちを+にするか」を、2人で決めておくことが大切です（3-2）。

3 軸上の点、座標平面上の点

3つの数のうち、いくつかが0になる点もあります。2本の軸をふくむ平面を、座標平面といいます。

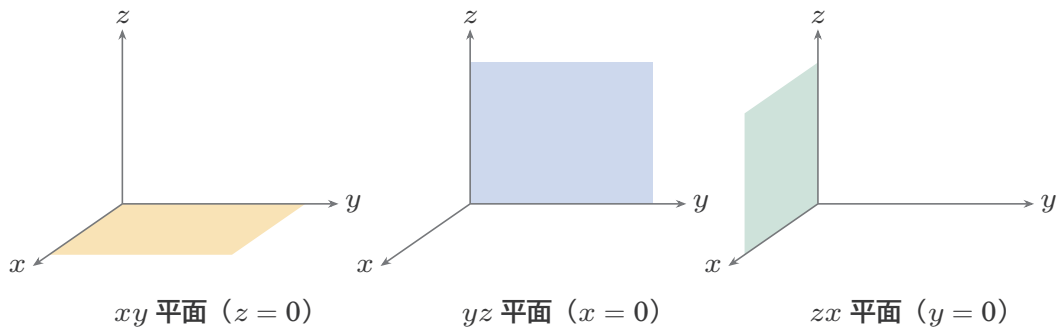


図2 xy 平面（床）では $z = 0$ 、 yz 平面（おくのかべ）では $x = 0$ 、 zx 平面（左のかべ）では $y = 0$ 。

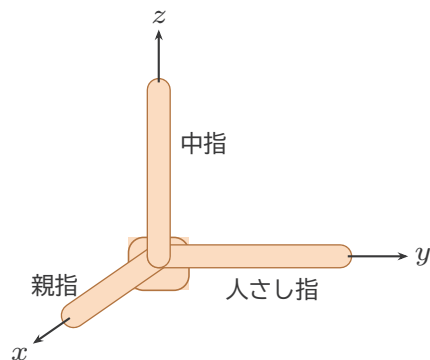
- 床の上の点は、高さが 0 なので $z = 0$ 。 xy 平面の上にあります。やってみようの「時計」は $y = 0$ なので、 zx 平面（左のかべ）の上にあります。
- x 軸上の点は、 y も z も 0 で、 $(3, 0, 0)$ のように書けます。
- 3-2 でマイナスの座標を使ったように、空間でもマイナスを使います。地下の駐車場なら、 z がマイナスになります。原点は $(0, 0, 0)$ です。

2 3本の軸の並べ方：右手系

3-2 では、原点と+の向きは自分で決めてよい、と学びました。空間でも同じです。ただし、空間には、もう 1 つだけ大事な約束があります。右手の親指・人さし指・中指を、たがいに直角になるように開いてみましょう。

- 親指 → x 軸の+の向き
- 人さし指 → y 軸の+の向き
- 中指 → z 軸の+の向き

この形になるように 3 本の軸を並べたものを、**右手系**（みぎてけい）といいます。この本の図は、すべて右手系です。



もう1つの見方：右ねじ

ねじ（ペットボトルのふたや、くぎのようなねじ）は、上から見て右回り（時計回り）に回すと、おくへ進みます。このようなねじを**右ねじ**といいます。ふつうのねじは、ほとんどが右ねじです。

x 軸を、 y 軸のほうへ 90° 回すことを考えます。このように回したときに、右ねじが進む向きが z 軸の+の向きです。 z 軸の上から見ると、 x から y への回り方は左回り（反時計回り）です。下から見ると右回りなので、ねじは上へ進みます。

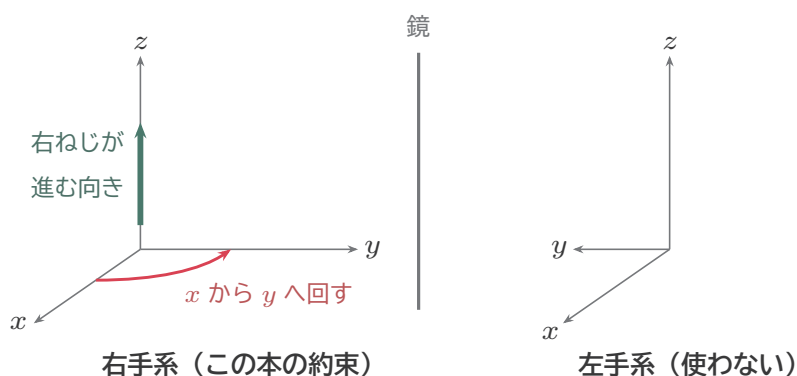


図3 鏡にうつすと、 y 軸が反対を向いた「左手系」になる。左手系は、回しても右手系にはもどらない（右手の手がくろを、回しても左手の手がくろにできないのと同じ）。

なぜ、この約束が大事なの？

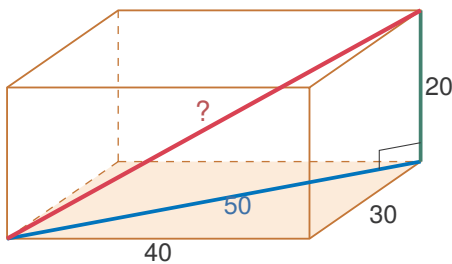
軸の並べ方を鏡にうつしたように変えると、 y の+とマイナスが入れかわります。すると、次の章（4-14）で学ぶ「回す向き」の計算で、答えの符号（+か-か）が反対になってしまいます。物理や工学の本の式は、すべて右手系で書かれています。設計図を作るソフトやロボットの制御も、右手系が基本です。だから、自分で軸を決めるときは、+の向きと原点は自由に選んでよいが、**並べ方は右手系にする**、と約束します（ゲームを作るソフトの中には、左手系を使うものもあります）。

3 空間の 2 点の距離

平面では、2 点の距離を三平方の定理で求めました (4-4)。空間では、どうすればよいでしょう。

1 箱に入る、いちばん長い棒

横 40 cm、おく行き 30 cm、高さ 20 cm の段ボール箱があります。長さ 52 cm の棒は、この箱に入るかな？



① 床の対角線 (青)

底の長方形で、三平方の定理 (4-4)。

$$\sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50$$

底にななめにおいても、50 cm までしか入りません。

② 箱の対角線 (赤)

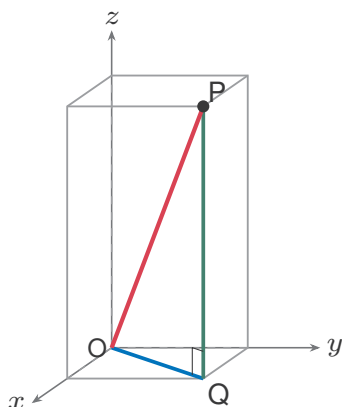
青い線と、高さの線 (緑) は直角です。もう一度、三平方の定理を使えます。

$$\sqrt{50^2 + 20^2} = \sqrt{2900} \approx 53.9$$

$40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$ 、 $50^2 + 20^2 = 2500 + 400 = 2900$ です。箱の底のすみから、反対がわの天井のすみへ、ななめに入れると、53.9 cm まで入ります。だから 52 cm の棒は、ななめにすれば入ります。三平方の定理を 2 回使うと、空間のななめの長さがわかるのです (4-4 の直方体の対角線と同じ)。

2 原点からの距離

同じことを、座標でやってみます。原点 O と点 P(2, 3, 6) の距離を求めます。P の真下の床の点を Q(2, 3, 0) とします。



① 床の上で：OQ

Qは床の上の点で、Oから手前へ2、右へ3。
床の上の三平方の定理で、

$$OQ^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

② 立てた三角形で：OP

PQは真上を向いているので、OQとPQは直角。三角形OQPで、もう一度三平方の定理。

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 = 13 + 6^2 = 49$$

$$OP = \sqrt{49} = 7$$

①の $OQ^2 = 2^2 + 3^2$ を、②の式にそのまま入れると、 $OP^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$ です。途中の13を計算しなくても、3つの座標を2乗してたせばよいのです。だから、点 $P(x, y, z)$ と原点の距離は

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

です。平面の式 $\sqrt{x^2 + y^2}$ に、高さの分の z^2 が1つふえただけです。

3 2点のあいだの距離

2点 $A(x_1, y_1, z_1)$ と $B(x_2, y_2, z_2)$ のあいだでは、AからBまでの箱の、たて・横・高さが

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1$$

になります（4-4の平面の2点の距離と同じで、座標の「あとーまえ」）。だから、

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

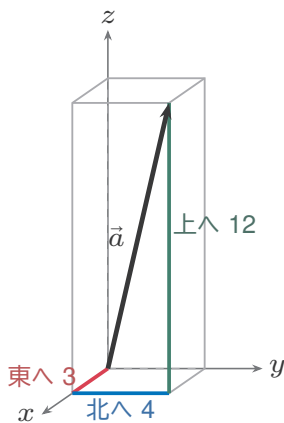
やってみようの部屋で 机の角 A(1.2, 0.8, 0.7) から電灯 B(2.0, 1.8, 2.5) までの距離は、座標の差は、 x が $2.0 - 1.2 = 0.8$ 、 y が $1.8 - 0.8 = 1.0$ 、 z が $2.5 - 0.7 = 1.8$ なので、

$$AB = \sqrt{0.8^2 + 1.0^2 + 1.8^2} = \sqrt{0.64 + 1 + 3.24} = \sqrt{4.88} \approx 2.21$$

で、約 2.21m です。2 乗するので、ひく順番を逆にして $1.2 - 2.0 = -0.8$ としても、 $(-0.8)^2 = 0.64$ で答えは同じです。

4 3次元のベクトル

ベクトルは「向きと大きさをもつ量」でした (4-10)。空を飛ぶドローンの動き・風・力は、上下の向きももっています。空間のベクトルも、平面と同じく成分で書けます。



校庭から飛び立ったドローンが、東へ 3m、北へ 4m、上へ 12m 動きました。東を x 、北を y 、上を z の+の向きにします (この並べ方は右手系です)。

この動き (変位) のベクトル $\vec{a}$ は、3 つの成分で

$$\vec{a} = (3, 4, 12)$$

と書けます。**成分**は、それぞれの軸の向きに、どれだけ進むかを表します (4-11)。

- **大きさ** 4-11 では、成分が 3 つ以上のときも、大きさを「成分の 2 乗の和の $\sqrt{\quad}$ 」と決めました。その決め方が図の長さ合うことは、③の箱の対角線で確かめたとおりです。床の対角線 (三平方の定理) と高さで、もう一度三平方の定理を使うと、ちょうど $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ になりました。
 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$ 。ドローンは、まっすぐ 13m 動いたことになります。

- **2点を結ぶベクトル** 点 $A(x_1, y_1, z_1)$ から $B(x_2, y_2, z_2)$ へのベクトルは、成分が「あと－まえ」です。

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

- **和・差・実数倍は、成分ごと** 平面と同じです (4-11)。 x は x どうし、 y は y どうし、 z は z どうしで計算します。たとえば $\vec{a} = (1, 2, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 0, -4)$ なら

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, 2 + 0, 2 + (-4)) = (4, 2, -2), \quad 3\vec{a} = (3, 6, 6)$$

動く点の位置：速度をかけてたす

ドローンが、高さ 10 m の点 $\vec{p}_0 = (0, 0, 10)$ から、速度 $\vec{v} = (2, 1, 2)$ (m/s) で、まっすぐ同じ速さで飛びます。1 秒ごとに、東へ 2、北へ 1、上へ 2 ずつ進みます。速さ (速度の大きさ) は $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ で、3 m/s です。 t 秒後の位置は、4-11 の等速直線運動の式 $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ と同じで、

$$\vec{p} = (0, 0, 10) + t(2, 1, 2) = (2t, t, 10 + 2t)$$

5 秒後は (10, 5, 20) です。成分が 3 つにふえても、ベクトルの計算のきまりは、まったく同じです (4-11 の「数の組は、成分が 3 つでも 10 個でもベクトル」)。

5 3次元の内積となす角

2 つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の内積は、なす角を θ として $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ でした (4-12)。空間のベクトルでも、なす角を考えられるでしょうか。

1 2本の矢印は、いつも1枚の平面にのる

えんぴつを 2 本、おしりをくっつけて、ちがう向きに持ってみましょう。下じきを当てると、2 本のえんぴつに同時にふれる向きが、必ずあります。空間の 2 つのベクトルも、根もとをそろえると、その 2 本をふくむ平面が 1 枚決まります。その平面の上で見れば、2 本の矢印のあいだの角 θ は、平面のときと同じようにはかれます。だから、なす角も内積も、空間でそのまま使えます。

2 成分の式も、 z の分がふえるだけ

平面では、余弦定理 (4-7) から $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ を作りました (4-12)。空間でも同じように作ります。 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ と、その先を結ぶ $\vec{b} - \vec{a}$ で三角形ができます。この三角形も 1 枚の平面の上にあるので、余弦定理が使えます。

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \dots (\text{ア})$$

左がわを、成分で計算します。 $(b_x - a_x)^2 = b_x^2 - 2a_x b_x + a_x^2$ (3-8 の展開) なので、

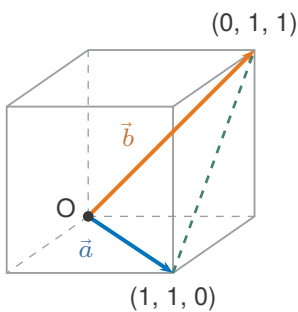
$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{aligned}$$

(ア) の右がわとくらべると、 $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ は同じなので、のこりの部分も等しいはずです。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

平面の式に、 z どうしをかけた $a_z b_z$ が 1 つふえただけです。

3 図と計算で、たしかめる



1 辺が 1 の立方体で、 $\vec{a} = (1, 1, 0)$ (床の面の対角線) と $\vec{b} = (0, 1, 1)$ (おくのかべの面の対角線) のなす角を求めます。

図で 3 つの辺 (青・オレンジ・緑の点線) は、どれも立方体の面の対角線で、長さは $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 。3 つの辺が等しいので正三角形で、なす角は 60° です。

計算で $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$
 $|\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ なので
 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 、 $\theta = 60^\circ$

図で考えた 60° と、成分の式で計算した 60° が、ぴったり合いました。

内積の使い道（平面と同じ）

- **なす角** $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ を計算し、電卓の $\cos^{-1}$ で角度にする（4-6）。電卓は DEG（度）にしておく。

- **直交** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ なら、2つのベクトルは直角（ $\cos 90^\circ = 0$ ）。

- **仕事** 力 $\vec{F}$ で、物が $\vec{s}$ だけ動いたときの仕事は（4-12）

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$

上向きの力は、物を持ち上げる分だけ仕事をします。

6 基本ベクトルと、向きを表す単位ベクトル

1 3本の軸の向きの、長さ1の矢印

x 軸・ y 軸・ z 軸の+の向きを向いた、長さ1のベクトルを

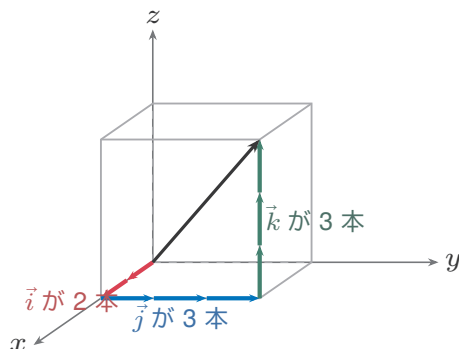
$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

と書き、**基本ベクトル**といいます。どれも大きさが1の単位ベクトル（4-11）で、たがいに直交しています。

4-11では、 x の向きの単位ベクトルを $\vec{e}_x = (1, 0)$ 、 y の向きを $\vec{e}_y = (0, 1)$ と書きました。 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ は、これと同じものの別の書き方です。空間では z の向きの $\vec{e}_z$ が加わり、

$$\vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_y = \vec{j}, \quad \vec{e}_z = \vec{k}$$

です。どちらの書き方も使われるので、両方読めるようにしておきましょう（平面では $\vec{i}$ と $\vec{j}$ の2本だけを使います）。



ベクトル $\vec{a} = (2, 3, 3)$ は、 $\vec{i}$ を 2 本、 $\vec{j}$ を 3 本、 $\vec{k}$ を 3 本つないだ矢印と同じです。だから

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

と書けます。成分は「基本ベクトルが何本分か」を表す数です。いっぽんに、

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

「東へ 2 歩、北へ 3 歩、上へ 3 段」と言うのと同じです。

内積を使うと、成分を取り出せます。 $\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x \times 1 + a_y \times 0 + a_z \times 0 = a_x$ です。「 $\vec{a}$ が x 軸の向きにどれだけ進むか」が、 $\vec{i}$ との内積で求められます (4-12 の正射影)。

② 向きだけを取り出す：単位ベクトルと方向余弦

ベクトル $\vec{a}$ を、その大きさ $|\vec{a}|$ でわると、向きは同じで、長さ 1 のベクトルになります (4-11 の単位ベクトル)。 $\vec{a} = (2, 3, 6)$ なら、 $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ なので、

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

この 3 つの数には、意味があります。 $\vec{a}$ と x 軸のなす角を θ_x とすると、⑤の式で

$$\cos \theta_x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{7}$$

y 軸・ z 軸とのなす角 θ_y 、 θ_z も同じで、 $\cos \theta_y = \frac{3}{7}$ 、 $\cos \theta_z = \frac{6}{7}$ 。つまり、

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z)$$

単位ベクトルの3つの成分は、3本の軸とのなす角の $\cos$ です。これを**方向余弦**（ほうこうよげん）といいます。電卓の $\cos^{-1}$ で角度にすると、

	x 軸と	y 軸と	z 軸と
$\cos$	$\frac{2}{7} \approx 0.286$	$\frac{3}{7} \approx 0.429$	$\frac{6}{7} \approx 0.857$
角	$\theta_x \approx 73.4^\circ$	$\theta_y \approx 64.6^\circ$	$\theta_z \approx 31.0^\circ$

表2 z 軸（真上）とのなす角がいちばん小さい。 $\vec{a}$ は、上向きに近い矢印。

$\vec{e}$ の長さは1なので、成分を2乗してたすと1になります。

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{4 + 9 + 36}{49} = \frac{49}{49} = 1$$

つまり

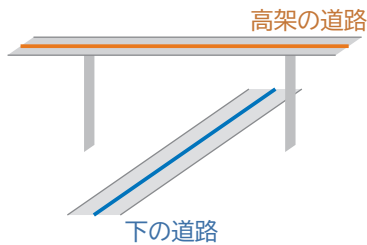
$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

平面なら、 x 軸から角 θ の向きの単位ベクトルは $(\cos \theta, \sin \theta)$ でした（4-8）。 y 軸とのなす角は $90^\circ - \theta$ なので、 $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ （4-6）を使うと、平面の単位ベクトルも「2本の軸とのなす角の $\cos$ 」の組です。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の3次元版が、上の式です。

7 空間の直線と平面

1 交わらないのに平行でもない：ねじれの位置

平面の上の2本の直線は、「交わる」か「平行」のどちらかでした。空間では、もう1つの場合があります。



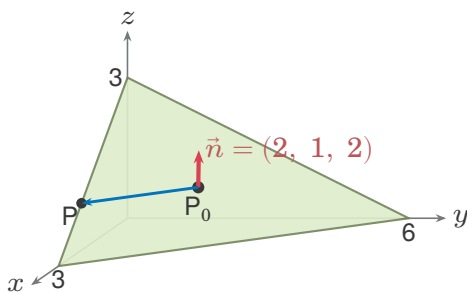
立体交差では、下の道路（青）と高架の道路（オレンジ）は、上から見ると十字に交わっています。でも、高さがちがうので、ぶつかりません。向きもちがうので、平行でもありません。

このように、**交わらず、平行でもない** 2本の直線の間接を、**ねじれの位置**といいます。ねじれの位置は、平面の上では起こりません。空間ならではの関係です。

2 平面の向きは、1本の矢印で決まる：法線ベクトル

画びょうを板にまっすぐさすと、針は板に垂直です。板をかたむけると、針の向きも変わります。反対に、針の向きを決めると、板の向きが1つに決まります。

平面に垂直なベクトルを、その平面の**法線ベクトル**（ほうせんベクトル）といいます。平面の上のどんな線とも直角に交わる矢印です。床（ xy 平面）の法線ベクトルは、真上を向いた $\vec{k} = (0, 0, 1)$ です。



点 P_0 をふくみ、 $\vec{n}$ に垂直な平面を考えます。平面の上のどの点 P でも、平面の上の矢印 $\overrightarrow{P_0P}$ （青）は $\vec{n}$ と直角です。直角なら内積は 0 (⑤) なので、

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

これが、「 P がこの平面の上にある」という条件です。

図の平面で計算してみます。 $P_0 = (1, 2, 1)$ 、 $\vec{n} = (2, 1, 2)$ とし、平面の上の点を $P(x, y, z)$ とします。 $\overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-2, z-1)$ なので、

$$2(x-1) + 1 \times (y-2) + 2(z-1) = 0 \quad (\text{内積が0})$$

$$2x - 2 + y - 2 + 2z - 2 = 0 \quad (\text{かっこをはずす})$$

$$2x + y + 2z = 6 \quad (\text{数を右へ移す})$$

これが、この平面の式です。 x, y, z の前の数 $2, 1, 2$ は、法線ベクトルの成分そのものです。たしかめます。図の点 $P(2, 0, 1)$ は、 $2 \times 2 + 0 + 2 \times 1 = 6$ で式をみたすので、平面の上にあります。 x 軸との交わる点は、 $y = z = 0$ において $2x = 6$ から $x = 3$ です (図の3)。いっぽんに、

$$\vec{n} = (a, b, c) \text{ に垂直な平面の式は } ax + by + cz = d$$

d は、平面の上の1点の座標を入れて決めます。平面の向きを法線ベクトルで表す考え方は、8-8で、平面を通りぬける水や電気の量を計算するときに使います。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

原点から平面までの距離

②の平面 $2x + y + 2z = 6$ と原点 O の距離 (O から平面に下ろした垂線の長さ) を求めます。法線ベクトル $\vec{n} = (2, 1, 2)$ の大きさは $\sqrt{4+1+4} = 3$ なので、同じ向きの単位ベクトルは $\vec{e} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ です (⑥)。

平面の上のどの点 P でも、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{e}$ の向きに正射影した長さ (4-12) は、 O から平面までの距離と同じです。正射影の長さは $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}$ なので、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e} = \frac{2x + y + 2z}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

P が平面のどこにあっても、 $2x + y + 2z$ はいつも 6 なので、答えは同じ 2 です。たしかめ： O から $\vec{e}$ の向きに 2 進んだ点は $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ で、 $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{18}{3} = 6$ 。ちゃんと平面の上にあります。いっぽんに、原点と平面 $ax + by + cz = d$ の距離は $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ です。

8 空間の形を紙にかく：投影図

ここまでの図は、空間をななめから見た図（見取図）でした。ものを作るための設計図では、長さを正しく読めるように、真正面・真上・真横から見た図をかきます。これを**投影図**（とうえいず）といいます。

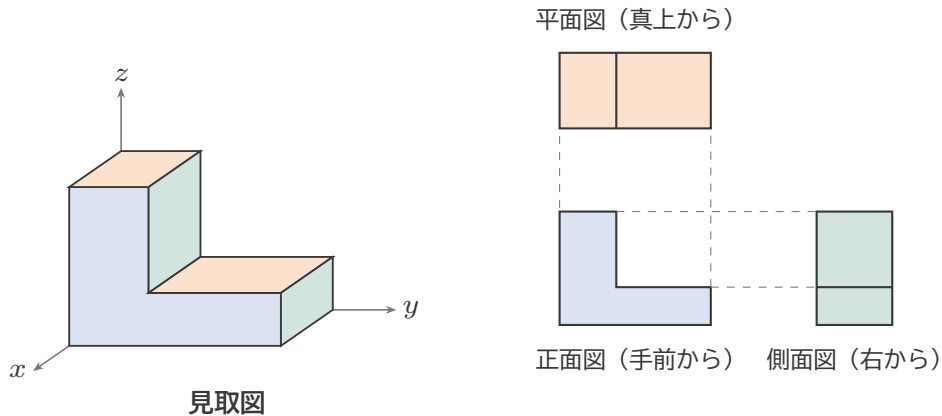


図 4 L 字の形のブロックの見取図と投影図。正面図の真上に平面図、右に側面図を並べる（日本の設計図のきまり、第三角法）。点線は、同じ所をつなぐ線。

座標で考えると、投影図は「1 つの座標を消した図」です。

- **平面図**（真上から見る）：高さ z が消えて、 x と y が残る。①の「影」と同じです。
- **正面図**（手前から見る）：手前への x が消えて、 y と z が残る。
- **側面図**（右から見る）：右への y が消えて、 x と z が残る。

1 つの図では、1 つの座標がわかりません。正面図だけでは、ブロックの奥行きはわかりません。だから設計図では、2 つか 3 つの図を組にして、3 つの座標をすべて読みとれるようにします。たとえば点 $P(2, 0, 3)$ （ブロックの左上の手前の角）は、正面図では左はしの、高さ 3 の所にかかれます。平面図では、いちばん下の辺（手前）の左はしにかかれます。

9 専門書の書き方：太字のベクトル

この本の第 4 巻では、ベクトルを矢印付きの文字 $\vec{a}$ で書いてきました。大学の教科書など、工学の専門書では、矢印をつけずに、**太い字**でベクトルを表すことが多いです。このシリーズ（第 7 巻・第 8 巻）と物理シリーズの本文では、この本と同じ矢印 $\vec{a}$ で書き、専門書の書き方は「専門書をのぞいてみよう」で見せます。専門書を読むときのために、太字の読み方を知っておきましょう。

	この巻の書き方	専門書の書き方
ベクトル	$\vec{a}$ 、 $\vec{F}$ 、 $\overrightarrow{OP}$	a 、 F 、 r
大きさ	$ \vec{a} $	 a または 細い字の a
基本ベクトル	$\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$	i 、 j 、 k や e_x 、 e_y 、 e_z
成分で	$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$	a = (a_x , a_y , a_z)

表 3 太字の **a** はベクトル、細い字の a はその大きさ（ふつうの数）。

とくに大事なのは、**太い字の a と細い字の a は別のものだ**ということです。物理の本で「**F** の大きさを F とする」と書いてあれば、 $F = |\mathbf{F}|$ のことです。力の向きを考えると**きは F**、大きさだけを計算するときは F を使います。手でノートに書くときは、太い字は書きにくいので、矢印をつけて $\vec{a}$ と書いてかまいません。

📖 専門書をのぞいてみよう 空間ベクトルの書き方

位置ベクトル $\mathbf{r}$ の成分表示と大きさは

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

である。 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\mathbf{a}$ の向きの単位ベクトルは $\mathbf{a}/a$ で、その成分を方向余弦という。

訳 点の位置を表す矢印（位置ベクトル）を太字の $\mathbf{r}$ で書く。その長さは細い字の r 。 a 、 b は $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ の大きさなので、 $ab \cos \theta$ は $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ のこと。 $\mathbf{a}/a$ は「 $\mathbf{a}$ をその大きさでわったもの」。

🔍 もっと知りたい ★★★

4 次元の空間ってあるの？

友だちと待ち合わせをするとき、「駅ビルの 3 階の東口に」だけでは足りません。「午後 3 時に」という時刻もいります。場所の 3 つの数と、時刻の 1 つの数で、4 つの数の組 (x, y, z, t) になります。物理学では、これを「4 次元の時空」とよびます。

数学では、数の組は成分がいくつでもベクトルと考えられました (4-11)。たとえば 5 人の体重の組も、5 次元のベクトルです。長さも、成分を 2 乗してたして $\sqrt{\quad}$ をとれば、何次元でも同じように計算できます。3-15 の相関係数は、データの組を「たくさんの次元をもつベクトル」と見て、そのなす角の $\cos$ を計算していたのです (4-12)。目には見えない高い次元の空間も、数の組と計算のきまりで、3 次元と同じようにあつかえます。

🔍 コラム ハエが飛び立つと、数は3つ

3-2のコラムで、天井をはうハエを見て座標を思いついたという、デカルトの言い伝えを読みました。天井の上なら2つの数で足りましたが、ハエが飛び立てば、床からの高さを加えた3つの数 (x, y, z) がいらいます。空を飛ぶ飛行機も同じです。空港の管制では、地図の上の位置に「高度」を加えて、飛行機どうしが近づきすぎないように見守っています。上空を飛ぶ旅客機は、高さ10km前後を飛び、同じ空の道でも、高さをずらして安全な間かくをとっています。

🔍 コラム 日本とヨーロッパで、図の並べ方がちがう

⑧の投影図では、正面図の上に平面図、右に側面図を並べました。これは「第三角法」というきまりで、日本の設計図(JIS)やアメリカでは、ふつうこの並べ方を使います。ところが、ヨーロッパでは、正面図の下に平面図、左に右側面図を並べる「第一角法」もよく使われます。同じ部品でも、図の並べ方を取りちがえると、上下や左右が反対の物ができてしまいます。そこで、設計図のすみには、どちらの並べ方でかいたかを示す小さなマークをかいておく約束になっています。

たいせつ

空間の座標 点は3つの数 (x, y, z) で表す。軸は右手系に並べる。

距離 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

大きさ $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

単位ベクトル $\vec{a} \div |\vec{a}| = (\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z)$ (方向余弦)

平面 法線ベクトル (a, b, c) の平面は $ax + by + cz = d$

📖 この章で出てきたことば

次元 場所を決めるのに必要な数の個数。直線は 1、平面は 2、空間は 3。

右手系 右手の親指・人さし指・中指の向きに、 $x \cdot y \cdot z$ 軸を並べたもの。

基本ベクトル 軸の+の向きの単位ベクトル $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 。

方向余弦 ベクトルと 3 本の軸のなす角の $\cos$ 。単位ベクトルの成分。

ねじれの位置 空間の 2 直線が、交わらず平行でもない関係。

法線ベクトル 平面に垂直なベクトル。平面の向きを表す。

投影図 真正面・真上・真横から見た図。1 つの座標を消した図。

📇 記号カード

初めて出た章 4-13

a

読み方 太字のエー
意味 ベクトル。 $\vec{a}$ と同じ。細い字の a は大きさ
英語 boldface vector

📇 記号カード

初めて出た章 4-13

 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

読み方 アイ・ジェイ・ケイ
意味 $x \cdot y \cdot z$ 軸の向きの基本ベクトル
英語 unit vectors

⚠️ まちがえやすいところをチェック

⚠️ まちがえやすいところ

ななめにかいた x 軸の長さを、目で読む

✗ 図で x 方向の辺が短く見えるので、 $OA = 2$ と読む

○ 長さは、図ではなく座標で読む。 $A(4, 0, 0)$ なら $OA = 4$

見取図では、手前に出る x 軸を、ななめに短くかいています。図の上の長さをものさしではかっても、本当の長さにはなりません。

⚠ まちがえやすいところ

軸を左手系に並べてしまう

✗ 右を x 、手前を y 、上を z にする

○ 右を x にしたいなら、手前を $-y$ (おくを y) にする

右を x 、手前を y にすると、鏡にうつした左手系になります。親指・人さし指・中指で、いつもたしかめましょう。

📖 例題でたしかめよう

📖 例題1 直方体の頂点の座標

図の直方体は、 O を原点とし、辺が3本の軸にそっています。 $OA = 4$ 、 $OC = 3$ 、 $OD = 2$ です。

(1) 頂点 B 、 F 、 G の座標を答えましょう。

(2) 点 F の真下の床 (xy 平面) の点の座標を答えましょう。

考え方 O から、 x (手前)・ y (右)・ z (上)の順に、それぞれ何進むかを読む (①)。

式 (1) B : 手前へ4、右へ3、上へ0

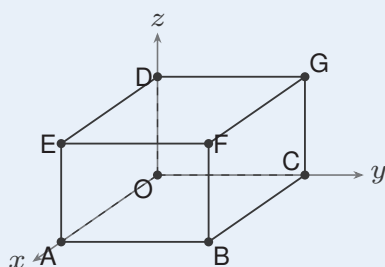
F : 手前へ4、右へ3、上へ2

G : 手前へ0、右へ3、上へ2

(2) 真下の点は、 x 、 y が同じで、 $z = 0$

答え (1) $B(4, 3, 0)$ 、 $F(4, 3, 2)$ 、

$G(0, 3, 2)$ (2) $(4, 3, 0)$ (点 B)



じぶんでとこう 1

例題 1 の図で、 $OA = 5$ 、 $OC = 2$ 、 $OD = 3$ の直方体にかえます。頂点 B、E、G の座標と、点 G の真下の床の点の座標を答えましょう。

例題 2 空間の 2 点の距離

(1) 原点 O と点 $P(2, 3, 6)$ の距離を求めましょう。

(2) 2 点 $A(1, -2, 3)$ 、 $B(5, 0, 7)$ の距離を求めましょう。

考え方 座標の差（あと－まえ）を 2 乗してたし、 $\sqrt{\quad}$ をとる (③)。

式 (1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$

(2) 差は $5 - 1 = 4$ 、 $0 - (-2) = 2$ 、 $7 - 3 = 4$

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

答え (1) 7 (2) 6

(2) の $0 - (-2)$ は、マイナスをひくので $0 + 2 = 2$ です (2-2)。

じぶんでとこう 2

(1) 原点 O と点 $P(1, 4, 8)$ の距離を求めましょう。

(2) 2 点 $A(2, 1, -1)$ 、 $B(4, -2, 5)$ の距離を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところ

距離の式で、 z をわすれる

✕ $A(1, 2, 3)$ 、 $B(4, 6, 15)$ の距離を $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

○ $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

平面の式のくせで、高さの差を入れわすれます。空間の距離は、3つの差を全部2乗してたします。

📖 例題3 3次元のベクトルの計算

(1) 2点 $A(1, 0, 2)$ 、 $B(3, 2, 3)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めましょう。

(2) $\vec{a} = (1, 2, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 0, -4)$ のとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $2\vec{a} - \vec{b}$ と、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ を求めましょう。

考え方 2点を結ぶベクトルは「 $B - A$ 」。計算は成分ごと (④)。大きさは成分を2乗してたして $\sqrt{\quad}$ 。

式 (1) $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 2 - 0, 3 - 2) = (2, 2, 1)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

(2) $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, 2 + 0, 2 + (-4)) = (4, 2, -2)$

$2\vec{a} = (2, 4, 4)$ なので

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2 - 3, 4 - 0, 4 - (-4)) = (-1, 4, 8)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

答え (1) $(2, 2, 1)$ 、大きさ3 (2) $(4, 2, -2)$ 、 $(-1, 4, 8)$ 、3、5、9

じぶんでとこう 3

- (1) 2 点 $A(2, 1, 0)$ 、 $B(4, -1, 1)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めましょう。
- (2) $\vec{a} = (2, 2, 1)$ 、 $\vec{b} = (0, -4, 3)$ のとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $2\vec{a} - \vec{b}$ と、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ を求めましょう。

例題 4 内積となす角・直交

- (1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 1, 1)$ のなす角を求めましょう。
- (2) 1 辺 1 の立方体で、対角線 $\vec{c} = (1, 1, 1)$ と、辺 $\vec{i} = (1, 0, 0)$ のなす角を、電卓で求めましょう。
- (3) $\vec{p} = (1, 2, 3)$ と $\vec{q} = (3, 0, -1)$ は直交するか、調べましょう。

考え方 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (⑤)。内積は、 x どうし・ y どうし・ z どうしをかけてたす。

式 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$ 、 $|\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ なので } \theta = 60^\circ$$

(2) $\vec{c} \cdot \vec{i} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 1$ 、 $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ 、 $|\vec{i}| = 1$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577. \text{ 電卓 (DEG) で } \cos^{-1} 0.577 \approx 54.7^\circ$$

(3) $\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 + 0 - 3 = 0$

答え (1) 60° (2) 約 54.7° (3) 内積が 0 なので、直交する

じぶんでとこう 4

- (1) $\vec{a} = (2, 1, -1)$ 、 $\vec{b} = (1, 2, 1)$ のなす角を求めましょう。
- (2) $\vec{a} = (1, 2, 2)$ 、 $\vec{b} = (2, -1, 2)$ のなす角を、電卓で求めましょう。
- (3) $\vec{p} = (2, -1, 3)$ と $\vec{q} = (1, 5, 1)$ は直交するか、調べましょう。

例題 5 空間の仕事

ドローンが荷物をつるして運びます。ドローンが荷物を引く力は $\vec{F} = (4, 3, 20)$ (N) で、そのあいだに荷物は $\vec{s} = (10, 0, 5)$ (m) 動きました。

- (1) ドローンの力が荷物にした仕事を求めましょう。
- (2) 荷物にはたらく重力は、真下向きに 20 N です。重力がした仕事を求めましょう。

考え方 仕事は、力と動いたベクトルの内積 $W = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$ (⑤、4-12)。真下向きは z 成分がマイナス。

式 (1) $W = 4 \times 10 + 3 \times 0 + 20 \times 5 = 40 + 0 + 100 = 140$

(2) 重力は $(0, 0, -20)$ なので

$$W = 0 \times 10 + 0 \times 0 + (-20) \times 5 = -100$$

答え (1) 140 J (2) -100 J

(1) で、 y 向きの力 3 N は、荷物が y の向きに動いていないので、仕事をしません。(2) の重力は、荷物が 5 m 上がるあいだ、動きと反対向きにはたらくので、仕事がマイナスです (4-12)。

じぶんでこう 5

荷物を引く力が $\vec{F} = (5, -2, 30)$ (N) で、荷物が $\vec{s} = (6, 4, 2)$ (m) 動きました。力がした仕事を求めましょう。また、真下向き 30 N の重力がした仕事を求めましょう。

例題 6 単位ベクトルと方向余弦

$\vec{a} = (2, 3, 6)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を求めましょう。また、 $\vec{a}$ と z 軸のなす角 θ_z を、電卓で求めましょう。

考え方 $\vec{a}$ をその大きさでわる (⑥)。 $\vec{e}$ の z 成分が $\cos \theta_z$ 。

式 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{7} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

$$\cos \theta_z = \frac{6}{7} \approx 0.857. \text{ 電卓 (DEG) で } \cos^{-1} 0.857 \approx 31.0^\circ$$

答え $\vec{e} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right), \theta_z \approx 31.0^\circ$

たしかめ： $\vec{e}$ の大きさは $\sqrt{\frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$ です。

じぶんでこう 6

$\vec{a} = (1, 4, 8)$ と同じ向きの単位ベクトルを求めましょう。また、 $\vec{a}$ と z 軸のなす角を、電卓で求めましょう。

⚠ まちがえやすいところ

方向余弦を、そのまま角度だと思う

✕ $\vec{e} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ だから、 z 軸とのなす角は $\frac{6}{7}$ 度

○ $\cos \theta_z = \frac{6}{7}$ なので、 $\theta_z = \cos^{-1} \frac{6}{7} \approx 31.0^\circ$

単位ベクトルの成分は、角の $\cos$ の値です。角度にするには、電卓の $\cos^{-1}$ を使います (DEG のモードで)。

📖 例題7 法線ベクトルと平面の式

点 $P_0(1, 1, 1)$ を通り、 $\vec{n} = (1, 2, 2)$ に垂直な平面の式を求めましょう。
また、点 $Q(3, 0, 1)$ はこの平面の上にあるか、調べましょう。

考え方 平面の上の点を $P(x, y, z)$ とすると、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ (⑦)。

式 $\overrightarrow{P_0P} = (x - 1, y - 1, z - 1)$

$$1 \times (x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

$$x - 1 + 2y - 2 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z = 5$$

Q を入れると $3 + 2 \times 0 + 2 \times 1 = 5$ で、式をみたす

答え $x + 2y + 2z = 5$ 。 Q は平面の上にある

📝 じぶんでこう7

点 $P_0(2, 0, 1)$ を通り、 $\vec{n} = (3, 1, 2)$ に垂直な平面の式を求めましょう。
また、点 $Q(0, 2, 3)$ はこの平面の上にあるか、調べましょう。

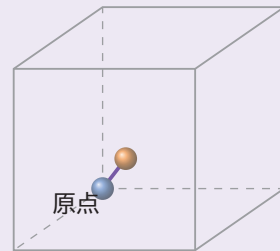
物理・工学ではこう使う

半導体の結晶

コンピューターのチップに使うシリコンの結晶では、原子が立方体のくり返しの形に並んでいます。立方体の 1 辺は 0.543 nm (ナノメートル。 1 nm は 10 億分の 1 m)。1 辺を 1 としたとき、角の原子 $(0, 0, 0)$ のとなりの原子は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ の所にあります。その距離は

$$\sqrt{3} \times \frac{1}{4} \times 0.543 \text{ nm} \approx 0.235 \text{ nm}$$

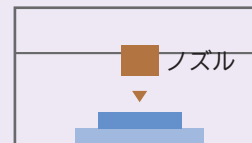
で、実験ではかったシリコン原子どうしの距離と一致します。



物理・工学ではこう使う

3D プリンター

とかした樹脂を出すノズルを、 (x, y, z) の数の指示どおりに動かします。たとえば「X10 Y20 Z0.2」は、「 x が 10 mm 、 y が 20 mm 、高さ 0.2 mm の所へ」という意味です。高さ 0.2 mm ずつ層を重ねて、立体を作ります。



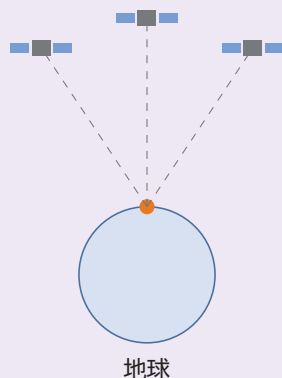
物理・工学ではこう使う

GPS（衛星測位）

高さ約 20 000 km を回る GPS 衛星は、自分の位置と時刻を電波で送っています。スマートフォンは、電波がとどくまでの時間から、衛星までの距離 d_1 を計算します。衛星の位置を (x_1, y_1, z_1) とすると、自分の位置 (x, y, z) は、空間の距離の式 (③) で

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2$$

をみます。わからない数は x 、 y 、 z と、スマートフォンの時計のずれの 4 つ。だから 4 つ以上の衛星の電波を使います。

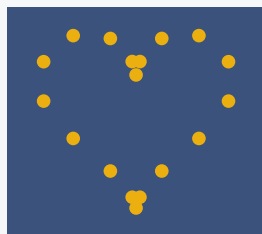


コラム ドローンショーは、3 つの数の設計図

夜空に何百機ものドローンを光らせて絵をえがくドローンショーでは、絵の点の 1 つ 1 つに座標 (x, y, z) をわりあてます。大切なのは、ドローンどうしがぶつからないことです。たとえば、2 機の行き先が $(10, 5, 30)$ と $(11, 6, 31)$ （単位は m）なら、その距離は③の式で

$$\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

です。「どの 2 機も 2 m 以上はなす」と決めていたら、近すぎるので行き先を変えます。すべての組について、この計算をくり返して確かめます。





章末問題

4-13 のまとめ

基本 ★★★

1 例題 1 の図で、 $OA = 3$ 、 $OC = 5$ 、 $OD = 4$ の直方体にかえます。頂点 F、G の座標と、点 F の真下の床の点の座標を答えてみましょう (例題 1)。

2 次の距離を求めましょう (例題 2)。

(1) 原点と点 $P(4, 4, 7)$ (2) 2 点 $A(-1, 2, 0)$ 、 $B(1, 5, 6)$

3 $\vec{a} = (1, -2, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 4, 0)$ のとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $2\vec{a} - \vec{b}$ と、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ を求めましょう (例題 3)。

4 (1) $\vec{a} = (1, -1, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 0, -1)$ のなす角を求めましょう。

(2) $\vec{p} = (4, 1, -2)$ と $\vec{q} = (1, 2, 3)$ は直交するか、調べましょう (例題 4)。

5 $\vec{a} = (2, -6, 3)$ と同じ向きの単位ベクトルを求めましょう。また、 $\vec{a}$ と x 軸のなす角を、電卓で求めましょう (例題 6)。

6 点 $P_0(1, 2, 3)$ を通り、 $\vec{n} = (2, -1, 1)$ に垂直な平面の式を求めましょう。また、点 $Q(0, 0, 3)$ はこの平面の上にあるか、調べましょう (例題 7)。

チャレンジ ★★★★★

7 校庭の点 O から飛び立ったドローンが、東へ 30 m、北へ 40 m、上へ 120 m の点 B まで、まっすぐ飛びました。東・北・上を $x \cdot y \cdot z$ の+の向きとします。

(1) OB の距離を求めましょう。(2) $\overrightarrow{OB}$ と真上 (z 軸) のなす角を、電卓で求めましょう (例題 2・例題 6)。

8 荷物を引く力が $\vec{F} = (3, -4, 25)$ (N) で、荷物が $\vec{s} = (20, 10, 4)$ (m) 動きました。力がした仕事と、真下向き 25 N の重力がした仕事を求めましょう (例題 5)。

9 1 辺 1 の立方体で、原点から向かいの角へ引いた対角線 $\vec{a} = (1, 1, 1)$ と、別の対角線 $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ のなす角を、電卓で求めましょう (例題 4)。

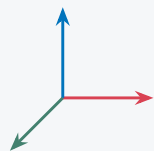
10 2 点 $A(1, 1, 0)$ 、 $B(3, -1, 1)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさ、 $\overrightarrow{AB}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めましょう (例題 3・例題 6)。

11 3D プリンターのノズルが、点 $(10, 20, 0.2)$ から点 $(40, 60, 0.2)$ まで、まっすぐ動きました (単位は mm)。動いた距離を求めましょう (例題 2)。

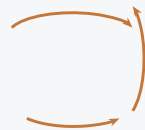
12 $\vec{a} = (2, 2, 1)$ と $\vec{b} = (1, 2, 2)$ のなす角を、電卓で求めましょう。また、 $\vec{c} = (1, -1, 0)$ と $\vec{a}$ は直交するか、調べましょう (例題 4)。

🔍 コラム VR ゴーグルは、6 つの数はかっている

VR (バーチャルリアリティ) のゴーグルをつけて頭を動かすと、画面の景色もいっしょに動きます。ゴーグルは、頭の場所 (x, y, z) の 3 つの数に加えて、頭がどちらを向いているか (上下・左右へのかたむきと、首のひねり) の 3 つの角も、1 秒に何十回以上もはかっています。場所の 3 つと向きの 3 つで、合わせて 6 つの数です。ゲーム機のコントローラーや、ロボットの手先の動きも、同じように 6 つの数で表します。この「向き」の表し方は、第 7 巻の行列で学びます。



場所の 3 つの数
 (x, y, z)



向きの 3 つの角

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 空間の点を (x, y, z) で表し、2 点の距離を求められる。

→ 436 ページ

☐ 3 次元のベクトルを成分で計算し、内積からなす角を求められる。

→ 444 ページ

☐ 基本ベクトル・単位ベクトル・法線ベクトルで、向きや平面を表せる。

→ 446 ページ



ソラ

3 つの数で、空間のどこでも言えるようになった。次は、ベクトルどうしの新しいかけ算「外積」だよ。

第3部 ベクトル

★★★★~★★★★★

4-14 外積：回す力と右ねじ

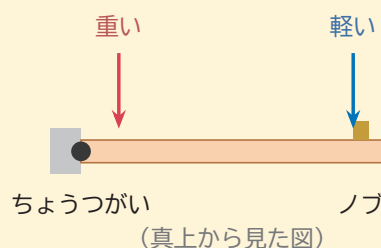
道しるべ この章の前に 4-7 4-12 4-13 この章の先に 7-4 8-10

この章でできるようになること

- ★★★★★ 回す働き（力のモーメント）を「力×うでの長さ」で求め、平面では $M = xF_y - yF_x$ で計算できる。
- ★★★★★ 外積の向き（右ねじ）と大きさ（平行四辺形の面積）がわかり、成分で計算できる。
- ★★★★★ トルク $\vec{r} \times \vec{F}$ や、磁場から受ける力の向きを、外積で求められる。

? はてな？

ドアのノブ（取っ手）は、ちょうつがいから遠い所についています。ちょうつがいのすぐそばを押して、ドアを開けようとしてみましょう。とても重く感じます。同じドアなのに、押す場所で重さがちがうのはなぜかな？ ノブがちょうつがいのそばにあったら、どうなるかな？



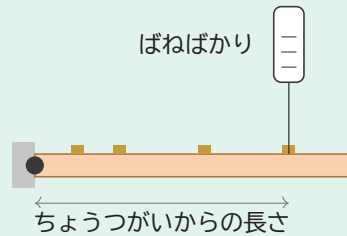
ものを「動かす」働きは、力の大きさと向きで決まりました（4-10・4-11）。この章では、ものを「回す」働きを数で表します。回す働きには、力の大きさのほかに、「どこを押すか」が大切です。そして、回す働きを向きのある量として表すと、ベクトルの新しいかけ算「外積」が出てきます。

△ やってみよう ドアを開ける力をはかろう

用意するもの

ばねばかり（またはキッチンスケール）、メジャー、ひも

- ① ドアに、ちょうつがいから 0.1 m、0.2 m、0.4 m、0.6 m、0.75 m の所に、ふせんで印をつけよう。
- ② 印の所にひもをはり、ドアの面に直角の向きに、ばねばかりでゆっくり引こう。
- ③ ドアが動き始めたときの力を読もう。
ミナさんの家のドアではかった結果です。



ちょうつがいからの長さ (m)	0.1	0.2	0.4	0.6	0.75
動き始めたときの力 (N)	6.0	3.0	1.5	1.0	0.8
力×長さ					

表の 3 行めを計算してみましょう。 $6.0 \times 0.1 = 0.6$ 、 $3.0 \times 0.2 = 0.6$ 、 $1.5 \times 0.4 = 0.6$ 、 $1.0 \times 0.6 = 0.6$ 、 $0.8 \times 0.75 = 0.6$ 。押す場所を変えると力は変わりますが、**力×長さ**は、どこでも同じ 0.6 になりました。長さが 2 倍になると、力は $\frac{1}{2}$ 倍です。2-15 で学んだ反比例の形です。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

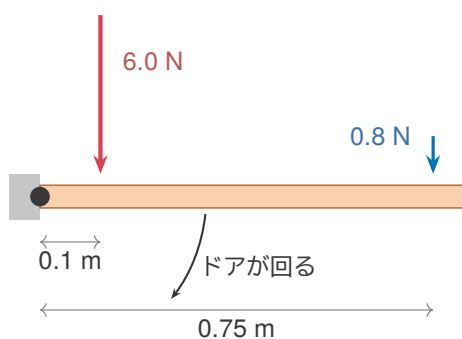
- 2-15** てこは、(おもりの重さ) × (支点からの距離) が左右で等しいときにつり合う。
- 4-7** 三角形の面積は $\frac{1}{2}ab \sin C$ (2 辺とそのあいだの角から)。
- 4-11** 力 F を、 x 軸と角 θ の向きに加えると、成分は $(F \cos \theta, F \sin \theta)$ 。
- 4-12** 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 。答えはふつうの数 (スカラー)。
- 4-13** 空間の点は (x, y, z) 。軸は右手系に並べる (x から y へ回すと、右ねじは z の向きに進む)。

この章では、 $\approx$ (「ほぼ等しい」というしるし。5-8 でくわしく) も使います。

🔧 数学の道具

① 回す働き = 力 × うでの長さ

やってみようでは、どこを押しても「力 × 長さ」が 0.6 でした。ドアが動き始めるのは、この「力 × 長さ」がある大きさ (ここでは 0.6) になったときだ、と考えられます。



ちょうつがいのように、回る中心になる所を**回転の中心** (支点) といい、中心から力をつける点までの長さを**うでの長さ**といいます。

回す働きは、

力 × うでの長さ

で表せます。

この「力 × うでの長さ」を、**力のモーメント**といいます。機械の分野では**トルク**ともいいます。力の単位は N (ニュートン)、長さの単位は m なので、力のモーメントの単位は **N・m** (ニュートンメートル) です。やってみようのドアは、 $6.0 \text{ N} \times 0.1 \text{ m} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{m}$ の力のモーメントで動き始めました。

？はてな？の答え

ドアを回すには、決まった大きさ（この家のドアでは $0.6 \text{ N}\cdot\text{m}$ ）の力のモーメントが必要です。力のモーメントは「力 $\times$ うでの長さ」なので、うでが長い（ちょうつがいから遠い）ほど、小さい力ですみます。ノブを 0.75 m の所につけると 0.8 N で開きますが、 0.1 m の所だと 6.0 N 、 7.5 倍の力がいります。だから、ノブはちょうつがいから遠い所についているのです。

せいかくに言うと

力がはたらく点（作用点）が大切

4-10 では、「力がどこにはたらくか（作用点）と、物を回す働きは、4-14 で調べる」と予告しました。物を動かす（ずらす）働きだけなら、力の大きさと向きで決まりました。でも、回す働きは、同じ大きさ・同じ向きの力でも、作用点が回転の中心からどれだけ離れているかで変わります。ドアのノブを押すのと、ちょうつがいのそばを押すのでは、力のベクトルは同じでも、回す働きは 7.5 倍ちがいました。だから、回す働きを考えると、力のベクトルに加えて、作用点の位置（回転の中心から作用点へのベクトル）も必要になります。この 2 つから回す働きを作る計算が、⑤の外積です。

1 つり合い：左回りと右回りが等しい

シーソーで考えます。左の人は、シーソーを左回り（反時計回り）に回そうとします。右の人は、右回り（時計回り）に回そうとします。2 つの力のモーメントが等しいとき、シーソーはどちらにも回らず、つり合います。これは 2-15 のてこのつり合いと同じです。

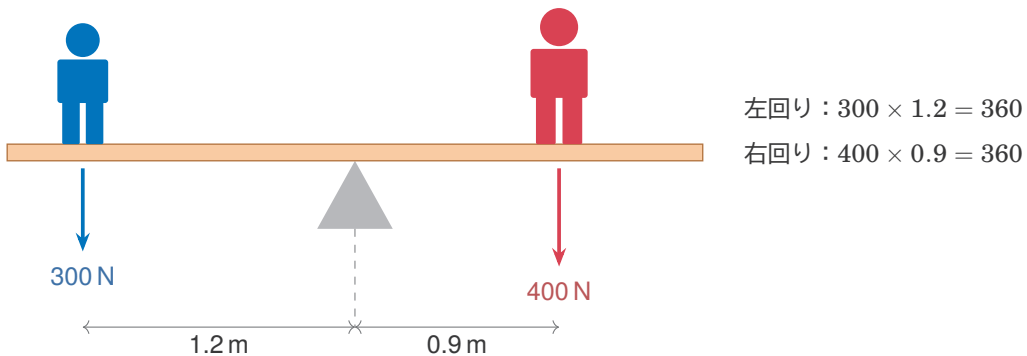


図 1 重力（重さ） 300 N の人が支点から 1.2 m 、 400 N の人が 0.9 m にすわると、左回りと右回りの力のモーメントが等しく、つり合う。

② ななめに押すと：うでに直角な部分だけが回す

ドアを押すとき、ドアの面に直角ではなく、ななめに押したらどうなるでしょう。極端な場合を考えます。ドアのノブを、ちょうつがいに向かってまっすぐ押すと、ドアはまったく回りません。力はちょうつがいを押すだけです。

ななめの力は、2通りの見方で考えられます。

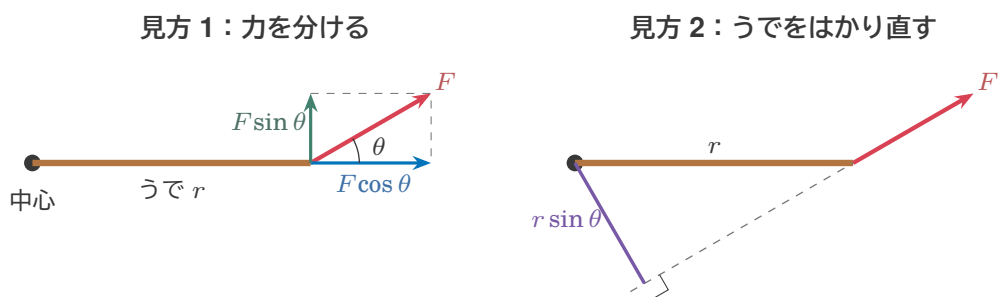


図2 見方1：うでにそった部分 $F \cos \theta$ (青) は中心を引くだけで、回さない。うでに直角な部分 $F \sin \theta$ (緑) だけが回す。見方2：力の矢印をのばした線(点線)に、中心から直角に引いた長さ $r \sin \theta$ (むらさき) を、うでの長さとする。

- **見方1：力を分ける** 力 F を、うでにそった部分と、うでに直角な部分に分けます(4-11の力の分解)。うでとのなす角を θ とすると、うでに直角な部分は $F \sin \theta$ 。回す働きは $r \times F \sin \theta$ 。
- **見方2：うでをはかり直す** 力の矢印をまっすぐのばした線(作用線)に、回転の中心から垂線を下ろします。その長さは $r \sin \theta$ (直角三角形で、斜辺 r の向かいの辺)。回す働きは $r \sin \theta \times F$ 。

どちらで考えても、

力のモーメント $M = rF \sin \theta$ (θ は、うでと力のなす角)

になります。 $\theta = 90^\circ$ (うでに直角に押す) なら $\sin 90^\circ = 1$ で、いちばん大きい rF 。 $\theta = 0^\circ$ (中心に向かって押す) なら $\sin 0^\circ = 0$ で、回しません。

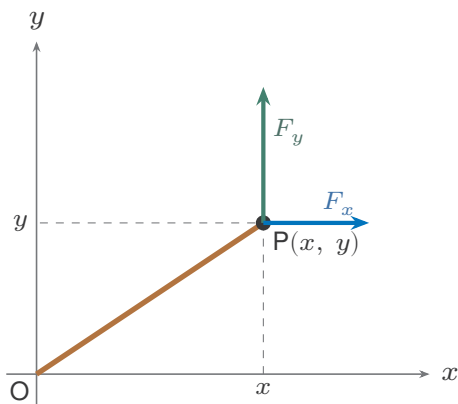
3 平面で、成分から計算する： $M = xF_y - yF_x$

力が座標で与えられたときは、角度を求めなくても計算できる方法があります。回転の中心を原点 O にして、力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ が点 $P(x, y)$ にかかっているとします。

1 回る向きに、符号をつける

回す働きには、左回りと右回りの2つの向きがあります。4-8の角と同じように、**左回り（反時計回り）を+**、**右回り（時計回り）を-**と決めます。シーソーなら、左の人の力のモーメントは+、右の人の力は-です。つり合いは「合計が0」と言いかえられます。

2 力を x と y の成分に分けて、1つずつ考える



上向きの F_y (緑)

上向きの力のうでの長さは、 O から横に x 。 P を上に押すと、 O のまわりを左回りに回す。だから $+xF_y$ 。

右向きの F_x (青)

右向きの力のうでの長さは、 O からの高さ y 。 P を右に押すと、 O のまわりを右回り（時計回り）に回す。だから $-yF_x$ 。

2つを合わせて、

$$\boxed{M = xF_y - yF_x} \quad (+ \text{なら左回り、} - \text{なら右回り})$$

x や y がマイナスの点、 F_x や F_y がマイナスの力でも、この式のままで、符号まで正しく出てきます。

3 数で、2通りにたしかめる

$P(0.3, 0.4)$ (m) を、真上向きに 10 N で押します。 $\vec{F} = (0, 10)$ です。

● **成分の式で** $M = 0.3 \times 10 - 0.4 \times 0 = 3$ (N・m、左回り)

● **②の式で** うでの長さは $r = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5$ (4-4)。うでの向きは x 軸から約 53.1° ($\cos$ が $\frac{0.3}{0.5} = 0.6$ の角)、力は 90° の向きなので、なす角は $\theta = 90^\circ - 53.1^\circ = 36.9^\circ$ 。 $\sin 36.9^\circ \approx 0.6$ なので、 $M = 0.5 \times 10 \times 0.6 = 3$

同じ 3 になりました。成分の式なら、角度を求めずにすみません。

4 回す向きを、矢印で表す：右ねじ

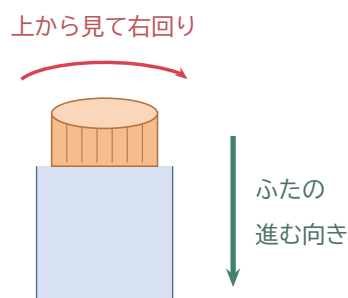
平面の上なら、回る向きは左回りか右回りの 2 つだけで、符号で区別できました。でも空間では、回る「軸」がいろいろな向きを向きます。ドアは上下の軸のまわりに、自転車の車輪は横の軸のまわりに回ります。回る向きを、どう表せばよいでしょう。

答えは、**回る軸の向きの矢印**で表すことです。

軸には 2 つの向きがあるので、どちらを向けるかは、右ねじで決めます (4-13)。

● 右手の 4 本の指を、回る向きにそって曲げる。

● そのとき親指が向く向きが、矢印の向き。
右ねじを、回る向きに回したとき、ねじが進む向きと同じです。ペットボトルのふたを上から見て右回り（時計回り）に回すと、ふたは下へ進み、しまります。この回り方は、下向きの矢印で表します。



紙の上での書き方： $\odot$ と $\otimes$

平面の図で、左回り・右回りを矢印で表すと、矢印は紙に垂直になります。そこで、紙から手前へ出てくる向きを $\odot$ 、紙のおくへ入る向きを $\otimes$ と書きます。矢の先を前から見た形が $\odot$ 、矢の羽根を後ろから見た形が $\otimes$ です。

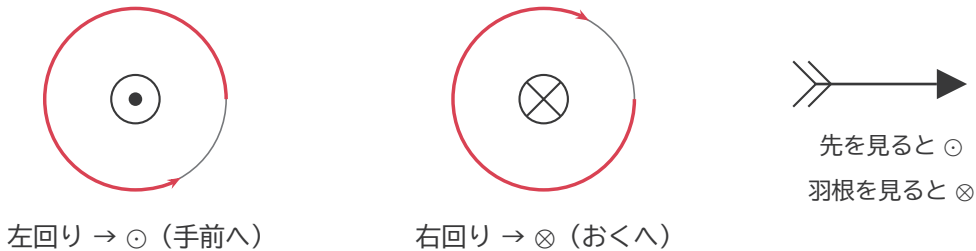


図3 xy 平面（紙）の上で左回りに回すと、右ねじは紙から手前（ z の+の向き）へ進む。
4-13 の右手系の約束どおり。

xy 平面で左回り（ x から y へ回る向き）は、4-13 の右手系の約束で、 z 軸の+の向き（ $\odot$ ）です。だから、③の $M = xF_y - yF_x$ は、「回す向きの矢印の z 成分」と読めます。 M が+なら矢印は $\odot$ 、-なら $\otimes$ です。

5 2つのベクトルから、垂直なベクトルを作る：外積

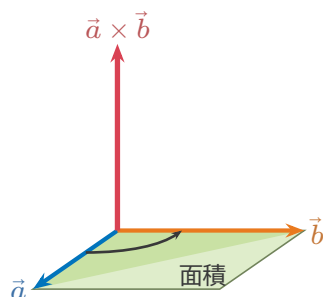
ここまでで、回す働きは「うでのベクトル」と「力のベクトル」から決まり、大きさは $rF\sin\theta$ 、向きは右ねじの軸の向き、とわかりました。これを、どんな2つのベクトルにも使えるように、計算のきまりにします。

1 外積の決め方

2つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ のなす角を θ とします。次の大きさと向きをもつベクトルを、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積**（がいせき）といい、 $\vec{a} \times \vec{b}$ と書きます。

大きさ	$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin\theta$
向き	$\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直。 $\vec{a}$ を $\vec{b}$ のほうへ（小さいほうの角 θ だけ）回すとき、右ねじが進む向き。

「 $\times$ 」の記号は、ふつうの数のかけ算と同じ形ですが、ベクトルの外積ではベクトルが答えです。読み方は「エー・クロス・ビー」。内積の「 $\cdot$ 」と取りちがえないようにします。



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形（黄緑）を考えます。

大きさ 平行四辺形の面積は、三角形（こい黄緑）の2倍です。三角形の面積は $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (4-7) なので、平行四辺形は $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 。外積の大きさは、**平行四辺形の面積**と同じです。

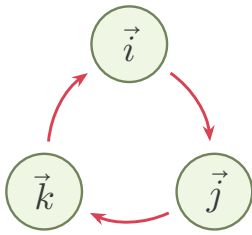
向き 平行四辺形の面に垂直（面の法線ベクトル、4-13）。

力のモーメントは、うで $\vec{r}$ と力 $\vec{F}$ の外積 $\vec{r} \times \vec{F}$ です。大きさ $rF\sin\theta$ は②の式、向きは④の右ねじの向きで、ぴったり合っています。

② 基本ベクトルどうしの外積

4-13 の基本ベクトル $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ で外積を計算します。どれも長さ1で、たがい直角（ $\sin 90^\circ = 1$ ）なので、外積の大きさは1です。向きは右ねじで決まります。

- $\vec{i} \times \vec{j}$: x から y へ回すと、右ねじは z へ進む（右手系の約束）。だから $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 。
- 同じように、 y から z へ回すと x へ、 z から x へ回すと y へ進む。だから $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ 、 $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ 。
- 順番を逆にすると、回す向きが逆なので、ねじは反対へ進む。 $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ など。
- 同じものどうしは、なす角が 0° で $\sin 0^\circ = 0$ 。 $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ （ゼロベクトル。4-10）。



矢印の向きにたどると＋：

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

逆向きにたどると－：

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

図4 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ の順にまわる。この順の2つをかけると、残りの1つ（＋）。

3 成分の式を作る

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ 、 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ と書きます (4-13)。外積でも、かっこをはずすきまり（分配法則。 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ など）と、数を出すきまりが成り立つことが知られています。それを使って、全部で9組のかけ算をします。同じものどうし（ $\vec{i} \times \vec{i}$ など）の3組は0なので、残りは6組です。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) \\ &\quad + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \end{aligned}$$

$\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ ごとにまとめると、

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x)$$

z 成分の $a_x b_y - a_y b_x$ は、③の平面の式 $x F_y - y F_x$ と同じ形です。 x 成分と y 成分は、文字を $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ と1つずつずらすと作れます。

たすきがけで、まちがえずに計算する

			くり返し		
a_x	a_y	a_z	a_x	a_y	x 成分： $a_y b_z - a_z b_y$
					y 成分：右へ1つずらして $a_z b_x - a_x b_z$
b_x	b_y	b_z	b_x	b_y	z 成分：もう1つずらして $a_x b_y - a_y b_x$

図5 成分を2回くり返して並べる。 x 成分は、 y と z の列でたすきかけ、右下がり（青）－左下がり（赤）。

4 数で、たしかめる

$\vec{a} = (3, 0, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 2, 0)$ では、

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0 \times 0 - 0 \times 2, 0 \times 1 - 3 \times 0, 3 \times 2 - 0 \times 1) = (0, 0, 6)$$

● **向き** $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は床 (xy 平面) の上の矢印で、答えは真上 (z の+) の向き。 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へは左回りなので、右ねじは上へ進む。合っています。

● **大きさ** 6。平行四辺形の底辺は $|\vec{a}| = 3$ 、高さは $\vec{b}$ の y 成分の 2 なので、面積は $3 \times 2 = 6$ 。合っています。

もう 1 つ、 $\vec{a} = (1, 2, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 1, 3)$ では、 $\vec{a} \times \vec{b} = (6, -3, 1)$ です (例題 4)。 $\vec{a}$ との内積は $6 - 6 + 0 = 0$ 、 $\vec{b}$ との内積は $0 - 3 + 3 = 0$ 。どちらも内積が 0 なので、**答えは $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直です (4-12)。**

5 表計算で、外積を計算する

成分の式は、表計算にそのまま入れられます。2 行めに $\vec{a}$ 、3 行めに $\vec{b}$ の成分を入れ、4 行めに外積の式を入れます。

	A	B	C	D
1		x 成分	y 成分	z 成分
2	$\vec{a}$	1	2	0
3	$\vec{b}$	0	1	3
4	$\vec{a} \times \vec{b}$	=C2*D3-D2*C3	=D2*B3-B2*D3	=B2*C3-C2*B3
5	(結果)	6	-3	1

表 1 4 行めの式は、たすきがけ (③) をセルの名前で書いたもの。5 行めは、4 行めに出る答え。

2 行め・3 行めの数を変えるだけで、どんな外積でもすぐに計算できます。例題や問題の答えのたしかめに使いましょう。

6 外積の性質：内積とくらべる

1 順番を入れかえると、向きが反対

$\vec{b} \times \vec{a}$ は、 $\vec{b}$ から $\vec{a}$ へ回すので、右ねじは $\vec{a} \times \vec{b}$ と反対へ進みます。大きさは同じです。

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

ふつうの数のかけ算は $2 \times 3 = 3 \times 2$ ですが、外積では順番が大切です。成分の式でも、 a と b を入れかえると、どの成分も符号が反対になります。

2 平行なら 0

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向き ($\theta = 0^\circ$) か反対向き ($\theta = 180^\circ$) なら、 $\sin \theta = 0$ なので、外積は $\vec{0}$ です。平行四辺形がつぶれて、面積が 0 になるからです。とくに $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ 、 $\vec{a} \times (2\vec{a}) = \vec{0}$ 。ドアのノブを、ちょうつがいに向かって押しても回らないのと同じです。

⚠ まちがえやすいところ

外積の順番を入れかえる

✗ $\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$

○ $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

外積では順番が大切です。 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ の順なら＋、逆なら－です。

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ 。

	内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (4-12)	外積 $\vec{a} \times \vec{b}$
答え	ふつうの数 (スカラー)	ベクトル
大きさ	$ \vec{a} \vec{b} \cos \theta$	$ \vec{a} \vec{b} \sin \theta$
いちばん大きいとき	平行 ($\theta = 0^\circ$)	直角 ($\theta = 90^\circ$)
0 になるとき	直角	平行
順番を入れかえると	同じ	符号が反対
物理では	仕事 $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$	力のモーメント $\vec{r} \times \vec{F}$

表2 内積は「どれだけ同じ向きか」、外積は「どれだけ直角に開いているか」を表す。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

内積と外積の、うれしい関係

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ (4-8) の両辺に $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ をかけると、

$$(|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta)^2 + (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

1 つめは内積の2乗、2 つめは外積の大きさの2乗です。つまり

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

⑤の $\vec{a} = (1, 2, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 1, 3)$ でたしかめます。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ 、 $\vec{a} \times \vec{b} = (6, -3, 1)$ なので、左は $2^2 + (36 + 9 + 1) = 4 + 46 = 50$ 。右は $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = 5 \times 10 = 50$ 。合っています。「同じ向きの部分」と「直角に開いた部分」を合わせると、全体になるのです。

3 三角形の面積を、座標から求める

3点 A、B、C がつくる三角形の面積は、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ がつくる平行四辺形の半分です。だから

$$\text{三角形 ABC の面積} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

4-7 の $\frac{1}{2}ab \sin C$ と同じことを、角度を求めずに、座標だけで計算できます。空間の中の、ななめにかたむいた三角形でも使えます。

4 3 点を通る平面の式

4-13 では、法線ベクトル (a, b, c) がわかれば、平面の式 $ax + by + cz = d$ が作れました。外積を使うと、3 点を通る平面の法線ベクトルが作れます。 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ は、 $\overrightarrow{AB}$ にも $\overrightarrow{AC}$ にも垂直、つまり平面 ABC に垂直だからです。

A(1, 0, 0)、B(0, 2, 0)、C(0, 0, 2) では、 $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$ なので、成分の式で $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 2, 2)$ です（くわしい計算は例題 5）。だから平面の式は $4x + 2y + 2z = d$ 。A を入れると $4 \times 1 + 0 + 0 = 4$ なので $d = 4$ 。両辺を 2 でわって

$$2x + y + z = 2$$

B を入れると $0 + 2 + 0 = 2$ 、C を入れると $0 + 0 + 2 = 2$ で、3 点とも式をみたしています。

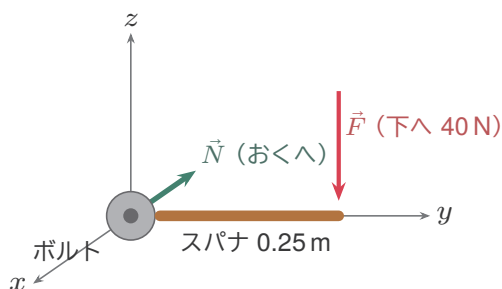
7 トルクと角運動量

1 空間のトルク $\vec{r} \times \vec{F}$

回転の中心から力をかける点までのベクトルを $\vec{r}$ 、力を $\vec{F}$ とすると、力のモーメント（トルク）は

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{大きさ } rF \sin \theta, \text{ 向きは回す軸の向き})$$

です。トルクは $\vec{N}$ や、ギリシャ文字の τ （タウ）で書くことが多いです。



かべにさしたボルト（軸は x の向き。 x の+がこちら向き）に、 y の向きにスパナ（長さ 0.25 m）をかけ、先を真下に 40 N で押します。
 $\vec{r} = (0, 0.25, 0)$ 、 $\vec{F} = (0, 0, -40)$ です。

外積の成分の式 (5) で計算します。

- x 成分 $0.25 \times (-40) - 0 \times 0 = -10$
- y 成分 $0 \times 0 - 0 \times (-40) = 0$
- z 成分 $0 \times 0 - 0.25 \times 0 = 0$

トルクは $\vec{N} = (-10, 0, 0)$ で、 x の-の向き（かべのおくへ）に 10 N・m。手前から見るとスパナは右回り（時計回り）に回り、右ねじはおくへ進みます。ボルトがかべにしめこまれる向きです。

トルクの矢印の向きが、ボルトの軸の向きと同じになりました。トルクの矢印は、「どの軸のまわりに、どちら向きに回すか」を 1 本の矢印で表しているのです。

2 角運動量：回る勢い

質量 m の物が、速度 $\vec{v}$ で動いています。 $m\vec{v}$ を運動量といいます（物理シリーズで学びます）。中心から物までのベクトルを $\vec{r}$ として、

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

を、中心のまわりの**角運動量**といいます。「どの軸のまわりに、どれだけの勢いで回っているか」を表すベクトルです。

半径 r の円の上を速さ v で回る物では、速度は半径に直角（4-2 の接線）なので、 $\sin 90^\circ = 1$ で、大きさは $L = rmv$ です。 $v = r\omega$ (4-8) を入れると $L = mr^2\omega$ 。

フィギュアスケートの選手は、広げたうでをたたむと、速く回ります。外から回す力（トルク）がはたらかなければ、角運動量は変わらない、という自然の法則があるからです（角運動量の保存。物理シリーズ 力-6）。うでの物の回る半径 r が半分になると、 r^2 は $\frac{1}{4}$ になるので、 $mr^2\omega$ が変わらないためには、 ω が4倍になります（体のほかの部分は考えない、簡単にしたモデル）。

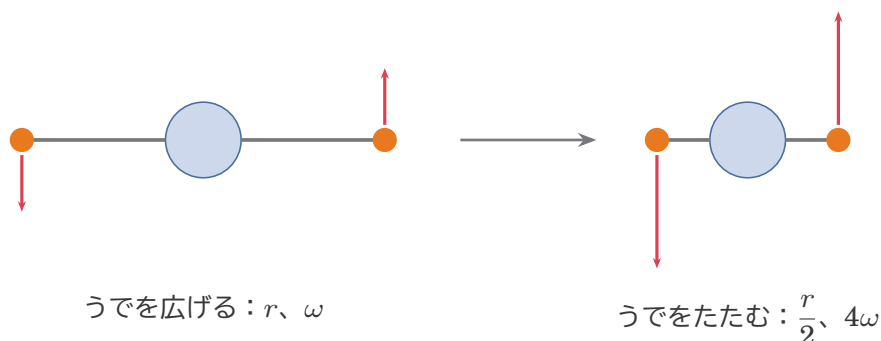


図6 上から見たスケートの選手（うでの先のおもりだけを考えた、簡単なモデル）。回る半径が半分になると、角速度は4倍。赤い矢印はおもりの速さ $v = r\omega$ で、 $\frac{r}{2} \times 4\omega = 2r\omega$ なので2倍になる。

8 電流が磁場から受ける力

モーターが回るのは、磁石の近くの導線に電流を流すと、導線が力を受けるからです。この力の向きも、外積で表せます。

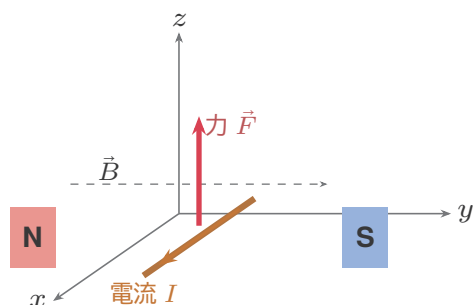
1 力の式

磁石の力が届いている場所を磁場といい、その向きと強さをベクトル $\vec{B}$ （単位 T、テスラ）で表します。電荷 q （単位 C、クーロン）の粒子が速度 $\vec{v}$ で磁場の中を動くと、

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

の力を受けます。この力をローレンツ力といいます。導線の中の電流は、たくさんの電荷の流れです。長さ L の導線に電流 I が流れるとき、電流の向きで長さ L のベクトルを $\vec{L}$ とすると、導線が受ける力は

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad (\text{大きさ } ILB \sin \theta)$$



電流が x の+の向き、磁場が y の+の向きなら、 $\vec{L}$ は $\vec{i}$ の向き、 $\vec{B}$ は $\vec{j}$ の向きです。 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ なので、導線は z の+の向き（上）に押されます。

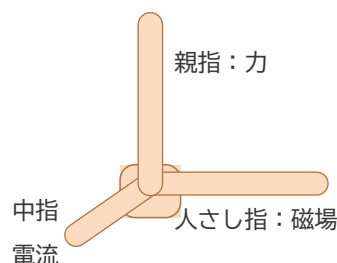
$I = 3\text{ A}$ 、 $L = 0.2\text{ m}$ 、 $B = 0.5\text{ T}$ なら、直角なので $\sin 90^\circ = 1$ で、

$$F = 3 \times 0.2 \times 0.5 = 0.3\text{ N}$$

2 フレミングの左手の法則

中学校の理科では、この向きを左手で覚えました。左手の親指・人さし指・中指を直角に開き、

左手の指	表すもの	外積では
中指	電流 I ($\vec{L}$)	外積の1つめ
人さし指	磁場 $\vec{B}$	外積の2つめ
親指	力 $\vec{F}$	答えの向き



「電・磁・力」と、中指から順に覚えます。外積 $\vec{L} \times \vec{B}$ の右ねじの向きと、左手の親指の向きは、いつも同じになります。左手の法則は、外積の向きを、右ねじを使わずに指で調べる方法なのです。外積のきまりを知っていれば、左手の法則を覚えていなくても、向きを計算で出せます。

3 マイナスの電荷のとき

電子の電荷は負 ($q = -1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$) です。 q がマイナスなので、 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ は、 $\vec{v} \times \vec{B}$ と反対向きになります。電子が x の+の向きに動いても、電流は電子と反対向き (x の-の向き) と決められているので、電流で考えても同じ答えになります。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

3つのベクトルでつくる箱の体積

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ の3本がつくる、ななめにかたむいた箱（平行六面体）の体積を考えます。底の平行四辺形の面積は $|\vec{a} \times \vec{b}|$ です。高さは、 $\vec{c}$ の、底に垂直な向き（ $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き）の成分です（4-12の正射影）。だから

$$\text{体積} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

たとえば $\vec{a} = (2, 0, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 3, 0)$ 、 $\vec{c} = (1, 1, 4)$ なら、 $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 6)$ で、 $(0, 0, 6) \cdot (1, 1, 4) = 24$ 。底面積 $2 \times 3 = 6$ 、高さ 4 で、 $6 \times 4 = 24$ と合います。 $\vec{c}$ がななめにかたむいていても、高さ（ z 成分の 4）しか体積に関係しないのです。これをスカラー三重積といい、7-4 の行列式で、もう一度出会います。

🔍 もっと知りたい ★★★

電流のまわりの磁場：右ねじの法則

中学校の理科では、まっすぐな導線に電流を流すと、導線のまわりに、輪のような磁場ができることを学びました。その向きは、「電流の向きに右ねじが進むとき、ねじを回す向きが磁場の向き」です（右ねじの法則）。これは④の「回る向きを、軸の向きの矢印で表す」の、ちょうど反対の読み方です。軸の矢印（電流）がわかれば、まわりを回る向き（磁場）がわかります。くわしい式（外積が出てきます）は、物理シリーズの電磁気学と 8-10 で学びます。

🔍 コラム 台風の渦は、なぜ左回り？

北半球の台風を上から見ると、雲の渦はいつも左回り（反時計回り）です。地球が回っているので、地面の上を動く空気は、進む向きに対して右へそまっています。この見かけの力（コリオリの力）は、地球の自転の角速度のベクトル $\vec{\omega}$ と、空気の速度 $\vec{v}$ の外積を使って $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ (m は空気の質量) と表されます。気圧の低い中心へ流れこむ空気が、みな右へそれるので、全体として左回りの渦になります。南半球では、それる向きが反対で、台風（サイクロン）は右回りです。

📖 専門書をのぞいてみよう 力学・電磁気学の書き方

点 $\mathbf{r}$ に力 $\mathbf{F}$ がはたらくとき、原点のまわりの力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

である。質点の角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ について、 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{L}$ は一定に保たれる。また、磁束密度 $\mathbf{B}$ の中を速度 $\mathbf{v}$ で運動する電荷 q は、次の力を受ける。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

訳 太字はベクトル (4-13)。 $\mathbf{p}$ は運動量 $m\mathbf{v}$ 。「力のモーメントが 0 なら、角運動量は変わらない」。 $\mathbf{B}$ の名前「磁束密度」は、この章の「磁場」のこと（くわしくは電磁気学で）。

🔍 コラム わざと「左ねじ」にした、ねじ

ふつうのねじは右ねじですが、わざと左ねじ（左に回すとしまる）にしてあるねじもあります。自転車の左のペダルは、こぐ回転でゆるまないように、左ねじになっています。プロパンガスのような、燃えるガスの容器の口も、水や空気の道具とまちがえてつながらないように、左ねじになっているものがあります。ねじの向きも、安全のための工夫なのです。

たいせつ

モーメント	力×うでの長さ。 $M = rF \sin \theta$
平面	$M = xF_y - yF_x$ （左回りが+）
外積の大きさ	$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \theta$ （平行四辺形の面積）
外積の向き	$\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直。 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ回す右ねじの進む向き
成分	$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$
性質	$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ 。平行なら $\vec{0}$
物理	トルク $\vec{r} \times \vec{F}$ 、角運動量 $\vec{r} \times m\vec{v}$ 、磁場からの力 $q\vec{v} \times \vec{B}$

📖 この章で出てきたことば

力のモーメント（トルク） ものを回す働き。力×うでの長さ。単位 N・m。

右ねじ 右に回すと進むねじ。回す向きを、軸の向きの矢印で表すときに使う。

外積 大きさ $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$ 、向きは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直で右ねじの向きのベクトル。

角運動量 回る勢いを表すベクトル $\vec{r} \times m\vec{v}$ 。

ローレンツ力 磁場の中を動く電荷が受ける力 $q\vec{v} \times \vec{B}$ 。

記号カード

初めて出た章 4-14

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

読み方 エー・クロス・ビー
 意味 外積。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトル。大きさ $ab \sin \theta$
 英語 cross product

記号カード

初めて出た章 4-14



読み方 手前へ・おくへ
 意味 紙に垂直な向き。 $\odot$ は手前へ出る、 $\otimes$ はおくへ入る
 英語 out of / into the page

例題でたしかめよう

例題1 シーソーのつり合い

重さ（重力）300 N の人が、シーソーの支点から左へ 1.2 m の所にすわっています。400 N の人は、支点から右へ何 m の所にすわればつり合いますか。

考え方 左回りの力のモーメント＝右回りの力のモーメント (①)。求める長さを x m とする。

式 左回り： $300 \times 1.2 = 360$

右回り： $400 \times x$

$400x = 360$ 両辺を 400 でわって $x = 0.9$

答え 0.9 m

重い人ほど、支点の近くにすわればよいことがわかります。

じぶんでとこう1

重さ 240 N の人が支点から左へ 1.5 m の所にすわっています。360 N の人は、支点から右へ何 m の所にすわればつり合いますか。

⚠ まちがえやすいところ

ななめの力で、**cos** を使ってしまう

✕ うで r 、力 F 、なす角 θ のとき $M = rF \cos \theta$

○ $M = rF \sin \theta$ (うでに直角な部分 $F \sin \theta$ が回す)

$\theta = 0^\circ$ (中心に向かって押す) で考えると、 $\cos 0^\circ = 1$ では最大になってしまいます。回らないはずなので、 $\sin 0^\circ = 0$ が正しいとわかります。

📖 例題 2 ななめの力のモーメント

長さ 0.3 m のスパナの先を、スパナとのなす角 30° の向きに 50 N で引き
ます。ボルトを回す力のモーメントを求めましょう。

考え方 $M = rF \sin \theta$ (②)。 θ は、うで (スパナ) と力のなす角。

式 $M = 0.3 \times 50 \times \sin 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ (4-6) なので } M = 0.3 \times 50 \times 0.5 = 7.5$$

答え 7.5 N·m

同じ 50 N でも、スパナに直角に引けば $0.3 \times 50 = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$ で、2 倍の働きになります。

🔪 じぶんでこう 2

長さ 0.2 m のスパナの先を、スパナとのなす角 60° の向きに 60 N で引き
ます。力のモーメントを求めましょう ($\sin 60^\circ \approx 0.866$)。

例題3 平面の力のモーメントを成分で

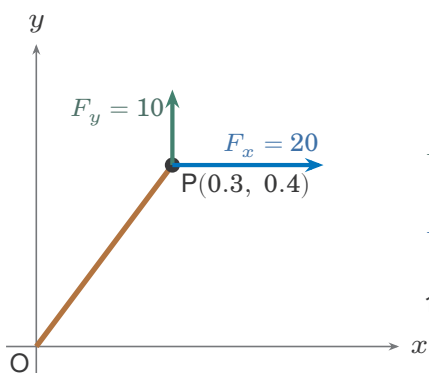
原点 O を中心に回る板の点 $P(0.3, 0.4)$ (m) に、力 $\vec{F} = (20, 10)$ (N) がはたらきます。 O のまわりの力のモーメントを求め、回る向きを答えましょう。

考え方 $M = xF_y - yF_x$ (③)。+なら左回り、-なら右回り。

式 $M = 0.3 \times 10 - 0.4 \times 20$
 $= 3 - 8 = -5$

答え $5 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、右回り (時計回り)

上向きの $F_y = 10$ は左回りに 3、右向きの $F_x = 20$ は右回りに 8 の働きをします。右回りのほうが大きいので、右回りです。



F_y : うでの長さ $x = 0.3$ 、左回り $+0.3 \times 10 = +3$

F_x : うでの長さ $y = 0.4$ 、右回り $-0.4 \times 20 = -8$

合わせて $3 - 8 = -5$ (右回り)

図7 例題3の力を、成分ごとに分けて見る。

じぶんでこう3

点 $P(0.5, 0.2)$ (m) に、力 $\vec{F} = (-10, 30)$ (N) がはたらきます。原点のまわりの力のモーメントを求め、回る向きを答えましょう。

例題 4 外積を成分で計算する

$\vec{a} = (1, 2, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, 1, 3)$ について、

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ を求め、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と垂直であることを、内積でたしかめよう。

(2) $\vec{b} \times \vec{a}$ を求めよう。(3) $\vec{a} \times (2\vec{a})$ を求めよう。

考え方 成分の式 ($a_y b_z - a_z b_y$, $a_z b_x - a_x b_z$, $a_x b_y - a_y b_x$) (⑤)。順番を入れかえると符号が反対、平行なら 0 (⑥)。

式 (1) x 成分 $2 \times 3 - 0 \times 1 = 6$

y 成分 $0 \times 0 - 1 \times 3 = -3$

z 成分 $1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$

$\vec{a}$ との内積 $1 \times 6 + 2 \times (-3) + 0 \times 1 = 0$

$\vec{b}$ との内積 $0 \times 6 + 1 \times (-3) + 3 \times 1 = 0$

(2) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 3, -1)$

(3) $2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と平行なので、 $\vec{0}$

答え (1) $(6, -3, 1)$ (内積はどちらも 0 で、垂直) (2) $(-6, 3, -1)$

(3) $\vec{0} = (0, 0, 0)$

じぶんでこう 4

$\vec{a} = (2, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 0, 1)$ について、(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ を求め、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ との内積が 0 になることをたしかめよう。(2) $\vec{b} \times \vec{a}$ を求めよう。(3) $\vec{b} \times (3\vec{b})$ を求めよう。

例題5 外積で三角形の面積を求める

3点 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 2, 0)$ 、 $C(0, 0, 2)$ がつくる三角形の面積を求めましょう。

考え方 面積は $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ (⑥)。

式 $\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 2 - 0, 0 - 0) = (-1, 2, 0)$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1, 0 - 0, 2 - 0) = (-1, 0, 2)$$

外積の x 成分 $2 \times 2 - 0 \times 0 = 4$

y 成分 $0 \times (-1) - (-1) \times 2 = 2$

z 成分 $(-1) \times 0 - 2 \times (-1) = 2$

大きさ $\sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

面積 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \approx 2.45$

答え $\sqrt{6}$ (約 2.45)

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$ は、3-10 の $\sqrt{\quad}$ の計算です。

じぶんでこう5

3点 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(0, 2, 0)$ 、 $C(0, 0, 2)$ がつくる三角形の面積を求めましょう。

例題 6 磁場から導線が受ける力

x の+の向きに 3 A の電流が流れる長さ 0.2 m の導線が、 y の+の向きの 0.5 T の磁場の中にあります。導線が受ける力の向きと大きさを求めましょう。

考え方 $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$ (⑧)。 $\vec{L} = (0.2, 0, 0)$ 、 $\vec{B} = (0, 0.5, 0)$ 。

式 $\vec{L} \times \vec{B} = (0 \times 0 - 0 \times 0.5, 0 \times 0 - 0.2 \times 0, 0.2 \times 0.5 - 0 \times 0)$
 $= (0, 0, 0.1)$

$\vec{F} = 3 \times (0, 0, 0.1) = (0, 0, 0.3)$

答え z の+の向きに 0.3 N

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ から、向きはすぐに z の+とわかります。フレミングの左手の法則でも同じ向きになることを、自分の左手でたしかめましょう。

じぶんでこう 6

y の+の向きに 2 A の電流が流れる長さ 0.5 m の導線が、 z の+の向きの 0.4 T の磁場の中にあります。導線が受ける力の向きと大きさを求めましょう。

△ まちがえやすいところ

左手の法則で、指の役わりを取りちがえる

✕ 親指を電流、中指を力にする

○ 中指から「電・磁・力」：中指が電流、人さし指が磁場、親指が力
 取りちがえると、力の向きが反対になります。外積 $I \vec{L} \times \vec{B}$ でも計算して、2つの方法で答えをたしかめましょう。

例題7 トルクのベクトル

ボルトから見て $\vec{r} = (0, 0.3, 0)$ (m) の所に、力 $\vec{F} = (0, 0, 50)$ (N) をかけます。トルク $\vec{r} \times \vec{F}$ を求め、ボルトの軸がどの向きかを答えましょう。

考え方 外積の成分の式 (⑤) で計算する。トルクの矢印の向きが、回す軸の向き (⑦)。

式 x 成分 $0.3 \times 50 - 0 \times 0 = 15$

y 成分 $0 \times 0 - 0 \times 50 = 0$

z 成分 $0 \times 0 - 0.3 \times 0 = 0$

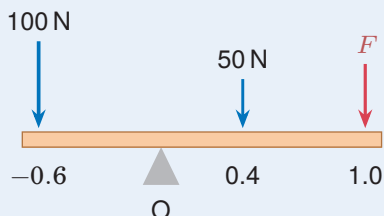
答え $(15, 0, 0)$ (N·m)。 x 軸の向きの軸のまわりに、右ねじが x の+へ進む向きに回す

じぶんでこう7

ボルトから見て $\vec{r} = (0.25, 0, 0)$ (m) の所に、力 $\vec{F} = (0, 0, -40)$ (N) をかけます。トルクを求め、どの向きの軸のまわりに回すかを答えましょう。

例題 8 いくつもの力がはたらく棒のつり合い

支点 O （原点）で支えた横向きの棒に、図のように力がはたらいています。点 $x = -0.6$ (m) に下向き 100 N、点 $x = 0.4$ (m) に下向き 50 N。点 $x = 1.0$ (m) に下向きの力 F を加えて、棒をつり合わせます。 F を求めましょう。



考え方 力はどれも下向きなので F_y が負、 $F_x = 0$ 、 $y = 0$ 。1 つずつ $M = xF_y - yF_x = xF_y$ (③) を計算し、合計を 0 にする (①のつり合い)。

式 100 N の力 $(-0.6) \times (-100) = +60$ (左回り)

50 N の力 $0.4 \times (-50) = -20$ (右回り)

F の力 $1.0 \times (-F) = -F$ (右回り)

合計が 0 なので $60 - 20 - F = 0$ 、 $F = 40$

答え 下向きに 40 N

左がわの 100 N は左回り、右がわの 2 つの力は右回りに回そうとします。左回りの 60 と、右回りの $20 + 40 = 60$ が等しくなって、つり合います。橋やクレーンのつり合いを調べるときも、このように「力のモーメントの合計が 0」を使います (物理シリーズ 力-5)。

じぶんでこう 8

支点 O で支えた横向きの棒の、点 $x = -0.5$ (m) に下向き 120 N、点 $x = 0.3$ (m) に下向き 100 N がはたらいています。点 $x = 1.5$ (m) に下向きの力 F を加えてつり合わせるとき、 F を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところ

成分の式の y 成分の符号

✗ y 成分を $a_x b_z - a_z b_x$ とする

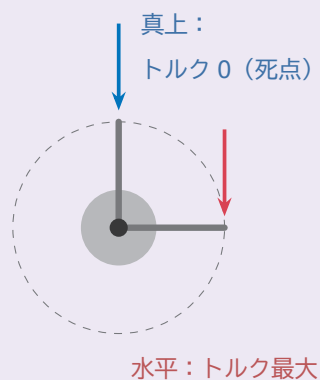
○ y 成分は $a_z b_x - a_x b_z$ (z と x の順)

x 成分 $a_y b_z - a_z b_y$ の文字を、 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ と1つずらして作ります。たすきがけの図で、右下がりー左下がりの順を守りましょう。

🌀 物理・工学ではこう使う

自転車のペダル

クランク（ペダルのうで）の長さはおおよそ 0.17 m です。足で真下に 500 N でふむと、クランクが水平のときはうでと力が直角で、 $0.17 \times 500 = 85\text{ N} \cdot \text{m}$ のトルクになります。クランクが真上や真下を向いたときは、うでと力が平行で、トルクは0。ここを「死点」といい、こぐ力が伝わりません。



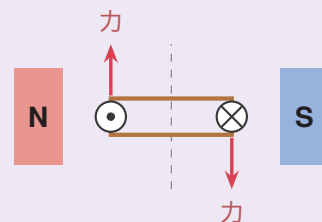
🔍 コラム タイヤのナットは「トルク」でしめる

自動車のタイヤは、5 本ほどのナットで車にとめてあります。ナットは、ゆるすぎると走っているうちに外れ、しめすぎるとボルトがのびて傷みます。そこで、しめる強さは「力」ではなく「トルク」で決められていて、乗用車ではおよそ $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ です。整備工場では、決めたトルクになると「カチッ」と知らせる、トルクレンチという道具を使います。長さ 0.4 m のレンチの先を直角に押すなら、 $100 \text{ N} \cdot \text{m} \div 0.4 \text{ m} = 250 \text{ N}$ の力（約 25 kg の物の重さ）です。レンチをななめに押すと、同じ力でもトルクは小さくなります (②)。

🌀 物理・工学ではこう使う

電気モーター

磁石のあいだに置いた四角いコイルに電流を流すと、向かい合う 2 本の辺が、ローレンツ力で反対向きに押されます（右の図は、コイルを横から見た断面。⊙ と ⊗ は電流の向き）。この 2 つの力が、コイルの軸のまわりにトルクを生み、コイルが回ります。扇風機・電気自動車・ドローンのプロペラも、このしくみで回っています。



物理・工学ではこう使う

スマートフォンの電子コンパス

半導体の小さな板に電流を流し、そこに磁場がかかると、板の中を流れる電子（p型の半導体では正孔）が $q\vec{v} \times \vec{B}$ で横に押されて、板の片がわに集まります。すると、板の両はしに小さな電圧が生まれます（ホール効果）。この電圧をはかって、地球の磁場の向きを知り、地図アプリで北の向きを表示しています。

✓ 章末問題

4-14 のまとめ

基本 ★★★

- 1 重さ 350 N の人が、シーソーの支点から左へ 1.6 m の所にすわっています。400 N の人は、支点から右へ何 m の所にすわればつり合いますか（ 例題 1）。
- 2 長さ 0.4 m のスパナの先を、30 N で引きます。(1) スパナとのなす角 30° の向きに引くとき、(2) スパナに直角に引くときの、力のモーメントを求めましょう（ 例題 2）。
- 3 点 P(0.2, 0.5) (m) に、力 $\vec{F} = (10, -20)$ (N) がはたらきます。原点のまわりの力のモーメントを求め、回る向きを答えましょう（ 例題 3）。
- 4 $\vec{a} = (1, 0, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1, 0)$ について、 $\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{b} \times \vec{a}$ を求めましょう。また、 $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ に垂直であることを、内積でたしかめましょう（ 例題 4）。
- 5 3点 A(1, 0, 0)、B(0, 1, 0)、C(0, 0, 1) がつくる三角形の面積を求めましょう（ 例題 5）。

チャレンジ ★★★★★

6 y の+の向きに 5 A の電流が流れる長さ 0.3 m の導線が、 x の+の向きの 0.2 T の磁場の中にあります。導線が受ける力の向きと大きさを求めましょう (例題 6)。

7 ボルトから見て $\vec{r} = (0.3, 0, 0)$ (m) の所に、力 $\vec{F} = (0, 20, -40)$ (N) をかけます。トルク $\vec{r} \times \vec{F}$ を求め、その大きさを求めましょう (例題 7)。

8 自転車のクランク (長さ 0.17 m) が水平から 30° 下がった所で、真下に 500 N でペダルをふみます。クランクと力のなす角は 60° です。トルクを求めましょう ($\sin 60^\circ \approx 0.866$) (例題 2)。

9 長さ 0.5 m のレンチの先を、レンチとのなす角 60° の向きに 200 N で押します。トルクを求めましょう。タイヤのナットをしめるのに必要な $100\text{ N}\cdot\text{m}$ にとどきますか ($\sin 60^\circ \approx 0.866$) (例題 2)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 力のモーメントを「力×うでの長さ」で求め、 $M = xF_y - yF_x$ で計算できる。 → 470 ページ

☐ 外積の向きと大きさがわかり、成分で計算できる。 → 475 ページ

☐ トルクや、磁場から受ける力の向きを、外積で求められる。 → 481 ページ



ミナ

内積は「同じ向き」、外積は「回す向き」。2つのかけ算で、力の働きが全部見えてきたね。

第3部 ベクトル

★★★★~★★★★★

4-15

いろいろな座標： 極座標・円柱座標・球座標

📖 道しるべ
この章の前に
3-2
4-2
4-8
4-13
この章の先に
8-6
8-12

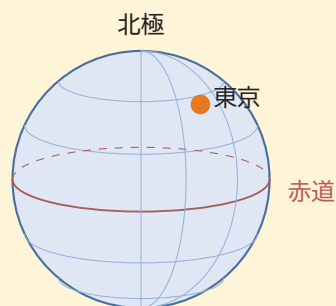
🚩 この章でできるようになること

- ★★★ 極座標 (r, θ) と (x, y) を、区画に注意して行き来できる。
- ★★★★ 単位ベクトル $\vec{e}_r$ 、 $\vec{e}_\theta$ を使って、円運動の速度を $r\omega\vec{e}_\theta$ と表せる。
- ★★★★★ 円柱座標・球座標で空間の点を表し、 (x, y, z) に直せる。

? はてな？

地図アプリで場所を調べると、「北緯 35.7°、東経 139.7°」のような 2 つの数が出てきます。これは東京のあたりの場所です。

地球の上の場所は、横へ何 km・たてへ何 km ではなく、「角度」で表しています。なぜ角度で表すのかな？ この 2 つの角度は、どこからはかった角度なのかな？



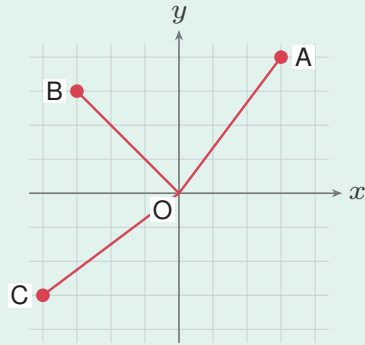
3-2 では、平面の点を「右へいくつ、上へいくつ」の 2 つの数で表しました。4-2 では、同じ場所を「どれだけはなれているか（距離）」と「どちらの向きか（角度）」で表す極座標を学び、4-6・4-8 で 2 つの言い方を $\sin \cdot \cos$ でつなぎました。この章では、その反対向きの直し方と、空間（3 つの数）への広げ方を学びます。回るもの・丸いものは、距離と角度のほうがずっと楽に表せます。

△ やってみよう 方眼の点の、距離と角度をはかろう

用意するもの

方眼紙（1目もり1cm）、分度器、定規

- 1 方眼紙のまん中に原点 O と、 x 軸・ y 軸をかこう。
- 2 点 $A(3, 4)$ 、 $B(-3, 3)$ 、 $C(-4, -3)$ をとろう。
- 3 定規で、原点 O から、それぞれの点までの距離をはかろう。
- 4 分度器で、 x 軸の+の向きから左回りに、それぞれの点の向きの角をはかろう（ 180° をこえるときは、 180° の向きからの角をはかって、 180° にたす）。



ソラさんがはかった結果です（距離は 0.1 cm まで、角は 1° まで）。

点	x	y	距離	角度
A	3	4	5.0	53°
B	-3	3	4.2	135°
C	-4	-3	5.0	217°

4-2 で学んだように、同じ点は、 (x, y) でも、極座標 (r, θ) でも言えます。 (r, θ) から (x, y) へは、4-6・4-8 の $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ で計算できました。では反対に、 (x, y) から距離と角度を、はからずに計算で求めるには、どうすればよいでしょう。この章では、まずこの反対向きの直し方を作り、そのあと、空間の点を距離と角で表す方法に広がります。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-2 平面の点は (x, y) 。

原点と+の向きは、問題を解く人が楽な所に決めてよい。

符号で4つの区画(右上・左上・左下・右下)に分かれる。

4-2 極座標 (r, θ) : 原点からの距離 r と、 x 軸の+の向きから左回りの角 θ で場所を言う。

角は度でもラジアンでもはかる。 $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ 。弧の長さ = 半径 $\times$ 角 ($s = r\theta$)。円の接線は半径に垂直。

4-8 極座標 (r, θ) の点は、どの向きでも $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ (4-6 で作り、4-8 で広げた)。

半径1の円の上の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 $\theta = \omega t$ 、速さ $v = r\omega$ 。

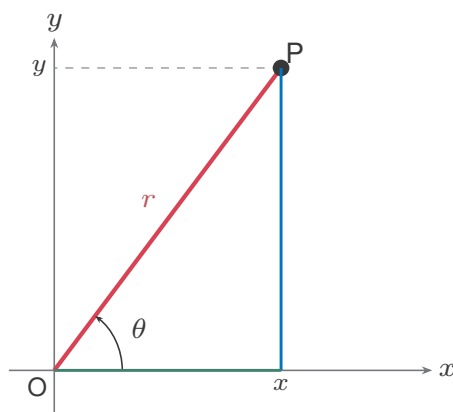
4-13 空間の点は (x, y, z) 。原点からの距離は $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

この章では、 $\approx$ (「ほぼ等しい」というしるし。5-8 でくわしく) も使います。

🔧 数学の道具

1 極座標と (x, y) を行き来する

1 思い出そう : 極座標と、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$



原点 O からの距離 r と、 x 軸の+の向きから左回りにはかった向きの角 θ の組 (r, θ) が、点 P の極座標でした (4-2)。原点 O を極、 x 軸の+の部分に始線ともいいます。 r は0以上の数で、3-15の相関係数の r とは別の意味です。

極座標から (x, y) へは、斜辺 r の直角三角形の横とたてで (4-6)、どの向きの点でも次の式で直せました (4-8)。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

図の P は $r = 5$ 、 $\cos \theta = 0.6$ 、 $\sin \theta = 0.8$ の点で、 $x = 5 \times 0.6 = 3$ 、 $y = 5 \times 0.8 = 4$ です。やってみようの A と同じ点です。この章では、この反対向き $((x, y)$ から (r, θ)) を考えます。

2 同じ点に、いくつもの名前

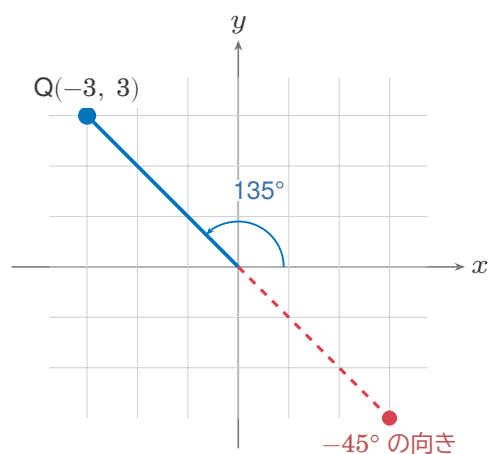
角は、1 周 (360°) 回るともとの向きにもどります (4-8 の一般角)。だから、極座標 $(4, 60^\circ)$ と $(4, 420^\circ)$ と $(4, -300^\circ)$ は、同じ点です。ふつうは、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ (ラジアンなら $0 \leq \theta < 2\pi$) の範囲で答えます。原点は $r = 0$ で、角は決まりません (どの向きに 0 進んでも原点だから)。

3 (x, y) から極座標へ：区画に注意

反対に、 (x, y) から r と θ を求めます。 r は三平方の定理 (4-4) で

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

θ は、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ (傾き。4-6) なので、電卓の $\tan^{-1}$ で求められそうです。ところが、ここに落とし穴があります。



点 $Q(-3, 3)$ で考えます。 $\tan \theta = 3 \div (-3) = -1$ です。電卓で $\tan^{-1}(-1)$ を計算すると、 -45° と出ます。

✗ $\theta = -45^\circ$

ところが、 -45° の向きは右下 (赤い点線) で、Q のある左上とは反対です。tan の値は、反対向き (180° ちがう向き) でも同じになってしまうのです。電卓の $\tan^{-1}$ は、いつも -90° から 90° のあいだ (右半分) の角しか答えません。

○ $\theta = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$

だから、点がどの区画にあるかを見て、電卓の答えを直します。

点のある区画	符号	θ の求め方 ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$)
右上	$x > 0, y > 0$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$ のまま
左上・左下	$x < 0$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$ に 180° をたす
右下	$x > 0, y < 0$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$ に 360° をたす

表1 $x = 0$ のとき (y 軸の上) は、 $y > 0$ なら 90° 、 $y < 0$ なら 270° 。

いちばん確かな方法は、**まず点を図にかいて、だいたいの向きを見てから**電卓を使うことです。表計算ソフトには、区画まで考えて角を出す関数 ATAN2 があります。表計算では ATAN2(x, y) の順に入れ、答えはラジアン ($-\pi$ より大きく π 以下) で出ます (プログラムの言語では、 y を先に入れるものが多いので注意)。度にするには DEGREES 関数を使います (4-2)。

もう1つの求め方： $\cos^{-1}$ と y の符号

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ なので ($x = r \cos \theta$ の両辺を r でわった)、電卓の $\cos^{-1}$ でも角が求められます。 $\cos^{-1}$ は、いつも 0° から 180° (上半分) の角を答えます (4-6 の⑧： $\cos$ の値から、 $0^\circ \sim 180^\circ$ の角は1つに決まる)。だから、

- $y \geq 0$ (上半分) なら、 $\theta = \cos^{-1} \frac{x}{r}$ のまま。
 - $y < 0$ (下半分) なら、上下を折り返した向きなので、 $\theta = 360^\circ - \cos^{-1} \frac{x}{r}$ 。
- やってみようの C(-4, -3) で、2つの方法をくらべます。 $r = \sqrt{16+9} = 5$ です。

$$\begin{aligned} \tan \text{の方法} : \tan^{-1} \frac{-3}{-4} &= \tan^{-1} 0.75 \approx 36.87^\circ. \text{ 左下なので} \\ 36.87^\circ + 180^\circ &= 216.87^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \text{の方法} : \cos^{-1} \frac{-4}{5} &= \cos^{-1}(-0.8) \approx 143.13^\circ. y < 0 \text{ なので} \\ 360^\circ - 143.13^\circ &= 216.87^\circ \end{aligned}$$

どちらも約 217° で、はかった角と合いました。どちらの方法でも、「点はどの区画にあるか」を見て、電卓の答えを直すことが大切です。

？はてな？の答え（その1）

地球のような丸いものの上では、場所を「中心から見た向き」で表すと、とても楽です。緯度と経度は、地球の中心から見た向きの角度なのです。くわしくは、④の球座標で見ます。

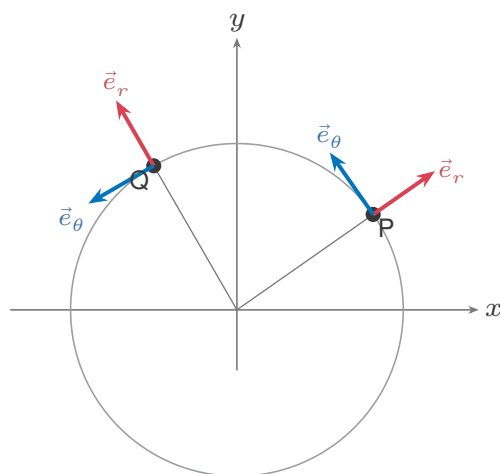
2 動く向きの単位ベクトル： $\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$

1 場所ごとに向きが変わる単位ベクトル

(x, y) の座標では、 x の向きの単位ベクトル $\vec{i}$ と、 y の向きの $\vec{j}$ を使いました（4-13）。 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ は、どの場所でも同じ向きです。

極座標では、点 P ごとに、次の 2 つの向きを考えます。

- $\vec{e}_r$ ：P から、原点と反対の向き（ r がふえる向き）。長さ 1。
- $\vec{e}_\theta$ ：P で、左回りに円にそう向き（ θ がふえる向き）。長さ 1。



赤い矢印が $\vec{e}_r$ 、青い矢印が $\vec{e}_\theta$ です。P と Q では、矢印の向きがちがいます。

$\vec{e}_r$ は、原点から P への向きの単位ベクトルなので、4-8 の単位円の点と同じで

$$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$\vec{e}_\theta$ は、 $\vec{e}_r$ を左回りに 90° 回したものです。

4-8 で、点 (x, y) を 90° 回すと $(-y, x)$ になりました。 $\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ を 90° 回すと、

$$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

たしかめます。 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta \times (-\sin \theta) + \sin \theta \times \cos \theta = 0$ なので、2 つは直角です（4-12）。 $|\vec{e}_\theta|^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なので、長さは 1 です（4-8）。

$\theta = 0^\circ$ の P なら $\vec{e}_r = (1, 0) = \vec{i}$ 、 $\vec{e}_\theta = (0, 1) = \vec{j}$ で、ふつうの x 、 y の向きと同じになります。

点 P の位置ベクトル（原点から P への矢印）は、長さ r で $\vec{e}_r$ の向きなので、 $\overrightarrow{OP} = r \vec{e}_r$ と書けます。

2 円運動の速度は $r\omega \vec{e}_\theta$

半径 r の円の上を、角速度 ω （1 秒に回る角、rad/s。4-8）で左回りに回る点 P を考えます。P の速度は、

- **速さ** 1 秒に回る角が ω なので、1 秒に進む弧の長さは、弧の長さ＝半径×角（4-2）で $r\omega$ 。だから速さ $v = r\omega$ （4-8）。
- **向き** 円にそって左回りに進むので、円の接線の向き（4-2 で、接線は半径に垂直）。これは $\vec{e}_\theta$ の向き。

2 つを合わせて、

$$\text{円運動の速度 } \vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta = (-r\omega \sin \theta, r\omega \cos \theta)$$

x 、 y の成分で書くと、 $\vec{v}$ を $r\omega$ 倍した成分になります。

数でたしかめる

$r = 0.5 \text{ m}$ 、 $\omega = 4 \text{ rad/s}$ で、いま $\theta = 30^\circ$ の所にいるとします。式では、速さ $v = 0.5 \times 4 = 2$ 、 $\vec{e}_\theta = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ) = (-0.5, 0.866)$ なので、 $\vec{v} = (-1, 1.732)$ 。

0.001 秒だけ進めて、4-11 の $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 、 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ で調べます。0.001 秒で角は $4 \times 0.001 = 0.004 \text{ rad}$ ふえます。

	$x = 0.5 \cos \theta$	$y = 0.5 \sin \theta$
はじめ (30°)	0.433013	0.250000
0.001 秒後	0.432009	0.251730
変化 ÷ 0.001	-1.00	1.73

表2 0.001 秒のあいだの変化を 0.001 でわると、1 秒あたりの変化（速度の成分）になる。

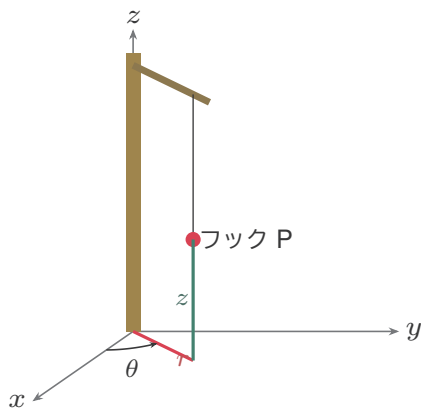
式で求めた $(-1, 1.732)$ とよく合いました。 $\vec{e}_\theta$ を使うと、円運動の速度を、図をかかずに 1 行で書けます。物理（力学）では、この形から、円運動の加速度を求めていきます。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

速度の矢印の先も、円を回る

円運動では、速さ $v = r\omega$ は変わりませんが、速度の向きは $\vec{e}_\theta$ といっしょに回ります。速度の矢印の根もとを 1 か所に集めると、矢印の先は、半径 v の円の上を、同じ角速度 ω で回ります。だから、速度の先が動く速さは、「半径×角速度」(4-2・4-8) で $v\omega = r\omega^2$ です。速度が 1 秒あたりに変わる量（加速度）の大きさは $r\omega^2$ で、その向きは、速度の円の接線の向き、つまり $\vec{e}_\theta$ をさらに 90° 回した $-\vec{e}_r$ （中心の向き）です。速さが一定でも、向きが変わるので、加速度があるのです（4-10 の $\Delta\vec{v} \neq \vec{0}$ ）。 $r = 0.5\text{ m}$ 、 $\omega = 4\text{ rad/s}$ なら $0.5 \times 4^2 = 8\text{ m/s}^2$ です。

③ 円柱座標：極座標に高さを加える



ビルの工事現場のタワークレーンは、柱のまわりにうで（ジブ）を回し、うでにそってつり具を動かし、ワイヤーでフックを上げ下げします。フックの場所は、次の 3 つの数で決まります。

- r ：柱からの水平な距離
- θ ：うでを回した角
- z ：高さ

床の上の位置を極座標 (r, θ) で表し、高さ z を加えた組 (r, θ, z) を**円柱座標**（えんちゅうざひょう）といいます。 r を一定にして θ と z を動かすと、点は円柱の面の上を動くので、この名前があります。 (x, y, z) には、①の式に高さをそのまま加えて直します。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

円柱座標の r は、原点からの距離ではなく、 z 軸からの距離です。原点からの距離は $\sqrt{r^2 + z^2}$ になります (4-13 の 2 段の三平方)。水道管・ドリル・モーターの軸のように、まっすぐな軸のまわりの形を表すときに便利です。

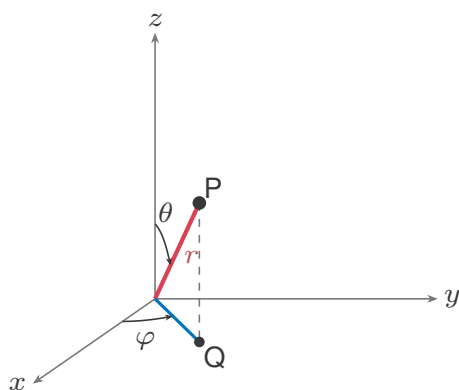
4 球座標：地球の上の場所

1 2つの角と、距離

空間の点 P を、原点からの距離 r と、2つの角で表します。

- r ：原点 O から P までの距離 (4-13 の $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)
- θ ： z 軸の+の向き (真上) から、 OP までの角 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)
- φ (ファイ)： P の真下の床の点 Q の、 x 軸から左回りの角 ($0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$)

この組 (r, θ, φ) を**球座標** (きゅうざびょう) といいます。 r を一定にすると、点は球の面の上を動きます。ここでの φ は角の名前で、第5巻の初期位相の φ (5-15 の ϕ) とは別の意味です。



(x, y, z) に直す

- ① P の高さは、直角三角形 OQP で、斜辺 r 、真上とのなす角 θ なので

$$z = r \cos \theta$$

- ② 床の上の OQ (青) の長さは $r \sin \theta$ 。

- ③ Q は、床の上で、距離 $r \sin \theta$ 、角 φ の点。①の極座標の式で

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

まとめると、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

たしかめ：

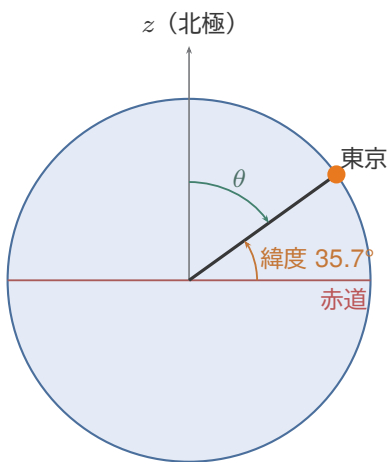
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta \\&= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2\end{aligned}$$

原点からの距離が r になっています ($\sin^2 + \cos^2 = 1$ を 2 回使った)。

反対に、 (x, y, z) からは、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 $\cos \theta = \frac{z}{r}$ から θ 、 Q の (x, y) から①の方法で φ を求めます。

2 緯度・経度との関係

地球の中心を原点にし、北極の向きを z 軸、経度 0° (イギリスのグリニッジを通る線) と赤道の交わる向きを x 軸、東経 90° の向きを y 軸にとります (右手系)。



緯度 (いど) は、赤道から北 (または南) へはかった角です。球座標の θ は真上 (北極) からはかるので、北緯の角とは

$$\theta = 90^\circ - (\text{北緯の角})$$

の関係です。東京 (北緯 35.7°) なら $\theta = 54.3^\circ$ 。

経度 (けいど) は、経度 0° の線から東へはかった角で、球座標の φ と同じです。東経 139.7° なら $\varphi = 139.7^\circ$ 。

$\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$ 、 $\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$ (4-6) を使うと、北緯 β 、東経 φ の地面の点は、地球の半径を R として

$$x = R \cos \beta \cos \varphi, \quad y = R \cos \beta \sin \varphi, \quad z = R \sin \beta$$

と書けます。 $R \cos \beta$ は、北緯 β の緯線 (同じ緯度の点を結んだ円) の半径です。

⑤ はてな？ の答え（その2）

地球はほぼ球なので、中心からの距離 r は、地面の上ならどこでも同じ地球の半径（約 6400 km）です。だから、場所を決めるのに必要なのは、残りの 2 つの角だけです。1 つは赤道からはかった北や南への角（緯度）、もう 1 つは経度 0° の線からはかった東や西への角（経度）です。球座標で、 r がいつも同じだから、2 つの角度だけで場所が言えるのです。

⑤ 曲線を、極座標の式で表す

x と y の関係を式で書くと、グラフ（曲線）が決まりました（3-3）。同じように、 r と θ の関係の式でも、曲線が決まります。これを**極方程式**といいます。

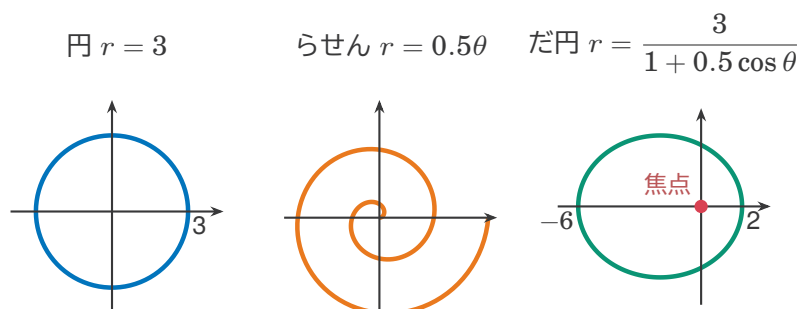


図1 左： r が一定なら円。中：角がふえるほど r がふえると、らせん（ θ はラジアン、2 周分）。右：原点（赤い点）が、だ円の「焦点」になる。

- **円 $r = 3$** 原点からの距離がいつも 3 の点の集まりなので、半径 3 の円です。
 (x, y) で書くと $x^2 + y^2 = 9$ (4-4)。極座標のほうが、ずっと短く書けます。
- **らせん $r = 0.5\theta$** 1 回りする（ θ が 2π ふえる）ごとに、 r が $0.5 \times 2\pi = \pi$ （約 3.14）ずつふえる、等間かくのうずまきです。かとり線香の形や、時計のぜんまい、昔のレコードの溝は、このような形です。
- **だ円 $r = \frac{3}{1 + 0.5 \cos \theta}$** $\theta = 0^\circ$ で $r = \frac{3}{1.5} = 2$ 、 $\theta = 90^\circ$ で $r = 3$ 、 $\theta = 180^\circ$ で $r = \frac{3}{0.5} = 6$ 。原点から見て、右には近く、左には遠い、つぶれた円（だ円）になります。惑星は、太陽をこのような点（焦点）においた、だ円の上を回っています（ケプラーの法則。物理シリーズで学びます）。

4-8 では、だ円を $(a \cos t, b \sin t)$ と表しました。こちらは、だ円の中心が原点にある表し方です。図のだ円（3つの図の右）のように、焦点を原点にすると、極方程式で表せます。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

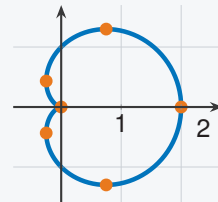
表計算で、極方程式のグラフをかこう

極方程式 $r = 1 + \cos \theta$ のグラフを、表計算でかきます。表計算の COS・SIN はラジアンで計算するので、RADIANS で直してから入れます（4-2）。2行めに次の式を入れ、下へコピーします。

● B2 (r): =1+COS(RADIANS(A2))

● C2 (x): =B2*COS(RADIANS(A2)) D2 (y): =B2*SIN(RADIANS(A2))

	A	B	C	D
1	θ	r	x	y
2	0	2	2	0
3	60	1.5	0.75	1.299
4	120	0.5	-0.25	0.433
5	180	0	0	0
6	240	0.5	-0.25	-0.433
7	300	1.5	0.75	-1.299



A列の角（度）を 5° ごとに、C列とD列で散布図をかくと、図のような形（オレンジの点が表の6点）になります。この曲線をカージオイド（心臓の形）といいます。 $\theta = 180^\circ$ で $r = 0$ になり、原点を通ります。

6 どの座標を使うか：楽になるものを選ぶ

3-2 では、「原点と+の向きは、問題を解く人が楽な所に決めてよい」と学びました。座標の種類も、同じように自分で選べます。同じ場所を、どの座標で言っても、答えは同じです。計算が楽になるものを選ぶのが、上手な使い方です。

座標	楽になるもの	例
(x, y, z)	箱の形、まっすぐな動き	部屋、ビル、3D プリンター
極座標 (r, θ)	1 点のまわりを回るもの	レーダー、回転、円運動
円柱座標 (r, θ, z)	まっすぐな軸のまわりの形	水道管、クレーン、モーター
球座標 (r, θ, φ)	1 点から四方に広がるもの	地球、電波、原子の中の電子

表 3 形に合わせて座標を選ぶ。

たとえば、スマートフォンの電波は、アンテナから四方へ広がります。電波の強さは、アンテナからの距離 r だけで決まり、向きにはあまりありません（理想的な場合）。球座標なら「 r だけの式」で書けますが、 (x, y, z) では $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ という長い式になります。第 8 巻（8-6・8-12）では、円柱座標や球座標を使って、パイプの中の流れや、球のまわりの電場を計算します。

 専門書をのぞいてみよう 極座標の書き方

平面極座標 (r, θ) において、単位ベクトルを

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

とすると、位置ベクトルは $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ である。半径 r の等速円運動では、速度は $\mathbf{v} = r\omega \mathbf{e}_\theta$ 、加速度は $-r\omega^2 \mathbf{e}_r$ となる。球座標 (r, θ, ϕ) との関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

訳 太字はベクトル（4-13）。 ϕ は φ と同じ文字（ファイ）の別の形。数学の本の中には、 θ と φ の役わりを入れかえて書くものもあるので、どちらの角がどこからはかった角かを、まず確かめる。

🔍 コラム 飛行機は、なぜ北へふくらんで飛ぶ？

東京からアメリカのニューヨークへ行く飛行機の道すじを、ふつうの世界地図にかくと、北へ大きくふくらんだ曲線になります。遠回りに見えますが、じつはこれが、地球の表面にそった最短の道すじです。球の上の2点を結ぶ最短の道は、地球の中心を通る平面で切った大きな円（大円）の一部になります。平らな地図は、丸い地球を引きのばしてかいているので、最短の道が曲がって見えるのです。例題7で、この距離を計算してみましょう。

たいせつ

極座標

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \theta \text{ は区画を見て決める}$$

単位ベクトル $\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$

円運動 速度 $\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta$ （速さ $r\omega$ 、向きは接線）

円柱座標 $(r, \theta, z) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

球座標 $(r, \theta, \varphi) : x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$

緯度と経度 $\theta = 90^\circ - (\text{北緯})$ 、 $\varphi = (\text{東経})$

📖 この章で出てきたことば

極座標 原点からの距離 r と、 x 軸からの角 θ で点を表す座標。

円柱座標 極座標に、高さ z を加えた座標 (r, θ, z) 。

球座標 原点からの距離 r 、真上からの角 θ 、床の上の角 φ で表す座標。

緯度・経度 地球の上の場所を表す2つの角。緯度は赤道から、経度は経度 0° の線からはかる。

極方程式 r と θ の関係で曲線を表した式。

記号カード

初めて出た章 4-2

 (r, θ)

読み方 アール・シータ

意味 極座標。原点からの距離と向きの角。 r はほかの章では別の意味(相関係数など)にも使う

英語 polar coordinates

記号カード

初めて出た章 4-15

 (r, θ, φ)

読み方 アール・シータ・ファイ

意味 球座標。 φ は第5巻では初期位相の意味にも使う

英語 spherical coordinates

例題でたしかめよう

例題1 (x, y) から極座標へ(4つの区画)次の点の極座標 (r, θ) を求めましょう ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$)。(1) $(1, \sqrt{3})$ (2) $(-3, 3)$ (3) $(-2, -2\sqrt{3})$ (4) $(2, -2)$ **考え方** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。 θ は、まず区画を見てから、 $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ を直す(①の表)。**式** (1) $r = \sqrt{1+3} = 2$ 。右上。 $\tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$ のまま(2) $r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ 。左上。 $\tan^{-1}(-1) = -45^\circ$
 $-45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$ (3) $r = \sqrt{4+12} = 4$ 。左下。 $\tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$ 、 $60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$ (4) $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ 。右下。 $\tan^{-1}(-1) = -45^\circ$
 $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$ **答え** (1) $(2, 60^\circ)$ (2) $(3\sqrt{2}, 135^\circ)$ (3) $(4, 240^\circ)$ (4) $(2\sqrt{2}, 315^\circ)$

(3) では、 $\frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$ で、右上の(1)と同じ $\tan$ の値になります。区画を見ないと、まちがえてしまいます。

✎ じぶんでとこう 1

次の点の極座標を求めましょう ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$)。

- (1) $(\sqrt{3}, 1)$ (2) $(-1, 1)$ (3) $(-3, -3\sqrt{3})$ (4) $(3, -3)$

⚠ まちがえやすいところ

$\tan^{-1}$ の答えを、そのまま角にする

✕ $(-3, 3)$ の角は $\tan^{-1}(-1) = -45^\circ$

○ 左上の区画なので $-45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$

$\tan$ は、 180° ちがう向きでも同じ値になります。点を図にかいて、区画をたしかめてから角を決めましょう。

📖 例題 2 円運動の速度を $\vec{e}_\theta$ で

半径 0.5 m の円の上を、角速度 4 rad/s で左回りに回る点が、いま $\theta = 30^\circ$ の所にいます。点の位置 (x, y) と、速度の成分を求めましょう。

考え方 位置は $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 。速度は $r\omega \vec{e}_\theta$ 、 $\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ (2)。

式 位置 $x = 0.5 \cos 30^\circ = 0.5 \times 0.866 = 0.433$

$$y = 0.5 \sin 30^\circ = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

速さ $r\omega = 0.5 \times 4 = 2$

$$\vec{e}_\theta = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ) = (-0.5, 0.866)$$

$$\vec{v} = 2 \times (-0.5, 0.866) = (-1, 1.732)$$

答え 位置 $(0.433, 0.25) \text{ (m)}$ 、速度 $(-1, 1.73) \text{ (m/s)}$

じぶんでところ2

半径 2 m の円の上を、角速度 3 rad/s で左回りに回る点が、いま $\theta = 120^\circ$ の所にいます。位置と速度の成分を求めましょう。

例題3 円柱座標

(1) タワークレーンのフックが、円柱座標で $r = 20$ m、 $\theta = 60^\circ$ 、 $z = 30$ m の所にあります。 (x, y, z) を求めましょう。

(2) 点 $(-6, 8, 5)$ の円柱座標を求めましょう (θ は電卓で)。

考え方 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 、 $z = z$ (③)。反対は、床の上の (x, y) を極座標にする (①)。

式 (1) $x = 20 \cos 60^\circ = 10$ 、 $y = 20 \sin 60^\circ = 20 \times 0.866 = 17.32$
 $z = 30$ (高さはそのまま)

(2) $r = \sqrt{36 + 64} = 10$ 。左上なので
 $\tan^{-1} \frac{8}{-6} \approx -53.13^\circ$ 、 $-53.13^\circ + 180^\circ = 126.87^\circ$

答え (1) 約 $(10, 17.3, 30)$ (m) (2) $(10, 126.9^\circ, 5)$

じぶんでところ3

(1) 円柱座標 $r = 10$ 、 $\theta = 150^\circ$ 、 $z = 20$ の点の (x, y, z) を求めましょう。

(2) 点 $(5, -5, 12)$ の円柱座標を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところ

円柱座標の r を、原点からの距離だと思う

✕ 円柱座標 $(3, 0^\circ, 4)$ の点の原点からの距離は 3

○ $r = 3$ は z 軸からの距離。原点からは $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

円柱座標の r は床の上の距離 (z 軸からの距離) です。球座標の r とは意味がちがいます。

📖 例題 4 球座標

(1) 球座標 $r = 2$ 、 $\theta = 60^\circ$ 、 $\varphi = 45^\circ$ の点の (x, y, z) を求めましょう。

(2) 点 $(1, 1, \sqrt{2})$ の球座標を求めましょう。

考え方 $x = r \sin \theta \cos \varphi$ 、 $y = r \sin \theta \sin \varphi$ 、 $z = r \cos \theta$ (④)。反対は、 r 、 $\cos \theta = \frac{z}{r}$ 、床の上の点の角 φ の順。

式 (1) $r \sin \theta = 2 \sin 60^\circ = 2 \times 0.866 = 1.732$

$$x = 1.732 \cos 45^\circ = 1.732 \times 0.7071 \approx 1.22, y \approx 1.22$$

$$z = 2 \cos 60^\circ = 1$$

(2) $r = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$ 。 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので $\theta = 45^\circ$

床の上の点 $(1, 1)$ は右上で、 $\varphi = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$

答え (1) 約 $(1.22, 1.22, 1)$ (2) $(2, 45^\circ, 45^\circ)$

たしかめ：(1) の点の原点からの距離は $\sqrt{1.22^2 + 1.22^2 + 1^2} = \sqrt{3.98} \approx 2.0$ で、 $r = 2$ と合います。答えが出たら、 r にもどるかを見るとまちがいに気づけます。

じぶんでこう4

- (1) 球座標 $r = 4$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $\varphi = 120^\circ$ の点の (x, y, z) を求めましょう。
 (2) 点 $(0, 2, 2\sqrt{3})$ の球座標を求めましょう。

例題5 緯度・経度と地球の自転

地球を半径 6400 km の球とします。

- (1) 北緯 30° 、東経 60° の地点の (x, y, z) を求めましょう。
 (2) 北緯 35.7° の東京で、地球の自転によって地面が東へ動く速さは、時速何 km ですか。地球は 24 時間で 1 回転するとします。

考え方 (1) $x = R \cos \beta \cos \varphi$ 、 $y = R \cos \beta \sin \varphi$ 、 $z = R \sin \beta$ (④)。

- (2) 東京は、半径 $R \cos 35.7^\circ$ の緯線の円の上を、 24 時間で 1 周する。

式 (1) $R \cos 30^\circ = 6400 \times 0.866 = 5542.6$

$$x = 5542.6 \times \cos 60^\circ \approx 2771, \quad y = 5542.6 \times \sin 60^\circ \approx 4800$$

$$z = 6400 \times \sin 30^\circ = 3200$$

(2) 緯線の半径 $6400 \times \cos 35.7^\circ \approx 6400 \times 0.812 = 5197$

$$1 \text{ 周 } 2\pi \times 5197 \approx 32655 \text{ (km)}$$

$$32655 \text{ km} \div 24 \text{ h} \approx 1361 \text{ km/h}$$

答え (1) 約 $(2771, 4800, 3200)$ (km) (2) 時速約 1360 km

秒速に直すと、 $1361 \text{ km/h} \times 1000 \text{ m/km} \div 3600 \text{ s/h} \approx 378 \text{ m/s}$ 。音の速さ (約 340 m/s) より速く、わたしたちは地面といっしょに動いています。赤道では緯線の半径が最も大きいので、約 1680 km/h になります。

じぶんでこう5

地球を半径 6400 km の球とします。(1) 北緯 45° 、東経 90° の地点の (x, y, z) を求めましょう。(2) 北緯 40.8° の青森で、自転によって地面が動く速さは時速何 km ですか。

⚠ まちがえやすいところ

球座標の θ を、緯度と同じだと思う

✕ 北緯 35.7° だから $\theta = 35.7^\circ$

○ θ は真上からはかるので $\theta = 90^\circ - 35.7^\circ = 54.3^\circ$

緯度は赤道から、球座標の θ は北極 (z 軸) からはかります。はかり始める所がちがいます。

📖 例題6 らせんの極方程式

極方程式 $r = 2\theta$ (θ はラジアン) のらせんで、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 π 、 2π のときの r と (x, y) を求めましょう。

考え方 θ を入れて r を求め、①の式で (x, y) にする。 $\frac{\pi}{2}$ は 90° 、 π は 180° 、 2π は 360° (4-2)。

式 $\theta = \frac{\pi}{2} : r = \pi$ 、 $(\pi \cos 90^\circ, \pi \sin 90^\circ) = (0, \pi)$

$\theta = \pi : r = 2\pi$ 、 $(2\pi \cos 180^\circ, 2\pi \sin 180^\circ) = (-2\pi, 0)$

$\theta = 2\pi : r = 4\pi$ 、 $(4\pi \cos 360^\circ, 4\pi \sin 360^\circ) = (4\pi, 0)$

答え $(0, \pi)$ 、 $(-2\pi, 0)$ 、 $(4\pi, 0)$ (約 $(0, 3.14)$ 、 $(-6.28, 0)$ 、 $(12.57, 0)$)

1 周した $\theta = 2\pi$ の点は、はじめの向き (x 軸の+) にもどりますが、原点からの距離は 4π にふえています。だから、らせんになるのです。

じぶんでとこう6

極方程式 $r = 0.5\theta$ のらせんで、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 π 、 2π のときの (x, y) を求めましょう。

△ まちがえやすいところ

極方程式に、度のまま入れる

✕ $r = 2\theta$ で、 $\theta = 90^\circ$ のとき $r = 180$

○ $\theta = \frac{\pi}{2}$ を入れて $r = \pi \approx 3.14$

θ が式の中で「数」として使われるときは、ラジアンで入れます(4-2)。電卓も RAD のモードにしましょう。

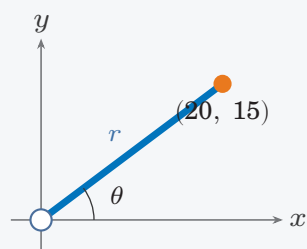
🔍 コラム ロボットの手を、置きたい場所へ

4-0 の「逆運動学」の、いちばんかんたんな形を解いてみます。関節が1つで、うでの長さを伸び縮みさせられるロボットが、手を $(x, y) = (20, 15)$ (cm) の部品の上に置きたいとします。うでの長さ r と肩の角 θ は、 (x, y) を極座標に直せば求められます。

$$r = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{15}{20} \approx 36.9^\circ \text{ (右上なのでそのまま)}$$

関節が2つあるうでの角は、4-7 の余弦定理で求めました。どちらも「置きたい場所から角を決める」計算です。



例題 7 地球の表面にそった最短の距離

地球を半径 6400 km の球とします。A（北緯 30°、東経 0°）と B（北緯 30°、東経 90°）について、

- (1) 地球の中心から見た、A と B の向きのなす角を求めましょう。
- (2) A から B まで、地球の表面にそった最短の距離（大円にそった距離）を求めましょう。

考え方 中心から A の向きの単位ベクトルは、④の式で $R = 1$ としたもの。なす角は内積で (4-13)。距離は弧の長さ = 半径 × 角 (4-2。角はラジアン)。

式 (1) $\vec{e}_A = (\cos 30^\circ, 0, \sin 30^\circ) = (0.866, 0, 0.5)$
 $\vec{e}_B = (\cos 30^\circ \cos 90^\circ, \cos 30^\circ \sin 90^\circ, \sin 30^\circ)$
 $= (0, 0.866, 0.5)$

なす角の $\cos$ は $\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = 0 + 0 + 0.25 = 0.25$

電卓 (DEG) で $\cos^{-1} 0.25 \approx 75.5^\circ$

(2) 75.5° をラジアンに直す $75.5 \times \frac{\pi}{180} \approx 1.318$

$6400 \times 1.318 \approx 8436$

答え (1) 約 75.5° (2) 約 8440 km

北緯 30° の緯線にそって東へ進むと、緯線の半径 $6400 \cos 30^\circ \approx 5543$ km の円の $\frac{1}{4}$ 周で、約 8706 km です。大円にそうと、約 270 km 近いのです。大円は、北へふくらんだ道すじになります (コラム)。

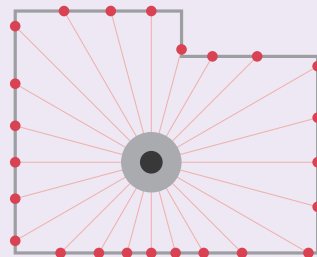
じぶんでこう 7

地球を半径 6400 km の球とします。A（北緯 60° 、東経 0° ）と B（北緯 60° 、東経 180° ）の、中心から見たなす角と、大円にそった距離を求めましょう。

物理・工学ではこう使う

ロボット掃除機のセンサー

本体の上で回るセンサー (LiDAR) は、光を出して、かべではね返ってくるまでの時間から、かべまでの距離 r をはかります。センサーが1回転するあいだに、たとえば 1° ごとに (r, θ) を360こはかり、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ で (x, y) に直して、部屋の地図 (右の図の点。図では 15° ごと) を作ります。



原子の中の電子

原子の中の電子が、どこにいやすいかを表す「電子の雲」の形は、原子核を原点とする球座標 (r, θ, φ) を使うと、とても簡単な式で書けます。周期表のしくみや、半導体の性質も、この形から説明されます (物理シリーズ 原-7)。

✓ 章末問題

4-15 のまとめ

基本 ★★★

- 1 (ふく習) 極座標が次の点の (x, y) を求めましょう (4-8 の例題 2)。 (1) $(6, 60^\circ)$ (2) $(4, 135^\circ)$ (3) $(2, 300^\circ)$
- 2 次の点の極座標を、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ で求めましょう (例題 1)。 (1) $(-\sqrt{3}, 1)$ (2) $(1, -1)$ (3) $(-4, -3)$ (θ は電卓で)
- 3 半径 0.4 m の円の上を、角速度 5 rad/s で左回りに回る点が、いま $\theta = 60^\circ$ の所にいます。位置と速度の成分を求めましょう (例題 2)。

- 4 (1) 円柱座標 $r = 8$ 、 $\theta = 240^\circ$ 、 $z = 5$ の点の (x, y, z) を求めましょう。
 (2) 点 $(-4, -3, 10)$ の円柱座標を求めましょう ( 例題 3)。
- 5 (1) 球座標 $r = 6$ 、 $\theta = 60^\circ$ 、 $\varphi = 30^\circ$ の点の (x, y, z) を求めましょう。
 (2) 点 $(2, 2, 2\sqrt{2})$ の球座標を求めましょう ( 例題 4)。
- 6 極方程式 $r = \theta$ のらせんで、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 π 、 2π のときの (x, y) を求めましょう ( 例題 6)。

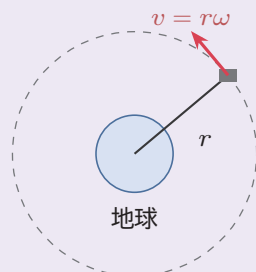
チャレンジ

- 7 地球を半径 6400 km の球とします。(1) 北緯 60° 、東経 30° の地点の (x, y, z) を求めましょう。(2) 北緯 26.2° の那覇で、自転によって地面が動く速さは時速何 km ですか ( 例題 5)。
- 8 地球を半径 6400 km の球とします。A (北緯 0° 、東経 0°) と B (北緯 45° 、東経 90°) の、中心から見たなす角と、大円にそった距離を求めましょう ( 例題 7)。
- 9 球座標 $r = 10$ 、 $\theta = 90^\circ$ 、 $\varphi = 60^\circ$ の点の (x, y, z) を求めましょう。また、この点はどの平面の上にありますか ( 例題 4)。

物理・工学ではこう使う

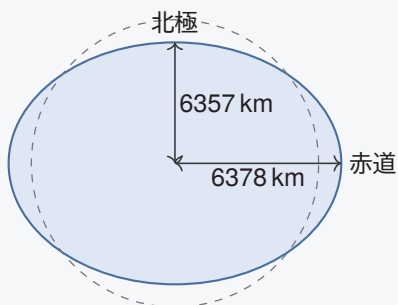
静止衛星

天気の衛星「ひまわり」のような静止衛星は、赤道の上空約 35 800 km を、地球の自転と同じ 24 時間で 1 周します。地球の中心からの距離は $r = 6400 + 35\,800 = 42\,200$ (km)。地球の中心を原点にした極座標で見ると、 r は一定で、角 θ だけが 24 時間で 360° ふえていく円運動です。速さは $v = r\omega$ (4-8) なので、 $v = \frac{2\pi \times 42\,200}{24} \approx 11\,000$ km/h。秒速約 3.1 km/s。止まって見えるのに、じつはとても速く回っているのです。



コラム 地球は、少しつぶれた球

この章では、地球を半径 6400 km の球として計算しました。でも本当の地球は、赤道のまわりが少しふくらんだ形をしています。中心から赤道までは約 6378 km、中心から北極までは約 6357 km で、約 21 km ちがいます。地球が 1 日に 1 回転しているので、赤道のあたりが外へふくらんだのです。GPS や地図アプリでは、このつぶれた形まで計算に入れて、緯度・経度・高さを (x, y, z) に直しています。それでも、ちがいは半径の約 $\frac{1}{300}$ なので、この章の計算のように「球」と考えても、だいたいの距離は十分に求められます。



つぶれ方を、わざと大きくしてかいた図。
点線は、ふつうの球。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 極座標と (x, y) を、区画に注意して行き来できる。 → 502 ページ
- ☐ $\vec{e}_r$ 、 $\vec{e}_\theta$ を使って、円運動の速度を $r\omega \vec{e}_\theta$ と表せる。 → 505 ページ
- ☐ 円柱座標・球座標で空間の点を表し、 (x, y, z) に直せる。 → 507 ページ



デルタ

同じ場所でも、言い方はいろいろ。形に合った座標を選べば、むずかしい問題も楽に解けるよ。

こたえ

「じぶんでこう」は **じ1**、章末問題は **1** のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

4-1

じ1 $\angle x = 48^\circ$ (対頂角)、 $\angle y = 48^\circ$ (同位角)、 $\angle z = 180 - 48 = 132$ で 132°

じ2 $\angle C = 180 - (35 + 80) = 65$ で 65° 。
外角は $35 + 80 = 115$ で 115°

じ3 $(180 - 110) \div 2 = 70 \div 2 = 35$ で 35°

じ4 (1) $180 \times 8 = 1440$ で 1440° 、
 $1440 \div 10 = 144$ で 144° 。
(2) $360 - 300 = 60$ で 60° 。(3) 外角
 $180 - 140 = 40$ 、 $360 \div 40 = 9$ で正九
角形

じ5 P を通って ℓ に平行な線を引く。錯角で
 $32 + 46 = 78$ で 78°

じ6 アは「3 辺」、ウは「1 辺とその両はしの
角」で合同。イは、 $\angle B$ が 2 辺のあいだ
の角ではないので、合同とはかぎらない
(三角形が 2 つかける)

じ7 (1) 逆「 $x^2 = 25$ ならば $x = 5$ 」。正し
くない。反例 $x = -5$ 。(2) 逆「2 の倍
数ならば 6 の倍数」。正しくない。反例
は 4 (2 の倍数だが 6 の倍数でない)

1 $\angle x = 72^\circ$ 、 $\angle y = 72^\circ$ 、
 $\angle z = 180 - 72 = 108$ で 108°

2 $\angle C = 180 - 105 = 75$ で 75° 。外角は
 $62 + 43 = 105$ で 105°

3 $(180 - 36) \div 2 = 144 \div 2 = 72$ で 72°

4 (1) $180 \times 3 = 540$ で 540° 、
 $540 \div 5 = 108$ で 108° 。
(2) $360 - 50 \times 6 = 360 - 300 = 60$

で 60° 。(3) 外角 20° 、 $360 \div 20 = 18$
で正十八角形

5 $38 + 44 = 82$ で 82°

6 アは「2 辺とそのあいだの角」で合同
($\angle A$ は AB と AC のあいだの角)。イは
角だけなので、合同とはかぎらない

7 (1) 逆「 $x^2 = 16$ ならば $x = 4$ 」。正し
くない。反例 $x = -4$ 。(2) 逆「5 の倍
数ならば 10 の倍数」。正しくない。反例
は 5 (または 15 など)

8 $n = 360 \div 24 = 15$ 。内角の和は
 $180 \times (15 - 2) = 180 \times 13 = 2340$ で
 2340°

9 1 周で 360° 回るので、
 $360 - (70 + 75 + 80 + 65)$
 $= 360 - 290 = 70$ で 70°

4-2

じ1 (1) 円周 8π の $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ で 3π cm (約
9.42 cm)。(2) $\frac{1}{2} \times 4 \times 3\pi = 6\pi$ cm²
(約 18.8 cm²)。

じ2 (1) $\frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad、 $\frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$
rad。(2) $\frac{3 \times 180^\circ}{4} = 135^\circ$ 、
 $0.5 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{90^\circ}{\pi} \approx 28.6^\circ$ 。

じ3 (1) $s = 6$ cm、 $S = 12$ cm²。
(2) $24 = 4r$ より $r = 6$ cm。 $\theta = \frac{4}{3}$
rad (約 1.33 rad)。

【4】 小さいほうは $\frac{24}{4} = 6 \text{ rad}$ 、大きいほうは $\frac{24}{12} = 2 \text{ rad}$ (約 114.6°)。

【5】 1回転で $0.6\pi \approx 1.885 \text{ m}$ 。
 (1) $30\pi \approx 94.2 \text{ m}$ 。
 (2) $600 \div 1.885 \approx 318.3$ で、約 318 回転。(3) $1.885 \times 4 \approx 7.54 \text{ m/s}$ 。
 $7.54 \times 3.6 \approx 27.1$ で、時速約 27.1 km。

【6】 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ 。
 $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ 。

【7】 (1) $140^\circ \div 2 = 70^\circ$ 。
 (2) $\angle APB = 90^\circ$ 。
 $180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ 。

【8】 AB の垂直二等分線は $x = 4$ 、AC の垂直二等分線は $y = 3$ 。中心は (4, 3) (BC のまん中と同じ)。

【9】 (1) D (2, 30°)、E (3, 120°)、F (4, 240°)。(2) π は 180° なので、R は 1 番めの円と 180° の線が交わる点 (O の真左)。 $\frac{5\pi}{3}$ は 300° なので、S は 3 番めの円と 300° の線が交わる点 (右下)。

1 (1) $18\pi \times \frac{40}{360} = 2\pi \text{ cm}$ (約 6.28 cm)。(2) $\frac{1}{2} \times 9 \times 2\pi = 9\pi \text{ cm}^2$ (約 28.3 cm^2)。

2 (1) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ 、 $\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$ 。(2) 300° 、 $\frac{540^\circ}{\pi} \approx 171.9^\circ$ 。

3 (1) $s = \frac{5\pi}{3} \text{ cm}$ (約 5.24 cm)、 $S = \frac{25\pi}{3} \text{ cm}^2$ (約 26.2 cm^2)。
 (2) $40 = 5r$ より $r = 8 \text{ cm}$ 、 $\theta = 1.25 \text{ rad}$ 。

4 小さいほうは $\frac{36}{6} = 6 \text{ rad}$ 、大きいほうは $\frac{36}{18} = 2 \text{ rad}$ (約 114.6°)。

5 1回転で $0.7\pi \approx 2.199 \text{ m}$ 。

(1) $140\pi \approx 439.8 \text{ m}$ 。
 (2) $1000 \div 2.199 \approx 454.7$ で、約 455 回転。

6 (1) $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ 。
 (2) $76^\circ \div 2 = 38^\circ$ 。(3) $\angle APB = 90^\circ$ 。
 $180^\circ - 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ 。

7 P の角は $\frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$ で、P は 3 番めの円と 120° の線が交わる点 (左上)。Q の角は $\frac{3 \times 180^\circ}{2} = 270^\circ$ で、Q は 2 番めの円と 270° の線が交わる点 (中心の真下)。

8 AB の垂直二等分線は $x = 5$ 、AC の垂直二等分線は $y = 2$ 。中心は (5, 2)。

9 (1) 1回転で $0.64\pi \approx 2.011 \text{ m}$ 。8 回転で $5.12\pi \approx 16.08 \text{ m}$ 。
 (2) $16.08 \times 3.6 \approx 57.9$ で、時速約 58 km。

10 (1) $\theta = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ 、 60° 。
 (2) $\frac{1}{2} \times 12 \times 4\pi = 24\pi \text{ cm}^2$ (約 75.4 cm^2)。

4-3

【1】 (1) $9 \times 50 = 450 \text{ cm}$ で 4.5 m。
 (2) $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ 。 $300 \div 50 = 6 \text{ cm}$ 。

【2】 相似比 $4 : 10 = 2 : 5$ 。
 $EF = 6 \times \frac{5}{2} = 15 \text{ cm}$ 、
 $FD = 5 \times \frac{5}{2} = 12.5 \text{ cm}$ 。

【3】 (1) 相似。3 辺の比、 $1 : 2$ 。(2) 相似。2 辺の比とその間の角、 $1 : 3$ 。(3) 3 つめの角は 55° と 45° 。どちらも 45° 、 55° 、 80° なので相似 (2 つの角)。

【4】 高さ $\div$ 影 $= 1 \div 0.8 = 1.25$ 。
 $6.4 \times 1.25 = 8 \text{ m}$ 。

㊦ 5 $AB = 9$ 、相似比 $3 : 9 = 1 : 3$ 。
 $2 : AC = 1 : 3$ より $AC = 6$ 、
 $EC = 6 - 2 = 4$ 。 $DE = 12 \times \frac{1}{3} = 4$ 。

㊦ 6 $1000 \text{ cm} : 8 \text{ cm} = 125 : 1$ 。
 $500 \div 125 = 4 \text{ cm}$ 。

㊦ 7 (1) $45 \times \frac{16}{9} = 80 \text{ cm}^2$ 、
 $54 \times \frac{64}{27} = 128 \text{ cm}^3$ 。
(2) $8 \times 625 = 5000 \text{ mL}$ で 5 L 。

㊦ 8 (1) 相似比 $6 : 15 = 2 : 5$ 。半径
 $5 \times \frac{2}{5} = 2 \text{ cm}$ 、面積 $4\pi \text{ cm}^2$ (約
 12.6 cm^2)。 (2) 相似比 $6 : 8 = 3 : 4$ 。1
辺 $4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ cm}$ 、面積 9 cm^2 。

㊦ 9 (1) $8 \times \frac{1}{2} = 4$ で、 4 m 高い。
(2) $30 \times 0.364 = 10.92$ で、約
 10.9 m 。

1 (1) $3 \times 50\,000 = 150\,000 \text{ cm}$
 $= 1.5 \text{ km}$ 。
(2) $400\,000 \text{ cm} \div 50\,000 = 8 \text{ cm}$ 。

2 相似比 $8 : 12 = 2 : 3$ 。
 $EF = 10 \times \frac{3}{2} = 15 \text{ cm}$ 、
 $FD = 6 \times \frac{3}{2} = 9 \text{ cm}$ 。

3 (1) 相似。3 辺の比、 $2 : 5$ 。 (2) 3 つめ
の角は 80° と 35° 。どちらも 35° 、 65° 、
 80° なので相似 (2 つの角)。

4 高さ $\div$ 影 $= 1.5 \div 2 = 0.75$ 。
 $12 \times 0.75 = 9 \text{ m}$ 。

5 $AB = 9$ 、相似比 $6 : 9 = 2 : 3$ 。
 $4 : AC = 2 : 3$ より $AC = 6$ 、 $EC = 2$ 。
 $DE = 15 \times \frac{2}{3} = 10$ 。

6 表面積 $20 \times 9 = 180 \text{ cm}^2$ 、体積
 $8 \times 27 = 216 \text{ cm}^3$ 。

7 相似比 $3 : 9 = 1 : 3$ 。半径
 $6 \times \frac{1}{3} = 2 \text{ cm}$ 、面積 $4\pi \text{ cm}^2$ (約
 12.6 cm^2)。

8 $2000 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 400 : 1$ 。
 $1200 \div 400 = 3 \text{ cm}$ 。

9 面積は $10^2 = 100$ 倍。
 $40 \times 100 = 4000 \text{ mL}$ で 4 L 。

10 (1) $12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{ m}$ 。
(2) $80 \times 0.364 = 29.12$ で、約
 29.1 m 。

4-4

㊦ 1 (1) $\sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$ 。
(2) $\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \text{ cm}$ (約 3.16 cm)

㊦ 2 (1) $\sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$ 。
(2) $\sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ (約
 3.46 cm)

㊦ 3 (1) $10\sqrt{2} \text{ cm}$ (約 14.1 cm)。
(2) $3\sqrt{3} \text{ cm}$ (約 5.20 cm)

㊦ 4 (1) $49 + 576 = 625 = 25^2$ なので、直
角三角形。 (2) $25 + 36 = 61$ 、 $8^2 = 64$
で等しくないので、直角三角形ではない

㊦ 5 (1) $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ 。
(2) $\sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (約
 7.21)

㊦ 6 (1) $r^2 = 25 + 144 = 169$ なので
 $x^2 + y^2 = 169$ 。 (2) $64 + 36 = 100$ な
ので、円のう

㊦ 7 $\sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$

㊦ 8 $h^2 = 6.5^2 - 2.5^2 = 42.25 - 6.25$
 $= 36$ 、 $h = 6 \text{ m}$

㊦ 9 $\sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$ 。
 $30 \div 2.54 = 11.81 \dots$ で、約 11.8 イ
ンチ

- 1 (1) $\sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$.
 (2) $\sqrt{5} \text{ cm}$ (約 2.24 cm)
- 2 (1) $\sqrt{289-64} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$.
 (2) $\sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ (約 2.83 cm)
- 3 (1) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ (約 5.66 cm).
 (2) $5\sqrt{3} \text{ cm}$ (約 8.66 cm)
- 4 (1) $64+225=289=17^2$ なので、直角三角形。(2) $36+49=85$ 、 $9^2=81$ で等しくないので、直角三角形ではない
- 5 (1) $\sqrt{25+144} = 13$.
 (2) $\sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$
- 6 (1) $r^2 = 25+144=169$ なので $x^2+y^2=169$ 。(2) $100+25=125$ は 169 より小さいので、内側
- 7 $\sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$
- 8 $h^2 = 2.6^2 - 1^2 = 6.76 - 1 = 5.76$ 、
 $h = 2.4 \text{ m}$
- 9 $\sqrt{1024+324} = \sqrt{1348}$
 $= 36.71 \dots \text{ cm}$.
 $36.71 \div 2.54 = 14.45 \dots$ で、約 14.5 インチ
- 10 $\sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{256+900} = \sqrt{1156}$
 $= 34 \text{ km}$

4-5

- じ1 (1) 84 cm^2 。(2) 18 cm^2 。(3) 20 cm^2
- じ2 (1) $(3+7) \times 5 \div 2 = 25 \text{ cm}^2$.
 (2) $10 \times 7 \div 2 = 35 \text{ cm}^2$
- じ3 $12 \times 4 \div 2 + 12 \times 2 \div 2 = 24 + 12$
 $= 36 \text{ cm}^2$
- じ4 (1) $25\pi \text{ cm}^2$ (約 78.5 cm^2).
 (2) $100\pi \times \frac{72}{360} = 20\pi \text{ cm}^2$ (約 62.8 cm^2)
- じ5 (1) $15 \times 8 = 120 \text{ cm}^3$.
 (2) $4\pi \times 5 = 20\pi \text{ cm}^3$ (約 62.8 cm^3)
- じ6 (1) $25 \times 6 \times \frac{1}{3} = 50 \text{ cm}^3$.
 (2) $36\pi \times 5 \times \frac{1}{3} = 60\pi \text{ cm}^3$ (約 188 cm^3)
- じ7 体積 $\frac{4}{3}\pi \times 1000 = \frac{4000}{3}\pi \text{ cm}^3$ (約 4190 cm^3)。表面積 $400\pi \text{ cm}^2$ (約 1256 cm^2)
- じ8 (1) $24\pi + 8\pi = 32\pi \text{ cm}^2$ (約 100 cm^2)。(2) $\ell = \sqrt{25+144} = 13$ 、
 $65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ cm}^2$ (約 283 cm^2)
- じ9 (1) 半径 2・高さ 5 の円柱で $20\pi \text{ cm}^3$ (約 62.8 cm^3)。(2) 半径 3・高さ 4 の円すいで $12\pi \text{ cm}^3$ (約 37.7 cm^3)
- じ10 (1) $\pi \times 0.5^2 \times 2 = 0.5\pi = 1.57 \text{ m}^3$ で、約 1570 L。(2) 37500 cm^3 で 37.5 L
- 1 (1) 60 cm^2 。(2) 28 cm^2
- 2 (1) 28 cm^2 。(2) 54 cm^2
- 3 (1) $16\pi \text{ cm}^2$ (約 50.2 cm^2)。 (2) $144\pi \times \frac{30}{360} = 12\pi \text{ cm}^2$ (約 37.7 cm^2)
- 4 (1) $200\pi \text{ cm}^3$ (約 628 cm^3)。 (2) $25\pi \times 9 \times \frac{1}{3} = 75\pi \text{ cm}^3$ (約 236 cm^3)
- 5 体積 $\frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi \text{ cm}^3$ 、表面積 $36\pi \text{ cm}^2$ (どちらも約 113。数は同じでも、単位がちがう)
- 6 $\ell = \sqrt{36+64} = 10$.
 $60\pi + 36\pi = 96\pi \text{ cm}^2$ (約 301 cm^2)
- 7 $40 \times 80 \times 45 = 144000 \text{ cm}^3$ で、
 144 L
- 8 $14 \times 5 \div 2 + 14 \times 3 \div 2 = 35 + 21$
 $= 56 \text{ cm}^2$

9 半径 5・高さ 12 の円すい。体積
 $25\pi \times 12 \times \frac{1}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$ 。母線 13
 で、表面積 $65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ cm}^2$

10 半径 15。体積
 $\frac{4}{3} \times 3.14 \times 3375 = 14130 \text{ m}^3$ 、表
 面積 $4 \times 3.14 \times 225 = 2826 \text{ m}^2$

4-6

じ1 $\sin D = \frac{5}{13}$ 、 $\cos D = \frac{12}{13}$ 、
 $\tan D = \frac{5}{12}$ 、 $\sin E = \frac{12}{13}$ 、
 $\cos E = \frac{5}{13}$ 、 $\tan E = \frac{12}{5}$

じ2 (1) 高さ $200 \sin 5^\circ \approx 17.4 \text{ m}$ 、横
 $200 \cos 5^\circ \approx 199.2 \text{ m}$ 。
 (2) $\frac{2}{\sin 20^\circ} \approx 5.8 \text{ m}$ 。

じ3 (1) $x = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ 、
 $y = 4 \sin 30^\circ = 2$ で、 $(2\sqrt{3}, 2)$ (約
 $(3.46, 2)$)。
 (2) $x = 40 \cos 55^\circ \approx 22.9$ 、
 $y = 40 \sin 55^\circ \approx 32.8$ で、約
 $(22.9, 32.8)$ 。

じ4 $30 \tan 40^\circ + 1.6 \approx 25.17 + 1.6$ で約
 26.8 m 。

じ5 (1) $\tan^{-1} 0.1 \approx 5.7^\circ$ 。
 (2) $\cos \theta = \frac{1.5}{5} = 0.3$ より約 72.5° 。

じ6 $\sin^2 \theta = \frac{144}{169}$ より $\sin \theta = \frac{12}{13}$ 、
 $\tan \theta = \frac{12}{5}$ 。

じ7 (1) ア $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、イ $\sqrt{3}$ 、ウ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、エ $-\frac{1}{2}$ 、
 オ -1 。(2) $\theta = 30^\circ$ 、 150° 。

じ8 (1) どちらも
 $39.2 \times 0.7071 \approx 27.7 \text{ N}$ 。
 (2) $\theta \approx 3.81^\circ$ 、
 $294 \sin 3.81^\circ \approx 19.6 \text{ N}$ 。

じ9 $\sin \theta = \frac{20}{78.4} \approx 0.2551$ より約 14.8° 。

1 $\sin A = \frac{8}{17}$ 、 $\cos A = \frac{15}{17}$ 、
 $\tan A = \frac{8}{15}$ 、 $\sin B = \frac{15}{17}$ 、
 $\cos B = \frac{8}{17}$ 、 $\tan B = \frac{15}{8}$

2 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。(2) $\frac{1}{2}$ 。(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。(4) $\frac{1}{2}$ 。
 (5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

3 高さ $300 \sin 6^\circ \approx 31.4 \text{ m}$ 、横
 $300 \cos 6^\circ \approx 298.4 \text{ m}$

4 (1) $x = 6 \cos 45^\circ = 3\sqrt{2}$ 、
 $y = 6 \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$ で、 $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
 (約 $(4.24, 4.24)$)。
 (2) $x = 20 \cos 70^\circ \approx 6.8$ 、
 $y = 20 \sin 70^\circ \approx 18.8$ で、約
 $(6.8, 18.8)$ 。

5 $25 \times \tan 32^\circ \approx 25 \times 0.6249 \approx 15.62$ 。
 $15.62 + 1.5 = 17.12$ で約 17.1 m

6 (1) $\tan^{-1} 0.2 \approx 11.3^\circ$ 。
 (2) $\sin \theta = \frac{3.5}{4} = 0.875$ 、
 $\sin^{-1} 0.875 \approx 61.0^\circ$

7 $\cos^2 \theta = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$ 、
 $\cos \theta = \frac{15}{17}$ 、 $\tan \theta = \frac{8}{15}$

8 そった力 $392 \sin 20^\circ \approx 134.1 \text{ N}$ 、押し
 つける力 $392 \cos 20^\circ \approx 368.4 \text{ N}$

9 (1) $0.75 \times 12 = 9 \text{ m}$ 。
 (2) $\tan^{-1} \frac{1}{12} \approx 4.76^\circ$ 。
 (3) $\frac{0.75}{\sin 4.76^\circ} \approx \frac{0.75}{0.0830} \approx 9.03 \text{ m}$
 (三平方の定理で $\sqrt{9^2 + 0.75^2} \approx 9.03$
 とも求められる)

10 $\theta = 45^\circ$ のとき $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $\theta = 135^\circ$
 のとき $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

11 (1) $mg = 117.6$ 、
 $\sin \theta = \frac{50}{117.6} \approx 0.4252$ 、 $\theta \approx 25.2^\circ$ 。
 (2) $117.6 \times \cos 25.2^\circ \approx 106.4 \text{ N}$

4-7

① (1) $\frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \frac{1}{2} = 7$ 。(2) $6\sqrt{3}$
(約 10.4)。

② $b = \frac{8 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 8\sqrt{2}$ (約 11.3)、
 $R = 8$ 。

③ $C = 60^\circ$ 。 $AC = \frac{50 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 44.2$ m、
 $BC = \frac{50 \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 54.3$ m。

④ (1) $c^2 = 25 + 9 - 15 = 19$ 、
 $c = \sqrt{19}$ (約 4.36)。

(2) $c^2 = 16 + 36 + 24 = 76$ 、
 $c = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (約 8.72)。

⑤ $\cos A = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}$ 、 $A = 60^\circ$ 。

⑥ c^2
 $= 22500 - 21600 \cos 70^\circ \approx 15112.4$ 、
 $c \approx 122.9$ m。

⑦ ひじ (20.0, 34.6)。 $\theta_1 + \theta_2 = 120^\circ$ より、
手は $x = 20 - 15 = 5.0$ 、
 $y = 34.64 + 25.98 \approx 60.6$ 。

⑧ $d^2 = 1300$ 。 $\cos \angle OEP = 0.5$ より
 $\theta_2 = 120^\circ$ 。 $\alpha \approx 56.31^\circ$ 、
 $\cos \beta \approx 0.6934$ より $\beta \approx 46.10^\circ$ 。
 $\theta_1 \approx 10.2^\circ$ 。

⑨ $R^2 = 2500 + 2500 - 5000 \cos 60^\circ$
 $= 2500$ 、 $R = 50$ N。

⑩ $T_L = T_R = \frac{60 \sin 60^\circ}{\sin 120^\circ} = 60$ N (重力
と同じ)。

① (1) $\frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \frac{1}{2} = 7$ 。

(2) $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ (約
13.0)。

② $b = \frac{6 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{2}$ (約 8.49)。
 $2R = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 12$ より $R = 6$ 。

③ $C = 70^\circ$ 。 $AC = \frac{60 \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 55.3$ m。

$BC = \frac{60 \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 48.9$ m。

④ (1) $c^2 = 64 + 25 - 40 = 49$ 、 $c = 7$ 。

(2) $c^2 = 4 + 9 + 6 = 19$ 、 $c = \sqrt{19}$
(約 4.36)。

⑤ $\cos A = \frac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ 。
 $A = 60^\circ$ 。

⑥ $c^2 = 7400 - 7000 \cos 40^\circ \approx 2037.7$ 、
 $c \approx 45.1$ m。

⑦ $R^2 = 400 + 900 - 1200 \cos 120^\circ$
 $= 1900$ 、 $R \approx 43.6$ N。

⑧ $\theta_1 + \theta_2 = 135^\circ$ より、
 $x \approx 35.36 - 28.28 \approx 7.1$ 、
 $y \approx 35.36 + 28.28 \approx 63.6$ 。

⑨ $d \approx 58.31$ 。 $\cos \angle OEP = -0.375$ より
 $\theta_2 \approx 68.0^\circ$ 。 $\alpha \approx 59.04^\circ$ 、
 $\cos \beta \approx 0.8789$ より $\beta \approx 28.49^\circ$ 。
 $\theta_1 \approx 30.5^\circ$ 。

⑩ $\theta_L + \theta_R = 90^\circ$ 。
 $T_L = T_R = \frac{49 \times \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \approx 34.6$ N。

4-8

① (1) $1000 \div 360 = 2$ あまり 280。
 280° (2 周と 280°)。

(2) $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$ 。

(3) $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ で、 60° (1 周と
 $\frac{\pi}{3}$)。

② (1) $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ 、

$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。(2) -60° は 300°

と同じ位置。 $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$ 、

$\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。(3) 30° と同じ位

置。 $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$ 。

(4) $(6, 240^\circ)$ は

$$x = 6 \cos 240^\circ = -3,$$

$$y = 6 \sin 240^\circ = -3\sqrt{3}. \quad (8, -60^\circ)$$

は $x = 8 \cos(-60^\circ) = 4,$

$$y = 8 \sin(-60^\circ) = -4\sqrt{3}.$$

【3】 $\sin^2 \theta = 1 - 0.36 = 0.64$. 第4象限
(右下) では $\sin \theta$ は負なので、
 $\sin \theta = -0.8$.

【4】 $A: (-y, x) = (1, 3)$. $B: (-3, 1)$.

【5】 (1) 振幅 2、周期 360° . たてに 2 倍し
て右へ 45° . $y = 2 \sin 90^\circ = 2$.

(2) $360^\circ \div 3 = 120^\circ$.

【6】 (1) $60^\circ, 120^\circ$. (2) $60^\circ, 300^\circ$.
(3) $\sin^{-1} 0.3 = 17.46 \dots$ で約 17.5° 、
もう 1 つは約 162.5° .

【7】 $f = 600 \div 60 = 10 \text{ Hz}$, $T = 0.1 \text{ s}$,
 $\omega = 2\pi \times 10 = 20\pi \approx 62.8 \text{ rad/s}$,
 $v = 0.25 \times 62.8 \approx 15.7 \text{ m/s}$.

【8】 (1) $360^\circ \div 16 = 22.5^\circ$.
(2) $\theta = 135^\circ$.
 $40 + 40 \times 0.707 \approx 68.3 \text{ m}$.
(3) $50 \div 16 = 3$ あまり 2 で、
 $\theta = 45^\circ$. $40 - 40 \times 0.707 \approx 11.7 \text{ m}$.

【9】 (1) $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$. (2) 1 秒後は
 $\frac{\pi}{3}$ (60°) で $0.2 \times 0.866 \approx 0.173 \text{ m}$.
4.5 秒後は $\frac{3\pi}{2}$ (270°) で -0.2 m .

1 (1) 2 周と 120° で、 120° .
(2) $-210^\circ + 360^\circ = 150^\circ$.
(3) $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ で、 150° .

2 (1) $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(2) $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$. (3) 150° と同じ位
置. $\cos 510^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 510^\circ = \frac{1}{2}$.

(4) $(10, 225^\circ)$ は $(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$,
 $(4, 510^\circ)$ は $(-2\sqrt{3}, 2)$.

3 $\cos^2 \theta = 1 - 0.64 = 0.36$. 第3象限で
は負なので、 $\cos \theta = -0.6$.

4 $(-2, 5)$, $(-5, -2)$.

5 振幅 4、周期 360° . たてに 4 倍して
右へ 60° . $y = 4 \sin 90^\circ = 4$.

6 (1) $240^\circ, 300^\circ$. (2) $45^\circ, 315^\circ$.

7 $f = 180 \div 60 = 3 \text{ Hz}$,
 $T = \frac{1}{3} \approx 0.33 \text{ s}$,
 $\omega = 6\pi \approx 18.8 \text{ rad/s}$,
 $v = 0.33 \times 18.85 \approx 6.2 \text{ m/s}$.

8 (1) $\theta = 180^\circ$. $50 + 50 = 100 \text{ m}$.
(2) $65 \div 20 = 3$ あまり 5 で $\theta = 90^\circ$.
 50 m . (3) $\theta = 54^\circ$.
 $50 - 50 \times 0.588 = 20.6 \text{ m}$.

9 $\sin^{-1} 0.6 = 36.86 \dots$ で約 36.9° 、もう
1 つは約 143.1° .

10 $f = 7200 \div 60 = 120 \text{ Hz}$,
 $T = \frac{1}{120} \approx 0.0083 \text{ s}$,
 $\omega = 240\pi \approx 754 \text{ rad/s}$,
 $v = 0.045 \times 754 \approx 33.9 \text{ m/s}$.

4-9

【1】 (1) $\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0.259$.
(2) $\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0.259$.

【2】 $\cos a = \frac{12}{13}$, $\sin b = \frac{3}{5}$.
 $\sin(a+b) = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$,
 $\cos(a+b) = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$.

$$\begin{aligned} \text{㉓} \quad \cos(\theta + 120^\circ) &= -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \\ \cos(\theta - 120^\circ) &= -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta. \\ \text{たすと } -\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉔} \quad (1) \sin 2\theta &= 2 \times 0.8 \times 0.6 = 0.96, \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \times 0.64 = -0.28. \\ (2) \frac{1 + 0.866}{2} &= 0.933. \end{aligned}$$

$$\text{㉕} \quad x = \frac{400 \times 0.5}{10} = 20 \text{ m. いちばん遠いのは } 45^\circ \text{ のときで, } \frac{400}{10} = 40 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \text{㉖} \quad (1) R &= 2, \alpha = 30^\circ. \\ 2\sin(\theta + 30^\circ), \text{ 最大 } 2 \quad (\theta = 60^\circ). \\ (2) R &= 5, \cos\alpha = 0.8 \text{ より} \\ \alpha &\approx 36.9^\circ. \text{ 最大 } 5 \quad (\theta \approx 53.1^\circ). \end{aligned}$$

$$\text{㉗} \quad (1) 262 - 260 = 2 \text{ で } 1 \text{ 秒に } 2 \text{ 回, } \frac{262 + 260}{2} = 261 \text{ Hz. (2) } 333 \text{ Hz か } 327 \text{ Hz.}$$

$$\begin{aligned} \text{㉘} \quad (1) 100 \times 5 &= 500 \text{ W.} \\ (2) 500 \times 0.866 &= 433 \text{ W.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1} \quad 105^\circ &= 60^\circ + 45^\circ. \\ (1) \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.966. \\ (2) \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \approx -0.259. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2} \quad \cos a &= \frac{15}{17}, \sin b = \frac{4}{5}. \\ \sin(a + b) &= \frac{24}{85} + \frac{60}{85} = \frac{84}{85}, \\ \cos(a + b) &= \frac{45}{85} - \frac{32}{85} = \frac{13}{85}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3} \quad (1) \sin 2\theta &= 0.5376, \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \times 0.0784 = 0.8432. \\ (2) \frac{1 - 0.707}{2} &\approx 0.146. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4} \quad \text{点 } (1, 1) \text{ で } R &= \sqrt{2}, \alpha = 45^\circ. \\ \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ). \text{ 最大 } \sqrt{2} \quad (\theta = 45^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5} \quad \frac{225 \times 0.866}{10} &\approx 19.5 \text{ m. } 45^\circ \text{ のとき} \\ \frac{225}{10} &= 22.5 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\text{6} \quad 2\sin\theta \cos 60^\circ = \sin\theta.$$

$$\text{7} \quad 1 \text{ 秒に } 3 \text{ 回. 約 } 331.5 \text{ Hz.}$$

$$\begin{aligned} \text{8} \quad \cos a &= \frac{3}{5}, \sin b = \frac{5}{13}. \\ \sin(a + b) &= \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}, \\ \cos(a + b) &= \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9} \quad \sin 2\theta &= 2 \times 0.6 \times (-0.8) = -0.96, \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \times 0.36 = 0.28. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{10} \quad R &= \sqrt{25 + 144} = 13. \cos\alpha = \frac{5}{13} \text{ より} \\ \alpha &\approx 67.4^\circ. \text{ 最大 } 13 \quad (\theta \approx 22.6^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11} \quad \sin(\theta - 120^\circ) &= -\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ \sin(\theta - 240^\circ) &= -\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta. \\ 3 \text{ つをたすと } \sin\theta - \sin\theta + 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{12} \quad 200 \times 10 \times 0.5 = 1000 \text{ W. おくれがないとき } 2000 \text{ W.}$$

$$\begin{aligned} \text{13} \quad \text{差が } 4 \text{ なので } 436 \text{ Hz か } 444 \text{ Hz. 音を} \\ \text{高くしてうなりがゆっくりになった} \\ \text{(440 Hz に近づいた) ので, } 436 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

4-10

$$\text{㉑} \quad (1) \text{ スカラー } (2) \text{ ベクトル } (3) \text{ スカラー } (4) \text{ ベクトル}$$

$$\begin{aligned} \text{㉒} \quad \sqrt{15^2 + 8^2} &= \sqrt{289} = 17 \text{ N.} \\ \tan^{-1} \frac{8}{15} &\approx 28.1^\circ \text{ で, 東から約 } 28^\circ \text{ 北} \\ &\text{へ回った向き} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉓} \quad 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos 120^\circ \\ = 49 + 64 + 56 = 169. \sqrt{169} = 13 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉔} \quad (1) \text{ 右へ } 4 \cdot \text{上へ } 3, \text{ 大きさ } 5 \quad (2) \text{ 右} \\ \text{へ } 6 \cdot \text{上へ } 2 \quad (3) \text{ 左へ } 1 \cdot \text{下へ } 2 \\ (4) \text{ 右へ } 2 \cdot \text{下へ } 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉕} \quad \text{北を } + \text{ とし } (+30) - (-20) &= +50. \\ \text{北へ } 50 \text{ m/s} \end{aligned}$$

【6】 東へ 15 と北へ 15 の和。北東の向きに
 $15\sqrt{2} \approx 21.2 \text{ m/s}$

【7】 (1) $3 - 5 = -2$ で南へ 2 m/s (A から
 見ると、B は後ろへ下がっていく)
 (2) $(-4) - 5 = -9$ で南へ 9 m/s

【8】 「下へ 6」と「南へ 8」の和。
 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$ 。 $\tan^{-1} \frac{8}{6} \approx 53^\circ$
 だけ南 (車の後ろ) へかたむく

【9】 $A'(4, 0)$ 、 $B'(7, -3)$ 、 $C'(2, -2)$ 。動
 いた距離 $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3.61$

【1】 ベクトル：(1) (3)。スカラー：(2) (4)

【2】 $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ N}$ 。
 $\tan^{-1} \frac{12}{9} \approx 53.1^\circ$ で、東から約 53° 北
 へ回った向き

【3】 $5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ = 49$ 。
 7 N

【4】 (1) 右へ $4 \cdot$ 上へ 1 (2) 右へ $3 \cdot$ 上へ
 6 (3) 左へ $2 \cdot$ 上へ 3

【5】 東を+として $(-30) - (+12) = -42$ 。
 西へ 42 m/s

【6】 (1) $12 - 20 = -8$ で西へ 8 m/s
 (2) $(-12) - 20 = -32$ で西へ 32 m/s

【7】 $\sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29 \text{ N}$ 。
 $\tan^{-1} \frac{21}{20} \approx 46.4^\circ$ で、東から約 46° 北
 へ回った向き

【8】 $A'(-2, 5)$ 、 $B'(1, 6)$ 、 $C'(-1, 9)$ 。動
 いた距離 $\sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5.39$

【9】 北へ 20 と東へ 20 の和。北東の向きに
 $20\sqrt{2} \approx 28.3 \text{ m/s}$

【10】 $36 + 100 + 60 = 196$ で 14 N

【11】 「下へ 4」と「東へ 3」の和。
 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m/s}$ 。 $\tan^{-1} \frac{3}{4} \approx 37^\circ$ だ
 け東 (人の後ろ) へかたむく

【12】 「下へ 8」と「西へ 6」の和。
 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m/s}$ 。 $\tan^{-1} \frac{6}{8} \approx 37^\circ$
 だけ西 (車の後ろ) へかたむく

【13】 $25 + 256 + 80 = 361$ で 19 N

【14】 西へ 12 と南へ 12 の和。南西の向きに
 $12\sqrt{2} \approx 17.0 \text{ m/s}$

4-11

【1】 $(-3 - 2, 9 - (-3)) = (-5, 12)$ 。大
 きさ $\sqrt{25 + 144} = 13$

【2】 (1) (2, 3) (2) (-4, 1)
 (3) $(-3, 6) - (6, 2) = (-9, 4)$
 (4) $\sqrt{13} \approx 3.61$

【3】 (1) $(30, 30\sqrt{3}) \approx (30, 52.0)$
 (2) $(-30\sqrt{2}, 30\sqrt{2}) \approx (-42.4, 42.4)$

【4】 大きさ $\sqrt{49 + 576} = 25 \text{ N}$ 。
 $\tan^{-1} \frac{24}{-7} \approx -73.7^\circ$ は右下なので、
 180° 回して $\theta \approx 106.3^\circ$

【5】 変化 (12, -9)。速度 (4, -3) (m/s)、
 速さ $\sqrt{16 + 9} = 5 \text{ m/s}$

【6】 $120 \div 5 = 24 \text{ s}$ 、 $2 \times 24 = 48 \text{ m}$ 、
 $\sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5.39 \text{ m/s}$

【7】 $\sin \theta = \frac{5}{10} = 0.5$ で 30° 。
 $10 \cos 30^\circ \approx 8.66$ 。
 $200 \div 8.66 \approx 23.1 \text{ s}$

【8】 $|\vec{a}| = 13$ 。 $\vec{e} = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right)$ 。力は
 $26\vec{e} = (10, -24)$ (N)

【9】 (1) (1, 1.5)
 (2) $\frac{1(-2, 3) + 2(4, 0)}{3} = (2, 1)$
 (3) (1, 3)

【10】 $\frac{3(2, 0) + 1(6, 4)}{4} = (3, 1)$ 。加えると
 $\frac{(12, 4) + (-4, 4)}{8} = (1, 1)$

11 (1) $(10 - 8, -3 + 6) = (2, 3)$

(2) $10 - 2t = 0$ で 5 秒後、

$y = -3 + 7.5 = 4.5$

12 $x : -\frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 = 0$ より

$T_1 = \sqrt{3}T_2$ 。 $y : \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 = 200$

から $2T_2 = 200$ 。 $T_2 = 100 \text{ N}$ 、

$T_1 = 100\sqrt{3} \approx 173.2 \text{ N}$

1 $(-8, 6)$ 、大きさ 10

2 (1) $(1, 1)$ (2) $(3, -7)$ (3) $(4, -1)$

(4) $\sqrt{58} \approx 7.62$

3 (1) $(20\sqrt{3}, 20) \approx (34.6, 20)$

(2) $(-20\sqrt{3}, 20) \approx (-34.6, 20)$

4 変化 $(15, 20)$ 。速度 $(3, 4) \text{ (m/s)}$ 、
速さ 5 m/s

5 $|\vec{a}| = 10$ 。 $(-0.8, 0.6)$ 。力は
 $(-16, 12) \text{ (N)}$

6 (1) $(5, 2)$
(2) $\frac{2(2, 5) + (8, -1)}{3} = (4, 3)$
(3) $(3, 2)$

7 $(2, 6)$ 。 $2t = 10$ で 5 秒後

8 大きさ 10 N 。 $\tan^{-1} \frac{8}{-6} \approx -53.1^\circ$ に
 180° をたして $\theta \approx 126.9^\circ$

9 (1) $90 \div 6 = 15 \text{ s}$ 、 $3 \times 15 = 45 \text{ m}$

(2) $\sin \theta = 0.5$ で上流へ 30° 。

$6 \cos 30^\circ \approx 5.196$ 、

$90 \div 5.196 \approx 17.3 \text{ s}$

10 $\frac{(4, 8) + (14, -2)}{6} = (3, 1)$ 。加えると
 $\frac{(18, 6) + (-6, 6)}{8} = (1.5, 1.5)$

11 $T_2 = \sqrt{3}T_1$ 、 $\frac{1}{2}T_1 + \frac{3}{2}T_1 = 60$ から
 $T_1 = 30 \text{ N}$ 、 $T_2 = 30\sqrt{3} \approx 52.0 \text{ N}$

4-12

1 $F = 3 \times 9.8 = 29.4 \text{ N}$ 。持ち上げる
 $29.4 \times 1.5 = 44.1 \text{ J}$ 、下ろす -44.1 J

2 $50 \times 8 \times \cos 30^\circ$
 $= 400 \times 0.866 \approx 346 \text{ J}$

3 (1) $12\sqrt{3} \approx 20.8$
(2) $-12\sqrt{3} \approx -20.8$ (3) 0

4 (1) $-12 + 10 = -2$
(2) $18 - 8 = 10 \text{ J}$

5 (1) $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で 45°
(2) $\cos \theta = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ で 135°

6 $6k - 12 = 0$ より $k = 2$

7 $\vec{e} = (0.6, 0.8)$ 。成分 $6 + 4 = 10 \text{ N}$ 、
仕事 $10 \times 3 = 30 \text{ J}$

8 $\bar{x} = 5$ 、 $\bar{y} = 7$ 。 $\vec{d}_x = (-3, -1, 1, 3)$ 、
 $\vec{d}_y = (2, 0, 1, -3)$ 。内積 -14 、
 $|\vec{d}_x| = \sqrt{20}$ 、 $|\vec{d}_y| = \sqrt{14}$ 。
 $r = \frac{-14}{\sqrt{280}} \approx -0.84$

9 $mg = 29.4 \text{ N}$ 。
 $29.4 \times 6 \times \cos 60^\circ = 88.2 \text{ J}$ ($h = 3 \text{ m}$
で mgh と同じ)

1 $F = 4 \times 9.8 = 39.2 \text{ N}$ 。持ち上げる
 117.6 J 、下ろす -117.6 J

2 $30 \times 6 \times 0.5 = 90 \text{ J}$

3 (1) 5 (2) -5

4 (1) $8 - 15 = -7$ (2) $8 - 7 = 1 \text{ J}$

5 $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で 45°

6 $-12 + 6k = 0$ より $k = 2$

7 $9.8 \times 10 \times \cos 60^\circ = 49 \text{ J}$ ($h = 5 \text{ m}$)

8 $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ で 135°

9 $\vec{e} = (0.8, 0.6)$ 。成分 $4 + 6 = 10 \text{ N}$ 、
仕事 20 J

10 $\bar{x} = 4, \bar{y} = 4, \vec{d}_x = (-3, -1, 1, 3),$
 $\vec{d}_y = (-2, 0, -2, 4)$ 。内積 16、
 $|\vec{d}_x| = \sqrt{20}, |\vec{d}_y| = \sqrt{24}$ 。
 $r = \frac{16}{\sqrt{480}} \approx 0.73$

4-13

11 B(5, 2, 0)、E(5, 0, 3)、G(0, 2, 3)。
 G の真下は (0, 2, 0) (点 C)

12 (1) $\sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$
 (2) 差は 2、-3、6。 $\sqrt{4+9+36} = 7$

13 (1) (2, -2, 1)、大きさ 3。
 (2) (2, -2, 4)、(4, 8, -1)、 $|\vec{a}| = 3,$
 $|\vec{b}| = 5, |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16+64+1} = 9$

14 (1) 内積 $2+2-1=3$ 、大きさはどちら
 とも $\sqrt{6}$ 。 $\cos \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ で 60° 。
 (2) 内積 $2-2+4=4$ 、大きさはどちら
 とも 3。 $\cos \theta = \frac{4}{9} \approx 0.444$ で約 63.6° 。
 (3) $2-5+3=0$ なので直交する

15 $5 \times 6 + (-2) \times 4 + 30 \times 2$
 $= 30 - 8 + 60 = 82 \text{ J}$ 。重力は
 $(-30) \times 2 = -60 \text{ J}$

16 $|\vec{a}| = 9, \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 。
 $\cos \theta_z = \frac{8}{9} \approx 0.889$ で約 27.3°

17 $3(x-2) + y + 2(z-1) = 0$ より
 $3x + y + 2z = 8$ 。Q は $0+2+6=8$
 で、平面の上にある

1 F(3, 5, 4)、G(0, 5, 4)。F の真下は
 (3, 5, 0)

2 (1) $\sqrt{16+16+49} = 9$
 (2) $\sqrt{4+9+36} = 7$

3 (4, 2, 2)、(-1, -8, 4)、 $|\vec{a}| = 3,$
 $|\vec{b}| = 5, |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1+64+16} = 9$

4 (1) 内積 1、大きさの積 2。
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ で 60° 。(2) $4+2-6=0$
 なので直交する

5 $|\vec{a}| = 7, \left(\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$ 。
 $\cos \theta_x = \frac{2}{7} \approx 0.286$ で約 73.4°

6 $2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0$ より
 $2x - y + z = 3$ 。Q は $0-0+3=3$
 で、平面の上にある

7 (1) $\sqrt{900+1600+14400}$
 $= \sqrt{16900} = 130 \text{ m}$ 。
 (2) $\cos \theta_z = \frac{120}{130} \approx 0.923$ で約 22.6°

8 $60 - 40 + 100 = 120 \text{ J}$ 。重力は
 $(-25) \times 4 = -100 \text{ J}$

9 内積 $-1+1+1=1$ 、大きさはどちら
 も $\sqrt{3}$ 。 $\cos \theta = \frac{1}{3} \approx 0.333$ で約 70.5°

10 (2, -2, 1)、大きさ 3。単位ベクトル
 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

11 差は 30、40、0。
 $\sqrt{900+1600+0} = \sqrt{2500} = 50 \text{ mm}$

12 内積 $2+4+2=8$ 、大きさはどちらも
 3。 $\cos \theta = \frac{8}{9} \approx 0.889$ で約 27.3° 。
 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 2-2+0=0$ なので直交する

4-14

1 $240 \times 1.5 = 360$ 。 $360x = 360$ より
 1.0 m

2 $0.2 \times 60 \times 0.866 \approx 10.4 \text{ N} \cdot \text{m}$

3 $0.5 \times 30 - 0.2 \times (-10) = 15 + 2$
 $= 17$ 。 $17 \text{ N} \cdot \text{m}$ 、左回り

4 (1) (1, -2, -1)。内積は
 $2-2+0=0, 1+0-1=0$ 。
 (2) (-1, 2, 1)。(3) $\vec{0}$

【5】 $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$ 。

外積 $(4, 4, 4)$ 、大きさ $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ 。

面積 $2\sqrt{3} \approx 3.46$

【6】 $\vec{L} \times \vec{B} = (0.2, 0, 0)$ 。 $\vec{F} = (0.4, 0, 0)$
で、 x の+の向きに 0.4 N

【7】 y 成分 $0 \times 0 - 0.25 \times (-40) = 10$ 、ほかは 0 。 $(0, 10, 0)$ 。 y 軸の向きの軸のまわりに、右ねじが y の+へ進む向き

【8】 $(-0.5) \times (-120) = 60$ 、
 $0.3 \times (-100) = -30$ 、 $1.5 \times (-F)$ 。
 $60 - 30 - 1.5F = 0$ より $F = 20\text{ N}$
(下向き)

【1】 $350 \times 1.6 = 560$ 。 $400x = 560$ より
 1.4 m

【2】 (1) $0.4 \times 30 \times 0.5 = 6\text{ N} \cdot \text{m}$ 。
(2) $0.4 \times 30 = 12\text{ N} \cdot \text{m}$

【3】 $0.2 \times (-20) - 0.5 \times 10 = -4 - 5$
 $= -9$ 。 $9\text{ N} \cdot \text{m}$ 、右回り

【4】 $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 6, 1)$ 、
 $\vec{b} \times \vec{a} = (2, -6, -1)$ 。内積
 $-2 + 0 + 2 = 0$

【5】 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ 。
外積 $(1, 1, 1)$ 、大きさ $\sqrt{3}$ 。面積
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

【6】 $\vec{L} \times \vec{B} = (0, 0, -0.06)$ 。
 $\vec{F} = (0, 0, -0.3)$ で、 z の-の向き
(下) に 0.3 N

【7】 $\vec{r} \times \vec{F} = (0, 12, 6)$ 。大きさ
 $\sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} \approx 13.4\text{ N} \cdot \text{m}$

【8】 $0.17 \times 500 \times 0.866 \approx 73.6\text{ N} \cdot \text{m}$

【9】 $0.5 \times 200 \times 0.866 \approx 86.6\text{ N} \cdot \text{m}$ 。
 $100\text{ N} \cdot \text{m}$ にとどかない (直角に押せば
 $100\text{ N} \cdot \text{m}$ になる)

4-15

【1】 (1) $(2, 30^\circ)$ 。(2) $(\sqrt{2}, 135^\circ)$ 。
(3) $(6, 240^\circ)$ 。(4) $(3\sqrt{2}, 315^\circ)$

【2】 位置 $(-1, 1.73)$ 。速さ 6 、
 $\vec{e}_\theta = (-0.866, -0.5)$ 。速度
 $(-5.20, -3)\text{ (m/s)}$

【3】 (1) 約 $(-8.66, 5, 20)$ 。
(2) $r = 5\sqrt{2} \approx 7.07$ 、右下で
 $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$ 。
 $(5\sqrt{2}, 315^\circ, 12)$

【4】 (1) $r \sin \theta = 2$ 。約
 $(-1, 1.73, 3.46)$ 。(2) $r = 4$ 、
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で $\theta = 30^\circ$ 、床の上の点
 $(0, 2)$ は y 軸の上で $\varphi = 90^\circ$ 。
 $(4, 30^\circ, 90^\circ)$

【5】 (1) $R \cos 45^\circ \approx 4525$ 。
 $(0, 4525, 4525)\text{ (km)}$ 。(2) 半径
 $6400 \cos 40.8^\circ \approx 4845\text{ km}$ 、1 周約
 30441 km 、24 でわって時速約
 1268 km

【6】 $(0, \frac{\pi}{4})$ 、 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 、 $(\pi, 0)$ (約
 $(0, 0.785)$ 、 $(-1.57, 0)$ 、 $(3.14, 0)$)

【7】 $\vec{e}_A = (0.5, 0, 0.866)$ 、
 $\vec{e}_B = (-0.5, 0, 0.866)$ 。内積
 $-0.25 + 0.75 = 0.5$ で 60° 。
 $6400 \times \frac{\pi}{3} \approx 6702\text{ km}$ (北極の上を
通る)

【1】 (1) $(3, 3\sqrt{3})$ (約 $(3, 5.20)$)。
(2) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (約
 $(-2.83, 2.83)$)。(3) $(1, -\sqrt{3})$ (約
 $(1, -1.73)$)

【2】 (1) $r = 2$ 、左上で
 $-30^\circ + 180^\circ = 150^\circ$ 。(2, 150°)。
(2) $(\sqrt{2}, 315^\circ)$ 。(3) $r = 5$ 、左下で

$\tan^{-1} 0.75 \approx 36.9^\circ$ 、 $+180^\circ$ で
(5, 216.9°)

3 位置 (0.2, 0.346)。速さ 2、
 $\vec{e}_\theta = (-0.866, 0.5)$ 。速度 $(-1.73, 1)$
(m/s)

4 (1) 約 $(-4, -6.93, 5)$ 。(2) $r = 5$ 、
左下で約 216.9° 。(5, 216.9° , 10)

5 (1) $r \sin \theta \approx 5.196$ 。約
(4.5, 2.60, 3)。(2) $r = 4$ 、
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で 45° 、 $\varphi = 45^\circ$ 。
(4, 45° , 45°)

6 $(0, \frac{\pi}{2})$ 、 $(-\pi, 0)$ 、 $(2\pi, 0)$ (約
(0, 1.57)、 $(-3.14, 0)$ 、(6.28, 0))

7 (1) $R \cos 60^\circ = 3200$ 。約
(2771, 1600, 5543) (km)。(2) 半径
 $6400 \cos 26.2^\circ \approx 5742$ km。
 $2\pi \times 5742 \div 24 \approx$ 時速 1503 km

8 $\vec{e}_A = (1, 0, 0)$ 、
 $\vec{e}_B = (0, 0.707, 0.707)$ 。内積 0 で
 90° 。 $6400 \times \frac{\pi}{2} \approx 10\,053$ km

9 $r \sin \theta = 10$ 。約 (5, 8.66, 0)。 $z = 0$
なので xy 平面の上

記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

記号	読み方	意味	章
$< > \leq \geq$	不等号	大きさをくらべる記号。 $\leq$ は「以下」、 $\geq$ は「以上」	2-2
Δ	デルタ	変化量。「あとーまえ」。三角形の印 Δ (4-1) とはちがう	2-3
x^2	エックスの 2 乗	$x \times x$ 。 x^3 は $x \times x \times x$	2-7
$\sqrt{\quad}$	ルート	2 乗すると中の数になる正の数。 $\sqrt{9} = 3$	2-8
π	パイ	円周率。円周÷直径。3.14159...	2-9
x_1	エックス・いち	1 番めの x 。右下の数字は名札で、かけ算ではない	3-2
$ x $	絶対値エックス	0 からの距離。 $ -3 = 3$	3-2
$f(x)$	エフ・エックス	関数 f に x を入れた値	3-3
$\approx$	ニアリーイコール	ほぼ等しい。 $\sqrt{2} \approx 1.414$	3-17
$\angle \cdot \triangle$	角・三角形	$\angle ABC$ は頂点 B の角。 $\triangle ABC$ は三角形 ABC。 Δ は Δ (変化量) とはちがう	4-1
$\perp \cdot \parallel$	垂直・平行	$AB \perp CD$ は直角に交わる。 $AB \parallel CD$ はどこまでも交わらない	4-1
θ	シータ	角の大きさ。度でもラジアンでも使う (微分・積分ではラジアン)	4-2
rad	ラジアン	弧度法の角の単位。弧の長さ÷半径。 $\pi \text{ rad} = 180^\circ$	4-2
$\propto$	そうじ	相似。 $\triangle ABC \propto \triangle DEF$ のように、対応する頂点の順に書く	4-3
$\equiv$	ごうどう	合同。形も大きさも同じ。相似比 1:1 の相似	4-3

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
in	インチ	長さの単位。1 インチは 2.54 cm。画面の大きさは対角線の長さで表す	4-4
$S \cdot V$	エス・ブイ	面積を S 、体積を V で表すことが多い。物理では面積に A も使う	4-5
$\sin$ $\cos$	サイン・コサイン	角 θ の直角三角形の、斜辺に対する対辺・隣辺の比（正弦・余弦）	4-6
tan	タンジェント	対辺÷隣辺の比（正接）。角 θ の坂の傾き	4-6
ω	オメガ	角速度。1 秒に回る角 (rad/s)	4-8
$\sin^2 \theta$	サイン・にじょう・シータ	$(\sin \theta)^2$ のこと。 $\sin(\theta^2)$ ではない	4-8
α	アルファ	合成した波のずれの角。点 (a, b) の動径の角	4-9
$\pm$	プラス・マイナス	＋ と － の 2 つの式をまとめて書く記号	4-9
$\vec{a}$	ベクトル・エー	向きと大きさをもつ量。 $\overrightarrow{AB}$ は A から B への矢印。	4-10
$ \vec{a} $	ベクトル・エーの大きさ	矢印の長さ。向きをすてた数（スカラー）。	4-10
(a_x, a_y)	エー・エックス、エー・ワイ	ベクトル $\vec{a}$ の成分。横の進みとたての進み。	4-11
$\vec{e}$	ベクトル・イー	単位ベクトル。大きさが 1 のベクトル。向きだけを表す。	4-11
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	エー・ドット・ビー	内積。 $ \vec{a} \vec{b} \cos \theta$ 。答えは数（スカラー）。	4-12
a	太字のエー	ベクトル。 $\vec{a}$ と同じ。細い字の a は大きさ	4-13
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	アイ・ジェイ・ケイ	$x \cdot y \cdot z$ 軸の向きの基本ベクトル	4-13
$\vec{a} \times \vec{b}$	エー・クロス・ビー	外積。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトル。大きさ $ab \sin \theta$	4-14
$\odot \quad \otimes$	手前へ・おくへ	紙に垂直な向き。 $\odot$ は手前へ出る、 $\otimes$ はおくへ入る	4-14

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
(r, θ)	アール・シータ	極座標。原点からの距離と向きの角。 r はほかの章では別の意味（相関係数など）にも使う	4-2
(r, θ, φ)	アール・シータ・ファイ	球座標。 φ は第 5 巻では初期位相の意味にも使う	4-15

ギリシャ文字の読み方

この巻から、角を表す $\theta \cdot \alpha \cdot \varphi$ や、角速度の ω など、ギリシャ文字がふえます。大文字・小文字・読み方と、よく使われる意味です。

大	小	読み方	よく使う意味	大	小	読み方	よく使う意味
A	α	アルファ	角 (4-9)	N	ν	ニュー	振動数
B	β	ベータ	角	Ξ	ξ	クシー	(変数)
Γ	γ	ガンマ	(係数)	O	o	オミクロン	—
Δ	δ	デルタ	変化量、小さな量	Π	π	パイ	円周率
E	ε	イプシロン	小さな数	P	ρ	ロー	密度
Z	ζ	ゼータ	(係数)	Σ	σ	シグマ	和、ばらつき
H	η	イータ	効率	T	τ	タウ	トルク
Θ	θ	シータ	角 (4-2)	Υ	υ	ウプシロン	—
I	ι	イオタ	—	Φ	φ	ファイ	球座標の角 (4-15)
K	κ	カッパ	(係数)	X	χ	カイ	—
Λ	λ	ラムダ	波長	Ψ	ψ	プサイ	(角)
M	μ	ミュー	摩擦係数 (4-6)	Ω	ω	オメガ	角速度 (4-8)

大文字が英語のアルファベットと同じ形の文字 (A、B、E など) は、記号としてはほとんど使いません。 φ は ϕ と書くこともあります。

記号を書くときのちゅうい

手で書くと、ほかの字や記号とまぎれやすいものと、読みまちがえやすい書き方です。

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$\sin \theta$	$\sin \times \theta$	$\sin$ と θ で 1 つの数 (角 θ のサイン)。かけ算ではない (4-6)
$\sin^{-1} 0.5$	$\frac{1}{\sin 0.5}$	「 $\sin$ が 0.5 になる角」で 30° 。 -1 は逆数の意味ではない (4-6)
$\sin^2 \theta$	$\sin(\theta^2)$	$(\sin \theta)^2$ のこと。2 は $\sin$ のすぐ右上に書く (4-8)
DEG・ RAD	—	電卓の角の単位を先に確かめる (度は DEG、ラジアンは RAD)。表計算はラジアン (4-2)
θ	0、O	たて長の丸の、まん中に横線を 1 本 (4-2)
ω	w	下を丸く 2 つ。 w のようにとがらせない (4-8)
$\angle ABC$	—	まん中に書いた B が頂点の角 (4-1)
$\triangle$	Δ	三角形の印。変化量の Δ (2-3) とは別の記号 (4-1)
$\infty \equiv$	$\sim、=$	∞ は相似 (S を横にした形。なみの $\sim$ とはちがう)、横線 3 本の $\equiv$ は合同。頂点是对应する順に (4-3)
$\vec{a}$	a	矢印がないと、ただの数 (大きさ)。 $\overrightarrow{AB}$ は A から B へ (4-10)
a	a	太字はベクトル、細い字はその大きさ。ノートでは $\vec{a}$ と書く (4-13)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \times \vec{b}$	内積の点はまん中に。答えは数。外積とは別の計算 (4-12)
$\vec{a} \times \vec{b}$	$\vec{b} \times \vec{a}$	順番を入れかえると反対向き。 $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (4-14)
$\odot \otimes$	—	丸に点は手前へ出る向き、丸に $\times$ はおくへ入る向き (4-14)

よく使う定数・単位・公式

1 この巻で使う単位

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係	章
長さ	m、cm、mm、km	1 m = 100 cm、 1 km = 1000 m	4-3
	in（インチ）	1 in = 2.54 cm	4-4
	nm（ナノメートル）	1 nm は 10 億分の 1 m	4-13
体積	m ³ 、L、cm ³	1 m ³ = 1000 L、 1 L = 1000 cm ³	4-5
角	°（度）、rad（ラジアン）	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$ 、 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ 、 1 rad $\approx$ 57.3°	4-2
角速度	rad/s	1 秒に回る角。 $\omega = \frac{\theta}{t}$	4-8
振動数	Hz（ヘルツ）	1 秒に何回。 $f = \frac{1}{T}$ 、 $\omega = 2\pi f$	4-8
			4-9
力	N（ニュートン）	重力 mg ($g \approx 9.8 \text{ N/kg}$)	4-6
仕事	J（ジュール）	1 J = 1 N・m	4-12
力のモーメント	N・m	力×うでの長さ（トルク）	4-14
磁場・電荷	T（テスラ）、C（クーロン）	磁場から受ける力 $q\vec{v} \times \vec{B}$	4-14

2 よく使う数

名前	値	章
円周率 π	3.14159...	2-9・4-2
$\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$	1.414...、1.732...	2-8・4-6
1 rad	約 57.3°（1 周は約 6.28 rad）	4-2
重力の強さ g	約 9.8 N/kg（m/s ² と同じ単位）	4-6
1 インチ	2.54 cm	4-4

3 図形の公式

公式・きまり	式	章
平行線と角	対頂角は等しい。平行な 2 本の直線では、同位角は等しく、錯角は等しい	4-1
内角・外角	三角形の内角の和は 180° 。 n 角形の内角の和 $= 180^\circ \times (n - 2)$ 。外角の和は 360°	4-1
円周・弧度法	円周 $= 2\pi r$ 。角 θ (rad) $=$ 弧の長さ $\div$ 半径。1 周は 2π rad (360°)	4-2
弧とおうぎ形	弧の長さ $s = r\theta$ 、おうぎ形の面積 $S = \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}r^2\theta$ (θ はラジアン)	4-2
円周角・接線	円周角は中心角の半分。直径に対する円周角は 90° 。接線は接点で半径に垂直	4-2
相似	相似比が $1:k$ なら、長さの比 $1:k$ 、面積の比 $1:k^2$ 、体積の比 $1:k^3$	4-3
相似条件	① 3 辺の比がすべて等しい ② 2 辺の比とその間の角が等しい ③ 2 つの角が等しい	4-3
平行線と比	$DE \parallel BC$ なら $AD:AB = AE:AC = DE:BC$	4-3
三平方の定理	直角三角形で、斜辺を c とすると $a^2 + b^2 = c^2$ (逆: $a^2 + b^2 = c^2$ なら c の向かいの角は直角)	4-4
三角定規	$1:1:\sqrt{2}$ (45°)、 $1:2:\sqrt{3}$ ($30^\circ \cdot 60^\circ$)	4-4
2 点の距離・円	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。原点が中心、半径 r の円は $x^2 + y^2 = r^2$	4-4
直方体の対角線	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	4-4
面積	平行四辺形 $=$ 底辺 $\times$ 高さ、三角形 $=$ 底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ 、 台形 $=$ (上底 $+ 下底$) $\times$ 高さ $\div 2$ 、ひし形 $=$ 対角線 $\times$ 対角線 $\div 2$	4-5
円・おうぎ形	円 πr^2 、おうぎ形 $\frac{1}{2} \times$ 弧の長さ $\times r$	4-5

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
体積・表面積	柱＝底面積×高さ、すい＝底面積×高さ× $\frac{1}{3}$ 、球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 、球の表面積 $4\pi r^2$	4-5

4 三角比と三角関数の公式

公式・きまり	式	章
三角比の定義	$\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ $\cos \theta = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ $\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$ (坂の傾き = $\tan \theta$)	4-6
相互関係	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 、	4-6
	$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	4-8
鈍角	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ 、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (鈍角の $\cos$ は負)	4-6
斜面の重力	斜面にそって $mg \sin \theta$ 、斜面へ押しつける向きに $mg \cos \theta$	4-6
三角形の面積	$S = \frac{1}{2}ab \sin C$ (2 辺とそのあいだの角)	4-7
正弦定理	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R は外接円の半径)	4-7
余弦定理	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 、 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$	4-7
ロボットのうで	$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ 、 $y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$	4-7
単位円・一般角	単位円の上の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。 $\theta + 360^\circ \times n$ は θ と同じ位置 (周期 $360^\circ = 2\pi$)	4-8
90° 回す	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ 、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$	4-8
回る点	$\theta = \omega t$ 、 $(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ 、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 、 $f = \frac{1}{T}$ 、 $v = r\omega$	4-8

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
加法定理	$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	4-9
2 倍角	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$	4-9
2 乗を 1 次に	$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	4-9
合成	$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$	4-9
積を和に	$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$, $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$	4-9
和を積に	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$	4-9

よく使う角の三角比 (4-6)

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ラジアンでは、 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ 、 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ 、 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ 、 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ 、 $180^\circ = \pi$ (4-2)。 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.732$ なので、 $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 。

5 ベクトルと座標の公式

公式・きまり	式	章
和・実数倍	矢印をつなぐ。 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。 $k\vec{a}$ は長さ $ k $ 倍 ($k < 0$ なら反対向き)	4-10
差	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ 。 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ ($\vec{b}$ の先から $\vec{a}$ の 先へ)	4-10

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
速度の変化	$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\text{あと}} - \vec{v}_{\text{まえ}}$ 、相対速度 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$	4-10
成分	$\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。和・差・実数倍は成分ごとに計算	4-11
大きさ・単位ベクトル	$ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ 、 $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} }$	4-11
力の分解・つり合い	$\vec{F} = (F \cos \theta, F \sin \theta)$ 。つり合いは x 成分の和 = 0、 y 成分の和 = 0	4-11
中点・重心	中点 $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ 、重心 $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ 、 $\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$	4-11
仕事	$W = F s \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (力と動く向きが直角なら 0)	4-12
内積	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$ (答えは数)	4-12
直交・なす角	直交なら $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$	4-12
正射影	$\vec{e}$ の向きの成分 = $\vec{e} \cdot \vec{b}$ ($\vec{e}$ は単位ベクトル)	4-12
空間の距離	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	4-13
空間のベクトル	$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ 、 $ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	4-13
空間の内積	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	4-13
方向余弦・平面	$\vec{a} \div \vec{a} = (\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z)$ 。法線ベクトル (a, b, c) の平面は $ax + by + cz = d$	4-13
力のモーメント	$M = r F \sin \theta$ 。平面では $M = x F_y - y F_x$ (左回りが+)	4-14
外積	大きさ $ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \theta$ (平行四辺形の面積)。向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ回す右ねじの進む向き	4-14
外積の成分	$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$ 。 $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$	4-14

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
物理の外積	トルク $\vec{r} \times \vec{F}$ 、角運動量 $\vec{r} \times m\vec{v}$ 、磁場からの力 $q\vec{v} \times \vec{B}$	4-14
極座標	(r, θ) の点は $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 。	4-2
	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (θ は区画を見て決める)	4-8
		4-15
単位ベクトル・円運動	$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ 。速度 $\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta$	4-15
円柱座標	$(r, \theta, z) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$	4-15
球座標	$(r, \theta, \varphi) : x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi,$ $z = r \cos \theta$	4-15
緯度と経度	$\theta = 90^\circ -$ (北緯)、 $\varphi =$ (東経)	4-15

6 電卓・表計算の使い方

すること	書き方・キー (例)	意味	章
角の単位	電卓の DEG・RAD	度で計算するか、ラジアンで計算するか	4-2
			4-6
三角比から角	$\sin^{-1} \cdot \cos^{-1} \cdot \tan^{-1}$ (SHIFT を押してから)	$\tan^{-1} 2$ は「 $\tan$ が 2 になる角」	4-6
円周率	=PI()	$\pi = 3.14159 \dots$	4-2
度→ラジアン	=RADIANS(A2)	180 なら 3.1416	4-2
ラジアン→度	=DEGREES(B2)	3.1416 なら 180	4-2
度のサイン	=SIN(RADIANS(A2))	SIN はラジアンで計算する	4-2
			4-9
点の向きの角	=ATAN2(x, y)	区画まで考えた角 (ラジアン)	4-15
外積の成分	=C2*D3-D2*C3 など	成分の式をセルで計算	4-14

- RAD のまま $\sin 30$ を計算すると -0.988 になります。これは「30 ラジアン」のサインです。答えがおかしいときは、まず DEG・RAD を確かめます (4-6)。
- $\sin \theta = 0.5$ になる角は、 0° から 180° のあいだに 30° と 150° の 2 つあります。電卓の $\sin^{-1}$ は 1 つしか出さないなので、図をかいて確かめます (4-8)。
- ATAN2 は x を先に入れます。プログラムの言語では y を先に入れるものが多いので注意します (4-15)。

できるようになったことチェック表

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、次の巻に進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
4-1	平行線の同位角・錯角から、角を求められる。	32	☐	☐
	内角の和が 180° のわけと、多角形の角の和がわかる。	34	☐	☐
	定義・公理・定理・法則のちがいを説明でき、合同条件・逆・反例を使える。	38	☐	☐
4-2	弦・弧・おうぎ形がわかり、弧の長さとおうぎ形の面積を、中心角に比例させて求められる。	60	☐	☐
	角をラジアンで表し、度と換算して、 $s = r\theta$ と $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ を使える。	62	☐	☐
	接線が半径に垂直なわけを説明でき、DEG・RAD と極座標 (r, θ) を使える。	71	☐	☐
4-3	拡大図・縮図と縮尺を使って、本当の長さや図の上の長さを求められる。	100	☐	☐
	三角形の相似条件を見つけ、相似比や平行線と線分の比から、辺の長さを求められる。	103	☐	☐
	面積の比は k^2 、体積の比は k^3 を使い、すいの断面や直角三角形の辺の比を説明できる。	107	☐	☐
4-4	方眼の面積から $a^2 + b^2 = c^2$ を見つけ、2 通りに説明できる。	134	☐	☐
	辺の長さ・2 点の距離・直方体の対角線を求められる。	142	☐	☐
	直角三角形かを見分け、円の式のわけがわかる。	143	☐	☐
4-5	平行四辺形・三角形・台形・ひし形の面積を、長方形に直して求められる。	163	☐	☐
	円の面積と、柱・すい・球の体積を、わけといっしょに使える。	166	☐	☐
	展開図から表面積を求め、体積を L に換算できる。	174	☐	☐
4-6	直角三角形で、どの角から見るかに気をつけて、 $\sin \cdot \cos \cdot \tan$ を求められる。	200	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
	三角比と電卓で、辺の長さや角度を求められる。坂の傾きを角度に直せる。	203	☐	☐
	斜面の重力を、 $mg \sin \theta$ と $mg \cos \theta$ に分けられる。	208	☐	☐
4-7	鈍角の三角比を使い、三角形の面積を $\frac{1}{2}ab \sin C$ で求められる。	237	☐	☐
	正弦定理と余弦定理を使い分けて、三角形の辺や角を求められる。	238	☐	☐
	ロボットのうでの関節の角を、余弦定理で求められる。	245	☐	☐
4-8	単位円上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を求められる。	272	☐	☐
	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ や 90° 回す式を説明できる。	277	☐	☐
	ω と T で、回る点の位置・速さを求められる。	286	☐	☐
4-9	加法定理を単位円で導き、 $\sin(a \pm b) \cdot \cos(a \pm b)$ を計算できる。	309	☐	☐
	2 倍角の式と $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ を作り、使える。	313	☐	☐
	合成と「積と和の式」で、うなりや電力を説明できる。	316	☐	☐
4-10	向きと大きさをもつ量を矢印と記号で表せる。	344	☐	☐
	矢印をつないで、合力の大きさを求められる。	346	☐	☐
	差をかいて、速度の変化や相対速度を求められる。	353	☐	☐
4-11	成分で、和・差・実数倍・大きさを計算できる。	378	☐	☐
	力や速度を、成分に分けて考えられる。	379	☐	☐
	内分点・重心・進む点の位置を求められる。	386	☐	☐
4-12	仕事を求め、 $W = Fs \cos \theta$ を使える。	412	☐	☐
	内積を、大きさと角からも、成分からも計算できる。	415	☐	☐
	内積で、なす角・直交・相関係数を求められる。	418	☐	☐
4-13	空間の点を (x, y, z) で表し、2 点の距離を求められる。	436	☐	☐
	3 次元のベクトルを成分で計算し、内積からなす角を求められる。	444	☐	☐
	基本ベクトル・単位ベクトル・法線ベクトルで、向きや平面を表せる。	446	☐	☐
4-14	力のモーメントを「力×うでの長さ」で求め、 $M = xF_y - yF_x$ で計算できる。	470	☐	☐
	外積の向きと大きさがわかり、成分で計算できる。	475	☐	☐
	トルクや、磁場から受ける力の向きを、外積で求められる。	481	☐	☐
4-15	極座標と (x, y) を、区画に注意して行き来できる。	502	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
	$\vec{e}_r$ 、 $\vec{e}_\theta$ を使って、円運動の速度を $r\omega\vec{e}_\theta$ と表せる。	505	☐	☐
	円柱座標・球座標で空間の点を表し、 (x, y, z) に直せる。	507	☐	☐

つぎの巻へ

長さや角度で、形と向きを数にする道具がそろいました。第5巻「変化をつかむ」では、この巻の図形・三角関数・ベクトルを使って、変わる速さ（微分）と、たまった量（積分）を計算します。第5巻の章をのぞいてみましょう。

5-3 かぎりなく近づく：極限と接線

曲線にぴったりふれる直線の傾き

使う道具 円の接線（4-2）と、ラジアンで小さな角を計算すること（4-2）。

5-9 グラフの面積は進んだ距離

速さのグラフの面積が、進んだ道のりになる

使う道具 細かく分けてたす考え方と、台形の面積（4-5）。

5-10 細い長方形に分けてたそう

曲がった形の面積を、細い長方形で求める

使う道具 面積と体積を細かく分けてたす（4-5）と、相似（4-3）。

5-12 物理での積分：仕事と流量

ばねをのばす仕事は、三角形の面積

使う道具 仕事＝力×力の向きに動いた距離と、内積（4-12）。

5-15 $\sin \cdot \cos$ を微分すると？

微分すると、波が $1/4$ 周期ずれる

使う道具 三角関数と円運動（4-8）、ラジアン（4-2）、加法定理（4-9）。

5-17 近くでは多項式で近似できる：

テイラー展開

小さくゆれる振り子は、 $\sin \theta \approx \theta$ で計算できる

使う道具 ラジアンの角（4-2）と、三角比（4-6）。



デルタ

第4巻の図形・三角関数・ベクトルは、この先の全部の巻で使うよ。
チェック表で自信のない章を見なおしてから、第5巻へ進もう！

この巻の道具は、この先でこう使う

第4巻の章と、その道具を使う第5巻から先の章です（章のはじめの「道しるべ」の「この巻の先に」から集めました）。

この巻の章	この道具を使う章
4-1 きまりから考えを積み上げる：定義・公理・定理	6-15 まとめ：物理は「微分方程式+はじめの状態」で書ける
4-2 角度と円、ラジアン	5-3 かぎりなく近づく：極限と接線 5-15 $\sin \cdot \cos$ を微分すると？ 5-17 近くでは多項式で近似できる：テイラー展開
4-3 にた形と比：相似	5-10 細い長方形に分けてたそう
4-4 三平方の定理	5-16 積分の道具箱：置換積分と部分積分
4-5 面積と体積：細かく分けてたす	5-4 表から導関数を見つけよう 5-6 微分の道具箱：積と合成関数 5-9 グラフの面積は進んだ距離 5-10 細い長方形に分けてたそう
4-6 坂道と三角比	5-17 近くでは多項式で近似できる：テイラー展開
4-8 三角関数：円運動の影	5-15 $\sin \cdot \cos$ を微分すると？ 5-16 積分の道具箱：置換積分と部分積分 6-6 ばねと振り子 7-6 回転行列：くると回す
4-9 波をたし合わせる：加法定理とうなり	5-15 $\sin \cdot \cos$ を微分すると？ 6-10 オイラーの公式 9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数
4-10 向きと大きさをもつ量：ベクトル	7-2 行列×ベクトル：形を変える機械 8-5 ベクトル場
4-11 ベクトルを成分で計算しよう	5-15 $\sin \cdot \cos$ を微分すると？ 7-2 行列×ベクトル：形を変える機械

つぎのページへつづく

この巻の章	この道具を使う章
4-12 内積：どれだけ同じ向きか	5-12 物理での積分：仕事と流量 8-7 道にそってたす：線積分 9-2 成分の取り出し方：直交性
4-13 空間の座標と 3 次元のベクトル	7-7 3 次元の回転と座標の変換 8-5 ベクトル場
4-14 外積：回す力と右ねじ	7-4 行列式：面積が何倍になるか 8-10 うず：回転 rot
4-15 いろいろな座標：極座標・円柱座標・球座標	8-6 面や立体でたし合わせる：重積分 8-12 ならす働き：ラプラシアン

さくいん

数字はページです。その語がはじめて出てくるページや、くわしく説明しているページをのせています。

あ

位置ベクトル	386
一般角	272
うなり	321
円周角	75
円柱座標	507
円の式	144
円の面積	167

か

外心	75
外積	475
外接円	239
回転体	175
角運動量	482
角速度	286
加法定理	310
基本ベクトル	446
逆運動学	15, 247
球座標	508
球の体積	173
球の表面積	174
極座標	79
空間の座標	438
合成（三角関数）	317
合同	30
公理	38
合力	348

弧度法	64
-----	----

さ

$\sin$ （サイン）	201
錯角	33
三角関数	274
三角形の面積	164
三角比	201
三平方の定理	133
三平方の定理の逆	140
次元	437
仕事	411
斜辺	133
周期	276
重心	387
J（ジュール）	411
縮尺	101
順運動学	14, 246
すいの体積	172
スカラー	344
正弦定理	239
正射影	419
成分	376
接線	71
相似	101
相似比	102
相対速度	358

た

単位円	273
単位ベクトル	385
力の分解	209, 380
力のモーメント	470
直交	418
定義	38
定理	39
展開図	174
等速直線運動	389

な

内積	415
2 点の距離	142
2 倍角	313

は

柱の体積	169
------------	-----

平行移動	357
平行四辺形の面積	163
ベクトル	344
ベクトルの和	347
方向余弦	448
法線ベクトル	449

ま

右手系	439
-----------	-----

や

余弦定理	241
------------	-----

ら

ラジアン	64
力率	323
ローレンツ力	483

メモ

Handwriting practice area with horizontal dashed lines.

物理を理解するための数学 第4巻

形と向き

編者	「物理を理解するための数学」編集委員会
委員長	小学校長（まとめ役）
委員	数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・ 半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、 特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭
デザイン	ユニバーサルデザイン担当委員
挿絵	イラスト担当委員
版	第1版（第13回編集委員会） 2026年10月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

第4巻 形と向き 図形・三角関数・ベクトル

この巻で学ぶこと

- 第1部 図形 (4-1～4-5)
- 第2部 三角比と三角関数 (4-6～4-9)
- 第3部 ベクトル (4-10～4-15)

全9巻のならび

- 1 かぞえる・はかる
- 2 数と量のことば
- 3 関数とデータ きまりを見つける
- 4 形と向き 図形・三角関数・ベクトル
- 5 変化をつかむ 微分と積分
- 6 未来を計算する 微分方程式と複素数
- 7 まとめて計算する 行列
- 8 空間に広がる量 ベクトル解析
- 9 波と変化を読みとく フーリエ解析とラプラス変換

長さと角度で、形と向きを数にしよう

