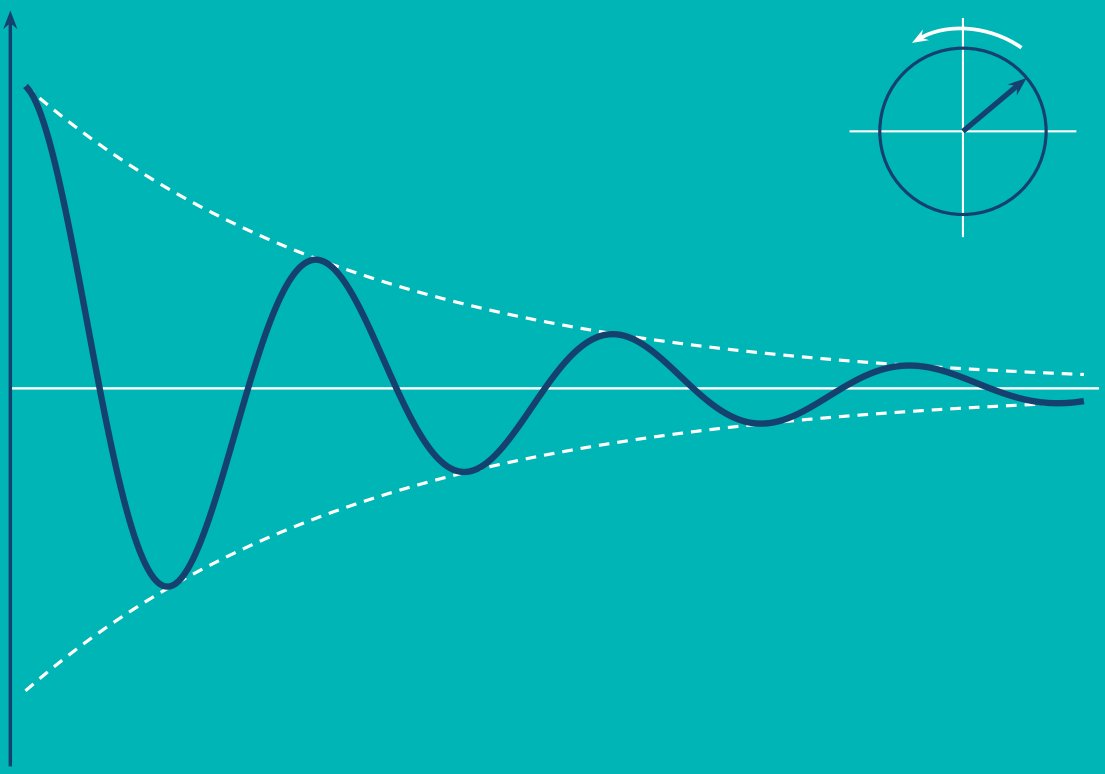
物理を理解するための数学

第6巻

未来を計算する

微分方程式と複素数

「次の瞬間のルール」から、未来を計算しよう

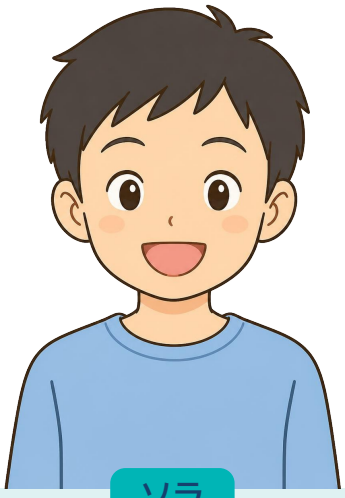


1 2 3 4 5 **6** 7 8 9

全 9 巻　物理を理解するための数学

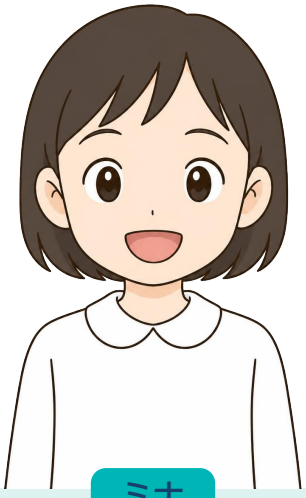
「物理を理解するための数学」編集委員会 編

いっしょに学ぶなかま



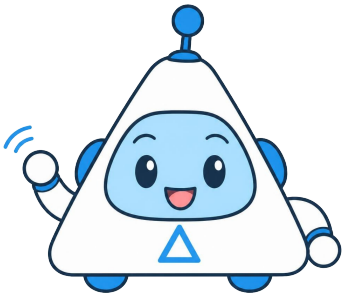
ソラ

「なぜ？」と聞くのが
大好き。
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。
手を動かして考える。



デルタ

計算と記録がとくいな
ロボット。名前は
「変化」を表す
記号Δから。

こまったら、3 人のことばをヒントにしよう。

物理を理解するための数学

第 6 巻

未来を計算する

微分方程式と複素数

「次の瞬間のルール」から、未来を計算しよう

7 本の路線が、この本を通っています

「物理を理解するための数学」編集委員会編

もくじ　第 6 巻　未来を計算する

△＝路線（P.4・5）　★☆☆☆☆＝内容の高さ（★は必ず、☆の所まで）　P.8 ＝ 8 ページ

序章　「次の瞬間を決めるルール」で未来を予想する　△ ★★☆☆☆　P.8

天気予報もロケットも、同じ考え方で計算している

第 1 部　微分方程式の入口　P.24

6-1　微分方程式ってなに？　△ ★★☆☆☆　P.26

答えが数ではなく「関数」になる方程式

6-2　表計算で解こう：オイラー法　△ ★★☆☆☆　P.66

80 ℃のお湯は、10 分後に何℃？

6-3　積分するだけで解ける形　＋ ★★★☆☆　P.102

落ちるボールの位置を、式で求める

6-4　自分に比例してへる：冷めるお湯　×2 ★★★☆☆　P.132

熱いほど速く冷める。答えは指数関数

6-5　空気抵抗と終端速度　△ ★★☆☆☆　P.176

雨つぶは、なぜどこまでも速くならない？

6-6　ばねと振り子　∿ ★★★☆☆　P.206

小さなゆれなら、周期はゆれの大きさによらない

6-7　ゆれながら止まる：減衰振動　∿ ★★★☆☆　P.246

針がすっと止まるメーターのひみつ

第 2 部　複素数と双曲線関数　P.278

6-8　2 乗してマイナスになる数：虚数　∿ ★★★★☆　P.280

「2 回かけて− 1」になる数を、回転で考える

6-9　複素平面：かけ算は回転と拡大　∿ ★★★★☆　P.312

かけ算すると、矢印がくるっと回る

6-10　オイラーの公式　∿ ★★★★☆　P.344

指数関数と三角関数が、1 本の式でつながる

6-11 双曲線関数 cosh・sinh ★★★★☆ P.386
たるませた電線の形は、放物線ではない

第 3 部 式で解く P.418

6-12 減衰振動を式で解く：特性方程式 ★★★★★ P.420
2 次方程式の判別式が、ゆれ方を決める

6-13 ゆらし続けると：強制振動と共振 ★★★★★ P.458
小さな力でも、タイミングが合うと大きくゆれる

6-14 微分方程式がいくつも：連立微分方程式 ★★★★★ P.492
つながった 2 つの水そうの水位は、どう変わる？

6-15 まとめ：物理は「微分方程式＋はじめの状態」で書ける ★★☆☆☆ P.534
ばねも電気も熱も、同じ形の式で書ける

こたえ P.560　記号カード P.575　よく使う定数・単位・公式 P.580
できるようになったことチェック表 P.592　つぎの巻へ P.594　さくいん P.596

この本の路線図

この本の章は、7 本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるかを確かめよう。

① 変化　ひき算→傾き→微分

この巻の駅：6-1、6-2、6-5、6-15

② たし合わせ　かけ算→面積→積分

この巻の駅：6-3

③ 倍々　累乗→指数→ e

この巻の駅：6-4、6-11

④ 回転と波　角→ sin →複素数

この巻の駅：6-6、6-7、6-8、6-9、6-10、6-12、6-13

⑤ 表　九九の表→行列

この巻の駅：6-14

⑥ 矢印　向き→ベクトル→場

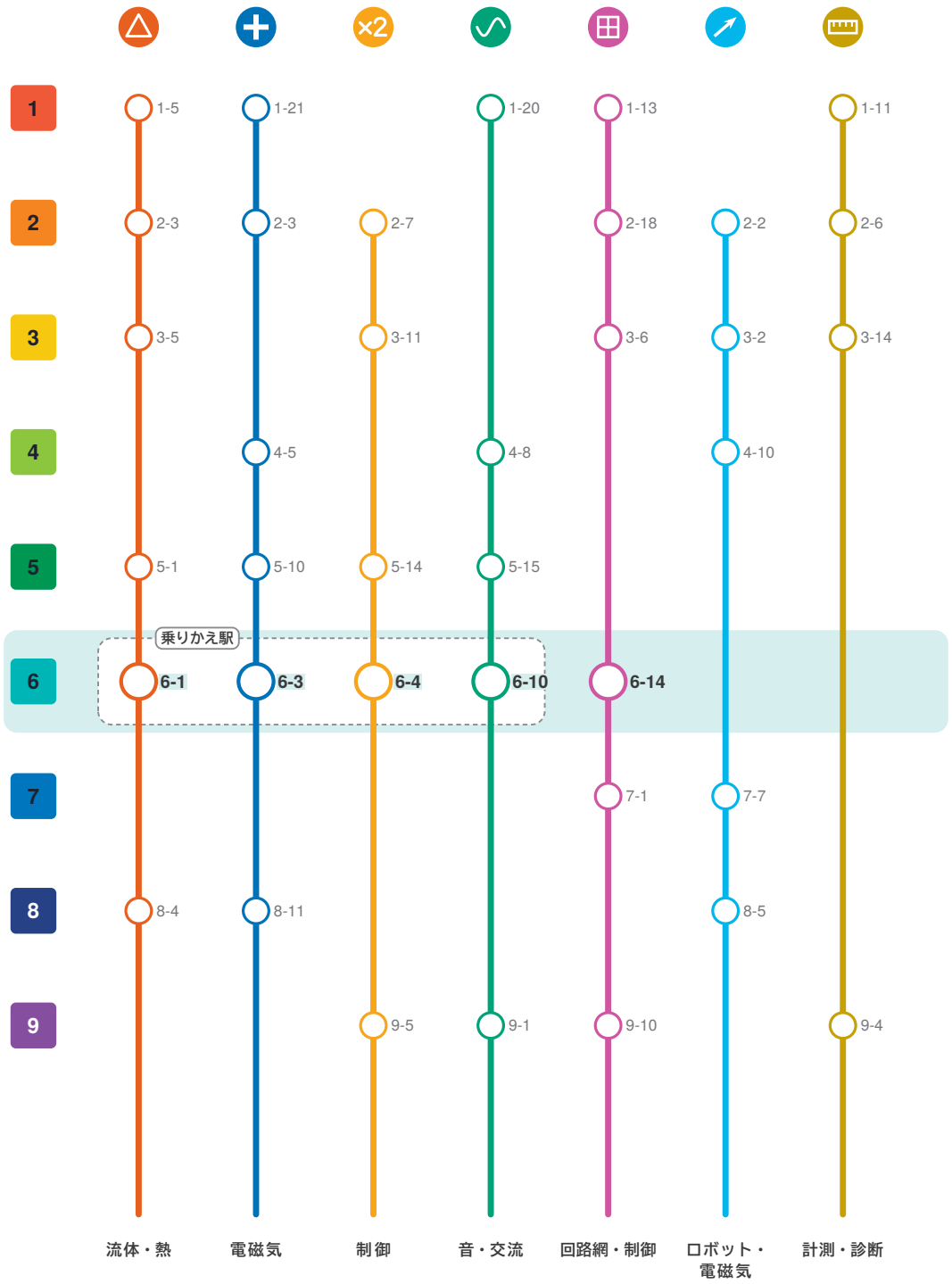
この巻の駅：（この巻には駅がありません）

⑦ はかる　目もり→誤差→統計

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

全9巻の路線図

下へ行くほど先の巻。色の帯がこの巻です。

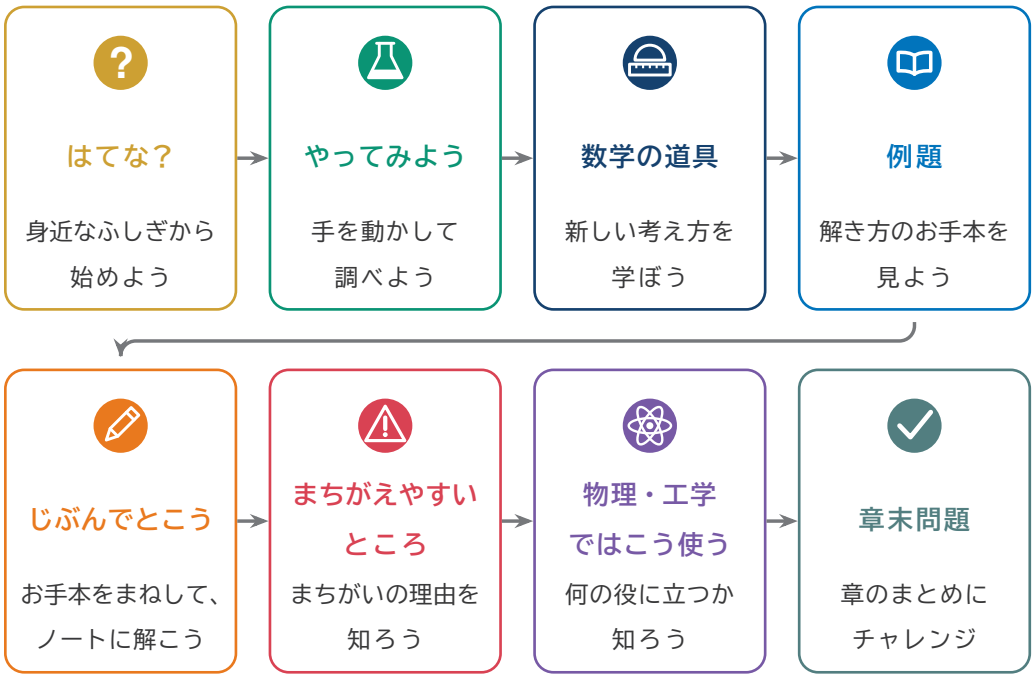


終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第 6 巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

❶ 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

❷ 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

道しるべ　この章の前に 1-14 2-2　この章の先に 3-5 5-9

前に読んでおくとよい章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

③ ★は「どこまで登るか」のしるし

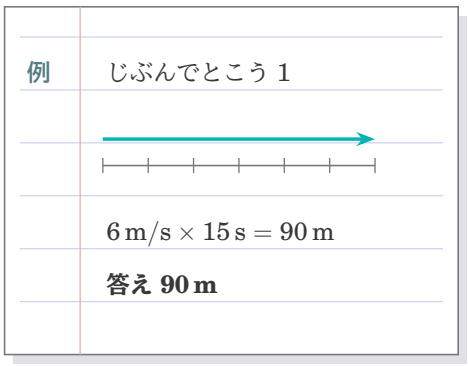
章と小見出しには★がついています。★の数は、内容の高さ。山登りにたとえると、★１つは「はじめの一歩」、★５つは「頂上」です。

白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登る」というしるし。自分の読める★まで読んで、先へ進んでもだいじょうぶ。

④ ノートを１冊用意しよう

「じぶんでとこう」と章末問題は、ノートに解きます。本には書きこまないので、何度でもやり直せます。

問題の番号を書き、図をかいてから式を書こう。答えには単位をつけます。



⑤ この本の３つのやくそく

1. 数には、いつも単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
2. 式を書く前に、表や図をかいて考えよう。
3. くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。

問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

第 6 巻　未来を計算する

★★

序章

「次の瞬間を決めるルール」で未来を予想する

テレビやスマホの天気予報は、「明日の午後は雨。最高気温は 18 ℃」のように、まだ来ていない明日のことを教えてくれます。週間予報では、1 週間先の天気まで出ています。

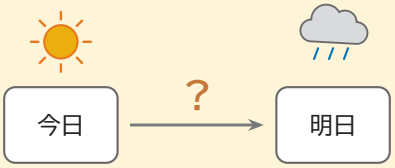
図 1　スマホの天気予報。明日やあさっての天気まで出ている。

明日の天気は、まだだれも見ていません。それなのに、天気予報はかなりよく当たります。気象庁の発表では、明日の「雨が降るか降らないか」の予報は、8 割以上当たっています。どうして、まだ起きていないことがわかるのでしょう。

? はてな？

天気予報は、まだ来ていない明日のことを、なぜ計算できるのかな？

ロケットや人工衛星の通り道も、何年も先まで計算されています。同じ考え方なのかな？



答えのかぎは、この巻の題名にもなっている「**次の瞬間を決めるルール**」です。序章では、このルールで未来を予想するしくみを、冷めるお湯・天気予報・ボールの 3 つの場面で見ていきます。そのあとで、この巻の地図を作ります。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 2-18　冷めるお湯の表：部屋は 20℃。1 分ごとに、部屋との差の 5％ ずつ温度が下がる。
- 5-8　次の位置 ≈ 今の位置＋今の速度× Δt。Δt が短いほど、予想はよく当たる（オイラー法）。
- 5-13　法則とはじめの状態がそろって、はじめて先のようすが 1 つに決まる。
- 5-18　答えの候補リスト。冷めるお湯の温度は $T = 20 + 60e^{-0.05t}$（はじめ 80℃）。

やってみよう　80℃のお湯の、少し先を予想しよう

部屋の温度は 20℃です。カップのお湯は、「**1 分間に、部屋との温度の差の 5％ だけ下がる**」というルールで冷めていきます（2-18 と同じルール）。いま、お湯は 80℃です。電卓を使って、未来の温度を予想しましょう。

1. いまの、部屋との差は何℃かな？　その 5％ は何℃かな？
2. 1 分後の温度は何℃かな？
3. 1 分後の温度を「いま」として、同じ計算をくり返そう。2 分後、3 分後……5 分後まで、表にしよう。

時刻（分）	0	1	2	3	4	5
温度（℃）	80	?	?	?	?	?

①は、$80 - 20 = 60$ で、差は 60℃です。その 5％ は $60 \times 0.05 = 3$ で、3℃です（5％ は $\frac{5}{100} = 0.05$ 倍）。②は、$80 - 3 = 77$ で、1 分後は 77℃です。③は、77℃を「いま」にして、同じ計算をします。差は $77 - 20 = 57$、その 5％ は $57 \times 0.05 = 2.85$、だから 2 分後は $77 - 2.85 = 74.15$ です。これをくり返すと、次の表になります（小数第 3 位で四捨五入）。

時刻（分）	0	1	2	3	4	5
温度（℃）	80	77	74.15	71.44	68.87	66.43
部屋との差（℃）	60	57	54.15	51.44	48.87	46.43
1 分で下がる温度（℃）	3	2.85	2.71	2.57	2.44	2.32

表 1　1 分ずつ進めた、お湯の温度の予想

同じ計算を 10 分後まで続けると、約 55.92 ℃になります。まだ 5 分も 10 分もたっていないのに、計算だけで「5 分後」「10 分後」の温度がわかりました。これが、未来を計算するということです。

次の瞬間を決めるルール

1 今の状態から、少し先の状態へ

やってみようで、毎回したことは、次の 2 つだけでした。

1. **いまの温度から、下がる速さを求める。**「1 分あたり、部屋との差の 5 %」というルールを使う。80 ℃なら「1 分あたり 3 ℃」。
2. **下がる速さに時間をかけて、いまの温度から引く。** 1 分なら $3 \times 1 = 3$ で、$80 - 3 = 77$。

①で使った「いまの状態を見て、どれだけの速さで変わるかを教えてくれるきまり」を、この本では**次の瞬間を決めるルール**とよびます。②は、5-8 の「次の位置 ≈ 今の位置＋今の速度× Δt」と同じ形の計算です。まとめると、次のようになります。

たいせつ

次の状態 ＝ 今の状態 ＋ 変わる速さ × 短い時間

変わる速さは、ルールを使って「今の状態」から求める。

温度が下がるときは、変わる速さをマイナスの数にすると、「たす」の形のままで書けます。80℃のときの変わる速さは「1 分あたり −3℃」なので、$80 + (-3) \times 1 = 77$ です。この形は、下がるときも上がるときも同じ式で書けるので便利です。

この計算は、くり返すことができます。求めた「少し先の状態」を、新しい「今の状態」にして、もう一度ルールを使えばよいのです。図にすると、ぐるぐる回る輪になります。

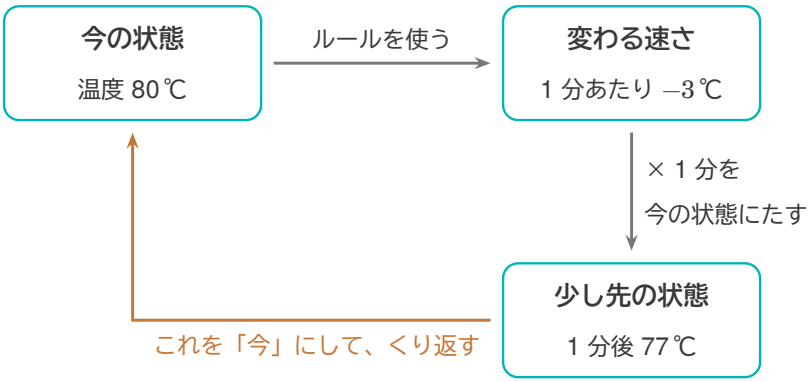


図 2　次の瞬間を決めるルールで、少しずつ未来へ進む

輪を 1 回まわるごとに、1 分先へ進みます。10 回まわれば 10 分後、60 回まわれば 1 時間後の温度がわかります。電卓では大変でも、コンピュータなら、1 秒に何億回でもまわせます。

2 ルールは「今」しか見ていない

ルールには、大切な性質があります。2 つのカップでくらべてみましょう。

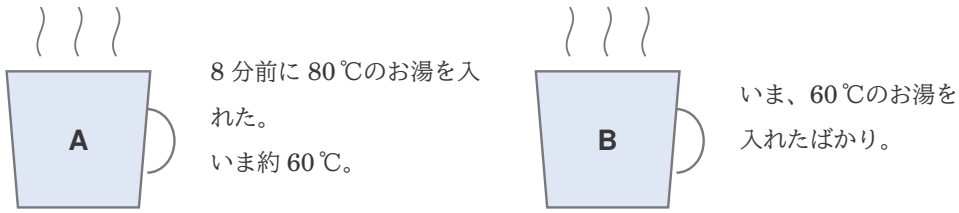


図 3　いま同じ 60℃なら、これまでのことにかかわらず、次の 1 分の下がり方は同じ

カップ A は、8 分前に 80 ℃だったお湯が冷めて、いま約 60 ℃です。カップ B は、いま 60 ℃のお湯を入れたばかりです。これまでのことはちがいますが、次の 1 分で下がる温度は、どちらも $(60-20)\times 0.05=2$ で、約 2 ℃です。ルールが見ているのは「いまの温度」だけだからです。

この性質のおかげで、「今の状態」さえわかれば、そこから先を計算できます。昔のことを全部おぼえておく必要はありません。

❸ 時間を短く区切るほど、よく当たる

やってみようでは、1 分ごとに区切りました。でも、ほんとうは 1 分のあいだにも、お湯は冷めて、下がる速さは小さくなっていきます。表の 1 行めで、0 分では 1 分あたり 3 ℃だった下がる速さが、1 分後には 2.85 ℃になっています。それなのに、1 分間ずっと「3 ℃」の速さで下がったとして計算しました。だから、予想は少しずれます。

5-18 で求めた式 $T=20+60e^{-0.05t}$ を使うと、10 分後のほんとうの温度は約 56.39 ℃です。1 分ごとの予想 55.92 ℃は、約 0.47 ℃低くなっています。区切りを 0.5 分、0.1 分と短くすると、予想はほんとうの値に近づきます。このことは、6-2 でくわしく調べます。

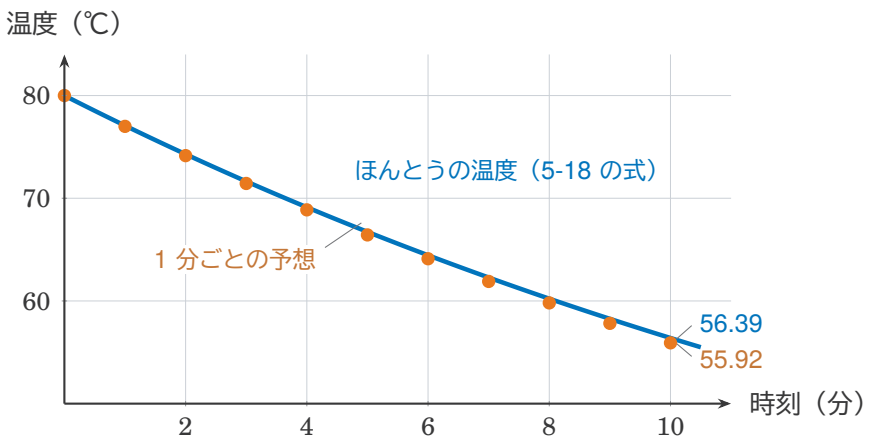


図 4　1 分ごとの予想（オレンジの点）と、ほんとうの温度（青の曲線）。少しずつ下にずれていく。

天気予報も、同じ考え方

4 空気を箱に分けて、ルールで進める

天気予報も、冷めるお湯と同じ考え方で計算しています。ちがうのは、あつかう「状態」の数が、とても多いことです。

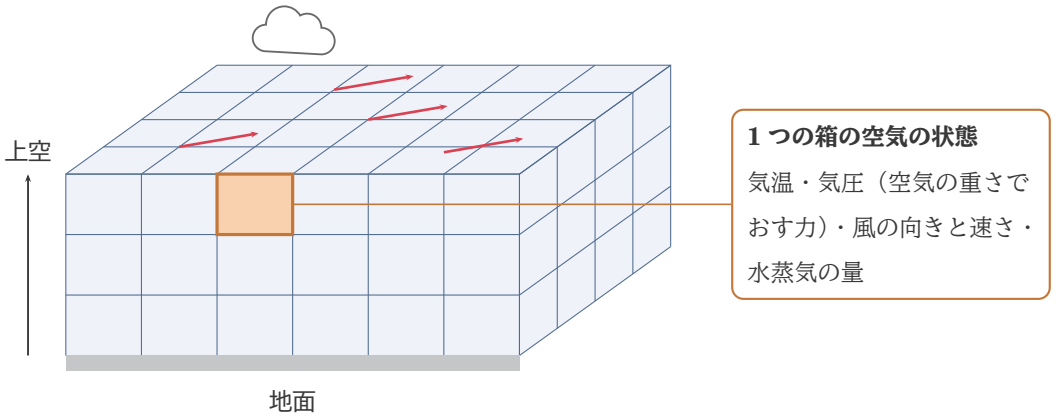


図 5　空気を箱に分ける。1 つの箱ごとに、気温や風などの「状態」を数で表す。

まず、地球をおおう空気を、たて・横・高さに区切って、たくさんの箱に分けます。気象庁の計算では、地面を約 13 km 四方のます目に分け、高さの方向にも 128 の層に分けています。箱の数は、全部で数億こになります。

1 つ 1 つの箱の「状態」は、気温・気圧・風の向きと速さ・水蒸気の量などの数です。そして、空気の動きには、物理の法則から作ったルールがあります。たとえば、次のようなルールです。

- 空気は、気圧の高い所から低い所へおされて動く（風になる）。
- 風は、温度や水蒸気を、となりの箱へ運ぶ。
- あたたかい空気は軽くて上へ上がり、上がった空気は冷える。
- 水蒸気をふくんだ空気が冷えると、雲や雨になる。

これらのルールを使うと、1 つ 1 つの箱の「状態の変わる速さ」が、今の状態（その箱と、となりの箱の状態）から求められます。あとは、冷めるお湯と同じです。

たいせつ

箱ごとに　次の状態　＝　今の状態　＋　変わる速さ　×　数分

1 回の計算で、数分先へ進みます。これを何百回もくり返すと、明日の天気になります。だから、たくさんの計算を速くできるコンピュータ（スーパーコンピュータ）が必要なのです。

はてな？の答え

天気予報は、明日の天気を 1 回の計算で求めているのではありません。いまの空気の状態を観測して、それを「はじめの状態」にします。そして、ルールを使って「数分先」を計算することを、何百回もくり返しているのです。ロケットや人工衛星の通り道も、同じ考え方で計算しています（④で見ます）。

「はじめの状態」は、地上の観測所（アメダス）、気象衛星「ひまわり」、気球につけた観測の機械（ラジオゾンデ）、船や飛行機などで、毎日はかっています。はじめの状態をできるだけ正しくはかることも、予報を当てるために大切です。

ボールもロケットも、同じ考え方

5 状態が 2 つの数のとき

投げたボールの動きも、同じ考え方で計算できます。ただし、ボールの「状態」は、1 つの数では足りません。「どこにいるか（位置）」と「どれだけの速さで、どちらへ動いているか（速度）」の 2 つが必要です。

求めるもの	ルール
次の位置	今の位置＋**今の速度**× Δt　（速度が、位置の変わる速さ）
次の速度	今の速度＋**今の加速度**× Δt　（加速度が、速度の変わる速さ）

表 2　ボールの状態（位置と速度）を、少しずつ進めるルール

加速度は、ボールにはたらく力で決まります（運動の法則 $F = ma$、5-5）。空気の抵抗を考えないなら、ボールにはたらく力は重さ（重力）だけで、加速度は下向きにいつも $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ です。9.8 は、地球の上で落とした物の速さが、1 秒ごとに 9.8 m/s ずつふえることを、実験ではかった値です。

図 6　投げたボールの、0.1 秒ごとの位置。はじめの位置と速度から、ルールで次々に計算できる。

ゲームの中のボールやキャラクターも、この計算で動いています。画面は 1 秒に 60 回かきかえられるので、Δt は $\dfrac{1}{60}$ 秒です（5-13 のコラム）。人工衛星や、月や惑星へ向かう探査機の通り道（軌道）も、エンジンの力・地球や月が引く力などから加速度を求め、同じように少しずつ進めて計算します。

天気予報・冷めるお湯・ボール・人工衛星。どれも、「今の状態」と「次の瞬間を決めるルール」から、少しずつ未来へ進んでいます。

未来を決める 2 つのもの

6 ルールと、はじめの状態

同じ部屋で、同じカップに、温度のちがうお湯を入れたら、どうなるでしょう。ルールは同じ「1 分間に、部屋との差の 5 % だけ変わる」です。ちがうのは、はじめの温度だけです。

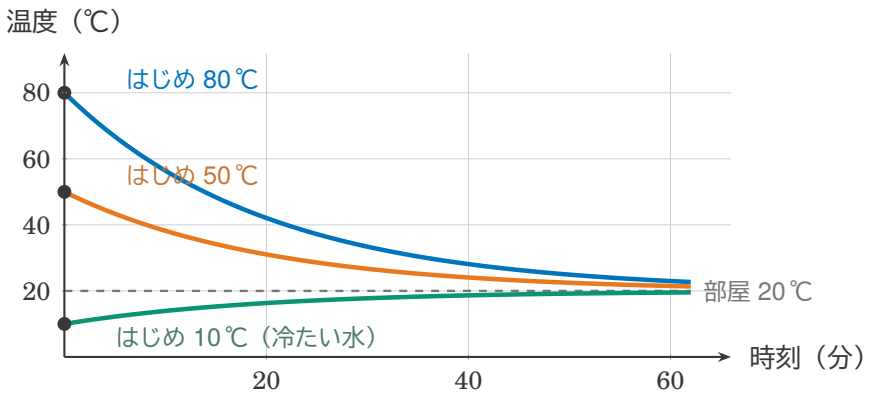


図 7　同じルールでも、はじめの温度がちがうと、ちがう未来になる。どれも部屋の温度に近づく。

80 ℃のお湯も、50 ℃のお湯も、冷めて 20 ℃に近づきます。10 ℃の冷たい水は、反対にあたたまって 20 ℃に近づきます。10 ℃のときは、部屋との差が $10 - 20 = -10$ とマイナスになるので、「差の 5 % だけ下がる」は「$10 \times 0.05 = 0.5$ だけ上がる」ことになるのです。

ルールだけでは、どのグラフになるか決まりません。はじめの状態も決めると、グラフはただ 1 本に決まります。5-13 で、「法則とはじめの状態がそろって、はじめて先のようすが 1 つに決まる」と書いたのは、このことです。

たいせつ

未来 は ルール と はじめの状態 の 2 つで決まる

天気予報では、ルールは物理の法則で、はじめの状態は観測したデータです。では、はじめの状態を少しだけまちがえたら、どうなるでしょう。冷めるお湯なら、はじめが 80 ℃でも 80.1 ℃でも、ほとんど同じ未来になります。ところが空

気の動きでは、はじめのごく小さなちがいが、日がたつにつれて大きく育つことがあります。そのため、天気をくわしく当てられるのは、数日から 2 週間ほど先までが限界だと考えられています。この話は、6-14 のコラムで続きを読みます。

コラム　天気を計算で予想する夢

天気を計算で予想しようと考えた最初の一人は、イギリスのリチャードソンです。彼は、第一次世界大戦のころ、空気のルールを使って「6 時間先の気圧」を手で計算しました。電卓もコンピュータもない時代で、計算には 1 か月以上かかりました。

ところが、出てきた答えは「6 時間で気圧が約 145 hPa も変わる」という、ありえない値でした。実際の気圧はほとんど変わっていなかったのです。のちの研究で、計算の方法がまちがっていたのではなく、はじめの状態のデータにあった気圧と風の小さなずれが、大きな見かけの変化を生んだことがわかっています。

リチャードソンは 1922 年に、このくわしい記録を本にしました。その中で、「6 万 4 千人が大きな劇場に集まって、指揮者の合図で分担して計算すれば、天気の変化に計算が追いつく」という夢を書いています。

その夢は、コンピュータがかなえました。1950 年、アメリカのコンピュータ ENIAC（エニアック）が、はじめて 24 時間先の予報を計算しました（計算にも約 24 時間かかりました）。日本の気象庁は、1959 年にコンピュータでの予報を始めました。

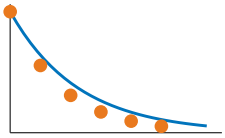
この巻でできるようになること

この巻では、「次の瞬間を決めるルール」を式で書いて、未来を計算します。変わる速さは微分（第 5 巻）で書けるので、このルールの式は、微分の入った方程式になります。これを**微分方程式**（びぶんほうていしき）といいます（6-1 でくわしく）。

第 6 巻は、3 つの部に分かれています。

第 1 部　微分方程式の入口

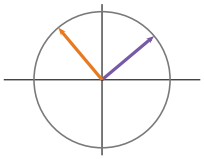
6-1〜6-7



・ルールを微分方程式で書いて、読む。
・表計算で少しずつ進めて解く（オイラー法）。
・積分だけで解ける形と、答えが指数関数になる形。
・雨つぶ・ばね・ゆれながら止まるばね。

第 2 部　複素数と双曲線関数

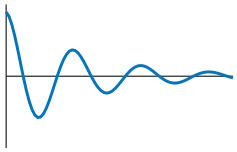
6-8〜6-11



・2 乗すると -1 になる新しい数 j（虚数）。
・かけ算を、平面の上の「回転」として見る。
・オイラーの公式で、指数関数と三角関数をつなぐ。
・電線のたるみの形（双曲線関数）。

第 3 部　式で解く

6-12〜6-15



・ゆれながら止まる動きを、2 次方程式で解く。
・ゆすられて大きくゆれる「共振」。
・いくつもつながった物の動き。
・ばね・熱・電気の式を、くらべてまとめる。

図 8　第 6 巻の 3 つの部と、できるようになること

7 2 周読む

この巻は、同じ場面を 2 回通ります。1 周めの第 1 部では、まず表計算で数とグラフを出して、答えのようすを先に見ます（1 階の式は、第 1 部の 6-3〜6-5 で式でも解きます）。2 周めの第 3 部では、ゆれる動きなどを、第 2 部で手に入れた新しい数（複素数）を使って式で求めます。そして、式の答えのグラフを、1 周めの表計算のグラフに重ねて、「ぴったり重なった」ことを確かめます。

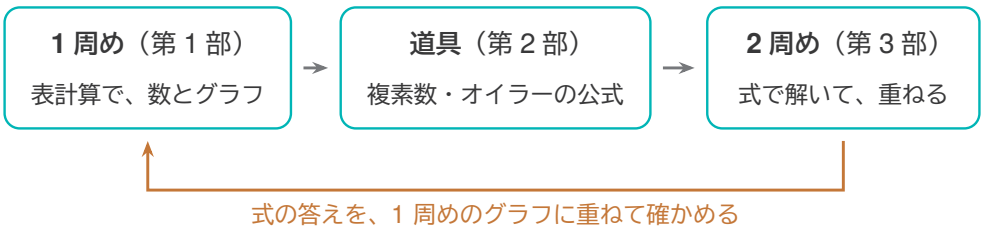
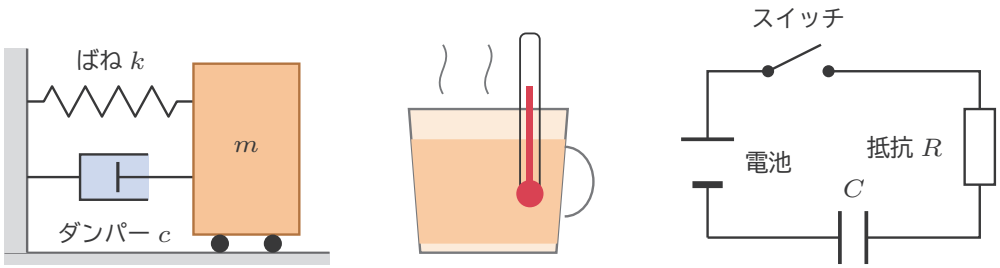


図 9　第 6 巻は 2 周読む。先に数で見て、あとで式で確かめる。

第 3 部は、大学で学ぶ内容です。1 回読んでわからなくても、だいじょうぶです。第 1 部の表計算だけでも、未来はちゃんと計算できます。式の答えは、「表計算で見た答えが、なぜそうなるのか」を教えてくれる、2 周めのおまけだと思って読み進めましょう。

8 ばね・熱・電気回路が、くり返し出てくる

この巻では、3 つの分野の場面が、何回も出てきます。機械の「ばね・質量（おもり）・ダンパー」、「熱」、そして「電気回路」です。



ばね・質量・ダンパー　　熱（冷めるお湯）　　電気回路

図 10　この巻でくり返し出てくる 3 つの場面。ばね・ダンパーの k・c・m、回路の R・C は、それぞれの章で説明する。

章	ばね・質量・ダンパー	熱	電気回路
6-1	ばねのルールを読む	冷めるお湯	コンデンサーの放電
6-2	ばねを表計算で動かす	80 ℃のお湯	充電を表計算で
6-3	落ちるボール	ヒーターで温める	一定の電流で充電
6-4	—	冷める・温まる	充電・放電、コイル
6-5	雨つぶ・エレベーター	—	コイルの電流
6-6	ばねと振り子	—	電気の振動
6-7	ゆれながら止まる	—	ゆれながら止まる電気
6-12	ダンパーつきのばね	—	ちょうどよい抵抗
6-13	ゆすられるばね（共振）	—	ラジオの同調
6-14	2 つのおもり	2 つの物の温度	2 段の回路
6-15	3 つの分野が、同じ形の式で書けることをまとめる		

表 3　3 つの分野の場面が出てくる章

電気回路では、とくに「**スイッチを入れた瞬間**」からのようすを調べます。スイッチを入れた瞬間、電気の量はすぐには決まった値にならず、少しの時間をかけて変わっていきます。この「変わっていくとちゅう」のようすを、**過渡応答**（かとおうとう）といいます。電気製品の電源を入れたときにも、回路の中ではいつも過渡応答が起きています。

ちがう分野の場面なのに、同じ形の式で書けることが何回も出てきます。1 つの場面で答えの形がわかれば、ほかの分野にもそのまま使えます。それが、数学で考えることの大きな強みです。

この巻が通る路線と乗りかえ駅

この本の章は、7 本の路線の駅です。第 6 巻を通る 5 本の路線のうち、「変化」「たし合わせ」「倍々」「回転と波」の 4 本は、この巻の駅（6-1・6-3・6-4・6-10）で乗りかえて、物理と工学の終点へ向かいます。

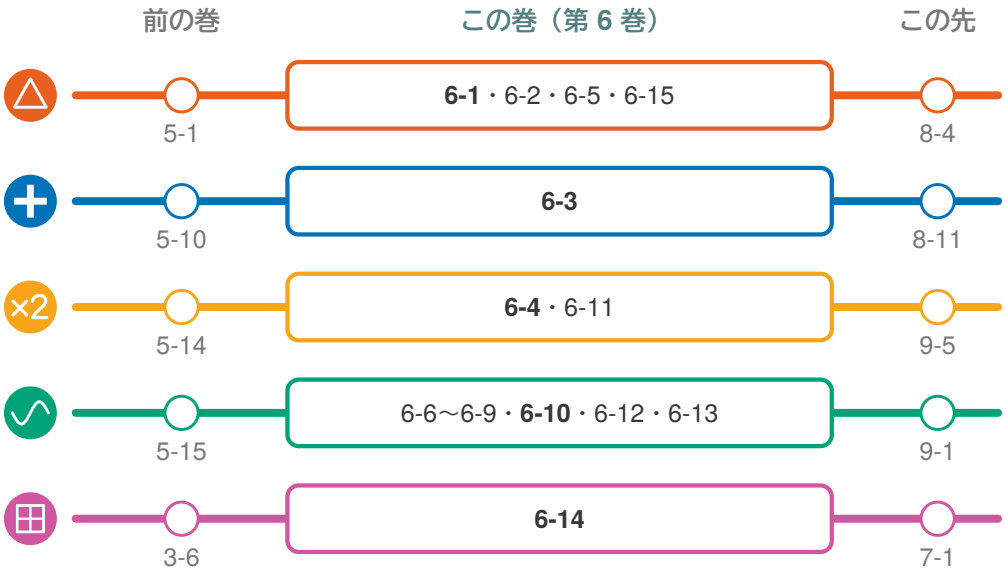


図 11　第 6 巻を通る 5 本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字は大きな駅）。

	路線	大きな駅のつながり
△	変化	ひき算（1-5）→ 傾き（3-5）→ 微分（5-1）→ **微分方程式**（6-1）
＋	たし合わせ	かけ算の面積（2-3）→ 積分（5-10）→ **積分するだけで解ける形**（6-3）
×2	倍々	指数関数（3-11）→ e（5-14）→ **自分に比例してへる**（6-4）
∿	回転と波	三角関数（4-8）→ sin・cos の微分（5-15）→ **オイラーの公式**（6-10）
⊞	表	表計算（2-18）→ 連立方程式（3-6）→ **連立微分方程式**（6-14）

表 4　5 本の路線の、この巻の大きな駅

変化の路線（△）は、この巻の中心です。「ひき算で変化を見る」から始まった道が、6-1 で「変化のルールから未来を求める」微分方程式に着きます。回転と波の路線（∿）は、この巻でいちばん多くの駅に止まります。ばねのゆれも、電気のゆれも、回る矢印の影として見ることができるからです（6-10）。

この巻で出会う新しい記号

第 6 巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくてもだいじょうぶです。どの記号も、使う前に場面と図でていねいに説明します（記号カードは巻末にも並べてあります）。

記号	読み方	ひとことで言うと	章
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$	ディーワイ・ディーティー イコール エフ・オブ・ワイ	変わる速さを、今の状態で決めるルール（微分方程式）	6-1
$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\Delta t$	（オイラー法の 1 行）	今から、少し先へ進む計算	6-2
τ	タウ	時定数。変化の速さの目安	6-4
v_f、v_t	ブイ・エフ、ブイ・ティー	終端速度（それ以上速くならない速さ）	6-5
ω_n	オメガ・エヌ	固有角振動数（その物が自分でゆれる速さ）	6-6
ζ	ゼータ	減衰比（ブレーキのきき方）	6-7
j	ジェイ	2 乗すると -1 になる数（虚数単位）	6-8
$\lvert z\rvert$、$\arg z$	ゼットの絶対値、偏角	複素数の大きさと向き	6-9
$e^{j\theta}$	イーのジェイシータ乗	回る矢印（オイラーの公式）	6-10
$\cosh$、$\sinh$、$\tanh$	ハイパボリック・コサインなど	双曲線関数	6-11
$ms^2 + cs + k = 0$	（特性方程式）	ゆれ方を決める 2 次方程式	6-12

表 5　この巻で出会う記号（くわしくはそれぞれの章で）

電気回路の部品の量は、記号のあとに単位を〔　〕でくくって書きます。たとえば、抵抗 R〔Ω〕、コンデンサーの静電容量 C〔F〕、コイルのインダクタンス L〔H〕、電圧 V〔V〕、電流 i〔A〕です。記号の C（静電容量）と、電気の量の単位の C（クーロン）のように、同じ字が別の意味で出てくることがあるからです。

この巻の読み方

ソラ

第 6 巻からは、大学で学ぶ内容が多いんだって。微分方程式って、名前がもうむずかしそう……。

デルタ

だいじょうぶ。この巻のルールは、冷めるお湯の「1 分で差の 5 % 下がる」と同じ考え方だよ。先に表計算で数とグラフを見て、あとから式で確かめるよ。1 回で分からなくても、第 1 部の表計算ができれば、未来は計算できるよ。

① 式の変形は 1 行ずつ

式の変形は、1 行に 1 つのことだけをします。何をしたかを右に書きます。

- 「両辺を 2 でわる」「$e^0 = 1$ を使う」のように書く。
- わからない行は、1 つ前の行とくらべてみよう。

② 表計算とプログラム

表計算（2-18）とプログラム（2-19）を、たくさん使います。

- 表計算の画面と、Python のプログラムの枠をのせてあります。
- 自分のコンピュータで、数を変えてためしてみよう。

③ 単位で確かめる

答えが出たら、単位を確かめます（2-10）。

- 「速さ」なら ℃/分、V/s のように「÷時間」の単位になるはず。
- 換算は、60 s/min のような単位つきの 1 を使う。

④ ★ 5 の章は 3 段

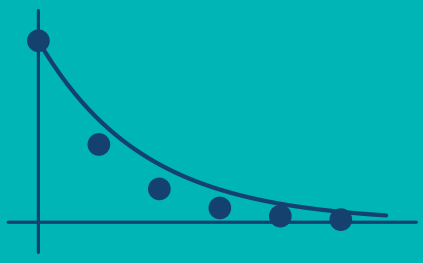
大学の内容の章は、3 つの段に分けてあります。

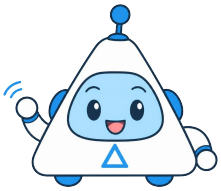
- 「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」。
- 「ここまでで十分」の旗まで読めば、その章のゴールです。

第６巻　第１部

1 微分方程式の入口

- 「次の瞬間」のルールだけで、未来がわかる？
- 熱いお茶は、なぜだんだんゆっくり冷める？
- ばねにつけたおもりは、なぜ同じリズムでゆれる？





「いまの状態から、次の瞬間どう変わるか」というルールを式にしたものが、微分方程式だよ。表計算で少しずつ進めて未来を計算し、冷めるお湯・電気回路・ばねの動きを読みとくよ。

この部で学ぶこと

6-1 微分方程式ってなに？ ★★☆☆☆ P.26

答えが数ではなく「関数」になる方程式

6-2 表計算で解こう：オイラー法 ★★☆☆☆ P.66

80 ℃のお湯は、10 分後に何℃？

6-3 積分するだけで解ける形 ★★★☆☆ P.102

落ちるボールの位置を、式で求める

6-4 自分に比例してへる：冷めるお湯 ★★★☆☆ P.132

熱いほど速く冷める。答えは指数関数

6-5 空気抵抗と終端速度 ★★☆☆☆ P.176

雨つぶは、なぜどこまでも速くならない？

6-6 ばねと振り子 ★★★☆☆ P.206

小さなゆれなら、周期はゆれの大きさによらない

6-7 ゆれながら止まる：減衰振動 ★★★☆☆ P.246

針がすっと止まるメーターのひみつ

この部を読むと…

物の動き・温度・電気の変化を微分方程式で書き、表計算で解いたり、積分で式の形の答えを出したりできるようになります。ばね・熱・電気の回路が同じ形の式になることも見えてきます。

1

第 1 部　微分方程式の入口

★★

6-1 微分方程式ってなに？

道しるべ　この章の前に 2-16 5-3 5-5 5-13 5-18　この章の先に 6-2 6-4 6-6 6-15

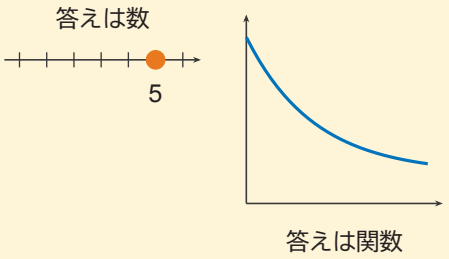
この章でできるようになること

- ★★「変わる速さのルール」（微分方程式）を、ことばと単位で読み、法則から式に書ける。
- ★★ 傾きの場をかいて、はじめの状態から、未来のようすを 1 本のグラフで予想できる。
- ★★ 関数を代入して、微分方程式の解かどうかを確かめられる。

はてな？

2-16 の方程式 $4t = 10 + 2t$ の答えは、$t = 5$ という 1 つの数でした。

この章の方程式は、答えが数ではなく「関数」（グラフ 1 本）になります。答えが関数になる方程式って、どういうことかな？



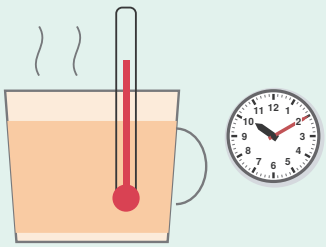
序章では、冷めるお湯の温度を「1 分ごとに少しずつ」計算しました。そのとき使った「次の瞬間を決めるルール」を、微分の記号で式に書くと、方程式の形になります。この章では、そのような方程式の読み方・作り方と、答えの意味を、ゆっくり見ていきます。

やってみよう 冷めるお湯の温度をはかろう

用意するもの

カップ、温度計、時計（スマホのタイマー）、電卓、方眼紙

1. 部屋の温度をはかろう。
2. カップに熱いお湯を入れ、温度計を入れたまま、2 分ごとに温度を記録しよう（やけどに注意）。
3. となりどうしの温度の差を 2 でわって、「1 分あたりに下がった温度」（冷める速さ）を求めよう。
4. 冷める速さと、部屋との温度の差をくらべよう。何か、きまりはあるかな？



部屋の温度が 20 ℃の日に、はじめ 80 ℃のお湯ではかった例を、次の表にしました（この本で使う数に合わせた例です）。

時刻（分）	0	2	4	6	8	10
温度（℃）	80.0	74.3	69.1	64.4	60.2	56.4
部屋との差（℃）	60.0	54.3	49.1	44.4	40.2	36.4

表 1　2 分ごとにはかったお湯の温度（部屋は 20 ℃）

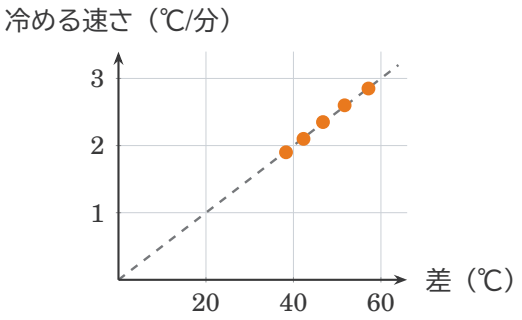
③の「冷める速さ」は、2 分のあいだに下がった温度を 2 でわります。たとえば 0 分から 2 分までは、$80.0 - 74.3 = 5.7$ 下がったので、$5.7 \div 2 = 2.85$ で、1 分あたり 2.85 ℃です。

④でくらべる「差」は、その 2 分のあいだの差の平均（はじめの差とおわりの差を足して 2 でわったもの）を使います。0 分から 2 分までなら

$(60.0 + 54.3) \div 2 = 57.15$ です。2 分のあいだにも差は小さくなっていくので、まん中ごろの値を使うのです。

あいだ（分）	0〜2	2〜4	4〜6	6〜8	8〜10
冷める速さ（℃/分）	2.85	2.60	2.35	2.10	1.90
差の平均（℃）	57.15	51.70	46.75	42.30	38.30
速さ÷差	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050

表 2　冷める速さと、部屋との差。いちばん下の行は小数第 3 位で四捨五入した。



グラフにすると、点は原点を通る直線（点線）の上にならびます。差が大きいときほど速く冷め、冷める速さは差の 0.05 倍です。冷める速さは、部屋との差に**比例**しています（比例は 2-15・3-1）。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 2-16　方程式 $4t = 10 + 2t$ の解は $t = 5$。代入して、両辺が等しくなるか確かめる。
- 5-3　$\dfrac{dy}{dx}$ は、y を x で微分したもの。分数の形だが、ひとまとまりの記号。
- 5-5　$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$（速度）、$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$（加速度）。運動の法則 $F = ma$。
- 5-13　法則とはじめの状態がそろって、はじめて先のようすが 1 つに決まる。
- 5-18　答えの候補リスト。冷めるお湯は $T = 20 + 60e^{-0.05t}$。$(e^{at})' = ae^{at}$。

数学の道具

1 答えが「数」の方程式と、答えが「関数」の方程式

やってみようで、冷めるお湯には次のルールがあることがわかりました。

たいせつ

温度の変わる速さ ＝ -0.05 ×（温度 $-$ 20）

「温度の変わる速さ」は、温度を時間で微分したものです（5-3）。時刻を t（分）、温度を T（℃）とすると、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ と書けます。だから、このルールは次の式になります。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$$

-0.05 のマイナスは、「下がる向き」を表します。くわしくは②で読みます。

この式は、「＝」でつながった方程式です。では、この方程式で「わからないもの」は何でしょう。2-16 の方程式とくらべてみます。

	2-16 の方程式	この章の方程式
式	$4t = 10 + 2t$	$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$
わからないもの	数 t	時刻ごとの温度 T（すべての時刻の分）
答え	$t = 5$（1 つの数）	時刻 t と温度 T の関係（関数）
図にすると	数直線の上の 1 点	グラフ 1 本

表 3　答えが数の方程式と、答えが関数の方程式

2-16 では、t に数を入れて、両辺が等しくなるかをためしました。この章の方程式では、T のところに「関数」を入れてためします。3 つの候補でためしてみましょう。どれも、はじめ（$t = 0$）は 80 ℃です。

候補 A：ずっと 80℃のまま（$T = 80$）

温度が変わらないので、変わる速さ（左辺）は 0 です。ところが右辺は、$-0.05 \times (80 - 20) = -3$ です。0 と -3 はちがうので、候補 A は答えではありません。

候補 B：1 分に 3℃ずつ下がり続ける（$T = 80 - 3t$）

グラフは傾き -3 の直線なので、左辺はいつも -3 です。右辺に $T = 80 - 3t$ を入れると、

$$-0.05\,(T - 20) \qquad \text{右辺}$$

$$= -0.05\,(80 - 3t - 20) \qquad T = 80 - 3t \text{ を入れる}$$

$$= -0.05\,(60 - 3t) \qquad 80 - 20 = 60$$

$$= -3 + 0.15t \qquad \text{かっこをはずす（3-8）}$$

$t = 0$ では、右辺も -3 で、左辺と合います。でも、$t = 10$ では右辺が $-3 + 1.5 = -1.5$ で、左辺の -3 と合いません。1 つの時刻だけで合っても、答えにはなりません。

候補 C：5-18 で求めた式（$T = 20 + 60e^{-0.05t}$）

左辺は、e^{at} の微分（5-14）で求めます。20 は定数なので、微分すると 0 です。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 + 60 \times (-0.05)\, e^{-0.05t} \qquad (e^{at})' = ae^{at} \text{ で } a = -0.05$$

$$= -3e^{-0.05t} \qquad 60 \times 0.05 = 3$$

右辺は、$T - 20 = 60e^{-0.05t}$ なので、

$$-0.05\,(T - 20) = -0.05 \times 60e^{-0.05t} \qquad T - 20 \text{ を入れる}$$

$$= -3e^{-0.05t} \qquad 0.05 \times 60 = 3$$

左辺と右辺が、どの t でも同じ $-3e^{-0.05t}$ になりました。候補 C は、すべての時刻でルールに合っています。数でも確かめておきます。

時刻 t（分）	0	10	20
候補 C の温度 T（℃）	80	56.39	42.07
左辺 $-3e^{-0.05t}$	-3	-1.82	-1.10
右辺 $-0.05\,(T-20)$	-3	-1.82	-1.10

表 4 候補 C は、どの時刻でも左辺と右辺が等しい（小数第 3 位で四捨五入）

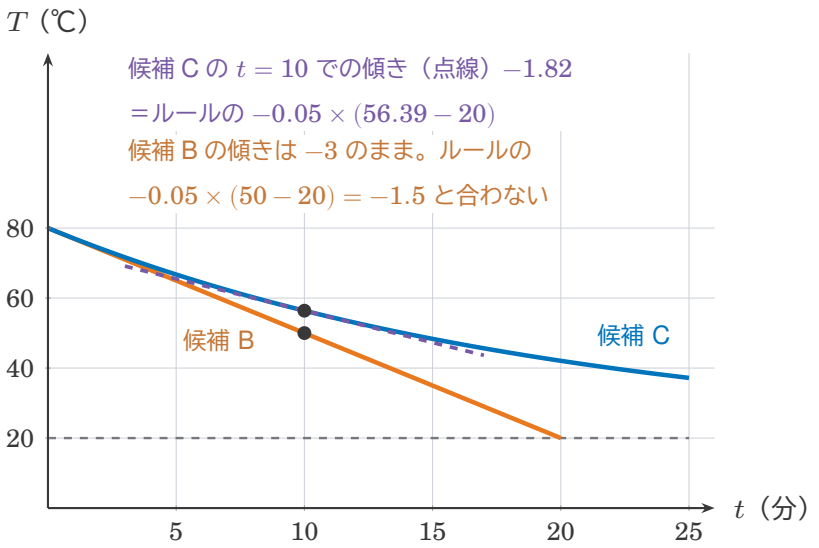


図 1 候補 B（オレンジの直線）と候補 C（青の曲線）。$t = 10$ で、グラフの傾きがルールの値と合うかをくらべる。

図で見ると、候補 B の直線は、どこでも同じ傾き -3 で下がります。でも、温度が下がって部屋との差が小さくなると、ルールの決める下がる速さは小さくなります。だから、直線では合わないのです。候補 C の曲線は、どの点でも、傾きがちょうどルールの値になっています。

このように、「変わる速さ」（微分）が入っていて、わからないものが関数である方程式を、**微分方程式**（びぶんほうていしき）といいます。そして、微分方程

式をみたす関数を、その微分方程式の**解**（かい）といいます。解を求めることを、「微分方程式を**解く**」といいます。

？はてな？の答え

微分方程式の答え（解）は、1 つの数ではありません。すべての時刻の温度を決める関数です。グラフにすると、数直線の上の 1 点ではなく、1 本の曲線になります。ためすときは、関数を代入して、どの時刻でも左辺と右辺が等しくなるかを調べます。

> **せいかくに言うと**
>
> **「すべての時刻で」の意味**
>
> 微分方程式の解は、考えている時間のはんい（たとえば $t \geqq 0$）の、すべての t で式をみたす関数です。候補 B のように、とちゅうの 1 つの時刻（$t = 0$）だけで等しくなっても、解ではありません。

2 ルールを、ことばと単位で読む

微分方程式は、記号がならんでいて、むずかしそうに見えます。でも、1 つずつ日本語にもどせば、ふつうの文になります。

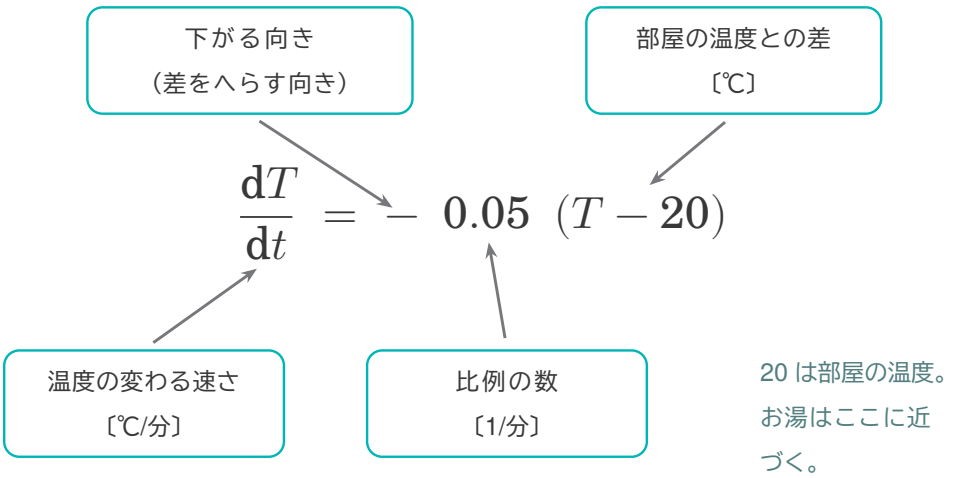


図 2　冷めるお湯のルールを、部分ごとに読む

つなげて読むと、次の文になります。

たいせつ

温度の変わる速さ（1 分あたり何 ℃）は、部屋の温度との差の 0.05 倍で、差をへらす向き（下がる向き）。

単位で読む

左辺 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は「温度÷時間」なので、単位は ℃/分です。右辺の $(T-20)$ は温度の差なので ℃ です。両辺の単位をそろえるには、0.05 の単位が「1/分」でなければなりません。

$$(1/\text{分}) \times (\text{℃}) = \text{℃/分}$$

0.05〔1/分〕は、「差 1 ℃あたり、1 分に 0.05 ℃下がる」という意味です。差が 60 ℃なら $0.05 \times 60 = 3$ で、1 分に 3 ℃下がります。

なぜ 0.05 なのか、なぜ 20 なのか

20 は、その日の部屋の温度だからです。0.05 は、やってみようで、はかって決めた数です。カップの大きさ、ふたがあるかないか、風が当たるかどうかで変わります。大きなカップや、ふたをしたカップでは、0.05 より小さくなります（ゆっくり冷める）。

記号の書き方

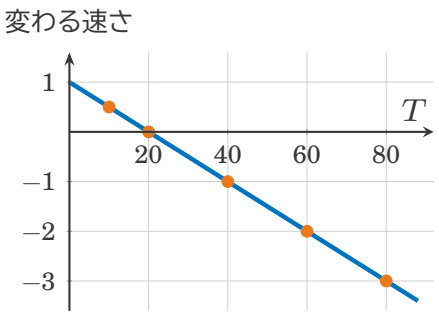
$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は、$\dot{T}$（ティー・ドット、5-5）や T'（ティー・ダッシュ、5-4）と書いても同じ意味です。この巻では、ルールを立てるときや読むときは、単位が読みやすい $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ の形を主に使います。

マイナスの意味を、数で確かめる

いろいろな温度 T を右辺に入れて、変わる速さを計算します。

温度 T（℃）	80	60	40	20	10
差 $T-20$（℃）	60	40	20	0	-10
変わる速さ（℃/分）	-3	-2	-1	0	$+0.5$
ようす	下がる	下がる	下がる	変わらない	上がる

表 5　ルールの右辺に、いろいろな温度を入れる



20℃より熱いと、変わる速さはマイナス（下がる）。20℃より冷たいと、プラス（上がる）。ちょうど 20℃では 0 で、温度は変わりません。どちらの場合も、温度は 20℃に近づく向きに変わります。-0.05 のマイナスが、この「近づく向き」を作っているのです。

③ 法則からルールを作る：熱

やってみようで見つけた「冷める速さは、部屋との温度の差に比例する」というきまりは、**ニュートンの冷却の法則**とよばれています。1701 年に、イギリスのニュートンが、名前を出さずに発表しました。

この法則から、ルールの式を作る手順を、1 つずつ書いておきます。この手順は、熱でも、電気でも、ばねでも同じです。

1. **主役の量を決めて、文字にする。**ここでは、お湯の温度 T〔℃〕。時刻は t〔分〕。
2. **主役の量の「変わる速さ」を、微分で書く。**$\dfrac{dT}{dt}$〔℃/分〕。
3. **変わる速さを決める法則を、式にする。**差 $T-20$ に比例し、差をへらす向き。比例の数を 0.05〔1/分〕とすると、$-0.05\,(T-20)$。
4. **②と③を「＝」でつなぐ。**$\dfrac{dT}{dt}=-0.05\,(T-20)$。

せいかくに言うと

ニュートンの冷却の法則は、近似のきまり

お湯から逃げる熱は、まわりの空気へ伝わる熱のほかに、湯気になって出ていく熱（蒸発）や、光（赤外線）として出ていく熱もあります。このため、温度の差が大きいときや、ふたのないお湯では、比例のきまりから少しずれます。それでも、ふつうの温度の差では、このきまりでよく合います。0.05 のような比例の数が、カップの何で決まるのか（熱のためやすさと、逃げにくさ）は、6-4 で調べます。

4 法則からルールを作る：電気（コンデンサーの放電）

次は、電気の回路です。この巻では、**コンデンサー**という部品がよく出てきます。コンデンサーは、電気をためる部品です。2 枚の金属の板を、電気を通さないうすい膜をはさんで向かい合わせた作りになっています。電池につなぐと、片方の板に＋の電気、もう片方に − の電気がたまります。カメラのフラッシュは、コンデンサーにためた電気を、一瞬で流して光らせています。

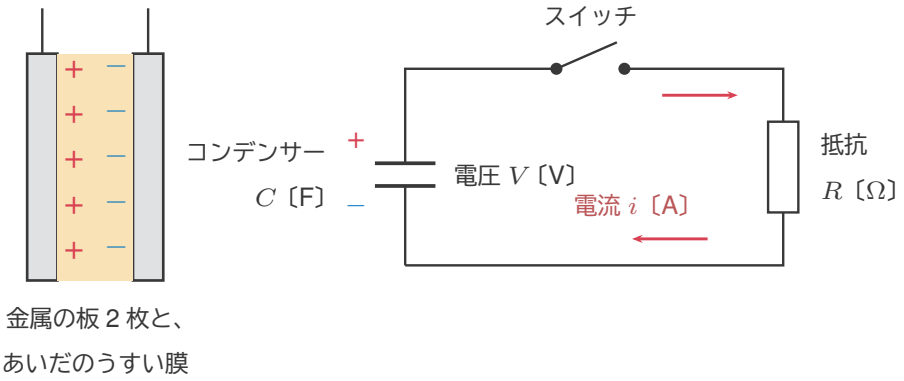


図 3 左：コンデンサーの作り。右：電気をためたコンデンサーを、スイッチで抵抗につなぐ回路（放電）。

はじめに電気をためておいたコンデンサーを、スイッチを入れて抵抗につなぐと、電気が抵抗を通って流れ出します。これを**放電**（ほうでん）といいます。電気が出ていくと、コンデンサーの電圧 V は下がっていきます。では、どんな速さで下がるのでしょう。熱と同じ手順で、ルールを作ります。そのために、次の 3 つのきまりを使います。

1 コンデンサーのきまり コンデンサーにたまっている電気の量 q〔C〕は、電圧 V〔V〕に比例する。

$$q = CV$$

比例の数 C を**静電容量**といい、単位は F（ファラド）。C（クーロン）は電気の量の単位です。この本では、これを部品のきまり（法則）として使います。くわしくは物理シリーズ『電磁気学』で学びます。

2 オームの法則 抵抗に流れる電流 i〔A〕は、抵抗にかかる電圧に比例する（中学校の理科、2-15）。ここでは抵抗にかかる電圧もコンデンサーの電圧 V と同じなので、

$$i = \frac{V}{R}$$

3 電流は、電気の量の流れる速さ 1 A は、1 秒あたり 1 C の電気が流れることです。コンデンサーに電気が流れこむ向きを＋にすると、たまっている電気の量 q の変わる速さが電流です。

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \text{（流れこむ向きが＋）}$$

放電では、電気はコンデンサーから流れ出ます。図の向きに流れ出る電流を i とすると、q は 1 秒あたり i ずつへるので、

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -i$$

この 3 つを組み合わせます。1 行に 1 つのことだけをします。

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -i$$

③のきまり

$$\frac{\mathrm{d}(CV)}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{R}$$

左に①を、右に②を入れる

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{R}$$

C は部品で決まる定数なので、微分の前に出せる（5-4）

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{RC}$$

両辺を C でわる

たいせつ

コンデンサーの放電のルール $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{RC}$

数を入れて読む

抵抗 $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、静電容量 $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ のときを考えます。k は 1000 倍、μ（マイクロ）は 100 万分の 1 です（5 巻の巻末）。

$$R = 20 \times 1000 = 20\,000\,\Omega, \qquad C = 100 \div 1\,000\,000 = 0.0001\,\mathrm{F}$$

だから、$RC = 20\,000 \times 0.0001 = 2$ です。ルールは

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{2}$$

となります。日本語にすると、「電圧の変わる速さ（1 秒あたり何 V）は、今の電圧の半分で、下がる向き」です。今の電圧が 10 V なら、1 秒あたり 5 V の速さで下がります。電圧が下がると、下がる速さも小さくなります。

RC の単位は「秒」

Ω は「V ÷ A」、F は「C ÷ V」、A は「C ÷ s」（1 秒あたりのクーロン）です。順に入れていくと、

$$\Omega \times \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \times \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \mathrm{C} \div \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}$$

V どうし、C どうしが約分されて、s（秒）が残ります。だから、$RC = 2$ は「2 秒」です。ルールの右辺 $-\dfrac{V}{RC}$ の単位は V/s になり、左辺の「電圧の変わる速さ」と単位がそろいます。

冷めるお湯とくらべる

冷めるお湯のルールは「部屋の温度 20 ℃との差」に比例して変わりました。コンデンサーのルールは「0 V との差」、つまり電圧そのものに比例して変わります。電圧は 0 V に近づいていきます。3-11 で「コンデンサーにためた電気を抵抗に流すと、電圧は同じ時間ごとに同じ割合でへる」と書いたのは、このルールのことです（6-4 で確かめます）。

5 法則からルールを作る：ばね（2 回微分のルール）

3 つめは、なめらかな水平の台の上で、ばねにつけたおもりの動きです。5-15 で、質量 0.5 kg のおもりと、ばね定数 8 N/m のばねを調べました。同じばねで、ルールを作ります。

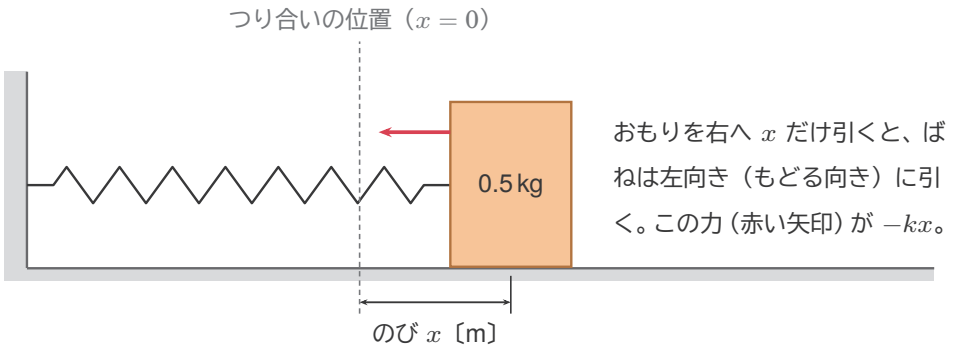


図 4　ばねにつけたおもり。右向きを＋として、つり合いの位置からのずれを x とする。

熱と同じ手順で進めます。

1. **主役の量**　つり合いの位置からのずれ x〔m〕（右向きを＋）。時刻は t〔s〕。
2. **変わる速さ**　位置の変わる速さは速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、速度の変わる速さは加速度 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$（5-5）。
3. **法則**　運動の法則（物にはたらく力＝質量×加速度、5-5）と、フックの法則（ばねの力はのびに比例し、もどる向き：$-kx$、2-15）。
4. **「＝」でつなぐ**　質量×加速度＝ばねの力。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$　運動の法則に、ばねの力を入れる

$$0.5\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -8x$$　$m = 0.5$、$k = 8$ を入れる

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$$　両辺を 0.5 でわる（$8 \div 0.5 = 16$）

日本語にすると、「加速度は、ずれの 16 倍の大きさで、つり合いの位置にもどる向き」です。$x = 0.1$ m なら、加速度は $-16 \times 0.1 = -1.6$ で、左向きに 1.6 m/s^2 です。16 の単位は、$\dfrac{k}{m}$ の単位 $\dfrac{\mathrm{N/m}}{\mathrm{kg}}$ です。N（ニュートン）は kg·m/s^2 な

ので、$\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}}{\mathrm{m}\times\mathrm{kg}}=1/\mathrm{s^2}$ になり、$(1/\mathrm{s^2})\times\mathrm{m}=\mathrm{m/s^2}$ で加速度の単位とそろいます。

熱や電気のルールと、どこがちがう？

熱と電気のルールは、1 回微分 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ が今の状態で決まりました。ばねのルールは、2 回微分（加速度）が今の位置で決まります。だから、ばねの「今の状態」は、位置だけでは足りず、位置と速度の 2 つが必要です。序章のボールと同じで、「次の速度＝今の速度＋加速度× Δt」「次の位置＝今の位置＋速度× Δt」の 2 つをくり返して進めます（6-2 で表計算にします）。

6 ルールを図にする：傾きの場

微分方程式は、グラフの傾きを決めるルールでもあります。$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は、t-T のグラフの接線の傾きだからです（5-3）。冷めるお湯のルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-0.05\,(T-20)$ で、いろいろな温度での傾きを、表計算で求めてみましょう。

	A	B
1	温度 T	傾き $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$
2	90	=-0.05*(A2-20)
3	80	（上をコピー）

表 6　A 列に温度を入れ、B 列でルールの右辺を計算する

A 列に 90、80、70、……、0 と入れて、B 列をコピーすると、傾きは −3.5、−3、−2.5、−2、−1.5、−1、−0.5、0、0.5、1 になります。

次に、t-T の方眼の上に、この傾きの短い線をかきます。温度 80 ℃の高さには傾き −3 の線、20 ℃の高さには横向き（傾き 0）の線、という具合です。ルールに t が入っていないので、同じ高さなら、どの時刻でも同じ傾きです。

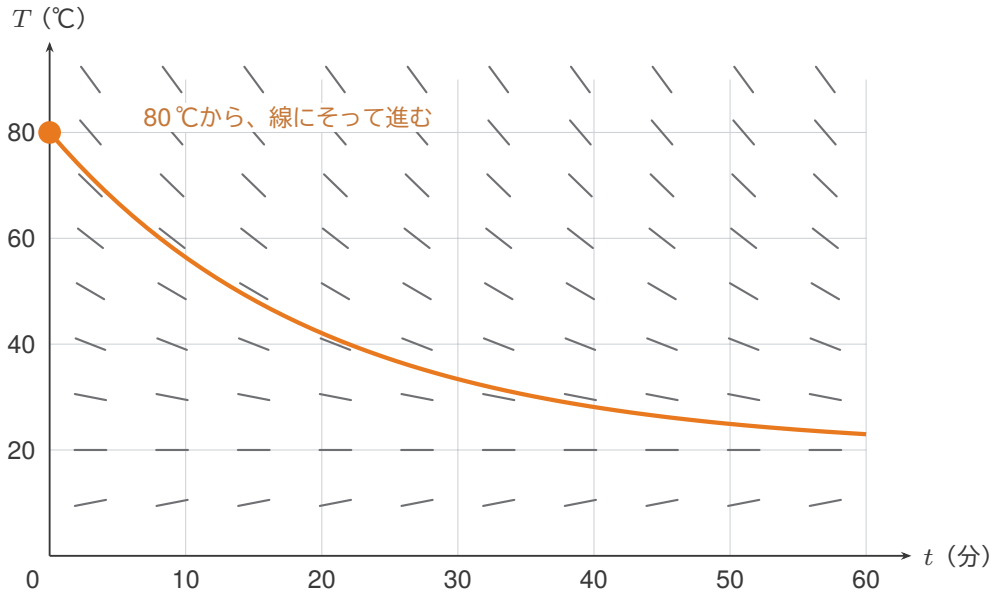


図 5　冷めるお湯のルールの傾きの場。短い線は、その点での傾き。80℃の点から線の向きにそって進むと、オレンジの曲線になる。

このように、方眼の点ごとに、ルールが決める傾きの短い線をかいた図を、**傾きの場**（かたむきのば）といいます。方向の場ともいいます。

傾きの場は、川の流れの向きをかいた地図のようなものです。川に木の葉を落とすと、木の葉は流れの向きにそって流されていきます。80℃の点から、短い線の向きにそって少しずつ進むと、1 本の曲線がかけます。これが、はじめ 80℃のときの解のグラフです。

図を見ると、次のことがわかります。

- 20℃より上では、線はどれも右下がり。上のほうほど急。だから、熱いほど速く冷める。
- 20℃の高さの線は横向き。20℃に着いた曲線は、もう上がりも下がりもしない。
- 20℃より下では、線は右上がり。冷たい水はあたたまって、20℃に近づく。

式を解かなくても、傾きの場をかくだけで、解のようすがかなりわかるのです。

もっと知りたい ★★

Python で傾きの場をかこう

この傾きの場（図 5）は、Python（2-19）でもかけます。下のプログラムは、6 分ごと・10 ℃ごとの点に、ルールが決める傾きの短い線をかきます。

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 6 分ごと・10 ℃ごとの点を、すべての組で作る
t, T = np.meshgrid(np.arange(0, 61, 6),
                   np.arange(0, 91, 10))
s = -0.05 * (T - 20)       # その点の傾き（ルールの右辺）
# 横に 1、たてに s の向きの、矢じりのない短い線
plt.quiver(t, T, 1 + 0*s, s, angles='xy',
           pivot='mid', headlength=0, headwidth=1)
plt.show()
```

1 行ずつ読んでおきます。

1. `np.arange(0, 61, 6)` は、0 から 6 ずつふやした 0、6、12、……、60 です（61 は「61 の手前まで」の意味）。
2. `np.meshgrid` は、時刻と温度のすべての組（方眼の交点）を作ります。表計算で A 列に温度、1 行めに時刻をならべた表と同じです。
3. `s = -0.05 * (T - 20)` が、ルールの右辺です。表計算の B 列の式（表 6）と同じ計算を、すべての点でいっぺんにします。
4. `plt.quiver` は、点ごとに「横に 1、たてに s」の向きの線をかきます。`angles='xy'` で、グラフの目もりどおりの傾きになります。

ルールの式をかえると、ほかのルールの傾きの場もかけます。6-2 では、この線にそって少しずつ進む計算（オイラー法）を、同じようにプログラムにします。

7 はじめの状態で、解が 1 本に決まる

傾きの場の上で、出発する点を変えてみましょう。

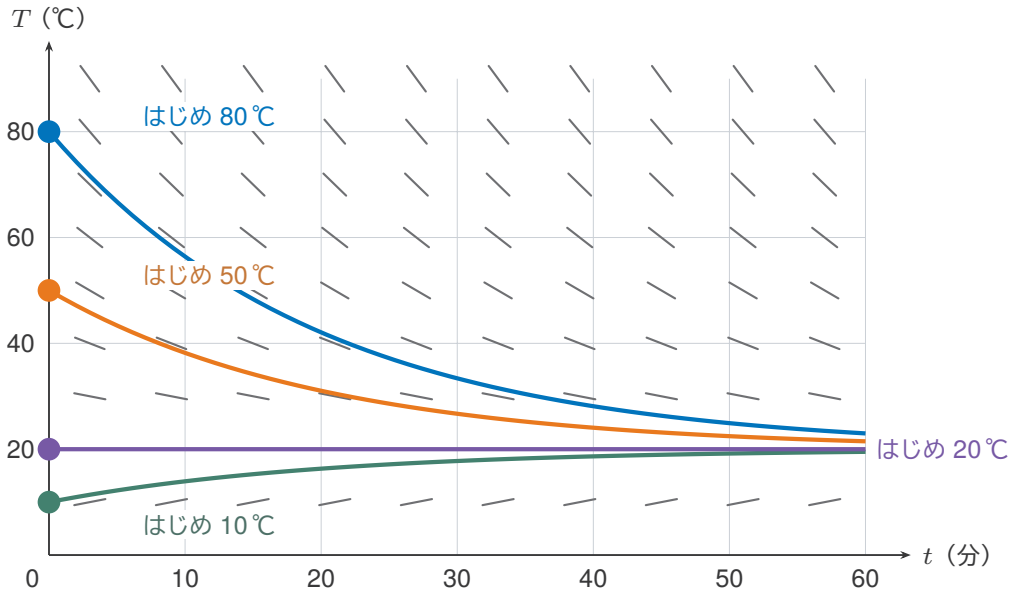


図 6　同じルールでも、出発点（はじめの状態）がちがうと、ちがう曲線になる。どの曲線も、20℃に近づく。

80℃から出発すれば青の曲線、50℃からならオレンジの曲線、10℃からなら緑の曲線です。20℃から出発すると、ずっと 20℃のまま（むらさきの横の直線）です。$T = 20$ も、はじめが 20℃のときの解です。

1 つの微分方程式には、解がたくさんあります。そのうちのどれになるかを決めるのが、はじめの状態です。時刻 0 の状態を**初期条件**（しょきじょうけん）といい、「$t = 0$ で $T = 80$」を、$T(0) = 80$ と書きます。5-13 で、「法則とはじめの状態がそろって、はじめて先のようすが 1 つに決まる」と書いたことを、傾きの場で見たことになります。

たいせつ

ルール（微分方程式）＋ はじめの状態（初期条件）→ 解はただ 1 つ

2 回微分のルールには、はじめの状態が 2 つ要る

ばねのルール $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$ では、はじめの位置だけでは動きが決まりません。同じ位置 $x = 0.1\,\mathrm{m}$ から出発しても、手を静かにはなした場合（はじめの速度 0）と、右へ $0.4\,\mathrm{m/s}$ の速さで押し出した場合では、ちがう動きになります。

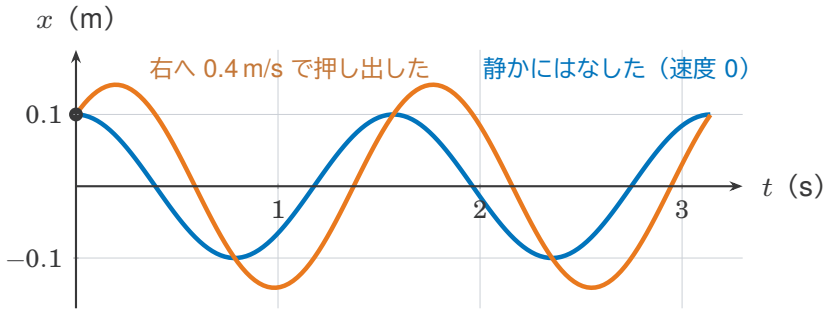


図 7　同じ位置（0.1 m）から出発しても、はじめの速度がちがうと、ちがう動きになる

5-18 で見たように、2 回微分の式の答えには、決める数が 2 つ（A と B）あります。だから、はじめの位置とはじめの速度の、2 つの初期条件が必要です。

せいかくに言うと

解がただ 1 つに決まるのは、なぜ？

傾きの場で、1 つの点から出ている線は 1 本だけです。だから、同じ点から出発した曲線が、とちゅうで 2 本に分かれることはありません。また、2 本の解の曲線が交わることもありません（交わった点から先は、同じ 1 本になってしまうからです）。大学では、ルールの右辺がなめらかに変わるなら、初期条件をみたす解がちょうど 1 つあることを証明します（**解の存在と一意性**）。

もっと知りたい ★★★★

右辺がなめらかでないと、解が 1 つに決まらないこともある

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y^{\frac{2}{3}}$、$y(0) = 0$ という微分方程式を考えます。$y = 0$（ずっと 0）は解です。左辺も右辺も 0 になるからです。ところが、$y = t^3$ も解です。左辺は $(t^3)' = 3t^2$（5-4）、右辺は $3(t^3)^{\frac{2}{3}} = 3t^2$ で、等しくなります。同じ初期条件なのに、解が 2 つあります。右辺の $y^{\frac{2}{3}}$ は、$y = 0$ のところで傾きが急に大きくなる（なめらかでない）ので、このようなことが起きるの

です。物理や工学で出てくるルールのほとんどは右辺がなめらかなので、心配はいりません。

8 解かどうかを、代入して確かめる

①で、候補 C が解であることを確かめました。その手順をまとめておきます。

1. **左辺を計算する。**候補の関数を微分する（5-18 の表）。
2. **右辺を計算する。**候補の関数を、右辺の文字のところに入れる。
3. **①と②が、すべての t で同じ式になるか見る。**同じなら、微分方程式の解。
4. **初期条件を確かめる。**$t = 0$ を入れて、はじめの値になるか見る。

コンデンサーの放電 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{2}$、$V(0) = 10$ で、候補 $V = 10e^{-0.5t}$ をためします（$-\dfrac{1}{2} = -0.5$）。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 10 \times (-0.5)\, e^{-0.5t} = -5e^{-0.5t}$$ ①左辺。$(e^{at})' = ae^{at}$ で $a = -0.5$

$$-\frac{V}{2} = -\frac{10e^{-0.5t}}{2} = -5e^{-0.5t}$$ ②右辺。V を入れる

$$-5e^{-0.5t} = -5e^{-0.5t}$$ ③すべての t で同じ

$$V(0) = 10e^{0} = 10 \times 1 = 10$$ ④初期条件。$e^0 = 1$

4 つとも合ったので、$V = 10e^{-0.5t}$ が解です。はじめ 10 V の電圧が、$e^{-0.5t}$ の形でへっていきます。

解がわかっていれば、確かめるのはこのように簡単です。むずかしいのは、解を見つけることです。それが、この巻の仕事です。6-2 では表計算で（数で）、6-4・6-12 では式で見つけます。

⑨ 微分方程式のことば：階数と線形

微分方程式を、形で分けるためのことばを 2 つ紹介します。

階数

微分方程式にふくまれる、いちばん多い微分の回数を、**階数**（かいすう）といいます。1 回微分までなら 1 階、2 回微分があれば 2 階の微分方程式です。

微分方程式	階数	必要な初期条件
$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$	1 階	はじめの温度の 1 つ
$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{2}$	1 階	はじめの電圧の 1 つ
$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$	2 階	はじめの位置と速度の 2 つ

表 7　階数と、必要な初期条件の数

階数の数だけ、初期条件が必要です。1 回積分するごとに、決めなければならない定数 C が 1 つ出てくるからです（5-13）。

線形

主役の量（T や x）とその微分が、「数×主役の量」の形と、たし算・ひき算だけで出てくる微分方程式を、**線形**（せんけい）の微分方程式といいます（5-18）。主役の量どうしをかけたり、2 乗したり、sin の中に入れたりしていない、ということです。

- 線形：$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$、$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{2}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$
- 線形でない：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2$（2 乗）、$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -9.8\sin\theta$（sin の中。ふれはばの大きい振り子）

この巻の第 3 部で式で解くのは、ほとんどが線形の微分方程式です。線形でないものは、表計算（6-2）で解きます。

せいかくに言うと

5-18 の「線形」とのつながり

5-18 では、「答えどうしをたしても答え、何倍しても答え」になる式を線形とよびました。$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$ は、-20 という定数の項があるので、このままでは答えどうしをたすと答えになりません。でも、5-18 ④のように差 $u = T - 20$ を主役にすると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05\,u$ となり、「たしても、何倍しても答え」の性質が成り立ちます。定数の項があっても、この本では線形の仲間とよびます。

⑩ ルールの形で、解き方が決まる

この巻では、いろいろな形の微分方程式が出てきます。形によって、解き方と、解のグラフのようすが決まります。

ルールの形	例	解のようす	章
右辺が時刻 t だけ	$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8$（落ちるボール）	積分するだけ	6-3
自分に比例	$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{2}$（放電）	へる・ふえる	6-4
目標との差に比例	$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$	目標に近づく	6-4・6-5
2 回微分が自分の − 倍	$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$（ばね）	ゆれる	6-6
ブレーキつきのばね	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$	ゆれながら止まる	6-7・6-12
ゆすられるばね	右辺に $\cos \omega t$	共振	6-13
いくつもの量がからむ	2 つの水そう	いっしょに変わる	6-14

表 8　ルールの形と、解き方の章。どの形でも、表計算（6-2）なら解ける。

表のどの形でも、表計算で少しずつ進めれば、数で解けます（6-2）。式の形の解を求められるのは、特別な形のときだけです。だから、この巻では、まず表計算で解を見て、そのあとで式で解きます。

たいせつ

微分方程式	**変わる速さ（微分）が入っていて、わからないものが関数である方程式。**
解	**すべての時刻でみたす関数。代入して、左辺と右辺が等しいか確かめる。**
作り方	**主役の量を決める → 変わる速さを微分で書く → 法則を式にして「＝」でつなぐ。**
初期条件	**階数の数だけ必要。ルールと初期条件で、解はただ 1 つに決まる。**

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

独立変数 t の未知関数 $y(t)$ とその導関数を含む方程式を常微分方程式という。含まれる導関数の最高階数を方程式の階数という。n 階の方程式では、n 個の初期条件 $y(0),\ y'(0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)$ を与えると、解が一意に定まる。

訳 「独立変数」は自分で動かす変数（ここでは時刻 t）、「未知関数」はわからない関数、「導関数」は微分したもの。「常微分方程式」は、変数が t の 1 つだけの微分方程式（変数が場所と時間の 2 つ以上あるものは偏微分方程式で、8-13 で学ぶ）。「一意に定まる」は「ただ 1 つに決まる」。

この章で出てきたことば

微分方程式　変わる速さ（微分）をふくみ、わからないものが関数である方程式。

解　微分方程式をみたす関数。

傾きの場　方眼の点ごとに、ルールの決める傾きの短い線をかいた図。

初期条件　はじめ（$t = 0$）の状態。$T(0) = 80$ のように書く。

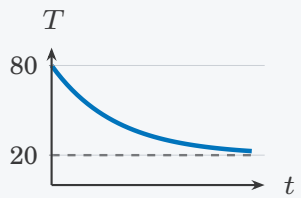
階数　ふくまれる微分の、いちばん多い回数。

静電容量　コンデンサーのためやすさ。$q = CV$ の C。単位は F（ファラド）。

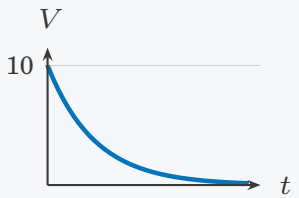
コラム　3 つのルールを、ならべてみよう

この章では、熱・電気・ばねの 3 つの場面で、法則からルールを作りました。ならべてみると、作り方は同じで、ルールの形もよく似ています。

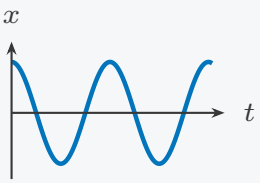
場面	主役の量	使った法則	ルール
熱	お湯の温度 T〔℃〕	ニュートンの冷却の法則	$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$
電気	コンデンサーの電圧 V〔V〕	$q=CV$、オームの法則、$i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{RC}$
ばね	おもりのずれ x〔m〕	運動の法則、フックの法則	$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$



熱：20℃に近づく



電気：0 V に近づく



ばね：ゆれる

熱と電気のルールは、どちらも「目標の値（20℃や 0 V）との差に比例して、差をへらす向きに変わる」形です。だから、グラフもそっくりです。6-4 では、この 2 つを同じ方法でいっしょに解きます。熱と電気のルールは 1 階です。ばねだけは 2 回微分のルール（2 階）で、近づくのではなく、ゆれます（6-6）。この巻では、ちがう分野でも同じ形のルールが何度も出てきます。それをまとめるのが 6-15 です。

記号カード 初めて出た章 **6-1**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

読み方 ディーワイ・ディーティー イコール エフ・オブ・ワイ

意味 y の変わる速さが、今の y で決まるルール（1 階の微分方程式）

英語 differential equation

例題でたしかめよう

例題 1　ルールを読む

冷めるお湯のルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$（$T$ は℃、t は分）で、温度が（1）60℃、（2）10℃のときの、温度の変わる速さを求めましょう。上がるか下がるかも答えましょう。

考え方 右辺の T に温度を入れる。答えがマイナスなら下がる、プラスなら上がる（②）。単位は℃/分。

式 （1）$-0.05 \times (60-20) = -0.05 \times 40 = -2$

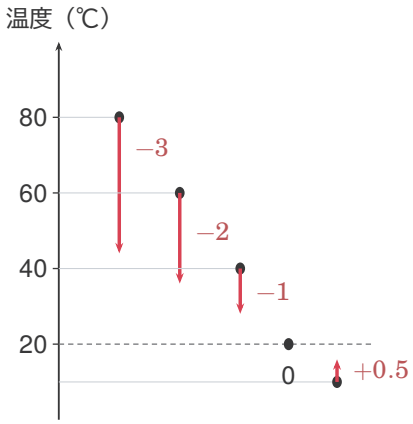
（2）$-0.05 \times (10-20) = -0.05 \times (-10) = 0.5$

答え （1）1 分あたり 2℃下がる（−2℃/分）

（2）1 分あたり 0.5℃上がる（+0.5℃/分）

じぶんでとこう 1

ルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(T-25)$（$T$ は℃、t は分）で、温度が（1）45℃、（2）15℃のときの、温度の変わる速さを求めましょう。上がるか下がるかも答えましょう。



温度の目もりの横に、その温度での「変わる速さ」を赤い矢印でかきました。下向きは下がる、上向きは上がるで、長さは速さの大きさです。矢印は、どれも 20 ℃（点線）のほうを向いています。20 ℃から遠いほど、矢印は長くなります。

例題 2　ことばからルールを作る

部屋の温度は 25 ℃です。お茶の温度 T〔℃〕の冷める速さは、部屋との温度の差の 0.04 倍〔1/分〕です。時刻を t〔分〕として、ルールを微分方程式で書きましょう。また、お茶が 85 ℃のときの温度の変わる速さを求めましょう。

考え方　③の手順で作る。主役は T、変わる速さは $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$。差は $T-25$。差をへらす向きなので、マイナスをつける。

式　変わる速さ：$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$

法則：$-0.04\times(T-25)$

85 ℃のとき：$-0.04\times(85-25)=-0.04\times 60=-2.4$

答え　$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-0.04\,(T-25)$。85 ℃のとき、1 分あたり 2.4 ℃下がる

じぶんでとこう 2

部屋の温度は 18 ℃です。スープの温度 T〔℃〕の冷める速さは、部屋との温度の差の 0.08 倍〔1/分〕です。時刻を t〔分〕として、ルールを微分方程式で書きましょう。また、スープが 68 ℃のときの温度の変わる速さを求めましょう。

例題 2 では、問題のことばを、1 つずつ記号に置きかえました。

問題のことば	式では
お茶の温度	T〔℃〕
冷める速さ（温度の変わる速さ）	$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$〔℃/分〕
部屋との温度の差	$T-25$〔℃〕
差の 0.04 倍	$0.04\times(T-25)$
冷める（差をへらす向き）	前にマイナス $-$

表 9　ことばを記号に置きかえる

「冷める速さ」は下がる速さなので、温度の変わる速さとしてはマイナスです。だから、最後にマイナスをつけます。

例題 3　コンデンサーの放電のルール

抵抗 $R=20\,\mathrm{k\Omega}$、静電容量 $C=100\,\mu\mathrm{F}$ で、コンデンサーを放電させます。電圧 V〔V〕のルール $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{V}{RC}$ に数を入れ、電圧が（1）10 V、（2）4 V のときの、電圧の変わる速さを求めましょう。

考え方　kΩ・μF を、Ω・F になおしてから RC を計算する（k は 1000 倍、μ は 100 万分の 1）。RC の単位は秒（④）。

式　$R=20\times1000=20\,000$、$C=100\div1\,000\,000=0.0001$

$RC=20\,000\times0.0001=2$（秒）。ルールは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{V}{2}$

（1）$-\dfrac{10}{2}=-5$

（2）$-\dfrac{4}{2}=-2$

答え　（1）1 秒あたり 5 V 下がる

（2）1 秒あたり 2 V 下がる

電圧が低くなると、下がる速さも小さくなります。冷めるお湯で、温度が部屋に近づくと冷める速さが小さくなったのと同じです。

じぶんでとこう 3

抵抗 $R = 50\,\mathrm{k\Omega}$、静電容量 $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ で、コンデンサーを放電させます。RC を求めて放電のルールを書き、電圧が $6\,\mathrm{V}$ のときの電圧の変わる速さを求めましょう。

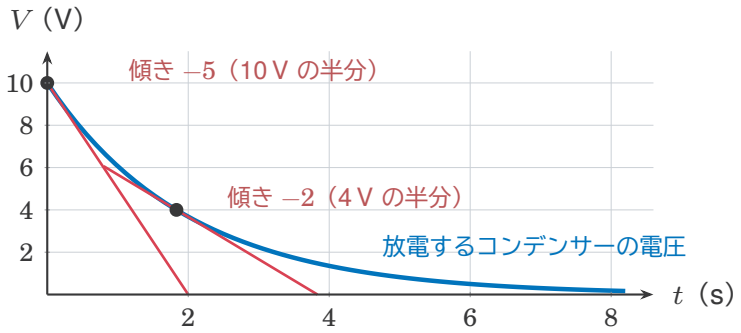


図 8　例題 3 の放電のグラフ（式は 6-4 で求める）。どの点でも、接線の傾きは「今の電圧の半分」で下向き。

例題 4　ばねのルール

質量 0.5 kg のおもりを、ばね定数 8 N/m のばねにつけました。(1) ずれ x〔m〕のルールを書きましょう。(2) $x = -0.05$ m（左へ 5 cm）のときの加速度を求めましょう。(3) このルールの階数を答えましょう。

考え方　運動の法則「質量×加速度＝力」に、ばねの力 $-kx$ を入れる（⑤）。

式　(1) $0.5\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -8x$。両辺を 0.5 でわって $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$

(2) $-16 \times (-0.05) = 0.8$

(3) 2 回微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ があるので 2 階

答え　(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$

(2) 右向きに 0.8 m/s^2

(3) 2 階

左にずれているときは、ばねが右へおし返すので、加速度は右向き（プラス）になります。ルールのマイナスが、いつも「つり合いの位置にもどる向き」を作っています。

じぶんでとこう 4

質量 2 kg のおもりを、ばね定数 50 N/m のばねにつけました。(1) ずれ x〔m〕のルールを書きましょう。(2) $x = 0.04$ m のときの加速度を求めましょう。(3) 階数を答えましょう。

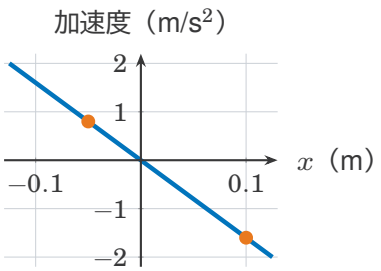


図 9　ずれと加速度

図 9 は、ばねのルールを、ずれ x と加速度のグラフにしたものです。加速度はずれに比例し、向きは反対なので、原点を通る右下がりの直線（傾き −16）になります。オレンジの点は、例題 4 と⑤の値です。

1

例題 5　解かどうか確かめる（1 階）

$T = 20 + 60e^{-0.05t}$ が、微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$ と初期条件 $T(0) = 80$ をみたすことを確かめましょう。

考え方　⑧の 4 つの手順。左辺は 5-18 の表で微分、右辺は $T - 20$ を入れる。

式　①左辺：$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 + 60 \times (-0.05)\, e^{-0.05t} = -3e^{-0.05t}$

②右辺：$T - 20 = 60e^{-0.05t}$ なので $-0.05 \times 60e^{-0.05t} = -3e^{-0.05t}$

③すべての t で、左辺＝右辺

④ $T(0) = 20 + 60e^{0} = 20 + 60 \times 1 = 80$

答え　微分方程式と初期条件をみたす（解である）

じぶんでとこう 5

$V = 10e^{-0.5t}$ が、微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.5V$ と初期条件 $V(0) = 10$ をみたすことを確かめましょう。

表計算でも確かめられます。A 列に時刻を入れ、B2 に `=20+60*EXP(-0.05*A2)`（候補の温度）、C2 に `=-3*EXP(-0.05*A2)`（左辺）、D2 に `=-0.05*(B2-20)`（右辺）と入れて、下へコピーします（`EXP(x)` は e^{x}）。

	A	B	C	D
1	t	T	左辺	右辺
2	0	80	−3	−3
3	10	56.39	−1.82	−1.82
4	20	42.07	−1.10	−1.10
5	30	33.39	−0.67	−0.67

表 10　計算の結果（小数第 3 位で四捨五入）。C 列と D 列は、どの行でも等しい。

例題 6　解でないものを見分ける

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -2y$、初期条件 $y(0) = 5$ の解は、次のどれでしょう。

（ア）$y = 5 - 10t$、（イ）$y = 5e^{-2t}$、（ウ）$y = 5e^{2t}$

考え方　1 つずつ、左辺と右辺を計算してくらべる（⑧）。1 つの時刻だけで合ってもだめ（①）。

式　（ア）左辺 -10、右辺 $-2(5 - 10t) = -10 + 20t$。$t = 1$ では左辺 -10、

右辺 10 で、合わない

（イ）左辺 $5 \times (-2)e^{-2t} = -10e^{-2t}$、右辺 $-2 \times 5e^{-2t} = -10e^{-2t}$

で等しい。$y(0) = 5e^{0} = 5$

（ウ）左辺 $5 \times 2e^{2t} = 10e^{2t}$、右辺 $-2 \times 5e^{2t} = -10e^{2t}$

で、符号がちがう

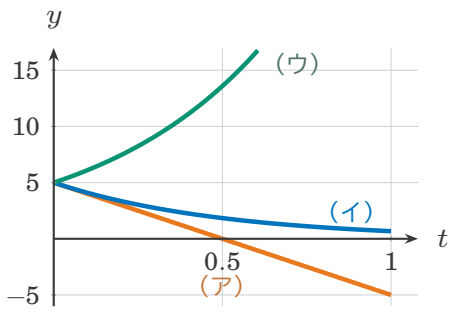
答え　（イ）

（ア）は $t = 0$ では左辺も右辺も -10 で合いますが、ほかの時刻では合いません。（ウ）は、$y(0) = 5$ はみたしますが、ふえていく関数なので、「自分の -2 倍の速さでへる」ルールに合いません。初期条件だけ合っていても、解ではないのです。

じぶんでとこう 6

微分方程式 $\dfrac{dT}{dt} = -0.05\,(T - 20)$、初期条件 $T(0) = 50$ の解は、次のどれでしょう。

（ア）$T = 50 - 1.5t$、（イ）$T = 20 + 30e^{-0.05t}$、（ウ）$T = 50e^{-0.05t}$



3 つの候補のグラフです。ルール $\dfrac{dy}{dt} = -2y$ では、y がプラスなら傾きはマイナスで、y が 0 に近づくほど傾きはゆるやかになります。（ア）は傾きが変わらず、0 をつきぬけます。（ウ）は右上がりです。ルールのとおりに曲がっているのは（イ）だけです。

例題 7　解かどうか確かめる（2 階）

$x = 0.1\cos 4t$ が、ばねの微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -16x$ と、初期条件 $x(0) = 0.1$、$\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ をみたすことを確かめましょう。

考え方　2 回微分して左辺を作る（5-15：cos の微分は − sin、sin の微分は cos。$\omega = 4$ がかかる）。初期条件は 2 つ確かめる。

式　1 回微分：$\dfrac{dx}{dt} = 0.1 \times (-4\sin 4t) = -0.4\sin 4t$

2 回微分：$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -0.4 \times 4\cos 4t = -1.6\cos 4t$

右辺：$-16x = -16 \times 0.1\cos 4t = -1.6\cos 4t$　で等しい

$x(0) = 0.1\cos 0 = 0.1$、$\dfrac{dx}{dt}(0) = -0.4\sin 0 = 0$

答え　微分方程式と、2 つの初期条件をみたす（解である）

じぶんでとこう 7

$x = 0.05\sin 4t$ が、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -16x$ と、初期条件 $x(0) = 0$、$\dfrac{dx}{dt}(0) = 0.2$ をみたすことを確かめましょう。

数でも確かめます。いくつかの時刻で、2 回微分（加速度）と $-16x$ を計算すると、同じ値になります。

時刻 t（s）	0	0.2	0.6	0.8
位置 x（m）	0.1	0.0697	−0.0737	−0.0998
加速度 $-1.6\cos 4t$	−1.6	−1.115	1.180	1.597
$-16x$	−1.6	−1.115	1.180	1.597

表 11　加速度と $-16x$ は、どの時刻でも等しい（cos はラジアンで計算した）

例題 8　傾きの場から、解のようすを予想する

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -0.5(y-2)$ について、(1) $y = 0$、1、2、3、4 での傾きを求めましょう。(2) $y(0) = 4$ と $y(0) = 0$ の解は、それぞれどうなりますか。

考え方　右辺に y を入れて傾きを求め、傾きの場をかく（⑥）。傾きが 0 になる高さに、解は近づく。

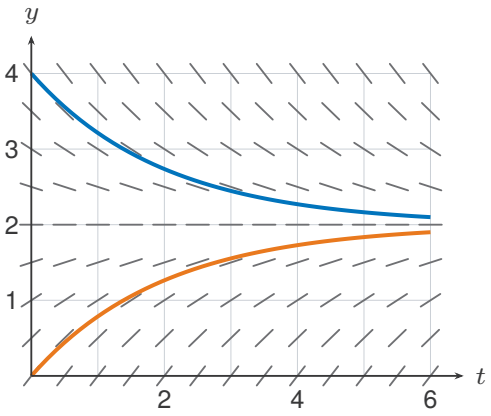
式　(1) $y = 0$：$-0.5 \times (-2) = 1$、$y = 1$：$-0.5 \times (-1) = 0.5$

$y = 2$：0、$y = 3$：-0.5、$y = 4$：-1

(2) $y > 2$ では傾きがマイナス、$y < 2$ ではプラス、$y = 2$ で 0

答え　(1) 1、0.5、0、-0.5、-1

(2) $y(0) = 4$ はへって 2 に近づく。$y(0) = 0$ はふえて 2 に近づく



傾きの場をかいて、$y(0) = 4$（青）と $y(0) = 0$（オレンジ）から線にそって進むと、どちらも $y = 2$ の横の線に近づきます。$y = 2$ は、冷めるお湯の「部屋の温度 20℃」にあたる高さです。

じぶんでとこう 8

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(T - 30)$ について、(1) $T = 10$、20、30、40、50 での傾きを求めましょう。(2) $T(0) = 50$ と $T(0) = 10$ の解は、それぞれどうなりますか。

例題 9　階数と線形を見分ける

次の微分方程式の階数を答えましょう。また、線形かどうかも答えましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{2}$、(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -16x$、(3) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.01v^2$

考え方　いちばん多い微分の回数が階数（⑨）。主役の量が 2 乗されていたら線形でない。

式　(1) 1 回微分だけ。V は「数× V」の形

(2) 2 回微分がある。x は「数× x」の形

(3) 1 回微分だけ。v^2（2 乗）がある

答え　(1) 1 階・線形

(2) 2 階・線形

(3) 1 階・線形でない

(3) は、雨つぶのように、空気の抵抗が速さの 2 乗に比例するときの落ち方のルールです。線形でないので、6-5 では表計算で解きます。

じぶんでとこう 9

次の微分方程式の階数を答えましょう。また、線形かどうかも答えましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.2\,(T - 15)$、(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -9.8\sin\theta$、(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -100q$

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

解を「数」と答える

× $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$、$T(0) = 80$ の解は $T = 20$

○ 解は関数 $T = 20 + 60e^{-0.05t}$

$T = 20$ は、はじめから 20 ℃のときの解です。はじめが 80 ℃なら、温度は時刻とともに変わるので、解は時刻 t の関数になります。20 は、温度が近づいていく先の数です。

⚠ まちがえやすいところ

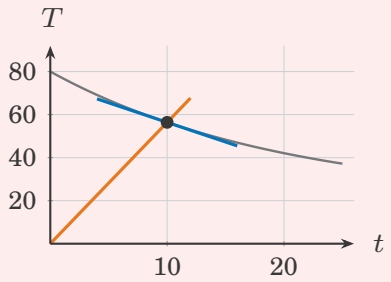
$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ を分数として約分する

✕ $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ の d を約分して $\dfrac{T}{t}$ にする

○ $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は「T の変わる速さ」を表す、ひとまとまりの記号

d は、数でも文字でもありません

(5-3)。たとえば $t = 10$ では、$\dfrac{T}{t} = \dfrac{56.39}{10} \approx 5.6$ ですが、ほんとうの変わる速さは -1.82 です。図で見ると、$\dfrac{T}{t}$ は原点と点を結ぶ線（オレンジ）の傾き、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は接線（青）の傾きで、まったくちがう量です。



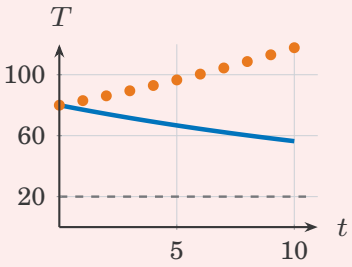
⚠ まちがえやすいところ

「下がる向き」のマイナスをつけ忘れる

✕ 冷める速さが差の 0.05 倍なので $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0.05\,(T - 20)$

○ 差をへらす向きなので $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$

マイナスがないと、80 ℃では「1 分あたり 3 ℃上がる」ことになります。1 分ごとに計算すると、80、83、86.15、89.46……と、お湯がどんどん熱くなってしまいます（オレンジ）。答えがおかしな向きに進んだら、符号を確かめましょう。



⚠ まちがえやすいところ

kΩ・μF のまま RC を計算する

✕ $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$ で $RC = 20 \times 100 = 2000$

○ $RC = 20\,000 \times 0.0001 = 2$（秒）

そのままかけると単位が「$\mathrm{k\Omega} \times \mu\mathrm{F}$」になり、秒ではありません。k（1000 倍）と μ（100 万分の 1）をなおしてからかけます。

⚠ まちがえやすいところ

2 階のルールで、初期条件を 1 つしか使わない

✕ ばねの動きは、はじめの位置 $x(0) = 0.1$ だけで決まる

○ はじめの位置と、はじめの速度の 2 つで決まる

2 階の微分方程式には、決める数が 2 つあります（⑦）。はじめの速度がちがうと、同じ位置から出発しても、ちがう動きになります（図 10：青は速度 0、オレンジは右へ 0.4 m/s で出発）。

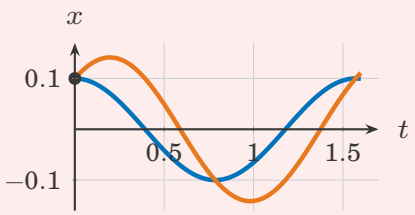
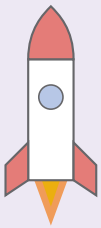


図 10　同じ位置、ちがう速度で出発

コラム　ニュートンが温度をはかった方法

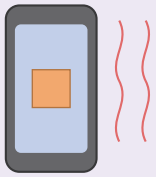
ニュートンが冷却の法則を発表したのは、温度計ではかれないほど高い温度をはかるためでした。当時の温度計は、真っ赤に焼けた鉄の温度をはかれません。そこで、焼けた鉄を風の当たる所に置き、温度計ではかれる温度まで冷めるのにかかった時間を記録しました。冷め方のきまり（差に比例して冷める）を使えば、冷めるのにかかった時間から、はじめの温度を逆に計算できるのです。「ルール」と「いまの状態」から、過去や未来の状態がわかる。この巻の考え方は、300 年以上前から使われていました。

物理・工学ではこう使う



ロケット

カメラのフラッシュ



スマホの部品の熱

● **運動方程式（物理シリーズ『力学』）**

物にはたらく力の合計を $\sum \vec{F}$ と書くと、運動の法則は $m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum \vec{F}$ です（$\vec{r}$ は位置を表す矢印、4-10）。これは、位置を求める 2 階の微分方程式です。ロケットや人工衛星の通り道は、この式を、はじめの位置と速度から少しずつ進めて計算します。

● **カメラのフラッシュ**

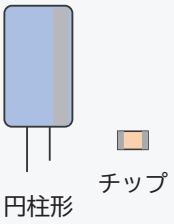
電池の電気を、まずコンデンサーにゆっくりためます。シャッターを切った瞬間に、ためた電気を光る管に一気に流して、短い時間だけ強く光らせます。ためるときも流すときも、電圧は $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ のルールにしたがって変わります（6-4）。

● **電子機器の温度**

スマホやパソコンの部品は、使うと熱を出し、まわりの空気に熱を逃がします。部品の温度の変わり方も、ニュートンの冷却の法則と同じ形のルールで計算して、熱くなりすぎないように設計します（6-4）。

コラム　コンデンサーは、どこにある？

コンデンサーは、身のまわりの電気製品のほとんどに入っています。スマホの中の基板には、米つぶより小さなコンデンサーが数百こ以上ならんでいて、電圧のゆれをならしたり、電気を少しためておいたりしています。スマホの画面（タッチパネル）も、指が近づくと電気のたまり方が変わることを利用して、さわった場所を見つけています。



章末問題

6-1 のまとめ

基本 ★★

1 ルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.08\,(T-22)$（$T$ は℃、t は分）で、温度が（1）72℃、（2）12℃のときの、温度の変わる速さを求めましょう。上がるか下がるかも答えましょう。

2 部屋の温度は 15℃です。ホットミルクの温度 T〔℃〕の冷める速さは、部屋との温度の差の 0.06 倍〔1/分〕です。時刻を t〔分〕として、ルールを微分方程式で書きましょう。また、65℃のときの温度の変わる速さを求めましょう。

3 抵抗 $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$、静電容量 $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ で、コンデンサーを放電させます。RC を求めて放電のルールを書き、電圧が 8 V のときの電圧の変わる速さを求めましょう。

4 質量 0.2 kg のおもりを、ばね定数 20 N/m のばねにつけました。（1）ずれ x〔m〕のルールを書きましょう。（2）$x = 0.03\,\mathrm{m}$ のときの加速度を求めましょう。（3）階数を答えましょう。

5 次の微分方程式の階数を答えましょう。また、線形かどうかも答えましょう。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -3y$、(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4y$、(3) $\dfrac{dy}{dt} = y^3$

6 $y = 3e^{-0.5t}$ が、微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -0.5y$ と初期条件 $y(0) = 3$ をみたすことを確かめましょう。

チャレンジ ★★★

7 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -0.2(y-5)$ について、(1) $y = 1$、3、5、7、9 での傾きを求めましょう。(2) $y(0) = 9$ と $y(0) = 1$ の解は、それぞれどうなりますか。

8 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -3y$、初期条件 $y(0) = 2$ の解は、次のどれでしょう。理由も書きましょう。

(ア) $y = 2 - 6t$、(イ) $y = 2e^{-3t}$、(ウ) $y = 2e^{3t}$

9 $x = 0.04\cos 10t$ が、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -100x$ と、初期条件 $x(0) = 0.04$、$\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ をみたすことを確かめましょう。これは、問題 4 のばねを 4 cm 引いて静かにはなしたときの動きです。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 微分方程式を、ことばと単位で読み、式に書ける。 → 32 ページ
- ☐ 傾きの場から、解のようすを予想できる。 → 39 ページ
- ☐ 代入して、解かどうか確かめられる。 → 44 ページ

ソラ

答えが「グラフ 1 本」になる方程式なんだね。次の 6-2 では、表計算でそのグラフを作ってみよう。

1

第 1 部　微分方程式の入口

★★

6-2 表計算で解こう：オイラー法

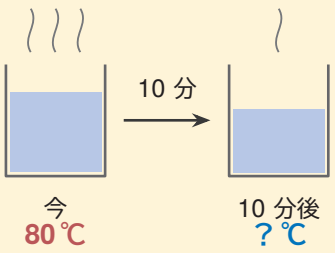
道しるべ　この章の前に 2-16 2-18 2-19 5-8 5-13 6-1
この章の先に 6-5 6-7 6-14 7-10

この章でできるようになること

- ★★「次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt」をくり返して、微分方程式を表計算で解ける。
- ★★ Δt を小さくすると答えが正確になることを、表とグラフで確かめられる。
- ★★★ ばねのような 2 回微分の式を、位置と速度の 2 つの列で、正しい順に解ける。

はてな？

熱いお湯は、部屋との温度の差が大きいほど速く冷めます。6-1 では、このきまりを $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$ と書きました（T は温度〔℃〕、t は時刻〔分〕、部屋は 20 ℃）。80 ℃のお湯は、10 分後に何℃でしょう。ルールが教えてくれるのは「今の冷める速さ」だけです。



5-18 では、このルールに合う関数を「答えの候補リスト」から見つけました。でも、世の中のルールには、候補リストにない形のものがたくさんあります。空

気の抵抗が速さの 2 乗に比例する落下（6-5）、大きくゆれる振り子（6-6）、そして天気です。

この章では、**どんなルールにも使える方法**を学びます。5-8 で出てきた「少しずつ時間を進める方法」（オイラー法）です。答えの式を知らなくても、表計算と電卓だけで未来が計算できます。最後に、式の答えとくらべて、どれくらい正確かも確かめます。

やってみよう　電卓で、1 分ずつ冷ましてみよう

ルールは $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$、はじめの温度は 80 ℃です。電卓を用意しましょう。

1. 今の温度 80 を右辺に入れて、$-0.05 \times (80-20)$ を計算しよう。これが「今の冷める速さ」〔℃/分〕です。
2. 1 分のあいだ、ずっとこの速さで冷めるとして、1 分後の温度 $= 80 + (①の速さ) \times 1$ を計算しよう。
3. 1 分後の温度を「今の温度」にして、①②をくり返そう。3 分後まで、下の表をノートにうめよう。

時刻 t〔分〕	0	1	2	3
温度 T〔℃〕	80	ア	イ	ウ
今の冷める速さ〔℃/分〕	-3	エ	オ	

1 行ずつ確かめます。どの行も「右辺を計算する」→「速さ× 1 分をたす」の 2 つの手順です。

$-0.05 \times (80 - 20) = -3$　　① 0 分の冷める速さ

$80 + (-3) \times 1 = 77$　　② 1 分後の温度（ア）

$-0.05 \times (77 - 20) = -2.85$　　① 1 分の冷める速さ（エ）

$77 + (-2.85) \times 1 = 74.15$　　② 2 分後の温度（イ）

$-0.05 \times (74.15 - 20) = -2.7075$　　① 2 分の冷める速さ（オ）

$74.15 + (-2.7075) \times 1 = 71.4425$　　② 3 分後の温度（ウ）

答えは、ア 77、イ 74.15、ウ 71.44（小数第 3 位を四捨五入）、エ -2.85、オ -2.71 です。温度が下がるにつれて、冷める速さも小さくなっていきます（3.00 → 2.85 → 2.71）。ルールのとおり、部屋との差が小さくなったからです。

この計算をあと 7 回くり返せば、10 分後の温度がわかります。ルールが教えてくれるのは「今の速さ」だけなのに、くり返すことで、先へ先へと進んでいけるのです。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 6-1　$\dfrac{dT}{dt} = -0.05\,(T - 20)$ は「温度の変わる速さ〔℃/分〕は、部屋との差の 0.05 倍で、下がる向き」。
- 5-8　次の位置 ≈ 今の位置＋今の速度× Δt をくり返す方法がオイラー法。ずれは Δt に比例。
- 2-18　表計算は、上の行から下の行を計算し、式をコピーしてくり返す。`$D$2` はコピーしても動かない番地。
- 5-15　ばね（$\ddot{x} = -x$）を、速度と位置の 2 つの列で表計算した（5-13 の投げ上げも 2 つの列）。
- 5-14　コンデンサーの電圧 $V = 10\,(1 - e^{-t/2})$。$e^{-1} = 0.368$。
- 2-19　`for i in range(5):` の下の行を 5 回くり返す。0.1 を 10 回たしても、ぴったり 1 にはならない。

数学の道具

① 今の速さで、Δt だけ進む

ルールの左辺 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は、温度の「今の変わる速さ」でした（5-3・6-1）。単位は℃/分です。

短い時間 Δt のあいだなら、変わる速さはほとんど変わりません。だから、そのあいだに温度が変わる量 ΔT は、

$$\Delta T \approx \text{今の変わる速さ} \times \Delta t$$

です。5-8 で「進む距離 ≈ 速度× Δt」としたのと同じ考えです。速度は「位置の変わる速さ」でした。ここでは、それが「温度の変わる速さ」に変わっただけです。

今の温度に ΔT をたせば、少しあとの温度になります。

$$\text{次の温度} \approx \text{今の温度} + \text{今の変わる速さ} \times \Delta t$$

「今の変わる速さ」は、ルールの右辺に今の温度を入れれば計算できます。やってみようの①が、その計算でした。

グラフで見ると：接線にそって 1 歩

このことをグラフで見てみましょう。グラフの傾きは「変わる速さ」です（3-5・5-3）。だから「今の変わる速さで Δt 進む」は、今いる点で接線を引き、接線の上を横に Δt だけ進むことです。

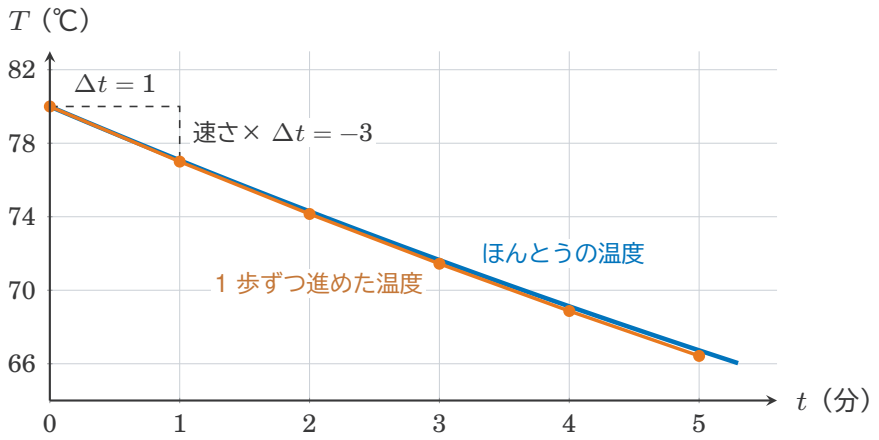


図 1　オレンジの点が、1 分ごとに進めた温度。1 歩は、その点での接線の向きに進む（はじめの 1 歩は、横に 1 分、たてに −3 ℃）。青い線は、5-18 で求めた式の答え。

図 1 のオレンジの点は、どれも、1 つ前の点での接線の上にあります。点をつないだ折れ線は、青い線（ほんとうの温度）のすぐ近くを通っています。

いつでも使える形に書く

冷めるお湯だけでなく、いろいろなルールで使えるように、文字で書いておきます。6-1 のように、ルールを

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) \qquad (y \text{ の変わる速さは、今の } y \text{ で決まる})$$

と書きます。お湯なら y が温度 T、$f(y)$ が $-0.05\,(T-20)$ です。

はじめの値を y_0、1 歩進んだ値を y_1、2 歩進んだ値を y_2、…と書きます。右下の小さな数は「何歩めか」を表す名札です（3-2 の x_1 と同じ。かけ算ではありません）。n 歩めの値 y_n は、時刻 $t = n\,\Delta t$ のときの値です。すると、1 歩の計算は次の 1 行になります。

$$y_{n+1} \;=\; y_n \;+\; f(y_n)\,\Delta t$$

次の値 ＝ 今の値 ＋ 今の変わる速さ × Δt

$n = 0$ とすれば $y_1 = y_0 + f(y_0)\,\Delta t$（はじめから 1 歩め）、$n = 1$ とすれば $y_2 = y_1 + f(y_1)\,\Delta t$（1 歩めから 2 歩め）です。この 1 行を何回もくり返して、

少しずつ先の値を求める方法を**オイラー法**といいます。5-8 で名前だけ出てきた方法です。

このように、式で解かずに、数の計算をくり返して答えを求めることを**数値計算**（すうちけいさん）といいます。2-16 で「表でためして答えに近づく方法は、大学では数値計算として学ぶ」と予告したものです。

記号カード 初めて出た章 6-2

y_n

読み方 ワイ・エヌ
意味 n 歩めの y の値（時刻 $n\,\Delta t$ の値）。y_{n+1} はその次の値
英語 y sub n

せいかくに言うと

右辺に時刻 t も入るルール $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,\, y)$ でも、同じように $y_{n+1} = y_n + f(t_n,\, y_n)\,\Delta t$（$t_n = n\,\Delta t$）と進めます。右辺が t だけのルール（6-3 の形）でも、右辺に y が入るルール（6-4 の形）でも、オイラー法は使えます。

2 2-18 の表は、オイラー法だった

やってみようの計算を、10 分後まで続けます。

t	T	速さ	ほんとう
0	80	−3	80
1	77	−2.85	77.07
2	74.15	−2.71	74.29
3	71.44	−2.57	71.64
4	68.87	−2.44	69.12
5	66.43	−2.32	66.73

t	T	速さ	ほんとう
6	64.11	−2.21	64.45
7	61.90	−2.10	62.28
8	59.81	−1.99	60.22
9	57.82	−1.89	58.26
10	**55.92**	−1.80	**56.39**

表 1 1 分ごとに進めた温度 T〔℃〕と、今の速さ〔℃/分〕（小数第 3 位を四捨五入）。t は時刻〔分〕。「ほんとう」は 5-18 の式 $T = 20 + 60e^{-0.05t}$ の値〔℃〕。

10 分後は 55.92 ℃です。この数に見覚えはありませんか。第 2 巻の 2-18 で、表計算で作った「冷めるお湯の表」の 10 分後も、55.92 ℃でした。2-18 では、「1 分ごとに、部屋との温度の差の 5 % ずつ下がる」として計算しました。式で書くと、

$$\text{次の温度} = \text{今の温度} - 0.05 \times (\text{今の温度} - 20)$$

です。これは、オイラー法の 1 行で $\Delta t = 1$ 分としたもの

$$T_{n+1} = T_n + (-0.05\,(T_n - 20)) \times 1$$

と、まったく同じです。**2-18 の表は、$\Delta t = 1$ 分のオイラー法だった**のです。

差は、毎回同じ割合でへる

オイラー法の 1 行を、部屋との差で見なおします。5-18 ④と同じように、差を $u_n = T_n - 20$ と書きます。オイラー法の 1 行の両辺から 20 をひくと、左辺は $T_{n+1} - 20 = u_{n+1}$、右辺の $T_n - 20$ は u_n になります。

$T_{n+1} = T_n - 0.05\,(T_n - 20)$	オイラー法の 1 行（$\Delta t = 1$）
$u_{n+1} = u_n - 0.05\,u_n$	両辺から 20 をひいて、差 u で書く
$u_{n+1} = (1 - 0.05)\,u_n$	u_n でくくる（3-8）
$u_{n+1} = 0.95\,u_n$	$1 - 0.05 = 0.95$

部屋との差は、1 歩ごとに 0.95 倍になります。差 60 ℃が、57、54.15、…とへっていきます。同じ割合でへるので、10 歩で 0.95^{10} 倍です（3-11 の倍々）。$0.95^{10} = 0.5987$ なので、10 分後の差は $60 \times 0.5987 = 35.92$ ℃、温度は $20 + 35.92 = 55.92$ ℃。表と同じ数が、1 回の計算で出てきました。

❸ なぜ、少しずれるのか

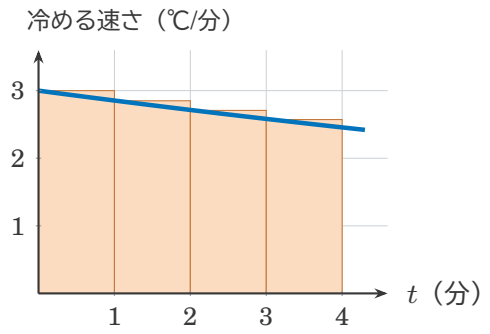
表の 10 分後は 55.92℃、ほんとうは 56.39℃でした。オイラー法の温度は、ほんとうより 0.47℃低くなっています。なぜでしょう。2 通りの見方で考えます。

見方 1：グラフの曲がり方

図 1 の青い線は、時間がたつにつれて傾きがゆるやかになっていきます。下へ下がり方が、だんだん小さくなるからです。このように曲がっている線では、接線は線より下にあります。オイラー法の 1 歩は接線の上を進むので、1 歩ごとに、ほんとうの線より少し下に着いてしまいます。

見方 2：冷める速さのグラフの面積

冷める速さ（下がる速さの大きさ）を、たて軸にとったグラフで考えます。5-9 で学んだように、速さのグラフの面積は「変わった量」です。ここでは、下がった温度です。



青い線が、ほんとうの冷める速さ。1 分のあいだにも、少しずつ小さくなっていきます。オレンジの長方形は、オイラー法が使った速さ。どの 1 分も、**はじめ**の速さのまま 1 分間冷めるとしています。長方形の上のはしは、青い線より少し上に出ます。

はじめの 1 分で、数でくらべます。ほんとうの温度は、1 分で 2.93℃下がります（$80 - 77.07 = 2.93$）。オイラー法は、はじめの速さ 3℃/分のまま 1 分進めたので、3℃下げました。下げすぎた分は $3 - 2.93 = 0.07$℃で、長方形が青い線の上に出た部分の面積です。この下げすぎが、1 歩ごとに少しずつたまって、10 分で 0.47℃のずれになりました。

④ 表計算で：Δt を 1 つのセルに

表計算で、Δt を自由に変えられる表を作ります。Δt の値を 1 つのセル（D2）に入れておき、式からはその番地を使います。

	A	B	C	D
1	t〔分〕	T〔℃〕	変わる速さ	Δt
2	0	80	-3	0.5
3	0.5	78.5	-2.925	
4	1	77.0375	-2.8519	
5	1.5	75.6116	-2.7806	
⋮	⋮	⋮	⋮	
22	10	56.1613	-1.8081	

表 2　D2 に $\Delta t = 0.5$ を入れた表（数は小数第 4 位まで）。$\Delta t = 0.5$ なら 20 歩で 10 分。

入れる式は、次の 3 つです。どれも、1 つ上の行（今）から、その行（次）を作ります。

1. C2 に `=-0.05*(B2-20)`　ルールの右辺。今の温度 B2 から、今の変わる速さを出す。
2. B3 に `=B2+C2*$D$2`　オイラー法の 1 行。今の温度＋今の速さ× Δt。
3. A3 に `=A2+$D$2`　時刻を Δt だけ進める。

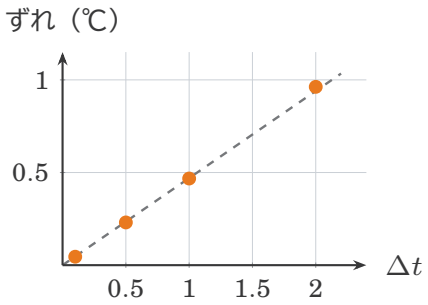
C2 を C3 から下へ、B3 と A3 を B4・A4 から下へコピーします。D2 に $ をつけるのは、コピーしても Δt のセルを指したままにするためです（2-18）。$ がないと、1 行下では D3 を指してしまいます。D3 は空なので 0 とみなされ、温度がまったく変わらない表になります。

D2 の数を変えるだけで、表全体が新しい Δt で計算しなおされます。これが、Δt を 1 つのセルに置くよさです。表ができたら、A 列と B 列を選んで「散布図」のグラフを作ると、⑤の図のように、時刻と温度のグラフが見られます。

5 Δt を小さくすると、ずれも小さくなる

D2 の Δt を、5・2・1・0.5・0.1・0.01 に変えて、10 分後の温度をくらべます。ほんとうの値は 56.39℃です（5-18）。

Δt〔分〕	歩数	10 分後〔℃〕	ずれ
5	2	53.75	2.64
2	5	55.43	0.96
1	10	55.92	0.47
0.5	20	56.16	0.23
0.1	100	56.35	0.05
0.01	1000	56.387	0.005



表とグラフから、次のことがわかります。

- Δt を半分にすると（2 → 1 → 0.5）、ずれもほぼ半分になる（0.96、0.47、0.23）。
- 点は、原点を通る直線（点線）にほぼのる。ずれは Δt に比例する（2-15）。

5-8 の落ちるボールでも、ずれは Δt に比例しました。オイラー法では、いつもこうなります。わけは、③の見方 2 の図にあります。下げすぎた 1 つの部分（長方形が線の上に出た部分）は、横が Δt、たても Δt に比例する小さな三角形に近い形なので、面積はおよそ $\Delta t \times \Delta t$ に比例します。Δt を半分にすると、1 つの部分の面積は $\frac{1}{4}$ になりますが、歩数は 2 倍になります。合計は $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ で、半分になるのです。

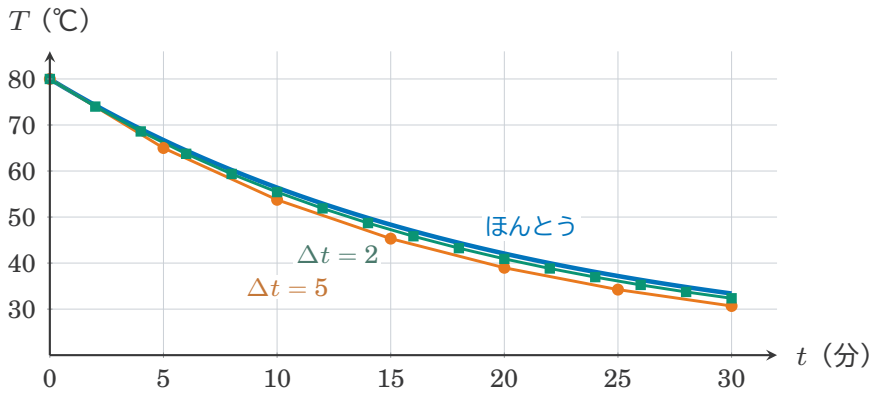


図 2　$\Delta t = 5$ 分（オレンジ）と $\Delta t = 2$ 分（緑）の結果を、ほんとうの温度（青）とくらべた。Δt が小さいほど、青い線に近い。

Δt を小さくすればするほど、答えは正確になります。そのかわり、計算の回数（歩数）がふえます。ずれを $\frac{1}{10}$ にしたければ、歩数を 10 倍にすればよいのです。Δt を半分にするとずれもほぼ半分になる方法を、**1 次の方法**といいます。

？はてな？の答え：10 分後のお湯は、約 **56.4 ℃**です。Δt を小さくしていくと、56.16、56.35、56.387…と、56.39 ℃に近づいていきます。式の答え（5-18）を知らなくても、表計算だけで、ここまで正確に求められました。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

初期値問題 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y)$，$y(t_0) = y_0$ に対し，刻み幅を h として $t_n = t_0 + nh$ における近似値 y_n を

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

により順に定める方法をオイラー法という。オイラー法の大域誤差は $O(h)$ であり，1 次の方法である。

訳　「初期値問題」は、ルールとはじめの値の組。「刻み幅 h」は、この章の Δt。$f(t, y)$ は「右辺は時刻 t と今の値 y で決まる」という書き方。「大域誤差」は、何歩も進めたあとのずれ。$O(h)$（オー・エイチ）は「ずれが h に比例するくらいの大きさ」という意味で、⑤の「Δt を半分にするとずれも半分」のこと。

⑥ Δt を大きくしすぎると、ふらふらする

では、計算を楽にしようとして、Δt を大きくするとどうなるでしょう。$\Delta t = 30$ 分にしてみます。

$$T_1 = 80 + (-0.05 \times (80 - 20)) \times 30 = 80 + (-3) \times 30 = 80 - 90 = -10$$

30 分後のお湯が -10 ℃になりました。20 ℃の部屋で、お湯が部屋より冷たくなることはありません。この答えは、まちがいです。

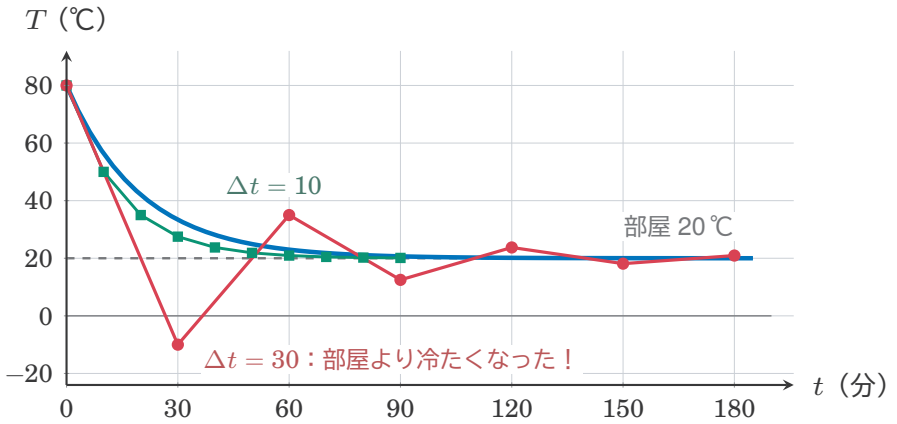


図 3 $\Delta t = 30$ 分（赤）では、部屋の温度の上と下を、ふらふら行き来する。$\Delta t = 10$ 分（緑）は、ずれは大きいが、ふらふらはしない。

$\Delta t = 30$ では、はじめの冷める速さ 3 ℃/分のまま、30 分も進めてしまいました。ほんとうは、30 分のあいだに差はどんどん小さくなり、冷める速さもおそくなります。それを無視して 90 ℃も下げたので、部屋の温度を通りこしたのです。

②と同じように差で見ると、1 歩ごとに差は $(1 - 0.05\,\Delta t)$ 倍になります。$\Delta t = 30$ なら $1 - 1.5 = -0.5$ 倍です。差の向き（＋と－）が毎回入れかわるので、ふらふらします。$\Delta t = 50$ なら -1.5 倍で、ふらふらしながら差が大きくなり、計算がこわれます。

> **せいかくに言うと**
> このルールでオイラー法がふらふらしないのは、$1-0.05\,\Delta t$ が 0 以上のとき、つまり $\Delta t \leqq 20$ 分のときです。こわれない（差が大きくならない）のは、$-1 < 1-0.05\,\Delta t$ のとき、つまり $\Delta t < 40$ 分のときです。数値計算がこわれることを、**数値の不安定**といいます。

Δt は、ようすが大きく変わるのにかかる時間よりも、ずっと短くしなければいけません。このお湯では、その目安は $1 \div 0.05 = 20$ 分です（6-4 で「時定数」という名前で学びます）。$\Delta t = 1$ 分なら、その $\frac{1}{20}$ なので安心です。

7 プログラムで、何万回でも

Δt を 0.001 分にすると、10 分まで 1 万歩です。表計算でも 1 万行コピーすればできますが、プログラム（2-19）なら数行で書けます。$\Delta t = 0.1$ 分（100 歩）で書いてみます。

Python

```
T = 80.0          # はじめの温度（℃）
t = 0.0           # 時刻（分）
dt = 0.1          # Δ t（分）
for i in range(100):                    # 100 回くり返す
    T = T + (-0.05 * (T - 20)) * dt     # オイラー法の 1 行
    t = t + dt
print(t, T)
```

実行結果

```
9.99999999999998 56.34622618944369
```

5 行めが、オイラー法の 1 行です。(-0.05 * (T - 20)) がルールの右辺（今の変わる速さ）、* dt が「× Δt」です。T = の右側では今の温度を使い、計算が終わってから T を次の温度に入れかえます（2-19 の代入）。

dt = 0.001 と range(10000) に変えると、次のようになります。

実行結果

```
9.999999999999897 56.391384672442726
```

ほんとうの 56.391840…と、小数第 3 位まで合いました。

2 種類のずれ

この結果には、2 種類のずれが見えています。

- **温度のずれ（56.346 と 56.392）** Δt のあいだ速さを一定とみなしたことによるずれです。Δt を小さくすると小さくなります。これを**打ち切りのずれ**（打ち切り誤差）といいます。
- **時刻のずれ（10 ではなく 9.99999999999998）** コンピュータが 0.1 をぴったり覚えられないこと（2-19）によるずれです。これを**丸めのずれ**（丸め誤差）といいます。1 回ごとにはとても小さく、ふつうは問題になりません。

数値計算のずれのほとんどは、打ち切りのずれです。Δt を小さくすると打ち切りのずれはへりますが、歩数がふえて丸めのずれが少しずつたまります。ふつうの計算では、打ち切りのずれのほうがずっと大きいので、まず Δt を小さくすることを考えます。

8 電気の回路：コンデンサーの充電

オイラー法は、温度だけでなく、電気の回路にも使えます。電池・抵抗・コンデンサーを 1 列につなぎ、スイッチを入れた瞬間からの、コンデンサーの電圧の変わり方を計算します（5-14 の例題と同じ回路です）。

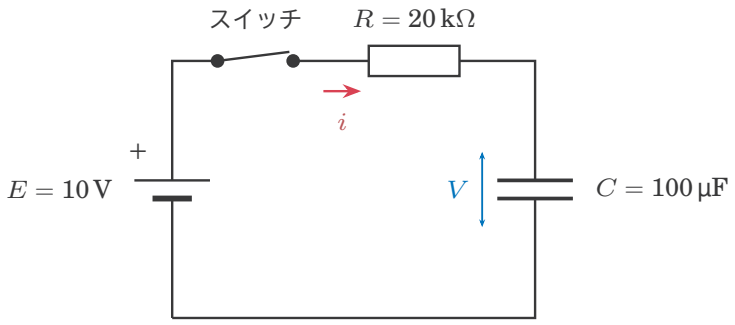


図 4 電池・抵抗・コンデンサーを 1 列につないだ回路（RC 回路）。i は流れる電流、V はコンデンサーの電圧。

コンデンサーは、電気をためる部品です（カメラのフラッシュは、コンデンサーにためた電気を一気に流して光ります）。スイッチを入れると、電池から抵

抗を通って電流 i が流れ、コンデンサーに電気がたまっていきます。たまるにつれて、コンデンサーの電圧 V が上がります。

ルールを、1 行ずつ組み立てます。使うきまりは、中学校の理科のオームの法則と、6-1 のコンデンサーのきまりです。

1. 1 列につないだ回路では、電池の電圧 E を、抵抗とコンデンサーで分け合います。コンデンサーが V を受けもつので、抵抗にかかる電圧は $E-V$ です。
2. オームの法則（電圧＝抵抗×電流）から、抵抗を流れる電流は $i=\dfrac{E-V}{R}$。
3. コンデンサーのきまり：たまった電気の量 q〔C〕は電圧に比例し、$q=CV$。C は静電容量〔F〕です。
4. たまった電気の量の変わる速さが、流れこむ電流です：$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=i$（電流は「1 秒あたりに流れる電気の量」だから）。
5. $q=CV$ で C は変わらないので、$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$（定数倍は前に出せる。5-4）。②・④とあわせて、

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{E-V}{R}\qquad\text{両辺を }C\text{ でわって}\qquad\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{E-V}{RC}$$

「電圧の変わる速さは、あとどれだけたまれるか（$E-V$）に比例する」というルールです。

RC を計算する　単位の接頭語は、k が 1000 倍、μ（マイクロ）が $\frac{1}{1\,000\,000}$ 倍です（第 5 巻の巻末）。

$$RC=(20\times1000)\,\Omega\times\frac{100}{1\,000\,000}\,\mathrm{F}=20\,000\times0.0001=2\,\mathrm{s}$$

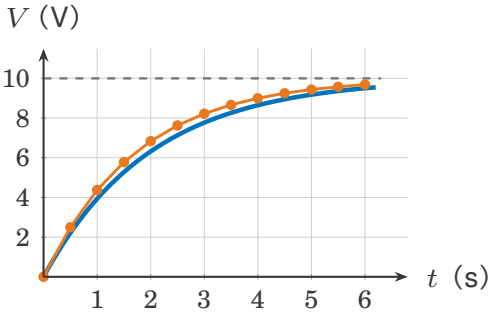
$\Omega\times\mathrm{F}$ が s（秒）になるのは、$\Omega=\mathrm{V/A}$、$\mathrm{F}=\mathrm{C/V}$（$q=CV$ から）、$\mathrm{C}=\mathrm{A\cdot s}$（電流×時間）なので、$\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\times\dfrac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}}=\mathrm{s}$ となるからです。だから、ルールは

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{10-V}{2}\qquad(V\text{ は電圧〔V〕、}t\text{ は時刻〔s〕})$$

です。はじめ（スイッチを入れた瞬間）は、コンデンサーに電気がないので $V_0=0$ です。

	A	B	C
1	t〔s〕	V〔V〕	変わる速さ
2	0	0	5
3	0.5	2.5	3.75
4	1	4.375	2.8125
5	1.5	5.7813	2.1094
6	2	6.8359	1.5820
⋮	⋮	⋮	⋮
14	6	9.6832	0.1584

$\Delta t = 0.5$ s。C2 は =(10-B2)/2



オレンジの点がオイラー法、青い線が 5-14 の式 $V = 10\,(1 - e^{-t/2})$ です。2 秒後の値は、オイラー法で 6.84 V、式で $10 \times (1 - 0.368) = 6.32$ V。今度は、オイラー法のほうが大きくなりました。電圧のふえる速さは時間とともに小さくなるのに、はじめの大きい速さのまま 0.5 秒進めたからです（③の見方 2 と同じ理由。下げすぎの代わりに、上げすぎになる）。$\Delta t = 0.1$ s にすると、2 秒後は 6.42 V になり、6.32 V に近づきます。

ルールの形を、冷めるお湯とならべてみましょう。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{20 - T}{20}, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{10 - V}{2}$$

お湯のルール $-0.05\,(T - 20)$ は、$\dfrac{20 - T}{20}$ と書きなおせます（$0.05 = \frac{1}{20}$ で、$-(T - 20) = 20 - T$）。どちらも「目標の値（20 ℃・10 V）との差に比例して、目標に近づく」形です。温度と電気という、まったくちがう物なのに、ルールの形は同じです。6-4 では、この形を式で解きます。

もっと知りたい ★★

電気をためたあとで：放電も同じ方法で

10 V までたまったコンデンサーを、電池を外して抵抗だけにつなぐと、電気が流れ出て電圧が下がります（放電）。6-1 で読んだように、ルールは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{RC} = -\dfrac{V}{2}$ です。$\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$ で進めると、

$$10 + \left(-\frac{10}{2}\right) \times 0.5 = 7.5 \qquad \text{0.5 秒後}$$

$$7.5 + \left(-\frac{7.5}{2}\right) \times 0.5 = 5.625 \qquad \text{1 秒後}$$

1 歩ごとに $1 - 0.5 \div 2 = 0.75$ 倍になるので、2 秒後（4 歩）は $10 \times 0.75^4 = 3.16\,\mathrm{V}$ です。ほんとうの値は $10e^{-1} = 3.68\,\mathrm{V}$ で（6-4 で式を求めます）、オイラー法は少し下げすぎています。冷めるお湯と同じ理由です。

9 2 回微分の式は、2 つの列で：ばね

次は、ばねにつけたおもりの動きです。なめらかな床の上で、質量 $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ のおもりを、ばね定数 $k = 8\,\mathrm{N/m}$ のばねにつけます。つり合いの位置から 0.1 m 引いて、静かに手をはなします。

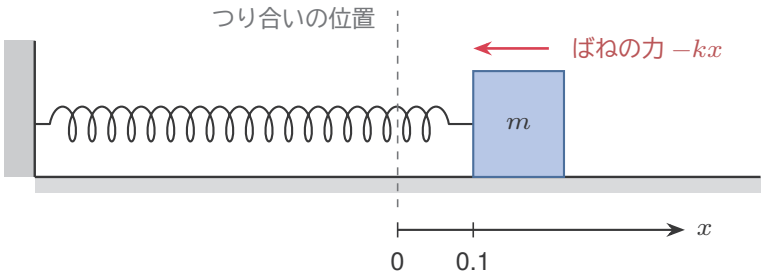


図 5　ばねとおもり。おもりが右（$x > 0$）にあると、ばねは左向きに引きもどす。

6-1 で読んだように、運動のルールは $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$ です。両辺を m でわると、加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ は

$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{8}{0.5}x = -16x$$

です（5-15 で $\omega^2 = 16$、$\omega = 4$、周期約 1.57 s と求めたばね）。

ここで困ったことがあります。オイラー法で位置 x を進めるには、「位置の今の変わる速さ」が必要です。でも、このルールが教えてくれるのは加速度（2 回微分）だけです。

そこで、5-13・5-15 と同じように、**位置と速度の 2 つの列**を使います。ルールを、1 回微分の式 2 つに分けるのです。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad \text{（位置の変わる速さは速度。5-5）}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -16x \qquad \text{（速度の変わる速さは加速度。ルール）}$$

x の列は「今の速度」で進め、v の列は「今の加速度」で進めます。はじめの値も 2 つ必要です。はじめの位置 $x_0 = 0.1$ と、はじめの速度 $v_0 = 0$（静かに手をはなした）です。2 回微分の式には、はじめの状態が 2 つ要る（5-18）ことが、ここでは「2 つの列のはじめの値」になって表れています。

ふつうのオイラー法で進める

まず、どちらの列も「今の値」だけで進めてみます。列は t | x | v | a の順、Δt は E2 に置きます（第 6 巻では、ばねの表をいつもこの型で作ります）。

	A	B	C	D	E
1	t〔s〕	x〔m〕	v〔m/s〕	a〔m/s^2〕	Δt
2	0	0.1	0	-1.6	0.02
3	0.02	0.1	-0.032	-1.6	
4	0.04	0.09936	-0.064	-1.5898	
5	0.06	0.09808	-0.0958	-1.5693	

表 3　D2 は `=-16*B2`、C3 は `=C2+D2*$E$2`、B3 は `=B2+C2*$E$2`（今の速度 C2 で位置を進める）。

これを 5 秒まで続けたのが、次の図のオレンジの線です。

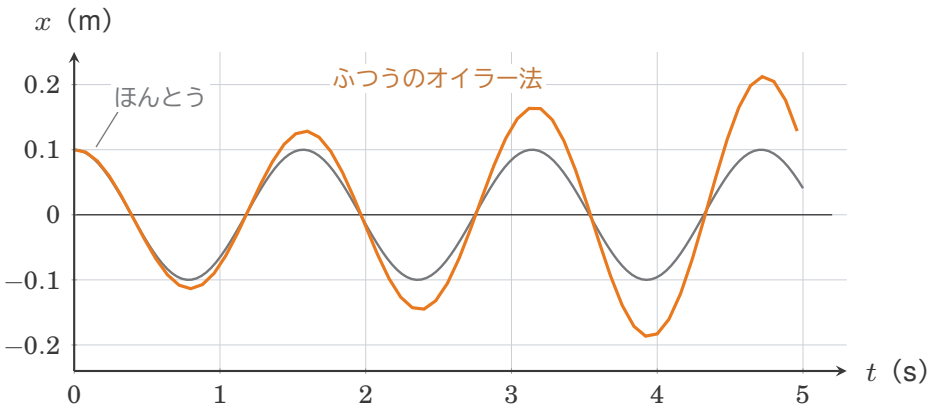


図 6　$\Delta t = 0.02$ s のふつうのオイラー法（オレンジ）。灰色の線は、5-18 の式の答え $x = 0.1\cos 4t$。山の高さが、1 回ごとに大きくなっていく。

ゆれの山が、0.1、0.129、0.165、0.212 m と、1 周ごとに約 1.29 倍に大きくなっていきます。でも、床になめらかで、空気の抵抗もないばねなら、ゆれはずっと 0.1 m のままのはずです。ゆれが勝手に大きくなるのは、計算のずれです。

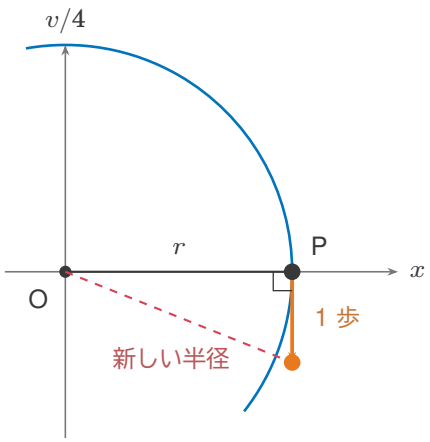
10 なぜゆれがふくらむのか：円で見る

わけを、4-8・5-15 の「円運動の影」で考えます。ほんとうの動きは $x = 0.1\cos 4t$ です。速度を 4 でわった $\dfrac{v}{4}$ は、$\dfrac{v}{4} = -0.1\sin 4t$ です

($v = \dot{x} = -0.4 \sin 4t$。5-15)。そこで、横に x、たてに $\frac{v}{4}$ をとった点を考えると、

$$x^2 + \left(\frac{v}{4}\right)^2 = 0.1^2 \cos^2 4t + 0.1^2 \sin^2 4t = 0.1^2$$

で（4-8 の $\sin^2 + \cos^2 = 1$）、点は半径 0.1 の円の上を回ります。ゆれの山の高さは、この円の半径です。



はしの点 P で手をはなした所から、1 歩だけ進めます。ふつうのオイラー法の 1 歩は、円の接線の向き（半径に垂直）にまっすぐ進みます（5-15 ① の「円の上を回る点の速度は、半径に垂直」と同じ）。接線は円の外側へ出ていくので、1 歩進むたびに、点は円の少し外に出てしまいます。（図は、わかりやすいように 1 歩を大きくかいています。）

数で確かめます。$\Delta t = 0.02$ の 1 歩めで、点は $(0.1,\ 0)$ から $(0.1,\ -0.008)$ へ動きます（表の 3 行め：$x = 0.1$、$\frac{v}{4} = \frac{-0.032}{4} = -0.008$）。真下に動いたので、直角三角形ができます。新しい半径は、三平方の定理（4-4）で、

$$\sqrt{0.1^2 + 0.008^2} = \sqrt{0.010064} = 0.10032$$

1 歩で、半径が 1.0032 倍になりました。どの 1 歩でも同じ形の直角三角形ができるので、毎回 1.0032 倍です。1 周は $1.571 \div 0.02 \approx 79$ 歩なので、1 周で $1.0032^{79} \approx 1.29$ 倍。表計算で見た 1.29 倍と、ぴったり合いました。

もっと知りたい ★★★

1 歩で何倍になるかを、文字で

半径を r、1 歩の長さを s とすると、新しい半径は $\sqrt{r^2+s^2}$ です。1 歩の長さは、円の上を回る点の速さ（半径× ω。4-8 の $v=r\omega$）に Δt をかけた $s=r\omega\,\Delta t$ です。だから、

$$\sqrt{r^2+(r\omega\,\Delta t)^2}=r\sqrt{1+(\omega\,\Delta t)^2}$$

で、1 歩ごとに $\sqrt{1+(\omega\,\Delta t)^2}$ 倍にふくらみます。$\omega=4$、$\Delta t=0.02$ なら $\omega\,\Delta t=0.08$、$\sqrt{1.0064}=1.0032$ です。Δt を小さくすれば 1 よりわずかに大きいだけになりますが、1 より大きいことは変わらないので、長い時間計算すると、いつかはふくらみが目立ってきます。

11 速度を先に進めるオイラー法

5-15 でばねを動かしたときは、順番を少し変えていました。**先に速度を新しくし、その新しい速度で位置を進める**のです。表計算では、B3 の式の C2 を C3 にかえるだけです。

	A	B	C	D	E
1	t〔s〕	x〔m〕	v〔m/s〕	a〔m/s^2〕	Δt
2	0	0.1	0	−1.6	0.02
3	0.02	0.09936	−0.032	−1.5898	
4	0.04	0.09808	−0.0638	−1.5693	
5	0.06	0.09618	−0.0952	−1.5389	

表 4　C3 は `=C2+D2*$E$2`（同じ）、B3 は `=B2+C3*$E$2`（新しい速度 C3 で位置を進める）。

1 歩の手順は、次の 3 つです。

1. 今の位置から、今の加速度を出す：$a=-16x$
2. 速度を進める：新しい v ＝今の v ＋ $a\times\Delta t$
3. 位置を進める：新しい x ＝今の x ＋**新しい** $v\times\Delta t$

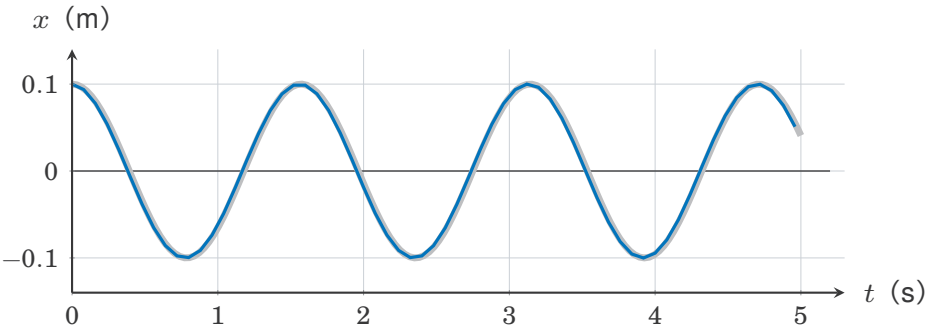
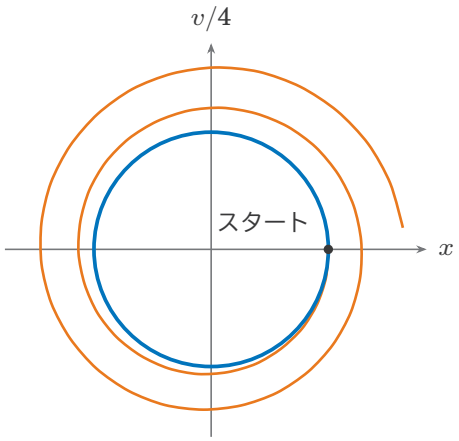


図 7 速度を先に進めるオイラー法（青、$\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$）。太い灰色の線（ほんとう）とほとんど重なり、山の高さは 5 秒たっても 0.1 m のまま。

山の高さは、何周しても 0.1 m のままです。同じ Δt なのに、順番を変えただけで、ゆれがふくらまなくなりました。この方法を、この本では**速度を先に進めるオイラー法**とよびます。第 6 巻のばね・ダンパーの表計算（6-6・6-7・6-13・6-14）は、いつもこの方法で計算します。

なぜうまくいくのでしょう。⑩の円の図で考えると、位置を進めるときに「新しい速度」を使うので、1 歩の向きが、接線から少しだけ円の内側にかたむきます。円の外へ出ようとする分と、内側にかたむく分が、1 周のあいだに打ち消し合うのです。



$\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$ で 2 周（約 3.1 秒）計算したときの、点 $\left(x,\ \frac{v}{4}\right)$ の動き。オレンジはふつうのオイラー法で、うずまきのように外へ広がります。青は速度を先に進めるオイラー法で、半径 0.1 の円の上をほぼ回り続けます。

> **せいかくに言うと**
>
> 速度を先に進めるオイラー法は、大学の本では半陰的（はんいんてき）オイラー法、またはシンプレクティック・オイラー法とよばれます。1 歩のあいだに、点 $\left(x,\ \frac{v}{4}\right)$ が円から少し出たり入ったりすることはありますが（$\Delta t = 0.02$ では半径が 0.098〜0.102 のあいだ）、長い時間たってもふくらんだり、しぼんだりしません。ただし、ゆれの周期は少しずれるので、Δt は周期よりずっと短く（周期の数十分の 1 ほどに）します。

プログラムで、ばねを動かす

⑦と同じように、プログラムでも書けます。くり返す中の 3 行が、⑪の手順①②③です。

Python

```
x = 0.1             # 位置（m）
v = 0.0             # 速度（m/s）
dt = 0.02           # Δ t（s）
for i in range(1, 251):          # 250 歩で 5 秒
    a = -16 * x                  # ① 今の加速度
    v = v + a * dt               # ② 速度を先に進める
    x = x + v * dt               # ③ 新しい速度で位置を進める
    if i % 50 == 0:              # 50 歩（1 秒）ごとに表示
        print(round(i * dt, 2), round(x, 4))
```

実行結果

```
1.0 -0.0623
2.0 -0.0187
3.0 0.0867
4.0 -0.0945
5.0 0.0367
```

`range(1, 251)` は、`i` を 1 から 250 まで変えてくり返す書き方です。`i % 50` は「`i` を 50 でわったあまり」で、それが 0 のとき（50 歩ごと）だけ表示します。式の答え $0.1\cos 4t$ は、1 秒ごとに -0.0654、-0.0146、0.0844、-0.0958、0.0408 なので、小数第 2 位くらいまで合っています。②と③の行を入れかえて、位置を先に（古い速度で）進めると、ふつうのオイラー法になり、ゆれがふくらんでいきます。

もっと知りたい ★★★★

ルンゲ・クッタ法

オイラー法は、区間のはじめの速さだけを使うので、ずれが Δt に比例しました。そこで、1 歩進む前に、区間のあいだの変わる速さを何回か見積もって、うまく平均してから進む方法があります。もっともよく使われるのが、次の**ルンゲ・クッタ法**（4 次）です。区切る時間を h、変わる速さを表す式を $f(y)$ とします（物理シリーズ『力学』力-2 と同じ手順です）。

1. $k_1 = f(y)$：はじめの変わる速さ
2. $k_2 = f\left(y + k_1\dfrac{h}{2}\right)$：$k_1$ で半分進んだ所の変わる速さ
3. $k_3 = f\left(y + k_2\dfrac{h}{2}\right)$：$k_2$ で半分進んだ所の変わる速さ（見積もりのやり直し）
4. $k_4 = f(y + k_3 h)$：k_3 で 1 歩進んだ所の変わる速さ
5. 次の値 $= y + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\,h$

⑤の平均で、まん中の k_2、k_3 を 2 倍に重くしているのは、区間のまん中の値のほうが、区間全体の平均に近いからです（台形より、まん中の高さで長方形をかくほうが、面積が正確になるのと同じ考え方）。重さの合計が $1+2+2+1=6$ なので、6 でわって平均にします。

冷めるお湯（$f(T) = -0.05\,(T-20)$、$h = 1$ 分）で、はじめの 1 歩を計算します。

$k_1 = f(80) = -3$	はじめの速さ
$k_2 = f(78.5) = -2.925$	$80 + k_1 \times 0.5 = 78.5$ の所
$k_3 = f(78.5375) = -2.926875$	$80 + k_2 \times 0.5 = 78.5375$ の所
$k_4 = f(77.073125) = -2.853656$	$80 + k_3 \times 1 = 77.073125$ の所
$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 = -17.55741$	重みをつけてたす
$-17.55741 \div 6 = -2.92623$	6 でわる（重みつきの平均）
$80 + (-2.92623) \times 1 = 77.07377$	次の温度

ほんとうの 1 分後は 77.07377 ℃（5-18 の式。$20 + 60e^{-0.05}$）で、小数第 5 位まで合っています。10 分後まで $h = 1$ で進めると 56.391841 ℃で、ほんとうとのずれはわずか 0.000001 ℃です。オイラー法（$\Delta t = 1$）のずれ 0.47 ℃とくらべると、約 47 万分の 1 です。h を半分にすると、ずれは $\frac{1}{16}$ になります（$\frac{1}{2}$ を 4 回かけた数。「4 次」の名前のわけ）。ドイツのルンゲ（1895 年）とクッタ（1901 年）が考えた方法で、今も、天気予報やロケットの計算、回路のシミュレーターなどで広く使われています。

たいせつ

オイラー法	$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\,\Delta t$
	次の値 ＝ 今の値 ＋ 今の変わる速さ × Δt
ずれ	**Δt を半分にすると、ずれもほぼ半分（1 次の方法）**
Δt の大きさ	**ようすが変わる時間よりずっと短く**
2 回微分の式	**位置と速度の 2 つの列で。ばねは速度を先に**

この章で出てきたことば

オイラー法　「次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt」をくり返して、微分方程式の答えを数で求める方法。

数値計算　式で解かずに、数の計算をくり返して答えを求めること。

刻み幅　1 歩で進める時間 Δt。専門書では h と書くことが多い。

打ち切りのずれ　Δt のあいだ変わる速さを一定とみなしたことによるずれ。Δt を小さくするとへる。

丸めのずれ　コンピュータが数をぴったり覚えられないことによるずれ（2-19）。

速度を先に進めるオイラー法　ばねなどで、先に速度を新しくし、その新しい速度で位置を進める方法。ゆれがふくらまない。

例題でたしかめよう

例題 1　オイラー法の 1 歩をくり返す

部屋の温度が 20 ℃で、お茶の温度 T〔℃〕が $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(T - 20)$（$t$ は分）にしたがって冷めます。はじめは 60 ℃です。$\Delta t = 0.5$ 分のオイラー法で、1 分後の温度を求めましょう。

考え方　①の手順を 2 回くり返す。毎回「右辺を計算する（今の速さ）」→「今の速さ× 0.5 をたす」。$\Delta t = 0.5$ なので、1 分は 2 歩。

式　0 分の速さ：$-0.1 \times (60 - 20) = -0.1 \times 40 = -4$

0.5 分後：$60 + (-4) \times 0.5 = 60 - 2 = 58$

0.5 分の速さ：$-0.1 \times (58 - 20) = -0.1 \times 38 = -3.8$

1 分後：$58 + (-3.8) \times 0.5 = 58 - 1.9 = 56.1$

答え　約 56.1 ℃

例題 2　Δt を変えて、ずれをくらべる

$\dfrac{dT}{dt} = -0.05\,(T-20)$、はじめ 80 ℃のお湯の 4 分後の温度を、(1) $\Delta t = 2$ 分、(2) $\Delta t = 1$ 分のオイラー法で求め、ほんとうの値 $20 + 60e^{-0.2}$ とのずれをくらべましょう（$e^{-0.2} = 0.8187$）。

考え方　(1) は 2 歩、(2) は 4 歩。どちらも①の手順。ずれ＝ほんとう－オイラー法。

式　(1) $80 + (-3) \times 2 = 74$。$74 + (-0.05 \times 54) \times 2 = 74 - 5.4 = 68.6$

(2) $80 \to 77 \to 74.15 \to 71.44 \to 68.87$（②の表と同じ）

ほんとう：$20 + 60 \times 0.8187 = 20 + 49.12 = 69.12$

ずれ：(1) $69.12 - 68.6 = 0.52$、(2) $69.12 - 68.87 = 0.25$

答え　(1) 68.6 ℃、ずれ 0.52 ℃

(2) 68.87 ℃、ずれ 0.25 ℃（Δt を半分にすると、ずれもほぼ半分）

じぶんでとこう 1

部屋の温度が 25 ℃で、スープの温度 T〔℃〕が $\dfrac{dT}{dt} = -0.1\,(T-25)$（$t$ は分）にしたがって冷めます。はじめは 90 ℃です。$\Delta t = 0.5$ 分のオイラー法で、1 分後の温度を求めましょう。

じぶんでとこう 2

$\dfrac{dT}{dt} = -0.1\,(T-20)$、はじめ 60 ℃のお湯の 2 分後の温度を、(1) $\Delta t = 2$ 分、(2) $\Delta t = 1$ 分のオイラー法で求め、ほんとうの値 $20 + 40e^{-0.2}$ とのずれをくらべましょう（$e^{-0.2} = 0.8187$）。

例題 3　表計算の式を書く

ルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.08\,(T-25)$ を、④と同じ表（A 列 t、B 列 T、C 列 変わる速さ、D2 に Δt）で解きます。C2、B3、A3 に入れる式を書きましょう。また、B3 の式で D2 に $ をつけるのはなぜですか。

考え方　C2 はルールの右辺を、今の温度 B2 で計算する。B3 は「今の温度＋今の速さ× Δt」。A3 は時刻を Δt 進める。

式　C2：`=-0.08*(B2-25)`

B3：`=B2+C2*$D$2`

A3：`=A2+$D$2`

答え　上の 3 つ。$ がないと、下へコピーしたとき D3、D4…（空のセル）を指してしまい、Δt が 0 になるから。

例題 4　コンデンサーの充電

電池 $E = 10\,\mathrm{V}$、抵抗 $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、コンデンサー $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ の回路（⑧）で、ルールは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E-V}{RC}$ です。はじめ $V = 0$ のとき、$\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$ のオイラー法で、1 秒後の電圧を求めましょう。また、5-14 の式 $V = 10\,(1-e^{-t/2})$ の値とくらべましょう（$e^{-0.5} = 0.607$）。

考え方　まず RC を秒で出す（⑧）。あとは①の手順を 2 回。

式　$RC = 20\,000\,\Omega \times 0.0001\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$。ルールは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10-V}{2}$

0 秒の速さ：$\dfrac{10-0}{2} = 5$。0.5 秒後：$0 + 5 \times 0.5 = 2.5$

0.5 秒の速さ：$\dfrac{10-2.5}{2} = 3.75$。1 秒後：$2.5 + 3.75 \times 0.5 = 4.375$

式：$10 \times (1-0.607) = 3.93$

答え　約 4.38 V（式では 3.93 V。オイラー法のほうが大きい）

じぶんでとこう 3

ルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.02\,(T - 15)$ を、④と同じ表で解きます。C2、B3、A3 に入れる式を書きましょう。

じぶんでとこう 4

電池 $E = 6\,\mathrm{V}$、抵抗 $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$、コンデンサー $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ の回路で、はじめ $V = 0$ のとき、$\Delta t = 0.25\,\mathrm{s}$ のオイラー法で、0.5 秒後の電圧を求めましょう。

例題 5　ばねを 2 つの列で進める

$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$ のばね（⑨）で、はじめ $x = 0.1\,\mathrm{m}$、$v = 0$ です。速度を先に進めるオイラー法（⑪）で、$\Delta t = 0.05\,\mathrm{s}$ として、0.1 秒後の位置と速度を求めましょう。

考え方　加速度は $a = -\dfrac{k}{m}x = -16x$。⑪の①②③の順を 2 回。③では**新しい**速度を使う。

式　1 歩め：$a = -16 \times 0.1 = -1.6$

$v = 0 + (-1.6) \times 0.05 = -0.08$

$x = 0.1 + (-0.08) \times 0.05 = 0.1 - 0.004 = 0.096$

2 歩め：$a = -16 \times 0.096 = -1.536$

$v = -0.08 + (-1.536) \times 0.05 = -0.08 - 0.0768 = -0.1568$

$x = 0.096 + (-0.1568) \times 0.05 = 0.096 - 0.00784 = 0.08816$

答え　位置約 0.0882 m、速度約 −0.157 m/s

例題 6　ふつうのオイラー法のふくらみ

$\omega = 4$（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$）のばねを、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$ として計算します。1 歩で、ゆれの円（⑩）の半径は何倍になりますか。また、1 周（約 79 歩）で何倍になりますか（$1.0032^{79} = 1.29$）。

考え方　⑩のように、1 歩は接線の向きに、半径の $\omega\,\Delta t$ 倍の長さだけ進む。三平方の定理で新しい半径を出す。

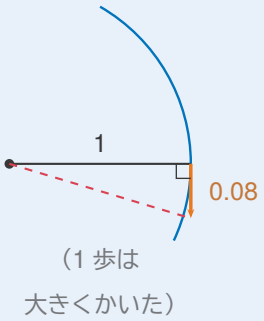
式　$\omega\,\Delta t = 4 \times 0.02 = 0.08$

半径を 1 とすると、1 歩の長さは 0.08

1 歩のあとの半径（三平方の定理）：

$\sqrt{1^2 + 0.08^2} = \sqrt{1.0064} \approx 1.0032$

1 周：$1.0032^{79} \approx 1.29$ 倍



答え　1 歩で約 1.0032 倍、1 周で約 1.3 倍

じぶんでとこう 5

$m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 50\,\mathrm{N/m}$ のばねで、はじめ $x = 0.2\,\mathrm{m}$、$v = 0$ です。速度を先に進めるオイラー法で、$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ として、0.2 秒後の位置と速度を求めましょう。

じぶんでとこう 6

$\omega = 1$ のばね（5-15）を、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.1$ として計算します。1 歩で、ゆれの円の半径は何倍になりますか。1 周（約 63 歩）では何倍ですか（$1.005^{63} = 1.37$）。

例題 7　Δt が大きすぎると

$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$、はじめ 80 ℃のお湯を、$\Delta t = 30$ 分のオイラー法で計算します。30 分後と 60 分後の温度を求めましょう。また、部屋との差は 1 歩ごとに何倍になっていますか。

考え方　①の手順を 2 回。差の倍率は、⑥のように $1 - 0.05\,\Delta t$。

式　30 分後：$80 + (-0.05 \times 60) \times 30 = 80 - 90 = -10$

60 分後：$-10 + (-0.05 \times (-30)) \times 30 = -10 + 45 = 35$

差：$60 \to -30 \to 15$。倍率 $1 - 0.05 \times 30 = -0.5$

答え　30 分後 -10 ℃、60 分後 35 ℃（差は毎回 -0.5 倍で、部屋の温度の上と下をふらふらする。Δt が大きすぎる）

例題 8　プログラムを読む

次のプログラムで表示される数を答えましょう。

Python

```
T = 50.0
dt = 0.5
for i in range(2):
    T = T + (-0.2 * (T - 30)) * dt
print(T)
```

考え方　4 行めはオイラー法の 1 行。ルールは $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.2\,(T - 30)$、$\Delta t = 0.5$。`range(2)` なので 2 歩。

式　1 回め：$50 + (-0.2 \times 20) \times 0.5 = 50 - 2 = 48$

2 回め：$48 + (-0.2 \times 18) \times 0.5 = 48 - 1.8 = 46.2$

答え　46.2

じぶんでとこう 7

$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(T - 20)$、はじめ 60 ℃のお湯を、$\Delta t = 15$ 分のオイラー法で計算します。15 分後と 30 分後の温度と、差の倍率を求めましょう。

じぶんでとこう 8

次のプログラムで表示される数を答えましょう。

Python

```
V = 0.0
dt = 0.5
for i in range(3):
    V = V + (10-V)/2*dt
print(V)
```

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

Δt をかけ忘れる

× $\Delta t = 0.5$ のとき、$80 + (-3) = 77$

○ $\Delta t = 0.5$ のとき、$80 + (-3) \times 0.5 = 78.5$

-3 は「1 分あたり」の変わる速さです。0.5 分で変わる量は、その 0.5 倍です。$\Delta t = 1$ のときは、かけ忘れても答えが変わらないので、気づきにくいまちがいです。

⚠ まちがえやすいところ

次の行の速さを使う

✕　1 分後の温度を、1 分のときの速さ -2.85 で $80+(-2.85)\times 1$

○　1 分後の温度は、0 分のときの速さ -3 で $80+(-3)\times 1=77$

1 分のときの速さは、1 分後の温度がわかってから計算できるものです。

オイラー法では、いつも「今」（1 つ上の行）の速さを使います。

⚠ まちがえやすいところ

Δt を大きくしすぎる

✕　計算を楽にしようと $\Delta t=30$ 分にしたら、お湯が -10 ℃になった

○　Δt は、ようすが変わる時間（このお湯なら 20 分）よりずっと短く

Δt が大きいと、そのあいだに速さが大きく変わるのに、はじめの速さのまま進んでしまいます（⑥）。答えが部屋より冷たくなるなど、ありえない数が出たら、Δt を小さくして計算しなおします。

⚠ まちがえやすいところ

ばねの表で、位置を古い速度で進める

✕　B3 に `=B2+C2*$E$2`（ゆれがふくらむ）

○　B3 に `=B2+C3*$E$2`（新しい速度 C3 で進める）

ふつうのオイラー法では、ばねのゆれが 1 周ごとに大きくなります（⑩）。

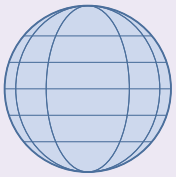
ばねが勝手に大きくゆれだしたら、計算の順番をうたがいましょう。

コラム　オイラーと「目で見ない計算」

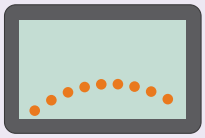
この章の方法に名前を残したオイラー（1707～1783 年）は、スイスに生まれた数学者です。1768 年に出した積分の本の中で、この方法を書きました。オイラーは、30 代で右目の視力を失い、60 歳ごろには左目もほとんど見えなくなりました。それでも、頭の中で長い計算をし、助手に書き取らせて、たくさんの本や論文を残しました。第 5 巻の e や、6-10 の「オイラーの公式」も、オイラーの名前がついています。

物理・工学ではこう使う

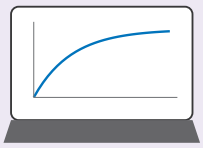
- **天気予報**
  地球のまわりの空気を細かい箱に分け、それぞれの箱の気温・風・水蒸気の量を「次の状態＝今の状態＋変わる速さ× Δt」で数分ごとに進めます。スーパーコンピュータがこれを何百回もくり返して、明日の天気を計算します（6-0）。



- **ゲームの中の物の動き**
  画面を 1 秒に 60 回かきかえるたびに、物の速度と位置を $\Delta t = \frac{1}{60}$ 秒のオイラー法で進めます（5-13 のコラム）。ゆれる物が勝手に大きくゆれださないよう、速度を先に進めるオイラー法がよく使われます。



- **電気回路のシミュレーター**
  電子回路は、作る前にコンピュータの中で動かして確かめます。⑧のような回路のルールを数値計算で解くプログラム（1973 年にアメリカのカリフォルニア大学で生まれた SPICE とその仲間）が、世界中で使われています。



章末問題

基本 ★★

1 $\dfrac{dT}{dt} = -0.04\,(T - 20)$（$t$ は分）、はじめ 70℃のお湯の 3 分後の温度を、$\Delta t = 1$ 分のオイラー法で求めましょう（例題 1）。

2 $\dfrac{dT}{dt} = -0.1\,(T - 15)$、はじめ 75℃のお湯の 2 分後の温度を、(1) $\Delta t = 2$ 分、(2) $\Delta t = 1$ 分のオイラー法で求め、ほんとうの値 $15 + 60e^{-0.2}$ とのずれをくらべましょう（$e^{-0.2} = 0.8187$）（例題 2）。

3 ルール $\dfrac{dy}{dt} = -0.3\,(y - 5)$ を、④と同じ表（A 列 t、B 列 y、C 列 変わる速さ、D2 に Δt）で解きます。C2、B3、A3 に入れる式を書きましょう（例題 3）。

4 電池 $E = 5\,\mathrm{V}$、抵抗 $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$、コンデンサー $C = 200\,\mu\mathrm{F}$ の回路で、はじめ $V = 0$ です。RC を求め、$\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$ のオイラー法で 1 秒後の電圧を求めましょう（例題 4）。

5 $m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 16\,\mathrm{N/m}$ のばねで、はじめ $x = 0.05\,\mathrm{m}$、$v = 0$ です。速度を先に進めるオイラー法で、$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ として 0.2 秒後の位置と速度を求めましょう（例題 5）。

6 次のプログラムで表示される数を答えましょう（例題 8）。

Python

```
T = 40.0
dt = 0.5
for i in range(2):
    T = T + (-0.1 * (T - 20)) * dt
print(T)
```

チャレンジ ★★★

7 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$、はじめ 80 ℃のお湯を、$\Delta t = 60$ 分のオイラー法で計算します。60 分後と 120 分後の温度を求め、差の倍率から、この計算がどうなっていくかを説明しましょう（例題 7）。

8 $\omega = 5$ のばねを、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.04$ として計算します。1 歩で、ゆれの円の半径は何倍になりますか。1 周（約 31 歩）では何倍ですか（$1.0198^{31} = 1.84$）（例題 6）。

9 電池 $E = 10\,\mathrm{V}$、$RC = 2\,\mathrm{s}$ の回路（⑧）で、ルールは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10-V}{2}$、はじめ $V = 0$ です。$\Delta t = 5\,\mathrm{s}$ のオイラー法で、5 秒後と 10 秒後の電圧を求めましょう。また、目標の 10 V との差 $10 - V$ は、1 歩ごとに何倍になっていますか（例題 7）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐「次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt」で、表計算で解ける。 → 69 ページ
- ☐ Δt を小さくすると正確になることを確かめられる。 → 75 ページ
- ☐ ばねの式を、位置と速度の 2 つの列で、正しい順に解ける。 → 82 ページ

ソラ

ルールが教えてくれるのは「今の速さ」だけなのに、くり返すと未来がわかった！　次は、表計算をしなくても、積分するだけで式の答えが出る形を探してみよう。

第 1 部　微分方程式の入口

★★★

6-3 積分するだけで解ける形

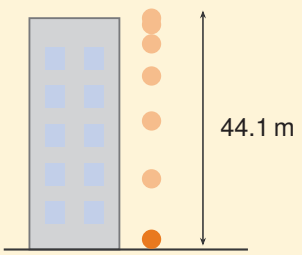
道しるべ　この章の前に 5-11 5-12 5-13 6-1 6-2　この章の先に 6-4 6-11 8-13

この章でできるようになること

- ★★★ 右辺に、求めたい量そのものが入っていないルールを見分けて、積分して解ける。
- ★★★ 時間でない変数（深さ・場所）のルールも、同じように積分して解ける。
- ★★★ 両はしの条件（境界条件）から、積分定数を決められる。

はてな？

高さ 44.1 m のビルの屋上から、ボールを静かにはなします。6-2 の表計算なら、0.1 秒ずつ進めて、地面に着く時刻をさがせます。でも、何百行も計算しなくても、**1 本の式**で「何秒後に、どこにいるか」を求められないでしょうか。



6-2 では、どんなルールでも使えるオイラー法を学びました。でも、オイラー法の答えは数の表で、少しずつずれもあります。この章では、ルールの形によっては、**積分するだけで、ぴったりの式の答えが出せる**ことを学びます。5-11〜5-13 の積分の道具が、そのまま使えます。さらに、変数が時間でないとき（水の深さ、かべの中の場所）や、「はじめ」ではなく「両はし」で条件が決まるときにも広げます。

やってみよう ルールを 2 つの仲間に分けよう

6 つのルールがあります。右辺（＝の右がわ）に何が入っているかを見て、2 つの仲間に分けましょう。

ア
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8$$
落ちるボールの速さ

イ
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05(T-20)$$
冷めるお湯

ウ
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12 - 0.4t$$
水そうの水の量

エ
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0.2N$$
ふえる細菌の数

オ
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -9800$$
水の中の圧力（高さ z）

カ
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0.3$$
ヒーターで温める水

1. 左辺は「何の変わる速さ」かな？　たとえばアは、速さ v の変わる速さ。
2. 右辺に、その「変わる量そのもの」（アなら v）が入っているかどうかを見よう。
3. 「入っていない」仲間と「入っている」仲間に分けよう。

1 つずつ見ます。

- ア：右辺は 9.8 だけ。v は入っていない。　カ：右辺は 0.3 だけ。T は入っていない。
- ウ：右辺は $12 - 0.4t$。時刻 t は入っているが、水の量 V は入っていない。
- オ：右辺は -9800 だけ。圧力 p は入っていない（変わるのは時間ではなく高さ z）。
- イ：右辺に T が入っている。　エ：右辺に N が入っている。

答えは、「入っていない」仲間がア・ウ・オ・カ、「入っている」仲間がイ・エです。この章では、「入っていない」仲間が、積分するだけで解けることを確かめます。「入っている」仲間は、6-4 で解き方を学びます。

1

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

5-11　微分すると f になる関数（原始関数）を求めるのが積分。$\int t^n \,\mathrm{d}t = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C$。$C$ は積分定数。

5-13　C は、はじめの状態（初期条件）で決まる。2 回積分すると C が 2 つ。$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$。

5-9　速さのグラフの面積は、変わった量（たまった量）。

5-18　$\int e^{at} \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a} e^{at} + C$。$e^0 = 1$、$e^{-1} = 0.368$。

6-1　ルール $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cdots$ は「y の変わる速さ」を決める式。答えは関数。

3-6　2 つの式から 2 つの文字を決める（連立方程式）。

数学の道具

1 右辺を見れば、解き方がわかる

右辺に、変わる量そのもの（y）が入っていないルールは、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t) \qquad （右辺は、時刻 t だけの式か、ただの数）$$

の形をしています。「y を微分すると $f(t)$ になる」と言っているので、y は $f(t)$ の原始関数です（5-11）。だから、両辺を t で積分すれば、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t) \quad \Longrightarrow \quad y = \int f(t) \,\mathrm{d}t + C$$

と答えが出ます。積分定数 C は、はじめの状態などの条件で決めます（5-13）。この形を、この本では「**積分するだけで解ける形**」とよびます。

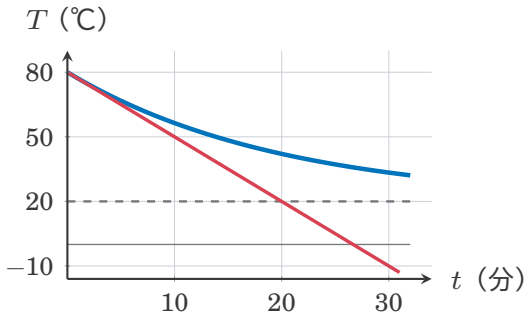
なぜ、右辺に y があるとだめなのか

では、イの $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$ も、両辺を積分すればよいのではないでしょうか。右辺を積分するには、右辺のグラフの面積を求めなければなりません（5-9・5-10）。ところが、右辺の T は、時刻とともに変わっていく「まだわからない関数」です。グラフがわからないものの面積は、求められません。

ためしに、「右辺の T を、はじめの 80 のままにして」積分してみます。右辺は $-0.05 \times (80-20) = -3$ で一定なので、

$$T = 80 - 3t$$

となります。これでは、20 分後に $80-60=20$ ℃、30 分後には $80-90=-10$ ℃になってしまいます。ほんとうは、20 ℃に近づくだけで、20 ℃より下にはなりません（6-2）。



赤い直線が「T を 80 のままにした」答え、青い線がほんとうの温度。冷める速さは T が下がるとおそくなるのに、赤はずっとはじめの速さで下がり続けます。右辺に T が入っているときは、積分だけでは解けないのです。

まとめると、ルールを見たら、まず右辺を見ます。

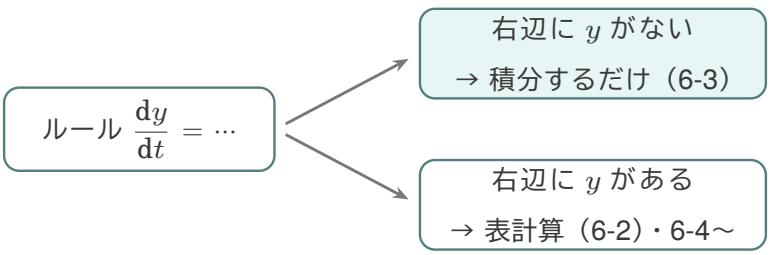


図 1 ルールを見たら、まず右辺を見る。

せいかくに言うと

「右辺に y がない」とは、右辺が、変わる量 y によらず、変数（時刻 t など）だけで決まる、ということです。右辺がただの数のとき（アやカ）も、このなかまです。どんなルールでも、表計算（6-2）なら解けます。積分するだけで解ける形は、表計算を使わずに、ぴったりの式で答えが出せる、とくべつに楽な形です。

2 落ちるボール：5-13 は微分方程式を解いていた

はてな？の答えを出します。ボールの位置を、屋上から下向きに x〔m〕とします（下向きを＋）。空気の抵抗が小さいとき、落ちる物の加速度は $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ で一定です（5-5）。ルールは

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$$

です。右辺に x も $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ も入っていないので、積分するだけで解けます。2 回微分の式なので、2 回積分します（5-13 と同じ手順）。

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8$	速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ で書く（ルール）
$v = 9.8t + C_1$	1 回めの積分
$v = 9.8t$	$t = 0$ で $v = 0$（静かにはなす）。 $C_1 = 0$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 9.8t$	速度は位置の変わる速さ
$x = 4.9t^2 + C_2$	2 回めの積分（$9.8 \times \frac{t^2}{2}$）
$x = 4.9t^2$	$t = 0$ で $x = 0$（屋上）。$C_2 = 0$

地面は $x = 44.1$ なので、$4.9t^2 = 44.1$、$t^2 = 9$、$t = 3\,\mathrm{s}$（$t > 0$）。**3 秒後に地面に着きます**。そのときの速さは $9.8 \times 3 = 29.4\,\mathrm{m/s}$ です。

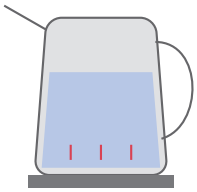
これは、5-13 で求めた $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$（$x_0 = 0$、$v_0 = 0$、$a = 9.8$）と同じです。5-13 で「加速度から位置を 2 回積分した」のは、じつは「微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a$ を解いた」ことだったのです。

表計算とくらべる

6-2 の方法（$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$、5-13 の表と同じく、位置は今の速度で進める）で計算すると、3 秒後の位置は 42.6 m になり、式の 44.1 m より少し小さくなります。式の答えは、ずれがなく、表を何百行も作らなくても、どの時刻の値もすぐに出せます。これが、積分するだけで解ける形のよさです。

③ 熱：ヒーターで温める

電気ケトルで水を温めます。はじめのうちは、水と部屋の温度の差が小さいので、外へ逃げる熱はわずかです。ここでは、**熱がまったく逃げない**として考えます。



1250 W

ヒーターの電力が $P = 1250\,\mathrm{W}$ なら、1 秒あたり 1250 J の熱が水に入ります（1 W は 1 秒あたり 1 J。4-12・5-12）。水 1 L（1000 g）の温度を 1℃上げるには、約 4200 J の熱が要ります（水 1 g を 1℃上げるのに約 4.2 J 要るから）。

この「温度を 1℃（1 K）上げるのに要る熱」を**熱容量**（ねつようりょう）といい、C_{th} と書きます。単位は J/K です。熱容量が大きいほど、温まりにくく、冷めにくい物です。

記号カード 初めて出た章 6-3

C_{th}

読み方 シー・ティーエイチ
意味 熱容量。温度を 1 K（1℃）上げるのに要る熱〔J/K〕。th は thermal（熱の）
英語 heat capacity

記号カード 初めて出た章 6-3

$y(0)$
$y(L)$

読み方 ワイ・ゼロ、ワイ・エル
意味 $x = 0$ と $x = L$ の所での y の値。両はしの値の書き方
英語 boundary values

1 秒に P〔J〕の熱が入り、1 K 上げるのに C_{th}〔J〕要るので、1 秒に上がる温度は $\dfrac{P}{C_{\mathrm{th}}}$〔K/s〕です。ルールは

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{C_{\mathrm{th}}} = \frac{1250}{4200} = 0.2976\cdots \approx 0.298 \qquad (℃/\mathrm{s})$$

です。右辺は一定（ただの数）なので、積分するだけで解けます。はじめ 20 ℃なら、

$$T = 20 + 0.298\,t$$

温度は、傾き約 0.298 の直線で上がっていきます。100 ℃になるのは、80 ℃上がったときです。まるめる前の数でわると、

$$t = 80 \div \frac{1250}{4200} = 80 \times \frac{4200}{1250} = 268.8 \approx 269\,\mathrm{s}$$

つまり $269\,\mathrm{s} \div 60\,\mathrm{s/min} \approx 4.5\,\mathrm{min}$ 後です。実際の電気ケトルでは、ケトル自身も温まり、熱も少し逃げるので、もう少し長くかかります。熱の逃げを入れると、右辺に T が入ってきます（6-4 の電気ポット）。

④ 電気：一定の電流でコンデンサーに電気をためる

6-2 の RC 回路では、たまるにつれて電流が小さくなりました。ここでは、いつも同じ電流 I〔A〕を流しこむ部品（定電流回路。電子回路で作れます）で、コンデンサーに電気をためます。

コンデンサーのきまり $q = CV$ と、「たまった電気の量の変わる速さは、流れこむ電流」（6-2 ⑧）から、

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I$$ たまる速さは電流（一定）

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = I$$ $q = CV$（C は一定）

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{C}$$ 両辺を C でわる

右辺は一定なので、積分するだけで解けます。$I = 1\,\mathrm{mA} = 0.001\,\mathrm{A}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F} = 0.0001\,\mathrm{F}$ なら、$\dfrac{I}{C} = \dfrac{0.001}{0.0001} = 10$〔V/s〕。はじめ $V = 0$ なら $V = 10t$ で、電圧は 1 秒に 10 V ずつ、まっすぐ上がっていきます。

6-2 の RC 回路（電圧が目標の 10 V にだんだん近づく曲線）と、ここ（まっすぐ上がる直線）のちがいは、ルールの右辺に V が入っているかどうかのちがいです。右辺に V がないと、変わる速さが一定なので、グラフは直線になります。

5 時間で変わる入力

右辺は一定でなくても、時刻 t だけの式なら、積分するだけで解けます。

水そうに入る水

水が $V_0 = 50\,\mathrm{L}$ 入った水そうに、じゃ口から水を入れます。じゃ口を少しずつしめていくので、1 分あたりに入る水の量（流量。5-12）は $Q = 12 - 0.4t$〔L/min〕とだんだんへります（$0 \leqq t \leqq 30$）。水そうの水の量 V〔L〕のルールは

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12 - 0.4t$$

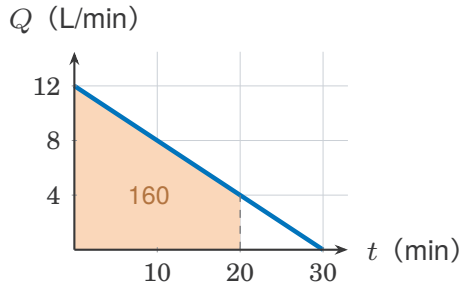
です（ふえる速さは、入る流量）。両辺を積分すると（5-11）、

$$V = 12t - 0.4 \times \frac{t^2}{2} + C \qquad \text{項ごとに積分}$$

$$V = 12t - 0.2t^2 + C \qquad 0.4 \div 2 = 0.2$$

$$V = 12t - 0.2t^2 + 50 \qquad t = 0 \text{ で } V = 50 \text{ なので } C = 50$$

20 分後は、$V = 12 \times 20 - 0.2 \times 400 + 50 = 240 - 80 + 50 = 210\,\mathrm{L}$ です。



グラフでも確かめます。0 分から 20 分までに入った水は、流量のグラフの下の面積です（5-9・5-12）。台形なので、$(12+4)\times 20\div 2=160\,\mathrm{L}$。はじめの 50 L とあわせて $50+160=210\,\mathrm{L}$。式と同じになりました。

流れこむ電流が、わかっているとき

6-2 の RC 回路では、流れる電流は $i=0.5\,e^{-t/2}$〔mA〕でへっていくことがわかっています（6-4 で求めます）。たまる電気の量 q〔mC〕は、ルール $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0.5\,e^{-t/2}$ を積分すれば出ます。e^{at} の積分は $\dfrac{1}{a}e^{at}$ で（5-18）、ここでは $a=-\frac{1}{2}$ なので $\dfrac{1}{a}=-2$ です。

$q=0.5\times(-2)\,e^{-t/2}+C$　　$\int e^{-t/2}\,\mathrm{d}t=-2e^{-t/2}+C$

$q=-e^{-t/2}+C$　　$0.5\times(-2)=-1$

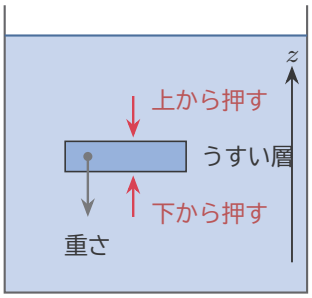
$0=-1+C,\quad C=1$　　$t=0$ で $q=0$、$e^0=1$

$q=1-e^{-t/2}$　　答え（mC）

2 秒後は $q=1-e^{-1}=1-0.368=0.632\,\mathrm{mC}$。コンデンサーの電圧は $V=\dfrac{q}{C}=\dfrac{0.000632}{0.0001}=6.32\,\mathrm{V}$ で、5-14 の式 $V=10\,(1-e^{-1})$ と同じになりました。電流がわかっていれば、たまる量は積分するだけで出せるのです。

6 変数が時間でないとき：水の深さと圧力

微分方程式の変数は、時間でなくてもかまいません。プールにもぐると、深くなるほど耳がぎゅっと押されます。水の圧力（水圧）が、深いほど大きいからです。



高さ z は上向きを正

水の中に、厚さ Δz のうすい層を考えます。層は、下から押される力と、上から押される力と、自分の重さでつり合っています。下の面の圧力は、上の面より、層の重さの分だけ大きくなります。

圧力は、$1\,\mathrm{m}^2$ あたりに押す力で、単位は Pa（パスカル。$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m}^2$）です。面積 $1\,\mathrm{m}^2$、厚さ Δz の層の重さは、密度 ρ〔$\mathrm{kg/m}^3$〕（ロー）を使って $\rho \times \Delta z \times g$〔N〕です（体積×密度で質量、質量× g で重さ）。高さを上向きに z とすると、上へ Δz 進むと圧力は $\rho g\,\Delta z$ だけへるので、$\dfrac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g$。層をうすくした先（5-3）が、

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

です。「上へ 1 m 進むと、圧力は ρg だけへる」と読みます。ここでの変数は時間 t ではなく、高さ z です。それでも、右辺に p が入っていない（水の ρ と g は一定）ので、積分するだけで解けます。

水なら $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$ で、$\rho g = 1000 \times 9.8 = 9800$〔Pa/m〕。水面の高さを $z = 0$ とし、そこで大気の圧力 $p = 101\,300\,\mathrm{Pa}$（1013 hPa。天気予報の「ヘクトパスカル」）とすると、

$p = -9800z + C$　　z で積分（傾きが一定なので直線）

$p = -9800z + 101300$　　$z = 0$ で $p = 101\,300$、$C = 101\,300$

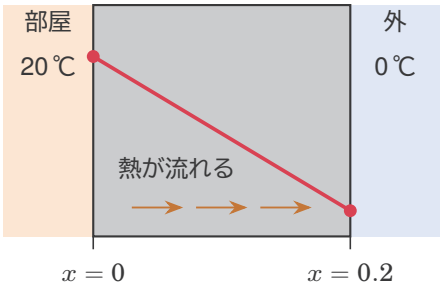
水面から 10 m もぐると、$z = -10$ なので $9800 \times 10 = 98\,000$ がたされて、$p = 199\,300\,\mathrm{Pa}$ です。**10 m もぐると、まわりの圧力はおよそ 2 倍**になります。

せいかくに言うと

空気の中でも $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ は成り立ちます。でも、空気は押しちぢめられるので、密度 ρ が圧力 p によって変わります。すると右辺に p が入ってくるので、積分するだけでは解けません（6-4 の形になり、気圧は高さとともに指数関数でへります）。

7 両はしで決める：かべの中の温度

冬の部屋を考えます。部屋の中は 20 ℃、外は 0 ℃で、そのあいだに厚さ 0.2 m のかべがあります。かべの中の温度は、場所によってどう変わっているでしょう。



部屋の側を $x = 0$、外の側を $x = 0.2$（m）とします。熱は、温度の高い部屋から、かべを通って外へ流れます。暖房をつけて長い時間がたち、かべの中の温度がもう変わらなくなったとき（このような状態を**定常**といいます）を考えます。

ルールを 2 つのきまりから作ります。

1. **熱は、温度の傾きに比例して流れる。**かべの中のある場所で、温度が場所とともに急に下がっているほど（傾き $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ の大きさが大きいほど）、たくさんの熱が流れます。フーリエ（1822 年）がまとめたきまりで、フーリエの法則といいます。

2. **定常なら、どの場所でも同じ量の熱が流れる。**もし、ある層に入る熱が出る熱より多ければ、その層はだんだん温まります。温度が変わらない（定常）ので、入る熱と出る熱は等しく、熱の流れる量はかべのどこでも同じです。

①と②から、温度の傾き $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ は、かべのどこでも同じです。傾きが変わらないので、傾きの変わる速さは 0 です。

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

右辺に T がないので、積分するだけで解けます。2 回積分します。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = C_1$$ 1 回めの積分（0 の原始関数は定数）

$$T = C_1 x + C_2$$ 2 回めの積分。1 次関数（直線）

C_1 と C_2 を決めるのに、はじめの時刻の状態は使えません（時間の式ではないから）。わかっているのは、**かべの両はしの温度**です。

$$20 = C_1 \times 0 + C_2, \quad C_2 = 20$$ 部屋の側：$x = 0$ で $T = 20$

$$0 = C_1 \times 0.2 + 20$$ 外の側：$x = 0.2$ で $T = 0$

$$C_1 = -20 \div 0.2 = -100$$ $0.2\,C_1 = -20$ を解く

$$T = 20 - 100x$$ 答え

かべの中の温度は、部屋の側の 20℃から、外の側の 0℃まで、まっすぐ下がっています。まん中（$x = 0.1$）では $20 - 10 = 10$℃です。

5-13 では、C を「はじめの時刻の状態」で決めました。かべでは、C を「**両はしの状態**」で決めました。これを**境界条件**（きょうかいじょうけん）といいます。「境界」は「さかい目」のことで、ここではかべと部屋・外とのさかい目です。境界条件で答えを決める問題を、**境界値問題**といいます（はじめの状態で決める問題は、初期値問題）。

もっと知りたい ★★★

境界条件の問題を、表計算で解く：はさみうち

6-2 の表計算は「はじめの値」から進める方法でした。両はしの条件しかわからないときは、どうすればよいでしょう。このかべで考えます。はじめの温度 $T = 20$ はわかっていますが、はじめの傾き $s = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ はわかりません。そこで、傾きを決めてためしに進め、外の側（$x = 0.2$）の温度が 0 になるかを見ます。

ためした傾き s	$x = 0.2$ の温度	判定
-50	$20 - 50 \times 0.2 = 10$	高すぎる
-150	$20 - 150 \times 0.2 = -10$	低すぎる
-100	$20 - 100 \times 0.2 = 0$	ぴったり

高すぎる傾きと低すぎる傾きで「はさみうち」にして、ちょうどよい傾きをさがします（2-16 の、表でためして答えに近づく方法）。式で解けない境界条件の問題も、この方法なら表計算で解けます（物理シリーズ『力学』の柱の曲がり方で使います）。

8 両はしで決める：つり橋のケーブル

つり橋は、2 本の塔のあいだにケーブルをわたし、そこから橋の板（橋げた）をつり下げています。橋げたの重さは、横（水平）の長さ 1 m あたり同じだけ、ケーブルにかかります。ケーブルの形を求めましょう。

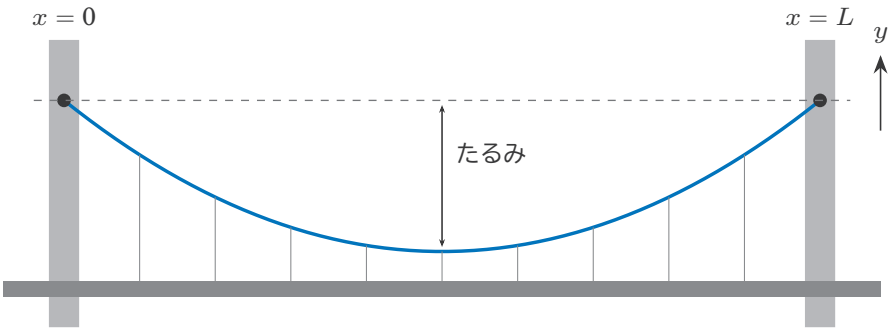


図 2 つり橋のケーブル（青）。塔の上を $y = 0$ とし、y は上向きを正にとる。たるみは見やすく大きくかいている。

ケーブルの小さな部分（横のはば Δx）に働く力を考えます。ケーブルは、どこでもケーブルの向き（接線の向き）に引っぱられています。その力を横と上下に分けて考えます（4-6）。

1. 横の力：横には橋げたの重さがかからないので、横の力はどこでも同じ大きさです。これを H とします。
2. 上下の力：力の向きはケーブルの傾きと同じなので、上下の力÷横の力＝傾き $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（4-6 の tan）。上下の力は $H \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ です。
3. 小さな部分の右はしで上に引く力と、左はしで下に引く力の差が、その部分がささえる橋げたの重さ（横の長さ 1 m あたり w〔N/m〕なら $w\,\Delta x$）とつり合います。

③を式にすると、

$$H \times (\text{右はしの傾き}) - H \times (\text{左はしの傾き}) = w\,\Delta x$$

両辺を $H\,\Delta x$ でわると、$\dfrac{\text{傾きの変化}}{\Delta x} = \dfrac{w}{H}$。$\Delta x$ を小さくした先（5-3）が、

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{w}{H} \qquad (\text{一定})$$

です。「傾きは、右へ行くほど同じ割合でふえる」というルールです。右辺は一定なので、積分するだけで解けます。

例として、塔と塔のあいだを $L = 100\,\mathrm{m}$、$\dfrac{w}{H} = 0.008\,(1/\mathrm{m})$ とします。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.008x + C_1 \qquad \text{1 回めの積分}$$

$$y = 0.004x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \text{2 回めの積分}\ (0.008 \div 2 = 0.004)$$

両はしの高さ（境界条件）で、C_1 と C_2 を決めます。

$$0 = 0 + 0 + C_2, \quad C_2 = 0 \qquad \text{左の塔：}x = 0 \text{ で } y = 0$$

$$0 = 0.004 \times 100^2 + 100\,C_1 \qquad \text{右の塔：}x = 100 \text{ で } y = 0$$

$$C_1 = -40 \div 100 = -0.4 \qquad 40 + 100\,C_1 = 0 \text{ を解く}$$

$$y = 0.004x^2 - 0.4x \qquad \text{答え}$$

$$y = 0.004x\,(x - 100) \qquad 0.004x \text{ でくくる（3-8）}$$

ケーブルの形は放物線です（3-9）。まん中（$x = 50$）では

$$y = 0.004 \times 50 \times (-50) = -10$$

で、塔の上より 10 m 下がっています。左右の塔の高さという「両はしの状態」で、C_1 と C_2 が決まりました。これも境界条件です。

6-11 では、橋げたのない、ケーブル（くさり）だけをたらしたときの形を調べます。そのときは、重さが「横の長さ」あたりでなく「くさりの長さ」あたり同じになるので、形は放物線とは少しちがう曲線（懸垂線）になります。

9 条件はいくつ要る？

ここまでの例を、ならべてみます。

例	ルール	階数	決めるのに使った条件
ヒーター	$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0.298$	1 階	はじめの温度（1 つ）
水の深さと圧力	$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -9800$	1 階	水面の圧力（1 つ）
落ちるボール	$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$	2 階	はじめの位置と速度（2 つ）
かべの温度	$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$	2 階	両はしの温度（2 つ）
つり橋	$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0.008$	2 階	両はしの高さ（2 つ）

1 回積分するごとに、C が 1 つ出てきます（5-13）。だから、**1 階の式には条件が 1 つ、2 階の式には条件が 2 つ**要ります。2 階の式の 2 つの条件は、「はじめの位置と速度」（初期条件）のこともあれば、「両はしの値」（境界条件）のこともあります。片方のはしの値だけでは、C は 1 つしか決まりません。

せいかくに言うと

境界条件の問題では、条件の組み合わせによっては、答えがなかったり、1 つに決まらなかったりすることがあります。たとえば、ばねのような $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -k^2y$ の形の式で両はしを 0 にすると、とびとびの k のときだけ 0 でない答えがあります。これは 6-6 の「もっと知りたい」（固有値問題）で調べます。

もっと知りたい ★★★★

おきかえると、積分するだけで解ける形になることがある

ペットボトルの底に小さな穴をあけて水を入れると、水は穴から流れ出て、水位 h〔m〕が下がります。水位が高いほど、穴から出る水は速く出ます。あるペットボトルでは、ルールが

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -0.02\sqrt{h}$$

でした（t は秒。$\sqrt{h}$ に比例するわけは物理シリーズ『力学』で）。右辺に h が入っているので、このままでは積分だけでは解けません。そこで、$u = \sqrt{h}$ とおきかえます。合成関数の微分（5-6）で、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \times \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$　　$(\sqrt{h})' = \dfrac{1}{2\sqrt{h}}$ に h の微分をかける

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \times (-0.02\sqrt{h})$$　　ルールを入れる

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.01$$　　$\sqrt{h}$ が約分できる

右辺が一定になりました。$u = \sqrt{h}$ は、一定の速さでへっていきます。はじめ $h = 0.25$（$u = 0.5$）なら、$u = 0.5 - 0.01t$ で、$u = 0$（水がなくなる）のは $t = 50$ 秒後です。$h = u^2 = (0.5 - 0.01t)^2$ なので、半分の時間の 25 秒後には、水位は $0.25^2 = 0.0625\,\mathrm{m}$（はじめの $\frac{1}{4}$）です。水がへるにつれて、出る速さもおそくなるのです。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

微分方程式 $y'' = f(x)\ (0 < x < L)$ を，境界条件 $y(0) = a$, $y(L) = b$ のもとで解く問題を境界値問題という。一般解 $y = \iint f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$ の任意定数 C_1，C_2 は境界条件から定まる。

訳　y'' は y を x で 2 回微分したもの。「$0 < x < L$」は、かべやつり橋の中の場所。「境界条件」は、両はし $x = 0$ と $x = L$ での値。$\iint f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$ は「f を 2 回積分したもの」。「任意定数」は積分定数 C_1、C_2 のこと。

たいせつ

見分け方　**右辺に、変わる量そのものが入っていない**
→ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)$ なら $y = \displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t + C$

変数　**時間でなく、高さや場所でもよい**

条件の数　**1 階は 1 つ、2 階は 2 つ（はじめの状態か、両はしの状態）**

この章で出てきたことば

積分するだけで解ける形　右辺に変わる量そのものが入っていないルール。両辺を積分すれば解ける。

熱容量　温度を 1 K（1 ℃）上げるのに要る熱。C_{th}〔J/K〕。

定常　時間がたっても、ようすが変わらない状態。

境界条件　両はし（さかい目）での値。積分定数を決めるのに使う。

境界値問題　境界条件で答えを決める問題。はじめの状態で決める問題は初期値問題。

例題でたしかめよう

例題 1　積分するだけで解ける形を見分ける

次のルールのうち、積分するだけで解けるものをすべて選びましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{6-V}{3}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -12$

考え方　右辺に、左辺で微分されている量（y、V、p）が入っているかを見る（①）。変数は時間でなくてもよい。

式　(1) 右辺は t だけ。y はない。

(2) 右辺に y がある。

(3) 右辺に V がある。

(4) 右辺はただの数。p はない（変数は z）。

答え　(1) と (4)

例題 2　落ちるボール

高さ 44.1 m の屋上から、ボールを静かにはなします。下向きに位置 x をとると、ルールは $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=9.8$ です。x を t の式で表し、地面に着く時刻と、そのときの速さを求めましょう。

考え方　右辺に x がないので、2 回積分する。C_1 ははじめの速度（0）、C_2 ははじめの位置（0）で決める（②）。速さは、1 回めの積分の v に、着く時刻を入れる。

式　$v=9.8t+C_1$。$t=0$ で $v=0$ より $C_1=0$

$x=4.9t^2+C_2$。$t=0$ で $x=0$ より $C_2=0$

$4.9t^2=44.1$、$t^2=9$、$t>0$ より $t=3$

速さ：$v=9.8\times 3=29.4$

答え　$x=4.9t^2$、3 秒後、29.4 m/s

じぶんでとこう 1

次のルールのうち、積分するだけで解けるものをすべて選びましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0.5$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0.3N$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2-0.1t$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=-T$

じぶんでとこう 2

高さ 78.4 m の所から、ボールを静かにはなします。$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=9.8$（下向きが正）として、$x$ を t の式で表し、地面に着く時刻と、そのときの速さを求めましょう。

例題 3　ヒーターで温める

1 L の水（熱容量 $C_{\text{th}} = 4200\,\text{J/K}$）を、電力 1250 W のヒーターで温めます。熱は逃げないとします。はじめ 20 ℃の水の温度 T を時刻 t〔s〕の式で表し、100 ℃になる時刻を求めましょう。

考え方　1 秒に P〔J〕入り、1 K に C_{th}〔J〕要るので、$\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{P}{C_{\text{th}}}$（③）。右辺は一定なので積分するだけ。

式　$\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1250}{4200} \approx 0.298$

$T = 0.298\,t + C$。$t = 0$ で $T = 20$ より $C = 20$

$t = 80 \div \dfrac{1250}{4200} = 80 \times \dfrac{4200}{1250} = 268.8 \approx 269$

$269\,\text{s} \div 60\,\text{s/min} \approx 4.5\,\text{min}$

答え　$T = 20 + 0.298\,t$、約 269 秒後（約 4.5 分後）

例題 4　一定の電流でコンデンサーに電気をためる

静電容量 $C = 100\,\mu\text{F}$ のコンデンサーに、一定の電流 $I = 1\,\text{mA}$ を流しこみます。はじめ $V = 0$ のとき、電圧 V を t〔s〕の式で表し、5 V になる時刻を求めましょう。

考え方　$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{I}{C}$（④）。単位をそろえる：$1\,\text{mA} = 0.001\,\text{A}$、$100\,\mu\text{F} = 0.0001\,\text{F}$。

式　$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{0.001}{0.0001} = 10$

$V = 10t + C$。$t = 0$ で $V = 0$ より $C = 0$

$10t = 5$ より $t = 0.5$

答え　$V = 10t$、0.5 秒後

じぶんでとこう 3

0.5 L の水（$C_{\mathrm{th}} = 2100\,\mathrm{J/K}$）を、1000 W のヒーターで温めます。熱は逃げないとします。はじめ 20 ℃のとき、T を t〔s〕の式で表し、100 ℃になる時刻を求めましょう。

じぶんでとこう 4

$C = 200\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーに、一定の電流 $I = 1\,\mathrm{mA}$ を流しこみます。はじめ $V = 0$ のとき、V を t〔s〕の式で表し、3 V になる時刻を求めましょう。

例題 5　時間で変わる流量

水が 50 L 入った水そうに、流量 $Q = 12 - 0.4t$〔L/min〕で水を入れます。水の量 V〔L〕を t〔min〕の式で表し、20 分後の量を求めましょう。

考え方　$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12 - 0.4t$。右辺は t だけなので、項ごとに積分（⑤）。C ははじめの量。

式　$V = 12t - 0.4 \times \dfrac{t^2}{2} + C = 12t - 0.2t^2 + C$

$t = 0$ で $V = 50$ より $C = 50$

$t = 20$：$12 \times 20 - 0.2 \times 400 + 50 = 240 - 80 + 50 = 210$

答え　$V = 12t - 0.2t^2 + 50$、20 分後は 210 L

例題 6　わかっている電流から、たまる量

コンデンサーに流れこむ電流が $i = 0.5\,e^{-t/2}$〔mA〕（t は秒）です。はじめ $q = 0$ のとき、たまった電気の量 q〔mC〕を t の式で表し、2 秒後の値を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

考え方　$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0.5\,e^{-t/2}$。$\displaystyle\int e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}e^{at} + C$（5-18）で $a = -\frac{1}{2}$、$\frac{1}{a} = -2$。

式　$q = 0.5 \times (-2)\,e^{-t/2} + C = -e^{-t/2} + C$

$t = 0$ で $q = 0$：$0 = -1 + C$ より $C = 1$

$t = 2$：$1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$

答え　$q = 1 - e^{-t/2}$、2 秒後は 0.632 mC

じぶんでとこう 5

水が 30 L 入った水そうに、流量 $Q = 10 - 0.5t$〔L/min〕で水を入れます。V を t の式で表し、10 分後の量を求めましょう。

じぶんでとこう 6

流れこむ電流が $i = 0.6\,e^{-t/3}$〔mA〕です。はじめ $q = 0$ のとき、q〔mC〕を t の式で表し、3 秒後の値を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

例題 7　深さと水圧

海水（$\rho = 1030\,\mathrm{kg/m^3}$）の中で、$\dfrac{dp}{dz} = -\rho g$ です（z は上向きの高さ〔m〕）。海面（$z = 0$）で $p = 101\,300\,\mathrm{Pa}$ のとき、(1) p を z の式で表し、深さ 30 m の水圧を求めましょう。(2) 水圧が 303 900 Pa（海面の 3 倍）になる深さを求めましょう（$g = 9.8$）。

考え方　変数は z。右辺は一定なので z で積分（⑥）。C は海面の圧力。深さ 30 m は $z = -30$。(2) は逆向き：式に p を入れて、z について解く（1 次方程式。2-16）。

式　$\rho g = 1030 \times 9.8 = 10\,094$

$p = -10\,094\,z + C$。$z = 0$ で $C = 101\,300$

(1) $z = -30$ を入れる：

$10\,094 \times 30 + 101\,300 = 404\,120$

(2) $101\,300 - 10\,094\,z = 303\,900$

$-10\,094\,z = 202\,600$

$z = -202\,600 \div 10\,094 \approx -20.1$

答え　(1) $p = 101\,300 - 10\,094\,z$、約 404 000 Pa（海面のおよそ 4 倍）

(2) 深さ約 20 m

じぶんでとこう 7

湖の水（$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$）で、水面で $p = 101\,300\,\mathrm{Pa}$ のとき、(1) 深さ 5 m の水圧と、(2) 水圧が 202 600 Pa（水面の 2 倍）になる深さを求めましょう（$g = 9.8$）。

例題 8　かべの中の温度（境界条件）

厚さ 0.2 m のかべで、部屋の側（$x=0$）が 20 ℃、外の側（$x=0.2$）が 0 ℃です。定常のとき $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$ です。(1) T を x の式で表し、部屋の側から 5 cm の所の温度を求めましょう。(2) 温度が 10 ℃になる場所を求めましょう。

考え方　2 回積分して $T=C_1x+C_2$。両はしの温度（境界条件）で C_1、C_2 を決める（⑦）。5 cm は 0.05 m。(2) は逆向き：式に $T=10$ を入れて、x について解く。

式　$T=C_1x+C_2$

$x=0$ で $T=20$：$C_2=20$

$x=0.2$ で $T=0$：$0.2\,C_1+20=0$ より $C_1=-100$

(1) $x=0.05$：$20-100\times0.05=20-5=15$

(2) $20-100x=10$ より $100x=10$、$x=0.1$

答え　(1) $T=20-100x$、15 ℃

(2) $x=0.1$ m（部屋の側から 10 cm）

じぶんでとこう 8

厚さ 0.3 m のかべで、部屋の側（$x=0$）が 22 ℃、外の側（$x=0.3$）が −2 ℃です。定常のとき、T を x の式で表し、(1) $x=0.1$ の温度と、(2) 温度が 6 ℃になる場所を求めましょう。

例題 9　つり橋のケーブル（境界条件）

塔と塔のあいだが 100 m のつり橋で、ケーブルの形が $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0.008$ にしたがいます。両方の塔の上（$x = 0$ と $x = 100$）で $y = 0$ です。y を x の式で表し、$x = 25$ の所の高さを求めましょう。

考え方　2 回積分して $y = 0.004x^2 + C_1x + C_2$。両はしの高さで C_1、C_2 を決める（⑧）。

式　$y = 0.004x^2 + C_1x + C_2$

$x = 0$ で $y = 0$：$C_2 = 0$

$x = 100$ で $y = 0$：$40 + 100\,C_1 = 0$ より $C_1 = -0.4$

$y = 0.004x^2 - 0.4x = 0.004x\,(x - 100)$

$x = 25$：$0.004 \times 25 \times (-75) = -7.5$

答え　$y = 0.004x\,(x - 100)$、塔の上より 7.5 m 下

じぶんでとこう 9

塔と塔のあいだが 200 m のつり橋で、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0.004$、両方の塔の上（$x = 0$ と $x = 200$）で $y = 0$ です。y を x の式で表し、まん中と $x = 50$ の所の高さを求めましょう。

コラム　熱の流れを数学にしたフーリエ

⑦で使った「熱は温度の傾きに比例して流れる」きまりは、フランスのフーリエ（1768～1830 年）が、1822 年の本『熱の解析的理論』にまとめたものです。フーリエは、かべや金属の棒の中を熱がどう伝わるかを、微分方程式で表して解こうとしました。そのとき、どんな形の温度の分布も、sin と cos の波をたし合わせて表せると考えました。これが第 9 巻で学ぶフーリエ級数（9-1）のはじまりです。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

右辺に y があるのに積分する

× $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$ を積分して $T = -0.05\left(\dfrac{T^2}{2} - 20T\right) + C$

○ 右辺に T があるので、積分だけでは解けない（6-2 の表計算か、6-4 の方法）

右辺の T は時刻とともに変わる関数なので、t で積分するときに T を「積分する文字」のようにあつかうことはできません。積分しているのは t です。

⚠ まちがえやすいところ

2 回積分で、C を 1 つしかつけない

× $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$ から $T=C$

○ $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=C_1$、$T=C_1x+C_2$

1 回積分するたびに、新しい C がつきます。2 回積分したら C は 2 つです。C_1 を積分すると C_1x になることも忘れずに。

⚠ まちがえやすいところ

片方のはしだけで C を決めようとする

× かべの部屋の側の 20 ℃だけで、$T=C_1x+20$ の C_1 を決めようとする

○ 外の側の 0 ℃も使って、$C_1=-100$

2 階の式には、条件が 2 つ要ります（⑨）。片方のはしでは C_2 しか決まりません。もう片方のはしの条件で、C_1 を決めます。

⚠ まちがえやすいところ

深さと高さの向きをまちがえる

× $p=101\,300-9800z$ で、深さ 10 m に $z=10$ を入れる

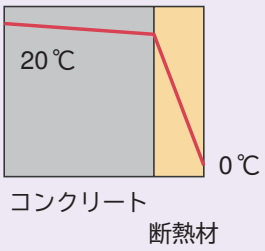
○ z は上向きなので、深さ 10 m は $z=-10$

変数の向き（どちらを正にとるか）を、はじめに決めて変えないことが大切です（2-2）。深くなるほど圧力が大きくなるかを、答えで確かめましょう。

物理・工学ではこう使う

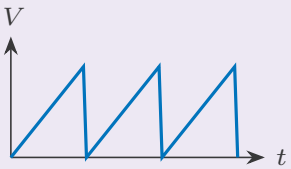
● **断熱材の入ったかべ**

家のかべには、熱を通しにくい断熱材が入っています。熱の通しやすさ（熱伝導率）は、コンクリートが約 1.6、断熱材（グラスウールなど）が約 0.04（W/(m·K)）と、40 倍もちがいます。⑦と同じ考えで、2 つの層では、熱の流れる量が同じになるように傾きが決まります。温度は、断熱材の中で大きく下がり（赤い線）、熱の逃げる量は、コンクリートだけのかべの 10 分の 1 ほどになります。



● **のこぎり波：一定の電流でためて、一気に放す**

④のように一定の電流でコンデンサーに電気をためると、電圧はまっすぐ上がります。ある電圧になったら一気に放電させ、またためる、をくり返すと、のこぎりの歯のような電圧（のこぎり波）ができます。時間をはかる回路（タイマー）や、電圧を数に変える回路（AD 変換器）に使われています。



● **はりのたわみ・管の中の流れ**

橋や建物のはりが重さでどれだけたわむか、細い管の中で水がどんな速さの分布で流れるかも、積分するだけで解ける形と境界条件で求められます（物理シリーズ『力学』）。

章末問題

基本 ★★★

1 次のルールのうち、積分するだけで解けるものをすべて選びましょう（例題 1）。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4t - 1$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(T - 25)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -11\,760$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{q}{5}$

2 高さ 19.6 m の所からボールを静かにはなします。$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$（下向きが正）として、$x$ を t の式で表し、地面に着く時刻と、そのときの速さを求めましょう（例題 2）。

3 2 L の水（$C_{\mathrm{th}} = 8400\,\mathrm{J/K}$）を、1400 W のヒーターで温めます。熱は逃げないとします。はじめ 15 ℃のとき、T を t〔s〕の式で表し、85 ℃になる時刻を求めましょう（例題 3）。

4 $C = 50\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーに、一定の電流 $I = 0.2\,\mathrm{mA}$ を流しこみます。はじめ $V = 0$ のとき、V を t〔s〕の式で表し、6 V になる時刻を求めましょう（例題 4）。

5 水が 20 L 入った水そうに、流量 $Q = 8 - 0.2t$〔L/min〕で水を入れます。V を t の式で表し、20 分後の量を求めましょう（例題 5）。

6 コンデンサーに流れこむ電流が $i = 2e^{-t}$〔mA〕です。はじめ $q = 0$ のとき、q〔mC〕を t の式で表し、1 秒後の値を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）（例題 6）。

チャレンジ ★★★

7 海水（$\rho = 1030\,\mathrm{kg/m^3}$）で、海面で $p = 101\,300\,\mathrm{Pa}$ のとき、水圧が海面の 2 倍（202 600 Pa）になる深さを求めましょう（$g = 9.8$）（例題 7）。

8 厚さ 0.25 m のかべで、部屋の側（$x = 0$）が 18 ℃、外の側（$x = 0.25$）が −2 ℃です。定常のとき、T を x の式で表し、温度が 0 ℃になる場所を求めましょう（例題 8）。

9 塔と塔のあいだが 120 m のつり橋で、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0.005$、両方の塔の上（$x = 0$ と $x = 120$）で $y = 0$ です。y を x の式で表し、まん中のたるみを求めましょう（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 右辺を見て、積分するだけで解ける形を見分け、解ける。 → 104 ページ
- ☐ 深さや場所が変数のルールも、積分して解ける。 → 110 ページ
- ☐ 両はしの条件（境界条件）から、積分定数を決められる。 → 112 ページ

ミナ

右辺に自分が入っていなければ、積分するだけ！　でも、冷めるお湯は右辺に T がいた。次の章では、その「自分に比例してへる」形を式で解くよ。

第 1 部　微分方程式の入口

★★★

6-4 自分に比例してへる：冷めるお湯

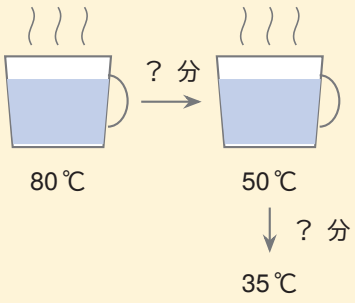
道しるべ　この章の前に 3-11 3-12 5-14 5-16 5-18 6-2
この章の先に 6-5 6-12 9-5 9-9

この章でできるようになること

- ★★★「変わる速さが、目標との差に比例する」式を、変数分離で解ける。
- ★★★ 時定数 τ を使って、冷める・温まる・たまるまでの時間を求められる。
- ★★★ コンデンサーやコイルの回路の式を立てて、時定数 $RC \cdot \dfrac{L}{R}$ を求められる。

はてな？

20℃の部屋に、80℃のお湯を入れたカップを置きます。熱いうちは速く冷め、ぬるくなると、ゆっくり冷めます。
80℃から 50℃まで冷めるのに、何分かかるでしょう。そのあと、50℃から 35℃まで冷めるのには、もっと長くかかるでしょうか。部屋との温度の差は、どちらも半分になっています。



6-1 では、冷めるお湯のルール $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05(T-20)$ を読み、6-2 では表計算で、5-18 では答えの候補で答えを求めました。この章では、答えを**自分の手で**

導く方法を学びます。そして、同じ形の式が、ヒーター・温度計・電気の回路・放射線にも出てくることを確かめます。どれも「あとどれだけ残っているか」に比例して変わるしくみです。

やってみよう　冷めるお湯の「差」を調べよう

用意するもの

マグカップ、お湯（大人といっしょに用意する）、料理用の温度計、時計、電卓

1. 部屋の温度をはかろう。
2. カップにお湯を入れ、5 分ごとに温度をはかって表に書こう。
3. 「お湯の温度 − 部屋の温度」（差）を計算しよう。
4. 差を、5 分前の差でわろう。どんな数が並ぶかな？

時間（分）	0	5	10	15	20	25	30
温度（℃）	80.0	66.8	56.3	48.4	42.0	37.3	33.3
差（℃）	60.0	46.8	36.3	28.4	22.0	17.3	13.3
差÷ 5 分前の差		0.78	0.78	0.78	0.77	0.79	0.77

表 1　ソラさんがはかった結果（部屋は 20.0 ℃）

温度の下がり方は、はじめの 5 分で 13.2 ℃、20 分から 25 分で 4.7 ℃と、だんだん小さくなります。ところが④の「差÷ 5 分前の差」は、どこでも約 0.78 です。**差は、5 分ごとに約 0.78 倍になる**。下がる「量」はちがっても、下がる「割合」は同じなのです。

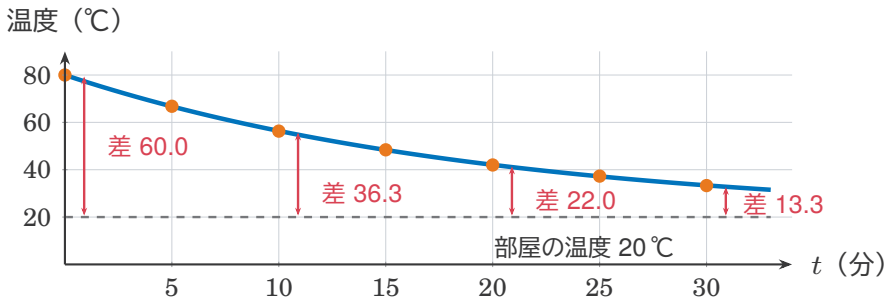


図 1　はかった温度（オレンジの点）と、部屋との差（赤い矢印）。10 分ごとに見ると、差は 60.0 → 36.3 → 22.0 → 13.3 と、どれも前の約 0.6 倍（0.78×0.78）になっている。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- **3-11**　同じ時間ごとに同じ割合でへる量は、指数関数で書ける。
- **3-12**　片対数グラフ（たて軸を対数目もりにしたグラフ）では、指数関数は直線になる。
- **5-14**　$(e^{at})' = ae^{at}$。$e^0 = 1$。$e^x = y$ なら $x = \ln y$。
  $e^{-t/\tau}$ の τ は時定数。$t = \tau$ で約 37 %、はじめの接線は $t = \tau$ で 0 に届く。
- **5-16**　置換積分：$\int (u \text{ の式}) \times u' \, \mathrm{d}t = \int (u \text{ の式}) \, \mathrm{d}u$。$\int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \ln u + C \, (u > 0)$
- **5-18**　答えの候補：$f' = af$ なら $f = Ce^{at}$。部屋との差 $u = T - 20$ を主役にする（ずらし）と、冷めるお湯は $T = 20 + 60e^{-0.05t}$。
- **6-1**　$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05(T - 20)$：温度の変わる速さ（℃/分）は、部屋との差の 0.05 倍で、下がる向き。
- **6-2**　オイラー法：次の値＝今の値＋（今の変わる速さ）× Δt。10 分後は 55.92 ℃（$\Delta t = 1$ 分）。

数学の道具

1 差は「同じ時間で同じ割合」でへる

やってみようで、差が 5 分ごとに約 0.78 倍になりました。なぜ、いつも同じ割合なのでしょう。2 通りで考えます。

考え方 1：ルールを読む

冷めるお湯のルールは、

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20)$$

でした（6-1）。右辺は「部屋との差 $T - 20$ の 0.05 倍」です。差が 60℃なら 1 分あたり $0.05 \times 60 = 3$℃の速さで下がり、差が 30℃なら 1 分あたり $0.05 \times 30 = 1.5$℃の速さで下がります。

差が半分なら、下がる速さも半分です。だから、差が 60℃のお湯が「60 の何％か」をへらすのにかかる時間と、差が 30℃のお湯が「30 の同じ％」をへらすのにかかる時間は同じになります。へらす量も半分、速さも半分だからです。

考え方 2：2 つのカップをくらべる

差が 60℃から始めたカップ A と、差が 30℃から始めたカップ B を考えます。B の差は、はじめ A の差のちょうど半分です。ルールの右辺は差に比例するので、B の差は、そのあともずっと A の差の半分のままへっていきます（どの瞬間も、量も速さも半分）。

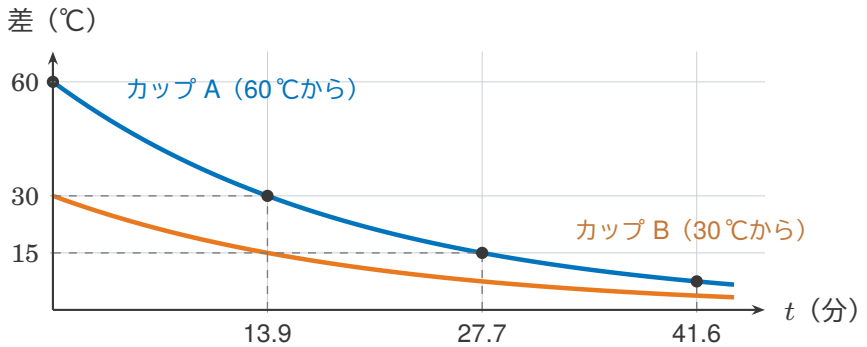


図 2　A が 30℃になった瞬間（13.9 分）から先は、A の曲線と B の曲線は同じ形（B を右へ 13.9 分ずらすと A にぴったり重なる）。だから、差が半分になる時間は、何回めでも同じ。

A の差が 30℃になった瞬間、A は「差 30℃から始めたカップ」と同じ状態です。ルールは同じなので、その先の A の動きは B とまったく同じになります。図 2 で、B を右へずらすと、A に重なるのはそのためです。

片対数グラフにかく

やってみようの差を、片対数グラフ（3-12）にかきます。たて軸は、10、20、40 のように、2 倍ごとに同じ間かくになる目もりです。

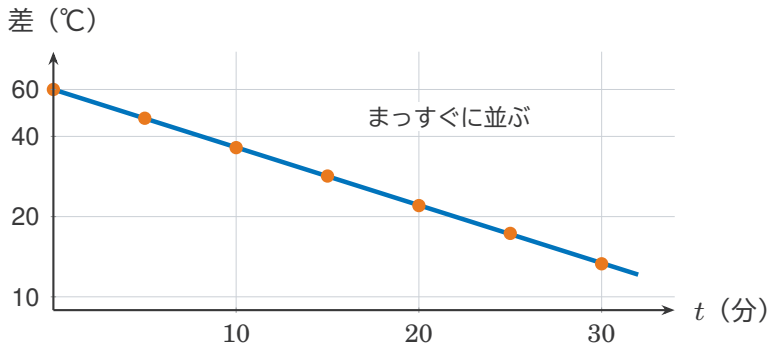


図 3　たて軸を対数目もりにすると、差の点（オレンジ）は直線に並ぶ。同じ時間で同じ割合に変わる量（指数関数）のしるし（3-12）。

点がまっすぐに並びました。差は、指数関数（3-11）でへっています。

なぜ 0.75 ではなく 0.78 なのか

「1 分で差の 5 % ずつ下がるのだから、5 分なら $5 \times 5\,\% = 25\,\%$ 下がって 0.75 倍」と考えたくなります。でも、はかった値は 0.78 倍でした。

1 分ごとに計算すると、1 分で 0.95 倍、5 分で $0.95^5 = 0.774$ 倍です。0.75 より大きいのは、2 分めからは、へった差の 5 % しか下がらないからです。さらに細かく、いつも少しずつ下がると考えると、5-14 の $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \to e^x$ と同じしくみで、

$$e^{-0.05\times 5} = e^{-0.25} = 0.7788\cdots$$

になります。はかった約 0.78 は、この値です。

2 答えを導く方法 1：答えの候補を使う

5-18 で作った答えの候補を使う方法を、もう一度ふり返ります。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T-20)$$ 問題の式（ルール）

$u = T - 20$ 部屋との差を u とおく（5-18 ④のずらし）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$ 20 は定数なので、微分すると 0

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05\,u$$ 1 行めの左辺と右辺を u で書きかえた

$u = Ce^{-0.05t}$ 「微分すると自分の -0.05 倍」の候補（5-18）

$T = 20 + Ce^{-0.05t}$ $u = T - 20$ をもどした

$T = 20 + 60e^{-0.05t}$ $t = 0$ で $T = 80$。$e^0 = 1$ なので $20 + C = 80$、$C = 60$

代入して確かめる

答えが本当にルールに合うか、左辺と右辺を別々に計算します。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -3e^{-0.05t}$$ 左辺：答えを微分する（5-14）

$-0.05\,(T-20) = -3e^{-0.05t}$ 右辺：$T - 20$ に $60e^{-0.05t}$ を入れる

左辺は $60 \times (-0.05) = -3$、右辺は $-0.05 \times 60 = -3$ で、同じになりました。$t = 0$ では $T = 20 + 60 = 80$ で、はじめの温度にも合っています。

単位で確かめる

0.05 の単位は「1/分」です。$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$（℃/分）＝ 0.05（1/分）×差（℃）で、両辺の単位が合うからです。だから、e の肩の $-0.05t$ は、（1/分）×（分）で単位がなくなります。e の肩には、単位のない数しか入れられません（$e^{3\text{分}}$ という数はありません）。

表計算の答えとくらべる

6-2 のオイラー法（$\Delta t = 1$ 分）と、式の答えをくらべます。

時間（分）	0	5	10	20	30
オイラー法（$\Delta t = 1$ 分）	80	66.43	55.92	41.51	32.88
式 $20 + 60e^{-0.05t}$	80	66.73	56.39	42.07	33.39

表 2　オイラー法の値は、式の値より少しだけ低い。1 分のあいだも下がる速さはおそくなっていくのに、はじめの速さのまま下げているから（6-2）。

この方法は、答えの候補を知っていれば速く解けます。でも、「なぜ e が出てくるのか」は、候補のカードを信じるしかありません。次の③では、候補を知らなくても、式を変形していくだけで答えにたどり着く方法を学びます。

③ 答えを導く方法 2：変数分離

②の式 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05\,u$ の両辺を、そのまま t で積分しようとすると、右辺が次の形になって止まってしまいます。

$$\int (-0.05\,u)\,\mathrm{d}t$$

u は t によって変わる、まだわからない関数なので、積分できないのです（6-3 で学んだ「積分するだけで解ける形」ではありません）。

そこで、**u にかかわるものを左辺へ、t にかかわるものを右辺へ**集めます。

図 4　両辺を u でわると、左辺は u だけの式× $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$、右辺は t だけ（ここでは定数）になる。

これで、両辺を t で積分できるようになります。1 行ずつ進めます（$u > 0$、つまりお湯が部屋より熱いときを考えます）。

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05\,u$	問題の式
$\dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05$	① 両辺を u でわる（u を左辺へ集める）
$\displaystyle\int \frac{1}{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-0.05)\,\mathrm{d}t$	② 両辺を t で積分する
$\displaystyle\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int (-0.05)\,\mathrm{d}t$	③ 左辺：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ をまとめて $\mathrm{d}u$（5-16 の置換積分）
$\ln u = -0.05\,t + C$	④ 左辺は $\ln u$（5-14）、右辺は $-0.05t$。積分定数は 1 つにまとめて C
$u = e^{-0.05t+C}$	⑤「$\ln u$ が○」は「u は e の○乗」（5-14）
$u = e^{C} \times e^{-0.05t}$	⑥ 指数のきまり $e^{p+q} = e^{p} \times e^{q}$（3-11）
$u = Ae^{-0.05t}$	⑦ e^{C} は定数なので、A とおく

$t = 0$ で $u = 60$ なので $A \times e^{0} = A = 60$。$u = 60e^{-0.05t}$ で、方法 1 と同じ答え $T = 20 + 60e^{-0.05t}$ になりました。今度は、答えの候補を使わずに、e が「ln をもとにもどす」ところ（⑤）から自然に出てきました。

③の行が大事

③では、5-16 の置換積分の形 $\displaystyle\int (u \text{ の式}) \times u'\,\mathrm{d}t = \int (u \text{ の式})\,\mathrm{d}u$ をそのまま使いました。u の式が $\dfrac{1}{u}$、u' が $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ です。t で積分していたものが、u で積分するものに変わります。

④の C はなぜ 1 つ？

左辺を積分すると $\ln u + C_1$、右辺を積分すると $-0.05t + C_2$ です。C_1 を右へ移すと $C_2 - C_1$ で、これも決まっていない定数なので、まとめて C と書きます。

よく見る書き方

大学の本では、①〜③を短く、

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -0.05\,\mathrm{d}t \qquad \text{両辺に積分記号をつけて} \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int (-0.05)\,\mathrm{d}t$$

と書くことがよくあります。$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ を分数のように見て、両辺に $\mathrm{d}t$ をかけた形です（5-16 の見方 1）。中身は、上の①〜③とまったく同じです。

> **せいかくに言うと**
>
> **「$\mathrm{d}t$ をかける」は、置換積分を短く書いたもの**
>
> 6-1 では「$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ はひとまとまりの記号。分数として約分しない」と学びました。では、ここで $\mathrm{d}t$ をかけてよいのはなぜでしょう。じつは、$\mathrm{d}t$ を本当にかけ算しているのではありません。①〜③で行ったことを、1 行ずつ書くと次のとおりです。
>
> $$\frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.05 \qquad \text{①：両辺を } u \text{ でわった式}$$
>
> $$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-0.05)\,\mathrm{d}t \qquad \text{②：両辺を } t \text{ で積分する}$$
>
> $$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{③：左辺だけに置換積分（5-16）を使う}$$
>
> ③の行が、置換積分のきまり $\int (u \text{ の式}) \times \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (u \text{ の式})\,\mathrm{d}u$ そのものです。「$\dfrac{\mathrm{d}u}{u} = -0.05\,\mathrm{d}t$」は、この 3 行の結果だけを短く書く約束で、分数として約分したのではありません。6-1 で「約分しない」と書いたのは、d と T をばらばらにして $\dfrac{T}{t}$ にしてしまうまちがいのことで、ここでの書き方とは別のことです。$\mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}t$ の 1 つ 1 つに意味をつける考え（微分形式）は、大学で学びます。

このように、変数ごとに左辺と右辺に分けてから積分する解き方を**変数分離**（へんすうぶんり）といいます。

1. 両辺をわったりかけたりして、u を左辺に、t を右辺に集める。
2. 両辺を積分する（左辺は u で、右辺は t で）。C は片方につける。
3. ln が出たら、e の〇乗にもどす。
4. はじめの状態で、定数を決める。

せいかくに言うと

①で u でわったので、$u = 0$ のときは使えません。$u = 0$（はじめから部屋と同じ 20℃）なら、$T = 20$ のまま変わらないのも答えです（$\frac{du}{dt} = 0$）。また、$u < 0$（お湯が部屋より冷たい）のときは、④の左辺が $\ln(-u)$ になり、答えは $u = -e^C e^{-0.05t}$ です。A を「正・0・負のどんな数でもよい」とすると、$u = Ae^{-0.05t}$ の 1 つの式で全部をまとめられます。はじめの値を 1 つ決めると、答えはただ 1 つに決まります（6-1）。

ソラ

③は 1 回で全部わからなくても大丈夫。②の答えの候補で答えが出せれば、先へ進めます。あとで読み返すと、きっとわかるよ。

4 目標の値へ近づく形

0.05 は $\frac{1}{20}$ なので、冷めるお湯のルールは、次のように書きかえられます。

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{20}(T - 20) = \frac{20 - T}{20}$$

分子の 20 は「部屋の温度（目標）」、分母の 20 は「20 分（時間）」で、たまたま同じ数ですが、意味のちがう数です。このように書くと、どんな式か読みやすくなります。

$$\text{変わる速さ} = \frac{\text{目標} - \text{いま}}{\text{時間の目安}}$$

「目標までの残り」を、ある時間でわった速さで近づきます。残りが大きいと速く、残りが小さいとゆっくり近づきます。

これを文字で書くと、次の形になります。y_∞ は「目標の値（最後の値）」で、ワイ・インフィニティと読みます（∞ は「限りなく大きい」：5-3。t を限りなく大きくしたときに近づく値という意味です）。τ は時定数（5-14）です。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_\infty - y}{\tau} \qquad \text{の答えは} \qquad y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\, e^{-t/\tau}$$

y_0 は、はじめ（$t = 0$）の値です。答えは、①〜③と同じく、目標との差 $u = y - y_\infty$ を主役にして作れます。

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau}$	問題の式
$\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u}{\tau}$	$u = y - y_\infty$ とおく（y_∞ は定数なので $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt}$）
$u = Ae^{-t/\tau}$	③の変数分離（0.05 のかわりに $\frac{1}{\tau}$）
$A = y_0 - y_\infty$	$t = 0$ で $u = y_0 - y_\infty$、$e^0 = 1$
$y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\, e^{-t/\tau}$	$y = y_\infty + u$ にもどした

答えの読み方は「**最後の値＋はじめの差×へり方**」です。

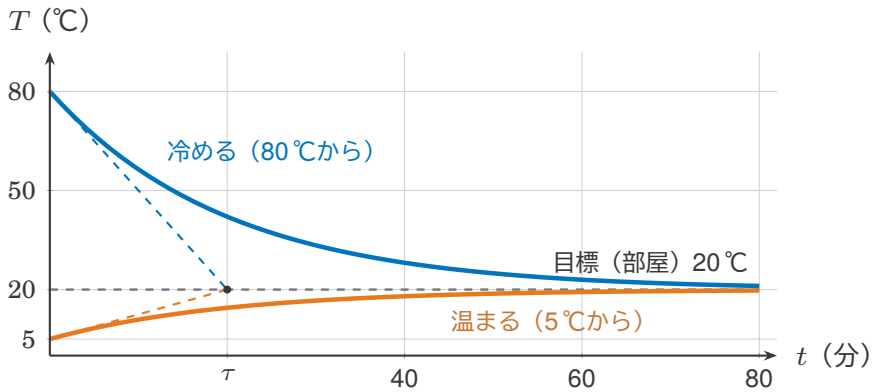


図 5　同じ式 $\frac{dT}{dt} = \frac{20-T}{20}$ で、冷める（青）と温まる（オレンジ）。点線は、$t = 0$ の接線（はじめの速さのまま進んだら）。どちらも、ちょうど $t = \tau = 20$ 分で目標に届く。

図 5 のように、冷めるときも温まるときも、同じ式で書けます。温まるとき（はじめ 5℃）は、はじめの差が $5 - 20 = -15$ でマイナスなので、

$$T = 20 + (5 - 20)\, e^{-t/20} = 20 - 15e^{-t/20}$$

です。「20 から、へっていく 15 を引く」形で、下から 20℃に近づきます。

解かなくても、最後の値がわかる

最後には、y はもう変わらなくなります。変わらないということは、$\dfrac{dy}{dt}=0$ です。式の左辺を 0 とおくと、

$$0=\frac{y_\infty-y}{\tau} \qquad \text{より} \qquad y=y_\infty$$

たとえば $\dfrac{dy}{dt}=6-0.2y$ なら、$0=6-0.2y$ から $y=30$ が最後の値です。式を解かなくても、「変わらなくなる値」はすぐにわかります。次の 6-5 の終端速度も、この考えで求めます。

どんな 1 階の式も、この形にできる

$\dfrac{dy}{dt}=b-ay$（$a>0$）の形の式は、右辺を a でくくると、

$$\frac{dy}{dt}=a\left(\frac{b}{a}-y\right)=\frac{\dfrac{b}{a}-y}{\dfrac{1}{a}}$$

なので、$y_\infty=\dfrac{b}{a}$、$\tau=\dfrac{1}{a}$ です。$\dfrac{dy}{dt}=6-0.2y$ なら、$y_\infty=\dfrac{6}{0.2}=30$、$\tau=\dfrac{1}{0.2}=5$ です。

5 時定数と半減期

答え $y=y_\infty+(y_0-y_\infty)e^{-t/\tau}$ で、「残りの差」は $e^{-t/\tau}$ 倍になります。τ の何倍たったかで、残りの割合が決まります（5-14 ⑪）。

たった時間	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
残りの差 $e^{-t/\tau}$	36.8％	13.5％	5.0％	1.8％	0.7％
目標までに進んだ割合	63.2％	86.5％	95.0％	98.2％	99.3％

表 3　$e^{-1}=0.368$、$e^{-2}=0.135$、$e^{-3}=0.050$、$e^{-4}=0.018$、$e^{-5}=0.007$。

冷めるお湯（$\tau=20$ 分）なら、20 分で差が 36.8％（60℃の差が 22.1℃）、60 分（3τ）で 5.0％（3.0℃）になります。

半減期：差が半分になる時間

差が半分になる時間を t_{h} とすると、$e^{-t_{\mathrm{h}}/\tau} = \dfrac{1}{2}$ です。両辺の自然対数をとります（5-14）。

$$e^{-t_{\mathrm{h}}/\tau} = \frac{1}{2}$$ 差が半分になる条件

$$-\frac{t_{\mathrm{h}}}{\tau} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$ 両辺の ln をとる。$\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$（3-12）

$$t_{\mathrm{h}} = \tau \ln 2 \approx 0.693\,\tau$$ 両辺に $-\tau$ をかける。$\ln 2 = 0.693$

半減期は、はじめの差がいくつでも同じです。式の中に y_0 が入っていないからです。

？はてな？の答え

冷めるお湯は $\tau = 20$ 分なので、差が半分になる時間は

$$20\text{ 分} \times \ln 2 = 20\text{ 分} \times 0.693 = 13.9\text{ 分}$$

です。80 ℃から 50 ℃（差 60 ℃→ 30 ℃）も、50 ℃から 35 ℃（差 30 ℃→ 15 ℃）も、同じ約 13.9 分です。下がる温度は 30 ℃と 15 ℃でちがいますが、「差が半分になる」時間は同じです（①）。

目標には、いつ着く？

$e^{-t/\tau}$ は、どんなに t が大きくなっても 0 にはなりません（e を何乗しても正の数）。だから、**数学の上では、目標にぴったり着くまでには限りなく長い時間がかかります**。でも、5τ で残りは 0.7 % なので、工学では「5τ たてば、ほぼ終わり」とみなします。お湯なら 100 分で、差は 0.4 ℃です。じっさいの温度計では、もう区別できません。

グラフから τ を読む 3 つの方法

1. はじめの接線が目標の線とまじわる時刻（図 5 の点線）。
2. 目標までの 63 % まで進んだ時刻（残りの差が 37 % になった時刻）。
3. 差が半分になる時間（半減期）を 0.693 でわる。

はかったデータでは、③のように「何回分か」を使うと、ずれが小さくなります。

6 熱：ためる・逃げる

お湯の $\tau = 20$ 分は、何で決まっているのでしょう。お湯は「熱をためる」はたらきと、「熱が部屋へ逃げる」はたらきをもっています。

熱をためる：熱容量 C_{th}

物の温度を 1 K（1 ℃と同じ大きさ）上げるのに必要な熱（エネルギー）を**熱容量**といい、C_{th}〔J/K〕と書きます（th は熱 thermal の頭文字）。水は 1 g あたり約 4.2 J/K なので、250 mL（250 g）のお湯なら

$$C_{\mathrm{th}} = 4.2\ \mathrm{J/(g\cdot K)} \times 250\ \mathrm{g} = 1050\ \mathrm{J/K}$$

です。熱容量が大きいほど、同じ熱を出し入れしても温度が変わりにくくなります。

熱が逃げる：熱抵抗 R_{th}

熱は、温度の高い所から低い所へ流れます。1 秒に流れる熱（熱流、単位は W = J/s）は、温度差に比例します。

$$\text{熱流} = \frac{\text{温度差}}{R_{\mathrm{th}}}$$

R_{th}〔K/W〕を**熱抵抗**といいます。「1 W の熱を流すのに、何 K の温度差がいるか」で、大きいほど熱が逃げにくくなります。電気のオームの法則 $I = \dfrac{V}{R}$（2-15）と同じ形です。

式を立てる

ヒーター（電力 P〔W〕）で温めながら、部屋（温度 T_a）へ熱が逃げている物を考えます。短い時間 Δt のあいだの、熱の出入りを書きます。

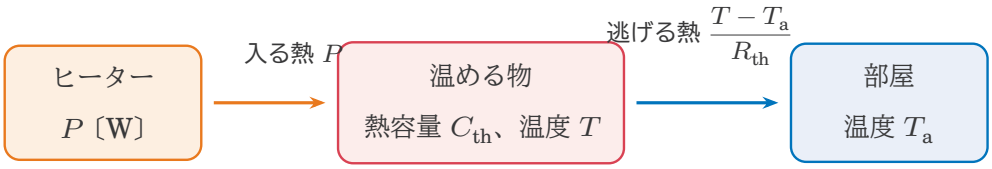


図 6　熱の出入り。入る熱と逃げる熱の差が、物にたまり、温度を上げる。

$$C_{th}\,\Delta T = P\Delta t - \frac{T-T_a}{R_{th}}\,\Delta t$$

たまる熱＝入る熱－逃げる熱（Δt のあいだ）

$$C_{th}\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = P - \frac{T-T_a}{R_{th}}$$

両辺を Δt でわる

$$C_{th}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P - \frac{T-T_a}{R_{th}}$$

Δt を 0 に近づける（5-3）

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{C_{th}} - \frac{T-T_a}{C_{th}R_{th}}$$

両辺を C_{th} でわる

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{PR_{th}-(T-T_a)}{C_{th}R_{th}}$$

右辺を通分する（1 つめの分子・分母に R_{th} をかける）

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{(T_a+PR_{th})-T}{C_{th}R_{th}}$$

分子のかっこをはずし、並べかえる

最後の行は④の形です。だから、

最後の温度　$T_\infty = T_a + PR_{th}$　　時定数　$\tau = C_{th}R_{th}$

最後の温度は、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$（入る熱＝逃げる熱）からも求められます：$P=\dfrac{T-T_a}{R_{th}}$ より $T = T_a + PR_{th}$。

単位の確かめ　$C_{th}R_{th}$ の単位は $\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\times\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}=\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}}=\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{J/s}}=\mathrm{s}$ で、たしかに時間です。

お湯の 0.05 の正体

ヒーターのないお湯（$P = 0$）では、$T_\infty = T_\mathrm{a} = 20\,℃$で、$\tau = C_\mathrm{th} R_\mathrm{th}$ です。250 mL のお湯（1050 J/K）で $\tau = 20$ 分$= 1200\,\mathrm{s}$ なら、

$$R_\mathrm{th} = \frac{\tau}{C_\mathrm{th}} = \frac{1200\,\mathrm{s}}{1050\,\mathrm{J/K}} \approx 1.1\,\mathrm{K/W}$$

です。差が 60 ℃のとき、1 秒に約 $60 \div 1.1 \approx 53\,\mathrm{W}$ の熱が逃げています。ルールの 0.05（1/分）は $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{20\text{ 分}}$ で、「熱のためやすさ」と「逃げやすさ」で決まる数だったのです。量が 2 倍（500 mL）なら C_th が 2 倍なので、同じカップの形なら冷めるのがおそくなります。

温度計も追いつくのに時間がかかる

温度計の先（感じる部分）も、小さな「熱をためる物」です。熱いお湯に入れても、すぐにはお湯の温度を指しません。お湯の温度を T_w、温度計の示す温度を T_m とすると、

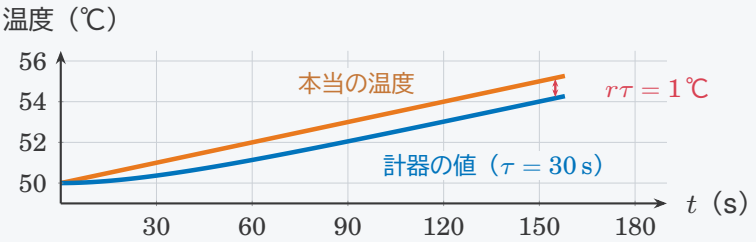
$$\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{T_\mathrm{w} - T_\mathrm{m}}{\tau}$$

の形で追いつきます（目標が T_w）。体温計をわきにはさんで、すぐに取り出してはいけないのは、このためです。

> **せいかくに言うと**
>
> 「冷める速さは温度差に比例する」（ニュートンの冷却の法則）は、近似です。じっさいのお湯は、湯気（蒸発）や、温度の 4 乗に関係する熱の放射でも冷めるので、熱いうちは式より少し速く冷めます。それでも、温度差があまり大きくないときは、とてもよく合います。また、ここでは「お湯の中の温度はどこも同じ」と考えました。よくかき混ぜた水や、小さな金属のように、中の温度がすぐにそろう物ほど、よく合います（物理シリーズ『熱学』）。

コラム　計器の反応のおくれ：1 次おくれ

工場では、計器でタンクや管の中の温度などをはかり、その値で機械を自動で動かしています。温度をはかる熱電対（ねつでんつい）は、金属の管（保護管）に入れて使うので、⑥の温度計と同じように、時定数 τ ほどおくれて追いつきます。このような反応を、制御工学では **1 次おくれ**といいます（9-9）。



温度が 1 秒あたり r〔℃/s〕の速さで上がり続けると、しばらくして、計器の値も同じ速さ r で上がるようになります。そのときは $\dfrac{\mathrm{d}T_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = r$ なので、⑥の式 $\dfrac{\mathrm{d}T_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{T - T_\mathrm{m}}{\tau}$ から、$T - T_\mathrm{m} = r\tau$。計器は、いつも $r\tau$ だけ低い値を指し続けます。$\tau = 30$ s（およその値）の熱電対で、温度が 1 分に 2 ℃（$r = \frac{2}{60}$ ℃/s）上がるなら、おくれは $\frac{2}{60} \times 30 = 1$ ℃です。速く変わる温度をはかるには、時定数の小さい計器を選びます。

7 電気：コンデンサーとコイルの回路

電気の回路にも、「ためる」部品があります。

コンデンサー：電気をためる部品

コンデンサーは、2 枚の金属の板を、ごく近づけて向かい合わせた部品です。電池につなぐと、片方の板に $+$ の電気、もう片方に $-$ の電気がたまります。カメラのフラッシュは、コンデンサーにためた電気を一気に流して光ります。

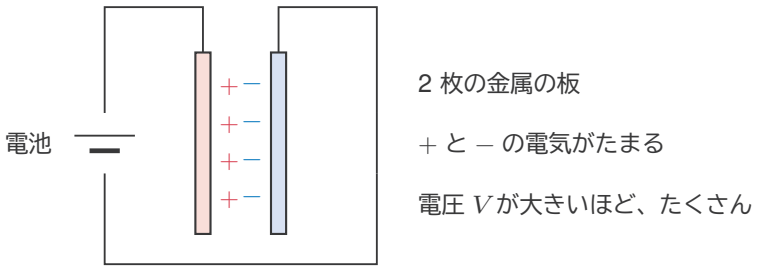


図 7 コンデンサー（2 枚の板）を電池につなぐと、板に ＋ と － の電気がたまる。

コンデンサーにたまる電気の量 q〔C〕は、板のあいだの電圧 V〔V〕に比例します。

$$q = CV$$

比例定数 C〔F〕を**静電容量**（せいでんようりょう）といい、単位はファラド（F）です。電気の量の単位はクーロン（C）で、1 A の電流が 1 秒流れたときの電気の量です（C = A·s）。文字の C（静電容量）と単位の C（クーロン）がまぎらわしいので、この本では単位を〔　〕でくくります。1 F はとても大きいので、ふつうは 1 μF = 0.000001 F（マイクロファラド）を使います。この本では、$q = CV$ を部品のきまり（法則）として使います。なぜそうなるかは、物理シリーズ『電磁気学』で学びます。

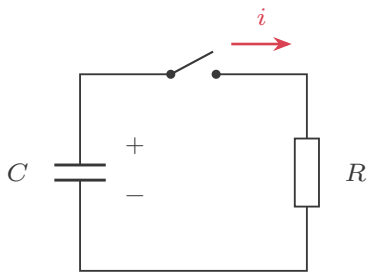
電流は、電気の量の変わる速さ

電流 i〔A〕は、1 秒あたりに流れる電気の量です（中学の理科）。コンデンサーに流れこむ電流は、たまった電気の量のふえる速さなので、

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \qquad (q = CV \text{ を微分。} C \text{ は定数})$$

です。時間とともに変わる電流は、小文字の i で書きます。

放電：たまった電気を抵抗に流す



はじめ電圧 V_0 までためたコンデンサーを、スイッチを入れて抵抗 R〔Ω〕につなぎます。電気は $+$ の板から抵抗を通って $-$ の板へ流れ、たまった電気がへっていきます。電流の向きを図の矢印の向きにとります。

$$i = \frac{V}{R}$$

抵抗にかかる電圧はコンデンサーの電圧 V（オームの法則 2-15）

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -i$$

電流が流れ出た分だけ、たまった電気がへる

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{R}$$

左辺に $q = CV$、右辺に $i = \frac{V}{R}$ を入れた

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{RC}$$

両辺を C でわる

これは、「自分に比例してへる」形で、$y_\infty = 0$、$\tau = RC$ です。答えは

放電　　$V = V_0\, e^{-t/RC}$　　（時定数 $\tau = RC$）

3-11 で「コンデンサーにためた電気を抵抗に流すと、電圧は同じ時間ごとに同じ割合でへる」と書いたのは、このことです。

RC の単位は秒

単位つきの 1 を使って確かめます。$\Omega = \mathrm{V/A}$（オームの法則）、$\mathrm{F} = \mathrm{C/V}$（$q = CV$）、$\mathrm{C} = \mathrm{A{\cdot}s}$ なので、

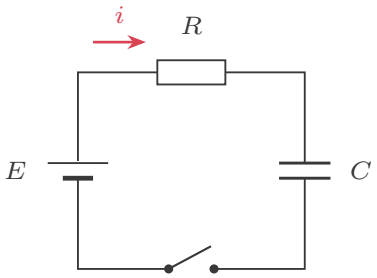
$$\Omega \times \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \times \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A{\cdot}s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s}$$

たとえば $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$ なら、

$$RC = 20\,000\,\Omega \times 0.0001\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$$

です（5-14 の例題の $V = 10(1 - e^{-t/2})$ と同じ時定数）。k は 1000 倍、μ は 100 万分の 1 倍です（第 5 巻の巻末の表）。

充電：電池でコンデンサーに電気をためる



電圧 E〔V〕の電池、抵抗 R、はじめ電気のたまっていないコンデンサー C を、1 列（直列）につなぎます。直列では、電池の電圧が、抵抗の電圧とコンデンサーの電圧に分かれます（中学の理科）。

$$E = Ri + V$$

$E = Ri + V$ 電池の電圧＝抵抗の電圧＋コンデンサーの電圧

$E = RC\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V$ 電流は $i = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$（流れこむ電気がたまる）

$RC\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = E - V$ V を左辺へ移し、左右を入れかえる

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E - V}{RC}$ 両辺を RC でわる

④の形で、$y_\infty = E$、$\tau = RC$ です。はじめ $V = 0$ なので、

充電　$V = E(1 - e^{-t/RC})$　　電流　$i = \dfrac{E - V}{R} = \dfrac{E}{R}e^{-t/RC}$

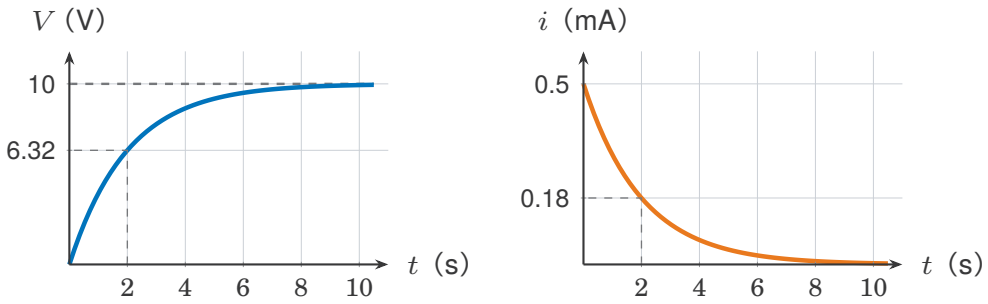


図 8　充電（$E = 10\,\mathrm{V}$、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$、$\tau = 2\,\mathrm{s}$）。左：コンデンサーの電圧は 10 V に近づく。右：電流ははじめ $\frac{E}{R} = 0.5\,\mathrm{mA}$ で、だんだん 0 に近づく。

はじめ、コンデンサーはからっぽで電圧が 0 なので、電池の電圧は全部抵抗にかかり、電流は $\dfrac{E}{R}$ です。電気がたまるにつれてコンデンサーの電圧が上がり、抵抗にかかる電圧 $E - V$ がへるので、電流もへっていきます。

表計算でも確かめる

6-2 のオイラー法で、$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10 - V}{2}$ を $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ で進めます。B 列が電圧、C 列が変わる速さ（V/s）です。

1. 今の電圧から、変わる速さ $\dfrac{10 - V}{2}$ を計算する（C 列）。
2. 次の電圧＝今の電圧＋変わる速さ× 0.1（B 列）。

	A	B	C	D
1	t (s)	V (V)	速さ (V/s)	式の答え
2	0	0	5.00	0
12	1	4.01	3.00	3.93
22	2	6.42	1.79	6.32
32	3	7.85	1.07	7.77
42	4	8.71	0.64	8.65
52	5	9.23	0.39	9.18
102	10	9.94	0.03	9.93

表 4　$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ のオイラー法（1 秒ごとの行だけ見せた）。C 列の式は `=(10-B2)/2`、B 列の式は `=B2+C2*0.1`。D 列は $10(1 - e^{-t/2})$。

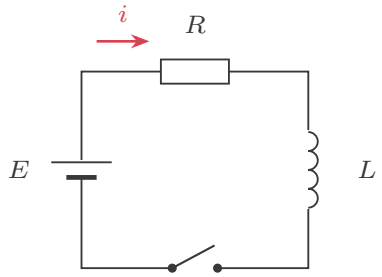
表計算の電圧は、式の答えより少しだけ大きく、だんだん近づいていきます。はじめの速さ 5 V/s のまま 0.1 秒進むと、そのあいだに速さがおそくなる分だけ進みすぎるからです（6-2 と同じ理由）。数で解いても、式で解いても、同じ形の曲線になることが確かめられました。

コイル：電流の変化をきらう部品

コイルは、導線をぐるぐる巻いた部品です。モーターの中の巻き線や、電磁石でスイッチを動かすリレーにも使われています。コイルに流れる電流を変えようとすると、コイルは、その変化をじゃまする向きに電圧を生みます。その大きさは、電流の変わる速さに比例します。

$$\text{コイルの電圧} \qquad V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

比例定数 L〔H〕を**インダクタンス**といい、単位はヘンリー（H）です。これも、この本では部品のきまりとして使います（くわしくは物理シリーズ『電磁気学』）。



電池 E、抵抗 R、コイル L を直列につなぎ、スイッチを入れます。電池の電圧が、抵抗とコイルに分かれます。

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

電池の電圧＝抵抗の電圧＋コイルの電圧

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E - Ri$$

Ri を右辺へ移す

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E - Ri}{L}$$

両辺を L でわる

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{E}{R} - i}{\dfrac{L}{R}}$$

右辺の分子と分母を、どちらも R でわる

④の形で、最後の電流 $i_\infty = \dfrac{E}{R}$（コイルがないときのオームの法則の電流）、時定数 $\tau = \dfrac{L}{R}$ です。はじめ $i = 0$ なので、

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

スイッチを入れた瞬間は、コイルが「急な変化」をきらうので、電流は 0 から始まり、なめらかに $\dfrac{E}{R}$ へ近づきます。単位は $\dfrac{\mathrm{H}}{\Omega} = \dfrac{\mathrm{V{\cdot}s/A}}{\mathrm{V/A}} = \mathrm{s}$ です（$V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ から $\mathrm{H} = \mathrm{V{\cdot}s/A}$）。

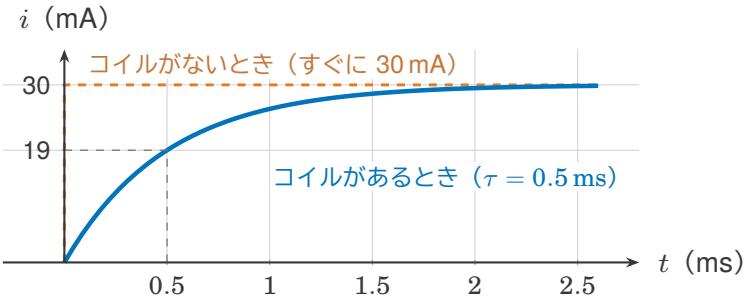


図 9　12 V のリレーのコイル（$R = 400\,\Omega$、$L = 0.2\,\mathrm{H}$、例題 9）にスイッチを入れたときの電流。コイルがないと電流はすぐに $\frac{E}{R} = 30\,\mathrm{mA}$ になるが、コイルがあると 0 から始まり、なめらかに近づく。

もっと知りたい ★★★★

スイッチを切ると、火花が出るわけ

コイルに電流が流れているときにスイッチを切ると、電流は一瞬で 0 になろうとします。$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ がとても大きくなるので、$V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ もとても大きくなり、スイッチのすきまに火花がとぶことがあります。リレーやモーターを動かす回路では、コイルとならべてダイオード（電流を 1 方向にだけ流す部品）をつなぎ、電流がそこを回って、時定数 $\frac{L}{R}$ くらいの時間でゆっくりへるようにします。こうして、電子部品をこわさないように守っています。

8 同じ形の式の仲間たち

この章で出てきた式は、どれも $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y_\infty - y}{\tau}$ の形でした。表にまとめます。

しくみ	変わる量	最後の値	時定数	τ が大きくなるのは
冷めるお湯	温度 T	部屋の温度	$C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$	量が多い・逃げにくい
ヒーターで温める	温度 T	$T_{\mathrm{a}} + PR_{\mathrm{th}}$	$C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$	量が多い・逃げにくい
RC の充電	電圧 V	E	RC	容量が大きい・流れにくい
RL の電流	電流 i	$\frac{E}{R}$	$\frac{L}{R}$	コイルが大きい・抵抗が小さい
モーター（物理 力-6）	角速度 ω	$\frac{N_{\mathrm{m}}}{c_{\mathrm{r}}}$	$\frac{I}{c_{\mathrm{r}}}$	回しにくい・じゃまが小さい
落ちる物（6-5）	速さ v	$\frac{mg}{b}$	$\frac{m}{b}$	質量が大きい・抵抗が小さい

物はちがっても、式の形が同じなら、答えも同じ形です。だから、1 つを解けば全部がわかります。温度で考えたことが電気にも使え、電気で考えたことが機械にも使えます。このような「式の形の仲間」のことを、6-15 でもう一度まとめます。

9 めったに起きないことの待ち時間

★★★★ 放射線をはかるガイガーカウンターは、放射線が来るたびに「カチッ」と鳴ります。いつ鳴るかは、まったくの偶然です。でも、長くはかると「10 秒に平均 3 回」のように、平均の回数は決まっています。1 秒あたり平均 λ（ラムダ）回とします。ここでは $\lambda = 0.3$ 回/秒です。

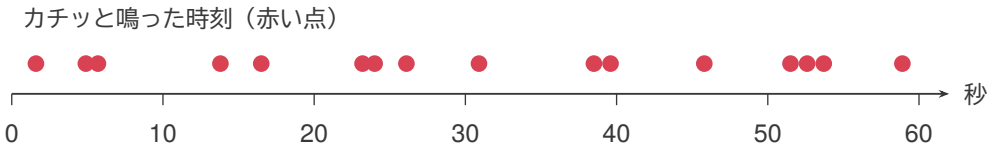


図 10　60 秒のあいだに鳴った時刻の例（ちょうど 10 秒ごとに 3 回ではなく、つまったり空いたりする）。

まだ 1 回も鳴らない確率

時刻 t までに、まだ 1 回も鳴っていない確率を $P_0(t)$ とします。はじめ（$t = 0$）は、まだ鳴っていないので $P_0(0) = 1$ です。とても短い時間 Δt のあいだに鳴る確率は $\lambda \Delta t$ です（1 秒に平均 0.3 回なら、0.01 秒では 0.003 回ぶん）。時刻 $t + \Delta t$ までに 1 回も鳴らないのは、「t までに鳴らず」、「次の Δt でも鳴らない」ときなので、確率のかけ算（3-17）で、

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \times (1 - \lambda \Delta t)$$

t まで鳴らない×次の Δt で鳴らない

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

かっこを開いて $P_0(t)$ を左へ移し、Δt でわる

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_0$$

Δt を 0 に近づける

$$P_0 = e^{-\lambda t}$$

自分に比例してへる形（③）。
$P_0(0) = 1$

ここでも「自分に比例してへる」式が出てきました。$\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ とおくと $P_0 = e^{-t/\tau}$ です。$\lambda = 0.3$ 回/秒なら $\tau = \dfrac{1}{0.3} = 3.3$ 秒で、10 秒間 1 回も鳴らない確率は $e^{-0.3\times 10} = e^{-3} = 0.050$（5 %）です。

「時刻 t までに 1 回も鳴らない」は、「次に鳴るまでの待ち時間が t より長い」と同じことです。だから、**待ち時間が t より長い確率は** $e^{-t/\tau}$ です。待ち時間の平均は、ちょうど $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$（平均 3.3 秒に 1 回なら、待ち時間の平均も 3.3 秒）になることが、積分で確かめられます。このような待ち時間の分かれ方を**指数分布**といいます。

ちょうど 1 回、ちょうど k 回の確率

10 秒（$\lambda t = 3$）を n 個の短い区間に分けると、1 つの区間で鳴る確率は $p = \dfrac{3}{n}$ です。ちょうど 1 回鳴るのは「n 個のうち、どれか 1 つだけで鳴る」ときなので、選び方が n 通り（3-17）で、確率は $np(1-p)^{n-1}$ です。表計算で n を大きくしていきます。

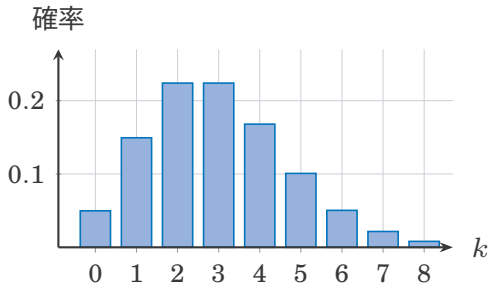
区間の数 n	10	100	1000	近づく先
0 回の確率 $(1-p)^n$	0.028	0.048	0.0496	$e^{-3} = 0.0498$
1 回の確率 $np(1-p)^{n-1}$	0.121	0.147	0.1491	$3e^{-3} = 0.1494$

表 5　n を大きくすると、0 回は e^{-3}、1 回は $3e^{-3}$ に近づく（$(1-\frac{3}{n})^n \to e^{-3}$ は 5-14 と同じしくみ）。

同じように考えると、ちょうど k 回鳴る確率は

$$P_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (k! = 1\times 2\times \cdots \times k、0! = 1)$$

になります。このような回数の分かれ方を**ポアソン分布**といいます（フランスのポアソンが 1837 年に示しました）。



10 秒（$\lambda t = 3$）に鳴る回数の確率。平均は 3 回ですが、2 回や 3 回になることがいちばん多く、0 回も 5 %、6 回も 5 % あります。

全部の確率をたすと、ちょうど 1 になります。

$$e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \cdots\right) = e^{-3} \times e^{3} = 1$$

かっこの中は、e^3 のテイラー展開（5-17）だからです。

コラム　馬にけられた兵士の数

ボルトキエヴィッチは 1898 年の本で、プロイセンの軍隊の 10 の部隊について、20 年間に馬にけられて亡くなった兵士の数を調べました（部隊と年の組が 200 組、合わせて 122 人。1 組あたり平均 0.61 人）。「0 人だった組」は 109 組、「1 人」は 65 組、「2 人」は 22 組、「3 人」は 3 組、「4 人」は 1 組でした。ポアソン分布で計算すると、108.7 組、66.3 組、20.2 組、4.1 組、0.6 組で、よく合います。めったに起きない、おたがいに関係のない出来事の回数は、ポアソン分布になるのです。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

1 階線形微分方程式 $\tau\dot{y} + y = y_\infty$ の解は

$$y(t) = y_\infty + (y(0) - y_\infty)e^{-t/\tau}$$

である。τ を時定数といい、系の応答の速さを表す。

訳　$\dot{y}$ は $\frac{dy}{dt}$（5-5）。両辺を τ でわると④の形。「系」はしくみ、「応答」は入力に対する反応のしかた。

たいせつ

変数分離 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u}{\tau} \to \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{d}t \to u = Ae^{-t/\tau}$

目標へ近づく $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau} \to y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\, e^{-t/\tau}$

時定数 3τ で **95 %**、5τ で **99.3 %**。**半減期は** $\tau \ln 2$

時定数の例 $C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$（**熱**）、$RC$・$\dfrac{L}{R}$（**電気**）

この章で出てきたことば

変数分離　変数ごとに左辺と右辺に分けてから、両辺を積分する解き方。

時定数 τ　目標までの残りが e^{-1}（約 37 %）になる時間。はじめの速さのままなら τ で目標に届く。

熱容量・熱抵抗　温度を 1 K 上げる熱 C_{th}〔J/K〕と、熱の逃げにくさ R_{th}〔K/W〕。

コンデンサー・静電容量　電気をためる部品。$q = CV$ の C〔F〕。

コイル・インダクタンス　電流の変化をきらう部品。$V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ の L〔H〕。

指数分布・ポアソン分布　偶然起きることの待ち時間（$e^{-t/\tau}$）と、回数の確率。

記号カード　初めて出た章 6-4

τ

読み方　タウ
意味　時定数。$e^{-t/\tau}$ の形でへる・近づく速さの目安。単位は s
英語　time constant

記号カード　初めて出た章 6-4

y_∞

読み方　ワイ・インフィニティ
意味　時間がたって変わらなくなった最後の値（目標の値）
英語　final value

コラム　ニュートンと冷めるお湯

「冷める速さは温度差に比例する」ことを最初に書いたのは、ニュートンです。1701 年、名前を出さずに発表した短い論文の中で、熱した鉄が冷めていく時間をはかり、とても高い温度をはかる方法として使いました。温度計で直接はかれないほど熱い物でも、冷めていくようすから、はじめの温度を計算できるというわけです。いまでは、この考えを「ニュートンの冷却の法則」とよんでいます。

例題でたしかめよう

例題 1　差が半分になる時間

部屋の温度は 20 ℃。お湯の温度 T が $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05(T-20)$（$t$ は分）にしたがって冷めます。はじめ 80 ℃のとき、50 ℃になるのは何分後ですか。また、50 ℃から 35 ℃になるには何分かかりますか（$\ln 2 = 0.693$）。

考え方　④の形に直して τ を読む。差が半分になる時間は $\tau \ln 2$（⑤）。

式　$-0.05(T-20) = \dfrac{20-T}{20}$ なので $\tau = 20$ 分

答え $T = 20 + (80-20)e^{-t/20} = 20 + 60e^{-t/20}$

50 ℃は差 30 ℃（60 ℃の半分）なので、$e^{-t/20} = \dfrac{1}{2}$

両辺の ln をとって $t = 20\ln 2 = 20 \times 0.693 = 13.9$

35 ℃は差 15 ℃（30 ℃の半分）。半減期は差によらないので、同じく 13.9 分

答え　約 13.9 分後。50 ℃から 35 ℃も約 13.9 分

じぶんでとこう 1

部屋の温度は 25 ℃。お湯が $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.04(T-25)$（$t$ は分）にしたがって冷めます。はじめ 85 ℃のとき、55 ℃になるのは何分後ですか。また、55 ℃から 40 ℃になるには何分かかりますか（$\ln 2 = 0.693$）。

例題 2　変数分離で解く

放射性の物質の量 N（g）が、$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -0.2N$（$t$ は日）にしたがってへります。はじめ 500 g のとき、N を t の式で表しましょう。変数分離で解きましょう。

考え方　③の 4 つの手順。N でわって左辺に集め、両辺を積分する。

式　① $\dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -0.2$（両辺を N でわる）

② $\displaystyle\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int (-0.2)\,\mathrm{d}t$（両辺を積分。左辺は置換積分）

$\ln N = -0.2t + C$（左辺は $\ln N$、右辺は $-0.2t$）

③ $N = e^{-0.2t+C} = e^{C}\,e^{-0.2t} = Ae^{-0.2t}$（$e^{C} = A$ とおく）

④ $t = 0$ で $N = 500$。$A \times e^{0} = A = 500$

答え　$N = 500e^{-0.2t}$

微分して確かめます。

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 500 \times (-0.2)e^{-0.2t} = -0.2 \times (500e^{-0.2t}) = -0.2N$$

時定数は $\tau = \dfrac{1}{0.2} = 5$ 日です。

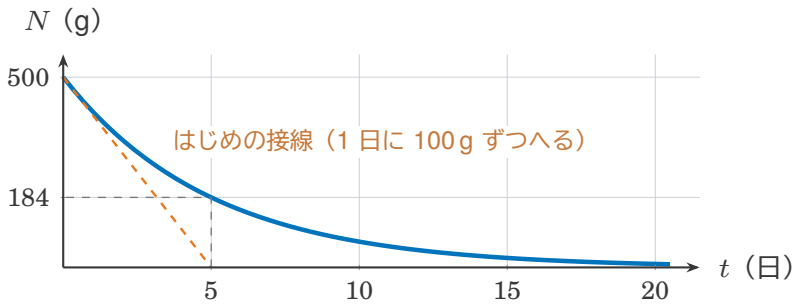


図 11　$N = 500e^{-0.2t}$。はじめの速さ（1 日に $0.2 \times 500 = 100$ g）のままなら 5 日（τ）で 0。じっさいは 5 日で 37 %（184 g）残る。

じぶんでとこう 2

$\dfrac{dy}{dt} = -0.5y$、$y(0) = 8$ を、変数分離で解きましょう。

例題 3　温まるとき

冷蔵庫から出した 5 ℃の飲み物を、20 ℃の部屋に置きます。温度 T は $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{20 - T}{10}$（$t$ は分）にしたがいます。T を t の式で表し、15 ℃になるのは何分後か求めましょう（$\ln 3 = 1.099$）。

考え方　④の形で $y_\infty = 20$、$\tau = 10$、$y_0 = 5$。はじめの差 $5 - 20$ はマイナスになる。

式　$T = 20 + (5 - 20)e^{-t/10} = 20 - 15e^{-t/10}$

15 ℃のとき $20 - 15e^{-t/10} = 15$ より $15e^{-t/10} = 5$、$e^{-t/10} = \dfrac{1}{3}$

両辺の ln をとる：$-\dfrac{t}{10} = \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$

$t = 10\ln 3 = 10 \times 1.099 = 10.99$

答え　$T = 20 - 15e^{-t/10}$、約 11 分後

15 ℃は、目標 20 ℃まであと 5 ℃。はじめの差 15 ℃の $\dfrac{1}{3}$ が残っている時刻です。ln をとる前に、$e^{-t/10}$ だけを左辺に残しておくのがこつです。

じぶんでとこう 3

4℃の牛乳を、24℃の部屋に置きます。温度は $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{24 - T}{20}$（$t$ は分）にしたがいます。T を t の式で表し、19℃になるのは何分後か求めましょう（$\ln 4 = 1.386$）。

例題 4　$\frac{dy}{dt} = b - ay$ の形を読む

$\dfrac{dy}{dt} = 6 - 0.2y$、$y(0) = 0$ について、最後の値と時定数を求め、y を t の式で表しましょう。

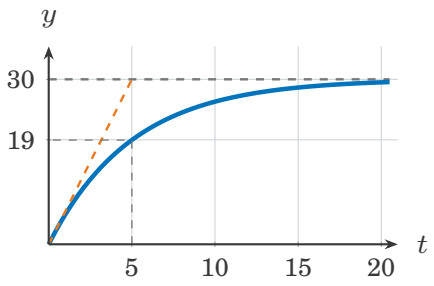
考え方　最後の値は $\dfrac{dy}{dt} = 0$ とおく。右辺を 0.2 でくくって④の形にすると τ が読める。

式　最後の値：$0 = 6 - 0.2y$ より $y = \dfrac{6}{0.2} = 30$

$$6 - 0.2y = 0.2\,(30 - y) = \frac{30 - y}{5} \text{ なので } \tau = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$y = 30 + (0 - 30)e^{-t/5} = 30 - 30e^{-t/5} = 30(1 - e^{-t/5})$$

答え　最後の値 30、時定数 5、$y = 30(1 - e^{-t/5})$



グラフで確かめます。$t = 0$ では $y = 0$ なので、変わる速さは $6 - 0.2 \times 0 = 6$ です。この速さのまま進むと（オレンジの点線）、ちょうど $t = 5$（τ）で 30 に届きます。じっさいの y は、$t = 5$ で $30 \times 0.632 = 19.0$ です。

じぶんでとこう 4

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12 - 3y$、$y(0) = 0$ について、最後の値と時定数を求め、y を t の式で表しましょう。

例題 5　ヒーターで温める：はんだごて

電力 $P = 20\,\mathrm{W}$ のはんだごての先は、熱容量 $C_{\mathrm{th}} = 5\,\mathrm{J/K}$、まわりへの熱抵抗 $R_{\mathrm{th}} = 18\,\mathrm{K/W}$ とします（数はおよその値）。部屋は 20 ℃、はじめも 20 ℃です。最後の温度と時定数を求め、電源を入れて 3 分後の温度を求めましょう（$e^{-2} = 0.135$）。

考え方　⑥の $T_\infty = T_{\mathrm{a}} + PR_{\mathrm{th}}$、$\tau = C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$。3 分は τ の何倍か。

式　$T_\infty = 20 + 20 \times 18 = 20 + 360 = 380$（℃）

$\tau = 5\,\mathrm{J/K} \times 18\,\mathrm{K/W} = 90\,\mathrm{s}$

3 分 $= 3\,\mathrm{min} \times 60\,\mathrm{s/min} = 180\,\mathrm{s} = 2\tau$

$T = 380 + (20 - 380)e^{-180/90} = 380 - 360e^{-2}$

$= 380 - 360 \times 0.135 = 380 - 48.6 = 331.4$

答え　最後は約 380 ℃、時定数 90 秒、3 分後は約 331 ℃

3 分では目標の 86.5 %（2τ）までしか進んでいません。はんだごてを使い始めるまで数分待つのは、このためです。

じぶんでとこう 5

電力 50 W で熱を出す電子部品に、熱容量 100 J/K、熱抵抗 0.8 K/W の放熱器（ヒートシンク）をつけました。部屋は 25 ℃、はじめも 25 ℃です。最後の温度と時定数を求め、160 秒後の温度を求めましょう（$e^{-2} = 0.135$）。

例題 6　RC の放電

10 V までためた静電容量 100 μF のコンデンサーを、20 kΩ の抵抗につなぎます。時定数、2 秒後の電圧、電圧が半分（5 V）になる時刻を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$、$\ln 2 = 0.693$）。

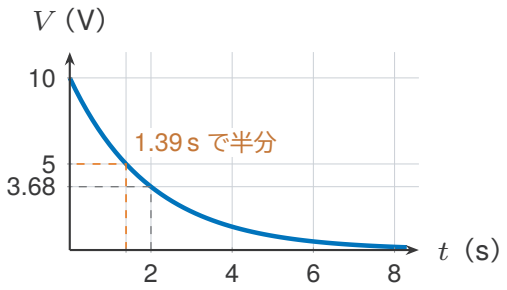
考え方　⑦の放電の式 $V = V_0 e^{-t/RC}$。k と μ を数になおしてからかける。

式　$RC = 20\,000\,\Omega \times 0.0001\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$

$V = 10e^{-t/2}$。$t = 2$ で $10e^{-1} = 10 \times 0.368 = 3.68$

半分：$e^{-t/2} = \dfrac{1}{2}$ より $t = 2\ln 2 = 2 \times 0.693 = 1.386$

答え　時定数 2 秒、2 秒後は約 3.7 V、約 1.4 秒後に半分



放電の電圧のグラフです。1.39 秒ごとに半分になります（10 V → 5 V → 2.5 V → 1.25 V）。2 秒（τ）では、半分よりもう少しへって 3.68 V（37 %）です。半減期（1.39 秒）は時定数（2 秒）より短いことに注意しましょう。

じぶんでとこう 6

12 V までためた静電容量 470 μF のコンデンサーを、10 kΩ の抵抗につなぎます。時定数、時定数だけたったときの電圧、電圧が半分になる時刻を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$、$\ln 2 = 0.693$）。

例題 7　RC の充電

$E = 10\,\mathrm{V}$ の電池、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$（はじめ 0 V）を直列につなぎます。(1) スイッチを入れた直後の電流、(2) 6 秒後の電圧、(3) 10 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-3} = 0.050$、$e^{-5} = 0.0067$）。

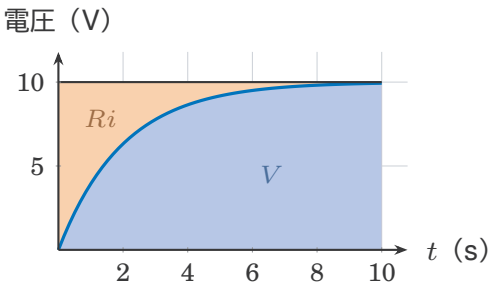
考え方　⑦の充電の式 $V = E(1 - e^{-t/RC})$、$i = \dfrac{E}{R}e^{-t/RC}$。$\tau = 2\,\mathrm{s}$ なので、6 秒は 3τ、10 秒は 5τ。

式　(1) $t = 0$ で $i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{10\,\mathrm{V}}{20\,000\,\Omega} = 0.0005\,\mathrm{A} = 0.5\,\mathrm{mA}$

(2) $V = 10(1 - e^{-3}) = 10 \times (1 - 0.050) = 9.50$

(3) $V = 10(1 - e^{-5}) = 10 \times (1 - 0.0067) = 9.93$

答え　(1) 0.5 mA、(2) 約 9.5 V (95 %)、(3) 約 9.93 V (99.3 %)



電池の 10 V は、いつも抵抗の電圧 Ri（オレンジ）とコンデンサーの電圧 V（青）に分かれています（$E = Ri + V$）。はじめは全部が抵抗にかかり、時間がたつと、だんだんコンデンサーへ移っていきます。

じぶんでとこう 7

$E = 5\,\mathrm{V}$ の電池、$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 1000\,\mu\mathrm{F}$（はじめ 0 V）を直列につなぎます。(1) 時定数、(2) スイッチを入れた直後の電流、(3) 3 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

例題 8　C を 2 倍にすると

例題 7 の回路（$E = 10\,\mathrm{V}$、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$）で、コンデンサーを $200\,\mu\mathrm{F}$ にかえます。(1) 時定数、(2) 2 秒後の電圧、(3) 最後の電圧は、それぞれどう変わりますか（$e^{-1} = 0.368$、$e^{-0.5} = 0.607$）。

考え方　$\tau = RC$ は C に比例する。最後の値 E には C が入っていない。

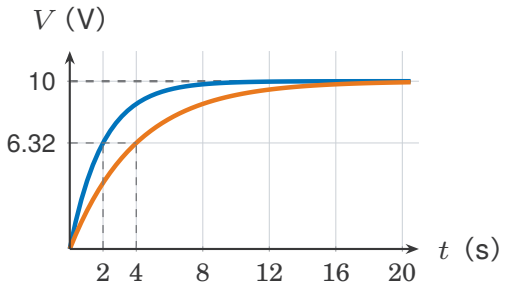
式　(1) $\tau = 20\,000\,\Omega \times 0.0002\,\mathrm{F} = 4\,\mathrm{s}$（2 秒の 2 倍）

(2) $C = 100\,\mu\mathrm{F}$：$10(1 - e^{-2/2}) = 10 \times (1 - 0.368) = 6.32$

$C = 200\,\mu\mathrm{F}$：$10(1 - e^{-2/4}) = 10 \times (1 - 0.607) = 3.93$

(3) どちらも $E = 10\,\mathrm{V}$

答え　(1) 2 秒→ 4 秒（2 倍）、(2) 約 6.3 V →約 3.9 V、(3) 10 V のまま



青は $C = 100\,\mu\mathrm{F}$（$\tau = 2\,\mathrm{s}$）、オレンジは $200\,\mu\mathrm{F}$（$\tau = 4\,\mathrm{s}$）。同じ 63 % に届く時刻が 2 秒から 4 秒になり、グラフは横に 2 倍のびた形です。たまる「量」の目標 E は同じで、たまる「速さ」だけが変わります。R を 2 倍にしても、$\tau = RC$ なので同じことが起きます。

じぶんでとこう 8

例題 7 の回路で、抵抗を $10\,\mathrm{k\Omega}$（半分）にかえます。(1) 時定数、(2) 2 秒後の電圧、(3) 最後の電圧は、それぞれどうなりますか（$e^{-2} = 0.135$）。

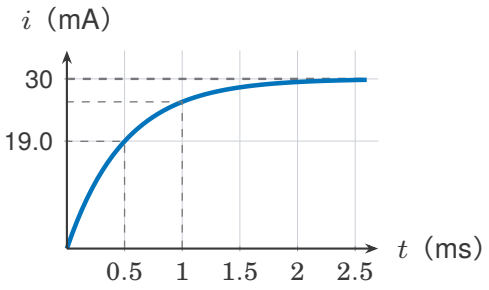
例題 9　RL の電流

12 V で動くリレーのコイルは、抵抗 400 Ω、インダクタンス 0.2 H です。スイッチを入れたとき、最後の電流、時定数、1 ミリ秒（ms）後の電流を求めましょう（$e^{-2} = 0.135$）。

考え方　⑦の RL の式 $i = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$、$\tau = \dfrac{L}{R}$。

式
$$\frac{E}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 0.03\,\mathrm{A} = 30\,\mathrm{mA}$$
$$\tau = \frac{0.2\,\mathrm{H}}{400\,\Omega} = 0.0005\,\mathrm{s} = 0.5\,\mathrm{ms}$$
$1\,\mathrm{ms} = 2\tau$ なので $i = 30 \times (1 - e^{-2}) = 30 \times 0.865 = 25.9$

答え　最後は 30 mA、時定数 0.5 ms、1 ms 後は約 26 mA



リレーのコイルの電流は、スイッチを入れてから 0.5 ms で 19 mA（63 %）、1 ms で 26 mA（86 %）、2.5 ms（5τ）でほぼ 30 mA になります。リレーが「カチッ」と動くのは、電流がある大きさをこえたときなので、ほんの少しおくれて動きます。

じぶんでとこう 9

$E = 6\,\mathrm{V}$、$R = 20\,\Omega$、$L = 0.1\,\mathrm{H}$ を直列につなぎ、スイッチを入れます。最後の電流、時定数、時定数だけたったときの電流を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

例題 10 はかった値から時定数を求める

冷めていく物の、部屋との温度差をはかると、はじめ 40℃、12 分後に 10℃でした。時定数を求めましょう（$\ln 4 = 1.386$）。

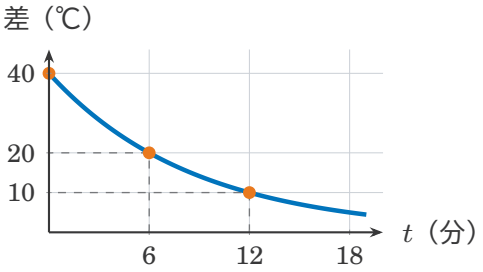
考え方 差は $e^{-t/\tau}$ 倍になる（⑤）。12 分で $\dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$ 倍になったことから τ を求める。

式 $40e^{-12/\tau} = 10$ より $e^{-12/\tau} = \dfrac{1}{4}$

両辺の ln をとる：$-\dfrac{12}{\tau} = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$

$\tau = \dfrac{12}{\ln 4} = \dfrac{12}{1.386} = 8.66$

答え 約 8.7 分



$\dfrac{1}{4}$ は「半分の半分」なので、12 分は半減期の 2 回分です。半減期は 6 分（40℃→ 20℃→ 10℃）。⑤の③で、$\tau = \dfrac{6}{0.693} = 8.66$ 分と求めても同じです。

じぶんでとこう 10

部屋との温度差が、はじめ 60℃、30 分後に 15℃でした。時定数を求めましょう（$\ln 4 = 1.386$）。

例題 11　待ち時間と回数の確率

ガイガーカウンターが、平均して 10 秒に 3 回鳴ります（$\lambda = 0.3$ 回/秒）。(1) 10 秒間に 1 回も鳴らない確率、(2) 10 秒間にちょうど 1 回鳴る確率、(3) 次に鳴るまで 5 秒より長く待つ確率を求めましょう（$e^{-3} = 0.0498$、$e^{-1.5} = 0.223$）。

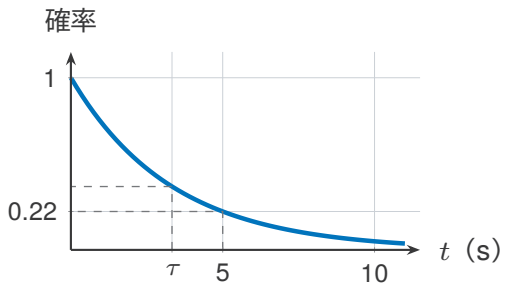
考え方　⑨の $P_0 = e^{-\lambda t}$、$P_1 = \lambda t\, e^{-\lambda t}$。待ち時間が t より長い確率は $e^{-\lambda t}$。

式　(1) $\lambda t = 0.3 \times 10 = 3$。$P_0 = e^{-3} = 0.0498$

(2) $P_1 = \dfrac{3^1}{1!} e^{-3} = 3 \times 0.0498 = 0.149$

(3) $\lambda t = 0.3 \times 5 = 1.5$。$e^{-1.5} = 0.223$

答え　(1) 約 5 %、(2) 約 15 %、(3) 約 22 %



「次に鳴るまで t 秒より長く待つ確率」$e^{-0.3t}$ のグラフです。冷めるお湯の差のグラフと同じ形です。平均の待ち時間 $\tau = 3.3$ 秒より長く待つことも、37 % あります。

じぶんでとこう 11

ある窓口には、平均して 1 分に 2 人がやって来ます（$\lambda = 2$ 人/分。来る時刻はばらばら）。(1) 1 分間にだれも来ない確率、(2) 1 分間にちょうど 1 人来る確率、(3) 次の人が来るまで 30 秒より長く待つ確率を求めましょう（$e^{-2} = 0.135$、$e^{-1} = 0.368$）。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

積分定数を、e の外に足してしまう

✕ $\ln u = -0.05t + C$ だから $u = e^{-0.05t} + C$

○ $\ln u = -0.05t + C$ だから $u = e^{-0.05t+C} = Ae^{-0.05t}$

ln をもどすときは、右辺の全部を e の肩にのせます。$e^{p+q} = e^p \times e^q$ なので、C は「たし算」ではなく「かけ算」の定数 $A = e^C$ になります。

まちがえやすいところ

$e^{-t/\tau}$ と $e^{-\tau t}$ を取りちがえる

✕ $\tau = 2\,\mathrm{s}$ なので $V = 10e^{-2t}$

○ $\tau = 2\,\mathrm{s}$ なので $V = 10e^{-t/2}$

e の肩は単位のない数です。t〔s〕を τ〔s〕でわれば単位が消えますが、かけると s^2 が残ります。時定数が大きいほどゆっくりへるので、τ は分母です。

⚠ まちがえやすいところ

e だけにする前に ln をとる

✕　$20+60e^{-0.05t}=50$ の両辺の ln をとって、
$\ln 20+\ln 60-0.05t=\ln 50$ とする

○　$60e^{-0.05t}=30$、$e^{-0.05t}=\dfrac{1}{2}$ にしてから ln をとる

$\ln(a+b)$ は $\ln a+\ln b$ になりません（5-14）。たし算の 20 を先に移し、60 でわって、e の項だけを残してから ln をとります。

⚠ まちがえやすいところ

温まるときの符号

✕　5℃から 20℃へ温まるので $T=20+15e^{-t/10}$

○　$T=20+(5-20)e^{-t/10}=20-15e^{-t/10}$

$+15$ にすると、$t=0$ で 35℃になり、はじめの 5℃に合いません。「はじめの差」は「はじめ − 目標」なので、温まるときはマイナスです。$t=0$ を入れて確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

時定数だけたてば終わる？

✕　$\tau=20$ 分なので、20 分たつと部屋の温度になる

○　20 分では、差の 63 % がへるだけ（37 % が残る）

時定数は「はじめの速さのままなら目標に届く時間」です。じっさいには速さがおそくなるので、τ では届きません。ほぼ終わる（残り 1 % より少ない）のは 5τ です（⑤）。

⚠ まちがえやすいところ

k や μ を忘れてかける

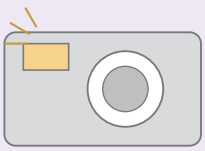
✕ $20\,\mathrm{k\Omega} \times 100\,\mu\mathrm{F}$ なので $RC = 20 \times 100 = 2000$ 秒

○ $20\,000\,\Omega \times 0.0001\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$

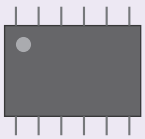
k は 1000 倍、μ は 100 万分の 1 倍です。数になおしてからかけます。$\mathrm{k} \times \mu = 1000 \times 0.000001 = 0.001$ なので、「k Ω × μ F の答えは ms（ミリ秒）」と覚えておくと、まちがいに気づけます（$20 \times 100 = 2000\,\mathrm{ms} = 2\,\mathrm{s}$）。

物理・工学ではこう使う

- **カメラのフラッシュ**
  フラッシュは、電池で大きなコンデンサー（数百 μ F ほど）を数百ボルトまで充電し、1000 分の 1 秒ほどで一気に放電して光ります。充電には抵抗を通すので、時定数 RC の数倍、数秒かかります。続けてフラッシュをたけないのは、このためです。



- **マイコンのリセット回路**
  電子機器の頭脳であるマイコン（小さなコンピュータ）は、電源を入れた直後、電圧が安定するまで動き出してはいけません。そこで、抵抗とコンデンサーで「ゆっくり上がる電圧」を作り、それがある値をこえたら動き出すようにする回路があります。待つ時間は、時定数 RC で決めます。



物理・工学ではこう使う

- **予測式の体温計**
  体温計の先が体温に追いつくには時間がかかります（⑥）。「予測式」の電子体温計は、はじめの十数秒の温度の上がり方から、最後に落ち着く温度（T_∞）を計算して表示します。どのように計算しているかは製品によってちがいますが、「目標に近づく曲線」の形を知っているから、先を予想できるのです。

- **放射性炭素で年代をはかる**
  生き物の体の中の炭素 14 は、死んだあと、半減期約 5730 年でへっていきます。時定数は $\tau = \dfrac{5730\text{ 年}}{\ln 2} \approx 8270$ 年です。残っている割合から、何年前のものかがわかります（物理シリーズ『原子と原子核』）。

章末問題

6-4 のまとめ

基本 ★★★

1 部屋の温度は 25 ℃。お湯が $\dfrac{dT}{dt} = -0.1(T-25)$（$t$ は分）にしたがって冷めます。はじめ 85 ℃です。(1) 55 ℃になるのは何分後ですか（$\ln 2 = 0.693$）。(2) 10 分後の温度を求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

2 $\dfrac{dy}{dt} = -0.4y$、$y(0) = 10$ を、変数分離で解きましょう。

3 6 ℃の飲み物を 26 ℃の部屋に置きます。温度は $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{26-T}{15}$（$t$ は分）にしたがいます。T を t の式で表し、16 ℃になるのは何分後か求めましょう（$\ln 2 = 0.693$）。

4 9 V までためた 20 μF のコンデンサーを、50 kΩ の抵抗につなぎます。時定数と、2 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-2} = 0.135$）。

5 $E = 6\,\mathrm{V}$、$R = 2\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 500\,\mu\mathrm{F}$（はじめ 0 V）の RC 回路の、(1) 時定数、(2) スイッチを入れた直後の電流、(3) 3 秒後の電圧は（$e^{-3} = 0.050$）？

6 $E = 10\,\mathrm{V}$、$R = 50\,\Omega$、$L = 0.5\,\mathrm{H}$ の RL 回路の、最後の電流、時定数、時定数だけたったときの電流は（$e^{-1} = 0.368$）？

チャレンジ ★★★★

7 60 L の水そうを 100 W のヒーターで温めます（熱容量 250 000 J/K、熱抵抗 0.1 K/W、部屋とはじめの水は 15 ℃）。(1) 最後の温度、(2) 時定数（何時間か）、(3) 時定数だけたったときの温度は（$e^{-1} = 0.368$）？

8 温度差が、はじめ 50 ℃、20 分後に 12.5 ℃。時定数は（$\ln 4 = 1.386$）？

9 放射線を数えると、平均して 1 分に 1.5 回でした。1 分間に (1) 1 回も数えない確率、(2) ちょうど 1 回数える確率を求めましょう（$e^{-1.5} = 0.223$）。

10 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 8 - 0.5y$、$y(0) = 0$ の、最後の値と時定数、y の式を求めましょう。

ふりかえり　できるようになったかな？

- [ ] 変数分離で、自分に比例してへる式を解ける。 → 138 ページ
- [ ] 時定数・半減期を使って、かかる時間を求められる。 → 143 ページ
- [ ] RC・RL の回路の式を立てて、時定数を求められる。 → 148 ページ

ソラ

お湯も電気も放射線も、「残りに比例してへる」同じ式だった！　次は、落ちる雨つぶの速さを調べよう。

第 1 部　微分方程式の入口

★★～★★★

6-5 空気抵抗と終端速度

道しるべ　この章の前に 5-5 5-13 6-2 6-4　この章の先に 6-11 6-15

この章でできるようになること

- ★★ 落ちる物にはたらく力から式を立て、終端速度を「速さが変わらなくなる」ことから求められる。
- ★★ 表計算で、空気の抵抗を受けて落ちる物の速さを計算できる。
- ★★★ 速さに比例する抵抗の式を解いて $v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau})$ を作り、エレベーターや RL 回路にも使える。

はてな？

雨つぶは、高さ 1000 m ほどの雲から落ちてきます。空気がなければ、地面に着くときの速さは秒速 140 m（時速 504 km）。新幹線よりずっと速く、当たったら大けがをしそうです。

でも、本当の雨つぶ（直径 2 mm）は、秒速 6.5 m ほどで落ちてきます。雨つぶは、なぜどこまでも速くならないのでしょう。

5-13 では、空気がないとして落ちる物を調べ、$v = gt$（速さは時間に比例してふえる）を求めました。この章では、空気の抵抗を入れて、落ちる物の式を立てます。速さが変わらなくなる「終端速度」は、式を解かなくても求められます。そして、6-4 の「目標の値へ近づく形」を使って、速さの変わり方を式で求めます。

やってみよう コーヒーフィルターを落とそう

用意するもの

紙のコーヒーフィルター（同じもの）7 枚、メジャー、スマートフォン（動画をとる）

1. かべに、床から 1.5 m の所に目じるしをつけよう。
2. 2.5 m ほどの高さから、フィルター 1 枚を口を上にして落とし、動画をとろう。
3. 動画をコマ送りして、目じるしから床までの時間を読もう。
4. 2 枚、4 枚を重ねて、同じようにはかろう。速さ＝ 1.5 m ÷時間を計算しよう。

1 枚　2 枚　4 枚

重ねた枚数	1	2	4
時間（s）	1.42	1.02	0.73
速さ（m/s）	1.06	1.47	2.05

ミナさんがはかった結果

フィルターは、手をはなしてすぐに一定の速さになり、目じるしから下はほぼ同じ速さで落ちていきました。重ねて重くすると、速く落ちます。でも、重さを 2 倍にしても速さは 2 倍にならず、約 1.4 倍（$1.47 \div 1.06 = 1.39$）です。4 倍にして、やっと約 2 倍（$2.05 \div 1.06 = 1.93$）。この「1.4」と「2」はどこから来るのでしょう。

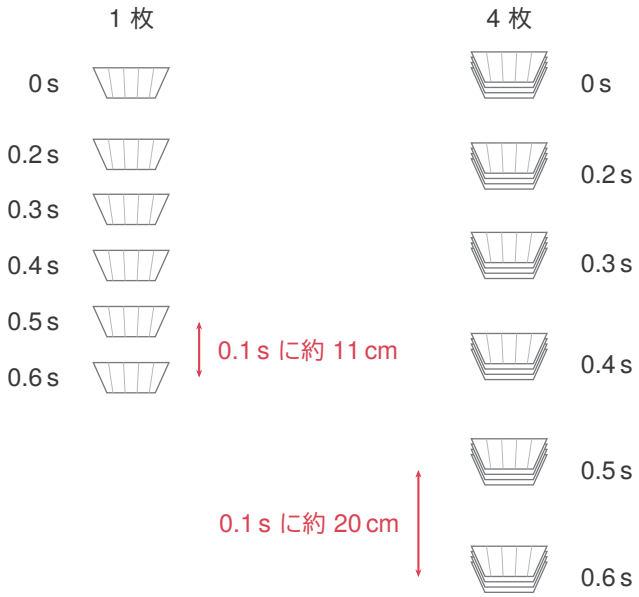


図 1　0.1 秒ごとのフィルターの位置（計算した図）。はじめの 0.2 秒ほどで間かくがそろい、そのあとは同じ速さで落ちる。4 枚は 1 枚の約 2 倍の間かく。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

5-5　運動の法則 $F = ma$：物にはたらく力の合計＝質量×加速度。加速度は速度の変わる速さ $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

5-13　空気がなければ、どんな物も同じ加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ で落ちる：$v = gt$、$x = \frac{1}{2}gt^2$、高さ h 落ちたときの速さ $\sqrt{2gh}$。

6-2　オイラー法：次の速さ＝今の速さ＋（今の加速度）× Δt。

6-4　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau}$ の答えは $y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)e^{-t/\tau}$。最後の値は $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ とおけばわかる。

数学の道具

1 落ちる物にはたらく力と、運動の式

空気の中を落ちる雨つぶには、2 つの力がはたらいています。

- **重力**（下向き）：大きさ mg。m〔kg〕は質量、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ は地球の上ではかった重力の加速度です。質量は「物の量」で、どこでも変わりません。重力 mg〔N〕は地球が物を引く力で、これを「重さ」ともいいます。
- **空気の抵抗**（上向き）：大きさを f〔N〕とします。落ちる物は空気をおしのけながら進むので、空気からおし返されます。抵抗の向きは、いつも動きと反対です。

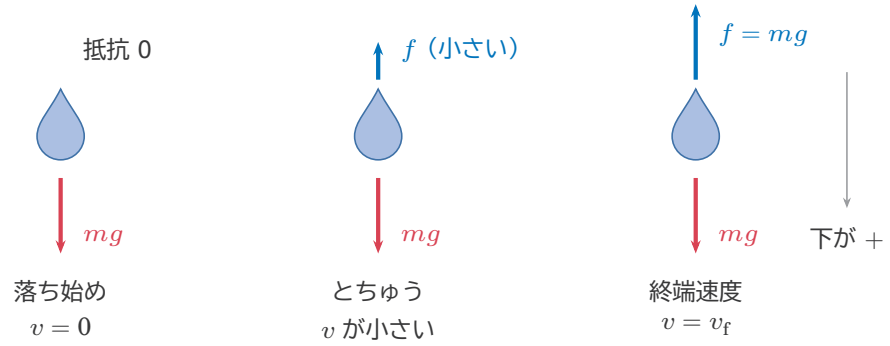


図 2　落ちる雨つぶにはたらく力。重力 mg（赤）はいつも同じ。抵抗 f（青）は速くなるほど大きくなり、やがて重力と同じ大きさになる。

下向きを $+$ にします（物理シリーズ『力学』と同じ）。下向きの力の合計は $mg - f$ です。5-5 の運動の法則「力の合計＝質量×加速度」に入れると、

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - f$$

これが、空気の中を落ちる物の式です。$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ が入っているので、6-1 で学んだ微分方程式です。空気がなければ $f = 0$ で、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$。5-13 の自由落下にもどります。

2 抵抗の大きさは、速さで変わる

抵抗は、止まっていれば 0 で、速くなるほど大きくなります。自転車で走ると、速いほど強い向かい風を感じるのと同じです。抵抗の大きさは、主に次の 2 つの形で表します。

形	式	どんなとき
速さに比例	$f = bv$	ごく小さい物がゆっくり動くとき（霧のつぶ、ほこり、ねばりけの強い油の中の小さな玉）
速さの 2 乗に比例	$f = cv^2$	ふつうの大きさの物が速く動くとき（雨つぶ、ボール、自動車、人）

b、c を**抵抗の係数**といいます。どちらになるか、いくつになるかは、物の大きさ・形・速さ、空気のねばりけで決まります（物理シリーズ『力学』）。文字を b、c にしたのは、ばね定数の k とまぎれないようにするためです（物理シリーズと同じ文字）。

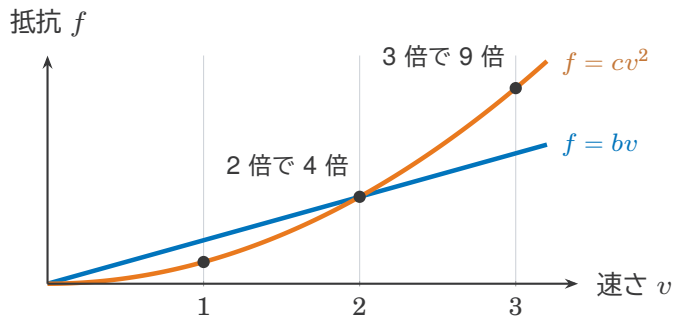


図 3　速さに比例する抵抗（青）は、速さが 2 倍で 2 倍。2 乗に比例する抵抗（オレンジ）は、速さが 2 倍で 4 倍、3 倍で 9 倍。

なぜ 2 乗になるの？

速く進む物は、2 つの理由で、空気から強くおし返されます。

1. 1 秒間におしのける空気の量が、速さに比例してふえる（2 倍の速さなら、2 倍の空気をおしのける）。
2. 1 つ 1 つの空気を、速さに比例して強くはじく（2 倍の速さなら、2 倍の勢いではじく）。

2 つが重なって、$2 \times 2 = 4$ 倍。だから、速さの 2 乗に比例します。小さい物がゆっくり動くときは、空気のねばりけでまわりの空気を引きずる力のほうが大きく、こちらは速さに比例します。

単位を確かめる

力 f の単位は N（ニュートン）です。$f = bv$ なら、$b = \dfrac{f}{v}$ の単位は $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \mathrm{N{\cdot}s/m}$。$f = cv^2$ なら、$c = \dfrac{f}{v^2}$ の単位は $\dfrac{\mathrm{N}}{(\mathrm{m/s})^2} = \mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$。$b$ と c は、単位のちがう別の量です。

3 解かなくてもわかる：終端速度

図 2 のように、落ち始めは速さが 0 なので、抵抗も 0。加速度は g です。速くなると抵抗がふえ、下向きの力の合計 $mg - f$ は小さくなるので、速くなり方がにぶくなります。やがて抵抗が重力と同じ大きさになると、力の合計が 0 になり、速さはもう変わりません。この速さを**終端速度**（しゅうたんそくど）といいます。

速さが変わらないので、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ です。6-4 の「最後の値」と同じ考えで、式の左辺を 0 とおきます。

$0 = mg - bv_\mathrm{f}$	速さに比例するとき：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ とおく
$bv_\mathrm{f} = mg$	bv_f を左辺へ移し、左右を入れかえる
$v_\mathrm{f} = \dfrac{mg}{b}$	両辺を b でわる
$0 = mg - cv_\mathrm{t}^2$	2 乗に比例するとき：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ とおく
$cv_\mathrm{t}^2 = mg$	cv_t^2 を左辺へ移し、左右を入れかえる
$v_\mathrm{t}^2 = \dfrac{mg}{c}$	両辺を c でわる
$v_\mathrm{t} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$	正のほうの平方根をとる（3-3）

2 つの終端速度を区別するため、速さに比例するときは v_f、2 乗に比例するときは v_t と書きます（物理シリーズと同じ書き方）。微分方程式を解かなくても、「変わらなくなる速さ」だけなら、かけ算・わり算と平方根で求められます。

速さに比例　$v_{\mathrm{f}} = \dfrac{mg}{b}$　　速さの 2 乗に比例　$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$

はてな？の答え

雨つぶは、速くなるほど空気の抵抗が大きくなり、抵抗が重力とつり合う終端速度に達すると、もう速くなりません。直径 2 mm の雨つぶでは、質量 $m = 4.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}$（0.0000042 kg）、抵抗の係数 $c \approx 9.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$（形と大きさから計算した値）です。$10^{-6} \div 10^{-7} = 10$ なので、

$$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{4.2 \times 10^{-6} \times 9.8}{9.7 \times 10^{-7}}} = \sqrt{\frac{4.2 \times 9.8 \times 10}{9.7}} = \sqrt{42.4} \approx 6.5\,\mathrm{m/s}$$

です。雨つぶは、落ち始めてから数秒、十数 m のうちにこの速さになり、残りの 1000 m 近くを一定の速さで落ちてきます（はかった値：直径 2 mm で約 6.5 m/s、5 mm で約 9 m/s。1949 年、ガンとキンザーの測定）。

つぶの大きさで、終端速度はどれくらい変わるのでしょう。はかった値をくらべます。

つぶ	霧	霧雨	小雨	雨	大つぶ
直径（mm）	0.02	0.2	1	2	5
終端速度（m/s）	0.012	0.7	4.0	6.5	9.1
1000 m に	約 23 時間	約 24 分	約 4 分	約 2.6 分	約 1.8 分

表 1　つぶの大きさと終端速度（霧は⑤で計算する値、ほかはガンとキンザーの測定、1949 年）。1000 m ÷終端速度で、落ちる時間を計算した。

小さいつぶほど、ずっとゆっくり落ちます。霧のつぶは 1000 m 落ちるのに丸 1 日ほどかかるので、空に浮かんで見えます。

重い物は速く落ちる（空気があるとき）

同じ形・同じ大きさで、質量だけ 2 倍にすると、

- 速さに比例する抵抗なら、$v_{\mathrm{f}} = \dfrac{mg}{b}$ は m に比例するので、2 倍。
- 2 乗に比例する抵抗なら、$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$ は $\sqrt{m}$ に比例するので、$\sqrt{2} \approx 1.41$ 倍。4 倍なら $\sqrt{4} = 2$ 倍。

やってみようのフィルターは、重ねても形と大きさがほとんど同じなので、c は同じで、質量だけがふえます。2 枚で約 1.4 倍、4 枚で約 2 倍になったのは、2 乗に比例する抵抗だったからです（フィルターの 4 枚で 1.93 倍と、2 倍より少し小さかったのは、はかったときのずれです）。

空気がなければ（5-13）、重い物も軽い物も同じ速さで落ちます。空気の中で重い物が速く落ちるのは、重い物ほど「抵抗とつり合うまで」速くなれるからです。

4 表計算で、落ちる速さを計算する

終端速度に「どのように」近づくかは、6-2 のオイラー法で計算できます。スカイダイバー（質量 80 kg、手足を広げた姿勢で $c = 0.26\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$）を考えます。式の両辺を m でわると、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v^2 = 9.8 - 0.00325\,v^2$$

（$\dfrac{c}{m} = \dfrac{0.26}{80} = 0.00325$）。終端速度は $v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\dfrac{80 \times 9.8}{0.26}} = \sqrt{3015} \approx 54.9\,\mathrm{m/s}$（時速約 198 km）です。

$\Delta t = 1$ 秒として、6-2 と同じ手順でくり返します。

1. 今の速さから、今の加速度 $a = 9.8 - 0.00325\,v^2$ を計算する。
2. 次の速さ＝今の速さ＋ $a \times \Delta t$。

	A	B	C	D
1	t（s）	v（m/s）	a（m/s^2）	空気なし $9.8t$
2	0	0	9.80	0
3	1	9.80	9.49	9.8
4	2	19.29	8.59	19.6
5	3	27.88	7.27	29.4
6	4	35.15	5.78	39.2
7	5	40.94	4.35	49.0
8	6	45.29	3.13	58.8
9	7	48.42	2.18	68.6
10	8	50.60	1.48	78.4
11	9	52.08	0.98	88.2
12	10	53.07	0.65	98.0

表 2　$\Delta t = 1$ 秒のオイラー法。C 列の式は `=9.8-0.00325*B2^2`、B 列の式は `=B2+C2*1`。

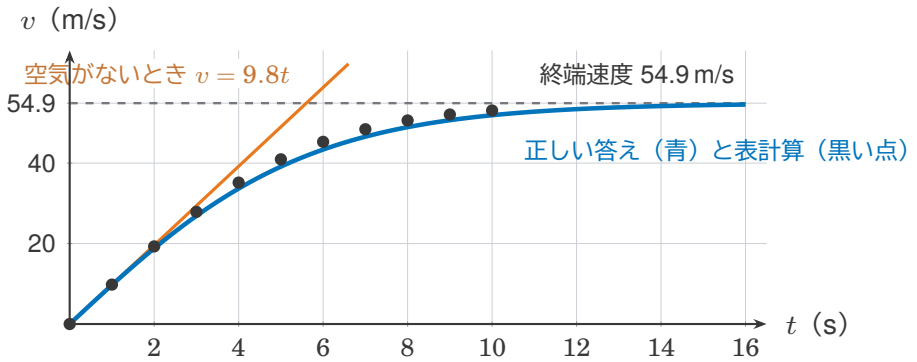


図 4　スカイダイバーの速さ。はじめは空気がないときとほとんど同じに速くなるが、だんだん速くなり方がにぶくなり、54.9 m/s に近づく。

表計算の値は、正しい値（6-11 で式で求める）より少し大きめです。$\Delta t = 0.1$ 秒にすると、正しい値とほぼ同じになります。

時間（s）	1	2	3	5	10
オイラー法 $\Delta t = 1$	9.80	19.29	27.88	40.94	53.07
オイラー法 $\Delta t = 0.1$	9.71	18.86	26.98	39.30	52.02
正しい値（6-11）	9.70	18.81	26.88	39.13	51.90

表 3　Δt を小さくすると、正しい値に近づく（6-2）。10 秒で終端速度の約 95 %。

はじめの 1 秒は、空気がないとき（9.8 m/s）とほとんど同じです。速さが小さいうちは、抵抗が小さいからです。10 秒ほどで、ほぼ終端速度に達します。

せいかくに言うと

2 乗に比例する抵抗の式 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv^2$ も、式で解くことができます。答えは $v = v_\mathrm{t} \tanh \dfrac{gt}{v_\mathrm{t}}$ で、tanh（ハイパボリック・タンジェント）という関数を使います。6-11 で学びます。上の表の「正しい値」は、この式で計算しました。

5 速さに比例する抵抗の式を解く

★★★ 速さに比例する抵抗なら、式は $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv$ です。これは、6-4 の「目標の値へ近づく形」にできます。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv$$ 運動の式（下向きが +）

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{b}{m}v$$ 両辺を m でわる

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{m}\left(\frac{mg}{b} - v\right)$$ 右辺を $\frac{b}{m}$ でくくる（$g = \frac{b}{m} \times \frac{mg}{b}$）

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_\mathrm{f} - v}{\tau}$$ $v_\mathrm{f} = \frac{mg}{b}$、$\tau = \frac{m}{b}$ とおく

最後の行は、6-4 ④の形そのものです（目標の値が v_f）。はじめ止まっていた（$v_0 = 0$）とすると、6-4 の答えの形 $y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)e^{-t/\tau}$ に、$y_\infty = v_\mathrm{f}$、$y_0 = 0$ を入れて、

$$v = v_\mathrm{f}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad v_\mathrm{f} = \frac{mg}{b},\quad \tau = \frac{m}{b}$$

これは、物理シリーズ『力学』の力-2 で予告した答えです。6-4 で学んだように、τ で終端速度の 63 %、3τ で 95 %、5τ で 99.3 % に達します。

変数分離でも解ける

終端速度との差 $u = v_{\mathrm{f}} - v$ を主役にします（v_{f} は定数なので $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$）。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{u}{\tau}$$

上の式の両辺に -1 をかけ、$v_{\mathrm{f}} - v = u$ とおく

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

変数分離（6-4 ③）：両辺を u でわって積分

$$\ln u = -\frac{t}{\tau} + C$$

左辺は $\ln u$（$u > 0$）

$$u = Ae^{-t/\tau}$$

e の〇乗にもどし、$e^{C} = A$ とおく

$$A = v_{\mathrm{f}}$$

$t = 0$ で $v = 0$、つまり $u = v_{\mathrm{f}}$

$$v = v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{f}}e^{-t/\tau}$$

$v = v_{\mathrm{f}} - u$ にもどす

同じ答え $v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau})$ になりました。

はじめは $v \approx gt$ になっている？

t が τ よりずっと小さいとき、5-8 の近似 $e^{-x} \approx 1 - x$ を使うと、

$$v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau}) \approx v_{\mathrm{f}}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right) = v_{\mathrm{f}} \times \frac{t}{\tau} = \frac{mg}{b} \times \frac{b}{m}\,t = gt$$

落ち始めは、空気がないとき（$v = gt$）と同じです。抵抗がまだ小さいからで、図の表計算とも合っています。

τ の意味と単位

$\tau = \dfrac{m}{b}$ の単位は、$\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{N{\cdot}s/m}} = \dfrac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{N{\cdot}s}}$ です。$\mathrm{N} = \mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$（$F = ma$ から）なので、

$$\frac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{kg{\cdot}m/s^2} \times \mathrm{s}} = \frac{1}{1/\mathrm{s}} = \mathrm{s}$$

たしかに時間です。また、$\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{mg}{b} \div g = \dfrac{v_\mathrm{f}}{g}$ なので、τ は「加速度 g のまま速くなったら、終端速度に着く時間」です（6-4 の「はじめの接線が目標に届く時間」）。

質量や抵抗の係数を 2 倍にすると

$v_\mathrm{f} = \dfrac{mg}{b}$ と $\tau = \dfrac{m}{b}$ の式から、答えの曲線がどう変わるかを読みます。

- 質量 m を 2 倍：v_f も τ も 2 倍。速く落ちるが、そこに近づくのに 2 倍の時間がかかる。
- 抵抗の係数 b を 2 倍：v_f も τ も $\frac{1}{2}$ 倍。おそい速さに、すばやく落ち着く。

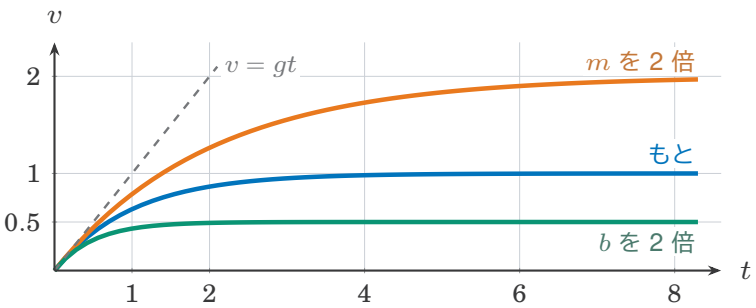


図 5 速さに比例する抵抗で落ちる物の速さ（横軸は「もとの τ の何倍か」、たて軸は「もとの v_f の何倍か」）。どの曲線も、落ち始めは灰色の点線 $v = gt$（空気がないとき）にそって速くなる。

どの曲線も、はじめは同じ傾き g で始まります。落ち始めは抵抗が小さく、どれも空気がないときと同じに速くなるからです（「はじめは $v \approx gt$」）。

もっと知りたい ★★★

霧のつぶの $\frac{b}{m}$ を計算する（ストークスの法則）

小さな球が、ねばりけのある空気や液体の中をゆっくり動くとき、抵抗の係数は

$$b = 6\pi\eta r$$

になることを、イギリスのストークスが 1851 年に示しました（ストークスの法則）。r は球の半径、η（イータ）は空気のねばりけ（粘度）で、約 $1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$ です。水の球の質量は、密度 $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ に球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ をかけたものです。

$$\frac{b}{m} = \frac{6\pi\eta r}{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3} \qquad b \text{ と } m \text{ を入れた}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{9\eta}{2\rho r^2} \qquad \pi \text{ と } r \text{ を約分（} 6 \div \tfrac{4}{3} = \tfrac{9}{2} \text{）}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{9 \times 1.8 \times 10^{-5}}{2 \times 1000 \times (10^{-5})^2} = 810 \qquad r = 10\,\mu\mathrm{m} = 10^{-5}\,\mathrm{m} \text{ を入れた}$$

r^2 が分母にあるので、半径が半分なら $\frac{b}{m}$ は 4 倍、終端速度は $\frac{1}{4}$ です。

霧のつぶが浮かんで見えるわけ

半径 $0.01\,\mathrm{mm}$（$10\,\mu\mathrm{m}$）の霧のつぶは、空気のねばりけによる抵抗を受けて落ちるので、速さに比例する抵抗になります。このつぶでは $\dfrac{b}{m} = 810\,(1/\mathrm{s})$ です（つぶの大きさと空気のねばりけから計算した値。すぐ前のもっと知りたい）。

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{mg}{b} = \frac{g}{b/m} = \frac{9.8}{810} \approx 0.012\,\mathrm{m/s}, \qquad \tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{810} \approx 0.0012\,\mathrm{s}$$

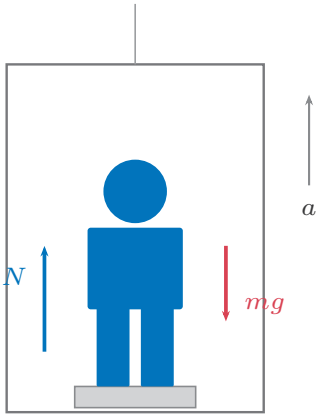
1000 分の 1 秒ほどで終端速度になり、1 秒に $1.2\,\mathrm{cm}$ しか落ちません。$1\,\mathrm{m}$ 落ちるのに 80 秒以上かかります。わずかな上向きの風でも落ちなくなるので、霧や雲は空に浮かんで見えるのです。

6 エレベーターの中の体重計

5-5 で「くわしくは第 6 巻で」と予告した、エレベーターの中の体重計を、運動の式で調べます。ここでは**上向きを** $+$ にします（エレベーターが上へ動くので）。体重計に乗った人（質量 m）にはたらく力は、

- 重力 mg（下向き）
- 体重計が足をおし上げる力 N（上向き）

の 2 つです。人はエレベーターといっしょに動くので、人の加速度はエレベーターの加速度 a と同じです。上向きの力の合計は $N - mg$ なので、運動の法則から



$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = N - mg$$

体重計は、足をおす力 N をはかり、それを g でわって「kg」で表示します。止まっているとき（$a = 0$）は $N = mg$ なので、ふだんの体重 m を表示します。

$$ma = N - mg \qquad \text{加速度 } a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$N = m(g + a) \qquad mg \text{ を左へ移す}$$

$$\frac{N}{g} = m \times \frac{g + a}{g} \qquad \text{体重計の目もり（両辺を } g \text{ でわる）}$$

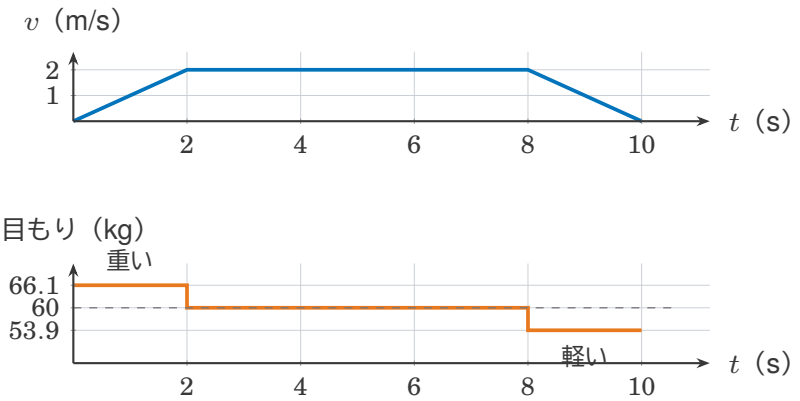


図 6　上：上へ動くエレベーターの速さ（5-5 と同じ）。下：60 kg の人の体重計の目もり（0～2 秒は 66.1 kg、2～8 秒は 60 kg、8～10 秒は 53.9 kg）。

60 kg の人の目もりは、上へ動き出すとき（$a = 1\,\mathrm{m/s^2}$）と止まるとき（$a = -1\,\mathrm{m/s^2}$）で、

$$60 \times \frac{9.8+1}{9.8} = 66.1\ \mathrm{kg}, \qquad 60 \times \frac{9.8-1}{9.8} = 53.9\ \mathrm{kg}$$

です。体重計が表示するのは、速さではなく加速度で決まる量です。5-5 で「体が感じていたのは加速度だった」と書いたのは、このことです。

逆に、体重計の目もりを時間ごとに記録しておけば、$a = \dfrac{N}{m} - g$ から加速度がわかり、それを積分すれば（6-3）速さが、もう 1 回積分すれば位置がわかります。スマートフォンの中の加速度センサーも、このしくみで動きをはかっています。

7 電気の終端速度：RL 回路

6-4 ⑦で、電池 E、抵抗 R、コイル L を直列にした回路の式 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E - Ri$ を作りました。速さに比例する抵抗を受けて落ちる物の式と、ならべてみます。

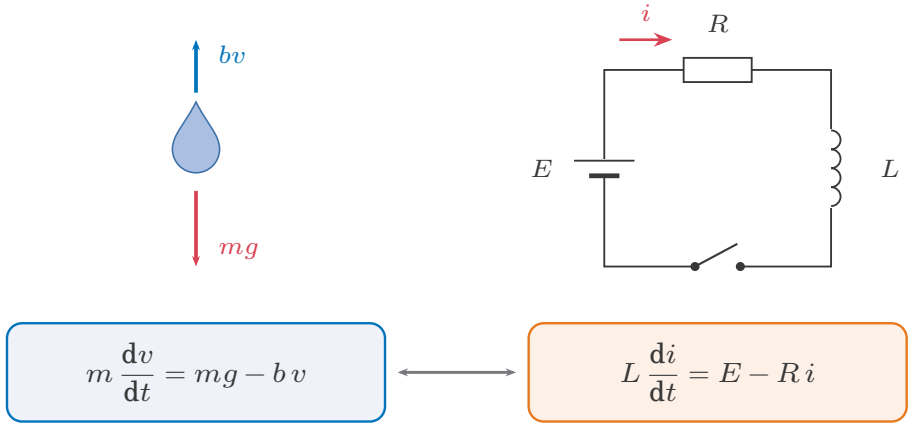


図 7　左：速さに比例する抵抗を受けて落ちる物。右：RL 回路。2 つの式は、文字を入れかえると同じ形になる。

役わり	落ちる物	RL 回路	意味
変わる量	速さ v	電流 i	流れの速さ
動きにくさ（慣性）	質量 m	インダクタンス L	急には変えられない
おす力	重力 mg	電池の電圧 E	一定でおし続ける
じゃまするもの	抵抗の係数 b	抵抗 R	流れに比例してじゃまする
最後の値	$v_{\mathrm{f}} = \dfrac{mg}{b}$	$\dfrac{E}{R}$	おす力＝じゃま
時定数	$\dfrac{m}{b}$	$\dfrac{L}{R}$	慣性÷じゃま

表 4　落ちる物と RL 回路の対応。

RL 回路の最後の電流 $\dfrac{E}{R}$ は、「電流の終端速度」です。スイッチを入れた直後は、コイルが電流の急な変化をきらうので、電流は 0 から始まります。落ちる物が、はじめ止まっていて、急には速くなれないのと同じです。電流がふえると抵抗の電圧 Ri がふえ、電池の電圧 E と同じになったところで、電流は変わらなくなります。

このように、ちがう物でも式の形が同じなら、同じ答えになります。この対応は、6-15 で、ばね・電気・熱をまとめるときにもう一度使います。

コラム　雨つぶの形は「しずく形」ではない

絵本などでは、雨つぶは上がとがった「しずく形」にかかれます。でも、空気の中を落ちている雨つぶは、小さいものは丸く、直径 2 mm をこえると、下からの空気におされて、下が平らな「まんじゅう形」になります。もっと大きくなると、下がへこんでパラシュートのような形になり、やがて分かれて小さなつぶになります。だから、とても大きな雨つぶはなく、終端速度も毎秒 9 m ほどでそれ以上大きくなりません。

1

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

速度に比例する抵抗を受けて鉛直に落下する質点の運動方程式は $m\dot{v} = mg - bv$ であり、初速度 0 の解は

$$v(t) = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau}), \qquad v_{\mathrm{f}} = mg/b, \quad \tau = m/b$$

である。

訳　「鉛直」は真下の向き。「質点」は大きさを考えない物。$\dot{v}$ は $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（5-5）。「初速度」は、はじめの速度。

たいせつ

落ちる物の式	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - f$　**（下向きが +、抵抗 f は動きと反対）**
終端速度	$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ **とおく：**$v_{\mathrm{f}} = \dfrac{mg}{b}(f = bv)$、$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}(f = cv^2)$
速さの式	$f = bv$ **なら** $v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau})$、$\tau = \dfrac{m}{b}$
体重計	$N = m(g + a)$　**（上向きが +）**

この章で出てきたことば

抵抗の係数　空気などの抵抗の大きさを決める数。$f = bv$ の b〔N·s/m〕、$f = cv^2$ の c〔N·s²/m²〕。

終端速度　抵抗が重力とつり合って、それ以上速くならなくなった速さ。

運動の式（運動方程式）　質量×加速度＝力の合計。$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ が入る微分方程式。

記号カード　初めて出た章 6-5

v_{f}、v_{t}

読み方　ブイ・エフ、ブイ・ティー
意味　終端速度。v_{f} は速さに比例する抵抗、v_{t} は速さの 2 乗に比例する抵抗のとき
英語　terminal velocity

記号カード　初めて出た章 6-5

b、c

読み方　ビー、シー
意味　抵抗の係数（$f = bv$、$f = cv^2$）。6-7 のダンパーの c とは別の量
英語　drag coefficient

例題でたしかめよう

例題 1　速さに比例する抵抗の終端速度

半径 10 μm の霧のつぶは、$\dfrac{dv}{dt} = 9.8 - 810\,v$（$v$ は m/s、t は秒）にしたがって落ちます。終端速度、時定数、終端速度で 1 m 落ちる時間を求めましょう。

考え方　終端速度は $\dfrac{dv}{dt} = 0$ とおく（③）。$\tau = \dfrac{m}{b}$ は、v の係数 810 $\left(= \dfrac{b}{m}\right)$ の逆数。

式　$0 = 9.8 - 810\,v_f$ より $v_f = \dfrac{9.8}{810} = 0.0121$（m/s）

$\tau = \dfrac{1}{810} = 0.00123$（s）

1 m 落ちる時間：$\dfrac{1\,\text{m}}{0.0121\,\text{m/s}} = 82.6\,\text{s}$

答え　約 0.012 m/s（1.2 cm/s）、約 0.0012 秒、約 83 秒

じぶんでとこう 1

半径 5 μm のもっと小さな霧のつぶは、$\dfrac{dv}{dt} = 9.8 - 3240\,v$ にしたがって落ちます。終端速度と時定数を求めましょう。また、終端速度で 1 m 落ちるのに何秒かかりますか。

例題 2　2 乗に比例する抵抗の終端速度

質量 80 kg のスカイダイバーが、手足を広げて落ちています。抵抗は $f = cv^2$、$c = 0.26\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ です。終端速度は何 m/s ですか。時速何 km ですか。

考え方　③の $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$。時速にするには 3600 s/h、1000 m/km を使う。

式　$v_t = \sqrt{\dfrac{80 \times 9.8}{0.26}} = \sqrt{\dfrac{784}{0.26}} = \sqrt{3015.4} = 54.9$

$54.9\,\mathrm{m/s} \times 3600\,\mathrm{s/h} = 197\,640\,\mathrm{m/h} = 197.6\,\mathrm{km/h}$

答え　約 54.9 m/s、時速約 198 km

じぶんでとこう 2

例題 2 のスカイダイバーがパラシュートを開くと、$c = 30\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ になりました（質量はそのまま 80 kg）。終端速度は何 m/s ですか。

例題 3　質量を変えると

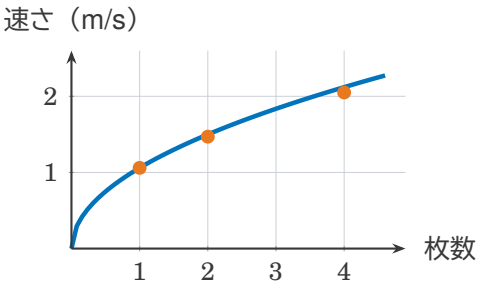
形と大きさが同じで、2 乗に比例する抵抗を受けて落ちる物があります。質量を 4 倍にすると、終端速度は何倍になりますか。また、質量を 2 倍にすると何倍ですか（$\sqrt{2} = 1.41$）。

考え方　$v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$ で、g と c（形と大きさで決まる）は変わらない。v_t は $\sqrt{m}$ に比例する。

式　4 倍：$\sqrt{\dfrac{4m \times g}{c}} = \sqrt{4} \times \sqrt{\dfrac{mg}{c}} = 2 \times v_t$

2 倍：$\sqrt{\dfrac{2m \times g}{c}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{mg}{c}} = 1.41 \times v_t$

答え　4 倍で 2 倍、2 倍で約 1.41 倍



やってみようのフィルターの結果（オレンジの点）を、$1.06\sqrt{\text{枚数}}$ の曲線（青）とくらべます。点は曲線の近くに並びます。終端速度は質量の $\sqrt{\ }$ に比例するので、質量をふやしても、速さはゆっくりとしかふえません。

じぶんでとこう 3

例題 3 と同じように、形と大きさが同じで、2 乗に比例する抵抗を受けて落ちる物があります。質量を 9 倍にすると、終端速度は何倍になりますか。また、質量を 16 倍にすると何倍ですか。

例題 4　表計算の 1 行を手で計算する

スカイダイバーの速さが $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.00325\,v^2$ にしたがいます。はじめ $v = 0$ として、$\Delta t = 1$ 秒のオイラー法で、1 秒後と 2 秒後の速さを求めましょう。

考え方　④の手順。今の速さから加速度を計算し、次の速さ＝今の速さ＋加速度× Δt。

式　0 秒：加速度 $9.8 - 0.00325 \times 0^2 = 9.8$

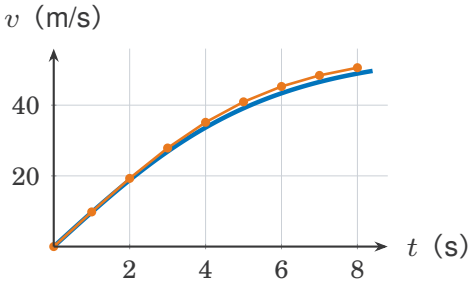
1 秒後の速さ：$0 + 9.8 \times 1 = 9.8$

1 秒：加速度 $9.8 - 0.00325 \times 9.8^2 = 9.8 - 0.00325 \times 96.04$

$= 9.8 - 0.312 = 9.488$

2 秒後の速さ：$9.8 + 9.488 \times 1 = 19.288$

答え　1 秒後 9.8 m/s、2 秒後約 19.3 m/s



オイラー法（オレンジ）は、1 秒ごとに「その時刻の加速度」の傾きでまっすぐ進む折れ線です。1 秒のあいだにも加速度は小さくなっていくので、正しい答え（青）より少し上にずれます。Δt を小さくすると、ずれも小さくなります（6-2）。

じぶんでとこう 4

バドミントンのシャトルの速さが $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.2\,v^2$ にしたがいます。はじめ $v = 0$ として、$\Delta t = 0.2$ 秒のオイラー法で、0.2 秒後と 0.4 秒後の速さを求めましょう。また、終端速度を求めましょう。

例題 5　速さの式を求める

例題 1 の霧のつぶ（$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 810\,v$）が、止まった状態から落ち始めます。$v$ を t の式で表し、3τ たったときの速さを求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

考え方　⑤の答え $v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau})$ に、例題 1 の v_{f} と τ を入れる。

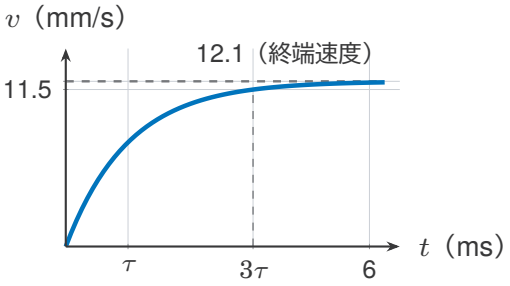
式　$v_{\mathrm{f}} = 0.0121$、$\tau = \dfrac{1}{810}$ なので $\dfrac{t}{\tau} = 810\,t$

$$v = 0.0121\,(1 - e^{-810t})$$

3τ では e^{-3} なので、$v = 0.0121 \times (1 - 0.050)$

$$= 0.0121 \times 0.95 = 0.0115$$

答え　$v = 0.0121(1 - e^{-810t})$、$3\tau$（約 0.0037 秒）で約 0.0115 m/s（終端速度の 95 %）



横軸をミリ秒（ms、1000 分の 1 秒）、たて軸を mm/s にしてかきました。単位をかえると、6-4 の「目標に近づく曲線」と同じ形です。3.7 ms で 95 %。人の目には、はじめから一定の速さで落ちているように見えます。

じぶんでとこう 5

じぶんでとこう 1 の霧のつぶ（$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 3240\,v$）が、止まった状態から落ち始めます。$v$ を t の式で表し、3τ たったときの速さを求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

例題 6　エレベーターの体重計

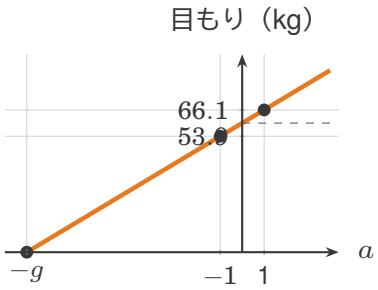
体重 60 kg の人が、エレベーターの中で体重計に乗っています。エレベーターが（1）上向きに $1\,\mathrm{m/s^2}$ で加速するとき、（2）上向きに動いていて、$1\,\mathrm{m/s^2}$ の大きさで減速する（加速度 $-1\,\mathrm{m/s^2}$）とき、体重計の目もりは何 kg ですか（$g = 9.8$）。

考え方　⑥の $\frac{N}{g} = m \times \frac{g+a}{g}$。上向きが +。減速するときは、加速度が下向き（−）。

式　（1）$60 \times \frac{9.8+1}{9.8} = 60 \times \frac{10.8}{9.8} = 66.1$

（2）$60 \times \frac{9.8+(-1)}{9.8} = 60 \times \frac{8.8}{9.8} = 53.9$

答え　（1）約 66.1 kg、（2）約 53.9 kg



60 kg の人の目もりと、加速度 a の関係です。a が 1 ふえるごとに約 6.1 kg ふえる直線です。もしケーブルが切れて $a=-g$（自由落下）になると、目もりは 0 です。体重計の上で「重さがなくなった」ように感じます（無重量）。

じぶんでとこう 6

体重 50 kg の人が、エレベーターの中で体重計に乗っています。加速度が（1）上向きに 1.5 m/s^2、（2）下向きに 1.5 m/s^2 のとき、目もりは何 kg ですか（$g=9.8$）。

例題 7　体重計の目もりから加速度を求める

体重 60 kg の人が、エレベーターの中で体重計に乗ると、目もりが 63.0 kg になりました。エレベーターの加速度の向きと大きさを求めましょう（$g=9.8$）。

考え方　⑥の $\dfrac{N}{g}=m\times\dfrac{g+a}{g}$ を、a について解く（逆向きの計算）。上向きが $+$。

式　$63.0=60\times\dfrac{9.8+a}{9.8}$

両辺を 60 でわる：$\dfrac{63.0}{60}=1.05=\dfrac{9.8+a}{9.8}$

両辺に 9.8 をかける：$9.8\times1.05=10.29=9.8+a$

9.8 を右辺から移す：$a=10.29-9.8=0.49$

答え　上向きに約 0.49 m/s^2（上へ動き出すとき、または下へ動いていて止まるとき）

じぶんでとこう 7

体重 50 kg の人が、エレベーターの中で体重計に乗ると、目もりが 46.0 kg になりました。エレベーターの加速度の向きと大きさを求めましょう（$g = 9.8$）。

例題 8　RL 回路の「終端速度」

6-4 のリレーのコイル（$E = 12\,\mathrm{V}$、$R = 400\,\Omega$、$L = 0.2\,\mathrm{H}$）で、(1) 最後の電流（電流の終端速度）、(2) 時定数、(3) スイッチを入れて 3τ たったときの電流を求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

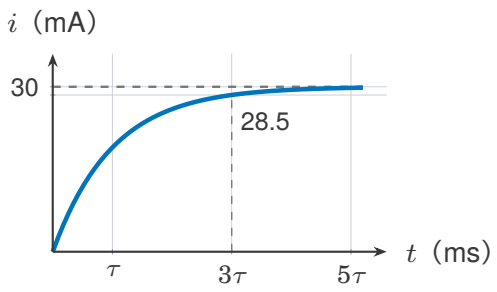
考え方　⑦の対応で、$v_\mathrm{f} = \dfrac{mg}{b}$ が $\dfrac{E}{R}$、$\tau = \dfrac{m}{b}$ が $\dfrac{L}{R}$。答えの形も $i = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$。

式　(1) $\dfrac{12\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 0.03\,\mathrm{A} = 30\,\mathrm{mA}$

(2) $\dfrac{0.2\,\mathrm{H}}{400\,\Omega} = 0.0005\,\mathrm{s} = 0.5\,\mathrm{ms}$

(3) $30 \times (1 - e^{-3}) = 30 \times 0.95 = 28.5$

答え　(1) 30 mA、(2) 0.5 ms、(3) 約 28.5 mA（1.5 ms 後）



電流は、霧のつぶの速さ（例題 5 のグラフ）とまったく同じ形でふえ、「電流の終端速度」30 mA に近づきます。時定数は霧のつぶ（1.2 ms）とリレー（0.5 ms）で同じくらいの短さです。

じぶんでとこう 8

$E = 24\,\mathrm{V}$、$R = 60\,\Omega$、$L = 0.3\,\mathrm{H}$ の RL 回路で、(1) 最後の電流、(2) 時定数、(3) スイッチを入れて 3τ たったときの電流を求めましょう ($e^{-3} = 0.050$)。

例題 9　力のつり合いで決まる最高速度

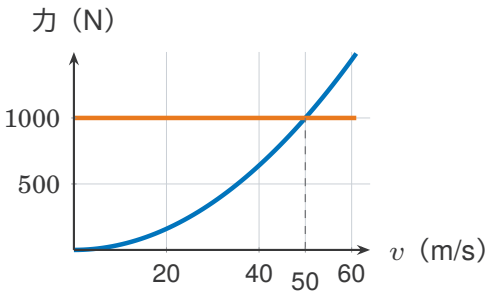
自動車の空気の抵抗は $f = cv^2$、$c = 0.4\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ とします。車輪が車を前へおす力が 1000 N のとき、空気の抵抗とつり合う速さ（それ以上速くならない速さ）は何 m/s ですか。時速何 km ですか（ほかの抵抗は考えない）。

考え方　終端速度と同じ考え。おす力と抵抗がつり合うと、加速度が 0 になる。重力 mg のかわりに、おす力 1000 N が入る。

式　$1000 = 0.4\,v^2$ より $v^2 = \dfrac{1000}{0.4} = 2500$、$v = \sqrt{2500} = 50$

$50\,\mathrm{m/s} \times 3600\,\mathrm{s/h} = 180\,000\,\mathrm{m/h} = 180\,\mathrm{km/h}$

答え　50 m/s（時速 180 km）



青は空気の抵抗 $0.4v^2$、オレンジはおす力 1000 N。50 m/s より遅いと、おす力のほうが大きいので速くなり、速いと抵抗のほうが大きいので遅くなります。だから、まじわる点の速さに落ち着きます。

じぶんでとこう 9

自転車と人の空気の抵抗を $f = cv^2$、$c = 0.25\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ とします。ペダルをこいで前へおす力が 20 N のとき、空気の抵抗とつり合う速さは何 m/s ですか。時速何 km ですか（ほかの抵抗は考えない）。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

上に投げたときの抵抗の向き

✕ 上がるときも、下向きを + として $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv^2$

○ 上がるときは $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg + cv^2$（抵抗も下向き）

抵抗の向きは、いつも動きと反対です。上へ動いているときは、重力も抵抗も下向きになり、速さは空気がないときより早くへります。$-cv^2$ は、下へ動くときだけの書き方です。

まちがえやすいところ

b と c の単位を同じにする

✕ b も c も、単位は N·s/m

○ b は N·s/m、c は $\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$

$f = bv$ と $f = cv^2$ で、f はどちらも N です。v^2 の単位は $(\mathrm{m/s})^2$ なので、c の単位には $\mathrm{s^2}$ と $\mathrm{m^2}$ が入ります。単位がちがうので、b と c の大きさをくらべても意味がありません。

⚠ まちがえやすいところ

重い物ほど速く落ちる、はいつも正しい？

✕　重い物は、いつでも速く落ちる

○　空気がなければ、重さによらず同じ速さで落ちる

重い物が速く落ちるのは、空気の抵抗があるときだけです。空気のない月の上では、ハンマーと羽根が同時に落ちることが、1971 年にアポロ 15 号の宇宙飛行士の実験で確かめられました（空気がないときの落ち方は 5-13）。

⚠ まちがえやすいところ

終端速度に「着く」時刻を求める

✕　$v = v_{\mathrm{f}}(1 - e^{-t/\tau}) = v_{\mathrm{f}}$ となる t を求める

○　終端速度には限りなく近づくだけ。95 % なら 3τ、99.3 % なら 5τ

$e^{-t/\tau}$ は 0 になりません（6-4 ⑤）。「何 % になるまで」と決めて、時間を求めます。

⚠ まちがえやすいところ

止まるときは、いつも軽く感じる？

✕　下へ動いているエレベーターが止まるときは、軽く感じる

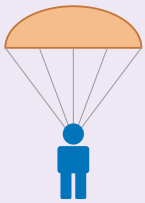
○　下へ動いているエレベーターが止まるときは、重く感じる

下へ動いていて止まるときは、速さ（下向き）がへるので、加速度は上向き（$a > 0$）です。$N = m(g + a)$ で $N > mg$ なので、重く感じます。決めるのは、動いている向きではなく、加速度の向きです。

物理・工学ではこう使う

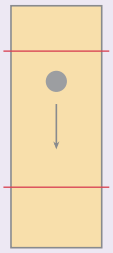
● **パラシュート**

パラシュートは、前から見た面積を大きくして c を何十倍にもし、終端速度を小さくする道具です。$v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$ なので、c を 100 倍にすると、終端速度は $\frac{1}{10}$ になります。人を乗せたパラシュートは、毎秒 5 m ほどで地面に着きます（例題 2・じぶんでとこう 2）。



● **落ちる玉で、ねばりけをはかる**

ねばりけの強い液体（はちみつや油）に小さな鉄の玉を落とすと、すぐに終端速度になって、一定の速さで沈みます。速さに比例する抵抗の係数 b は液体のねばりけに比例するので、沈む速さをはかれば、ねばりけがわかります。これを落球式の粘度計といい、エンジンオイルなどを調べるのに使われます。



物理・工学ではこう使う

● **自動車の燃費と空気の抵抗**

空気の抵抗は速さの 2 乗に比例します。$c = 0.4\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ の車なら、時速 50 km で約 77 N、時速 100 km で約 309 N（4 倍）。速く走ると燃料を多く使うのは、このためです。

● **磁石のブレーキ**

磁石のそばを金属の板が速く動くと、板に「うず電流」が流れ、速さに比例する力（$f = bv$ の形）で動きをさまたげます。遊園地のフリーフォールや一部の電車のブレーキに使われ、ふれ合わないのですりへりません。

章末問題

6-5 のまとめ

基本 ★★

1 ある小さなつぶは、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 980\,v$（$v$ は m/s、t は秒）にしたがって落ちます。終端速度と時定数を求めましょう。

2 卓球のボール（質量 $0.0027\,\mathrm{kg}$）の空気の抵抗は $f = cv^2$、$c = 0.00033$（$\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$）です。終端速度は何 m/s ですか。

3 形と大きさが同じで、2 乗に比例する抵抗を受けて落ちる物の質量を 25 倍にすると、終端速度は何倍になりますか。

4 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.004\,v^2$、はじめ $v = 0$ として、$\Delta t = 1$ 秒のオイラー法で、1 秒後と 2 秒後の速さを求めましょう。

5 体重 $70\,\mathrm{kg}$ の人が、エレベーターの中で体重計に乗っています。加速度が（1）上向きに $0.5\,\mathrm{m/s^2}$、（2）下向きに $0.5\,\mathrm{m/s^2}$ のとき、目もりは何 kg ですか（$g = 9.8$）。

6 $E = 5\,\mathrm{V}$、$R = 25\,\Omega$、$L = 0.05\,\mathrm{H}$ の RL 回路で、(1) 最後の電流、(2) 時定数、(3) スイッチを入れて 3τ たったときの電流を求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

チャレンジ ★★★

7 体重 $80\,\mathrm{kg}$ の人がエレベーターの中で体重計に乗ると、目もりが $84.0\,\mathrm{kg}$ になりました。加速度の向きと大きさを求めましょう（$g = 9.8$）。

8 問題 1 のつぶが、止まった状態から落ち始めます。v を t の式で表し、3τ たったときの速さを求めましょう（$e^{-3} = 0.050$）。

9 空気の抵抗が $f = cv^2$、$c = 0.35\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ の自動車を 700 N でおすとき、抵抗とつり合う速さは何 m/s、時速何 km ですか（ほかの抵抗は考えない）。

10 質量 100 kg のスカイダイバーが、手足を広げて落ちています。抵抗は $f = cv^2$、$c = 0.25\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ です。終端速度は何 m/s ですか。時速何 km ですか。

11 抵抗が $f = cv^2$、$c = 25\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ のパラシュートで、質量 70 kg の人が降りています。終端速度は何 m/s ですか。

12 体重 60 kg の人がエレベーターの中で体重計に乗ると、目もりが 57.0 kg になりました。加速度の向きと大きさを求めましょう（$g = 9.8$）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 落ちる物の式を立て、終端速度を求められる。 → 181 ページ
- ☐ 表計算で、落ちる物の速さを計算できる。 → 183 ページ
- ☐ 速さに比例する抵抗の式を解ける（RL 回路も）。 → 185 ページ

ミナ

雨つぶがやさしく落ちてくるのは、空気の抵抗のおかげだった！　次は、ばねにつるしたおもりの「ゆれ」を式で調べよう。

1

第 1 部　微分方程式の入口

★★★

6-6 ばねと振り子

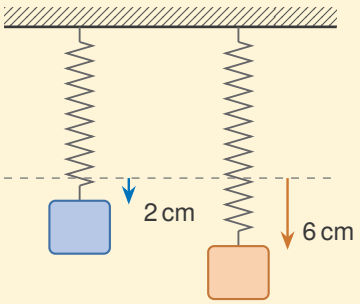
道しるべ　この章の前に 2-8 2-15 4-8 4-9 5-15 5-17 5-18 6-2
この章の先に 6-7 6-12 6-13 6-15 7-8

この章でできるようになること

- ★★★ ばねとおもりの式を力の図から立て、固有角振動数 ω_n と周期を求められる。
- ★★★ はじめの位置と速度から、振幅と初期位相を決められる。
- ★★★ 振り子や、コイルとコンデンサーの回路も同じ形の式になることを説明し、周期を求められる。

? はてな？

同じばねに、同じおもりを 2 つつるしました。左は 2 cm だけ下に引いて、右は 6 cm だけ下に引いて、同時に手をはなします。右のおもりは、左の 3 倍も長い道のりを上下します。1 往復するのにかかる時間は、右のほうが長いでしょうか。



点線は、つり合いの位置

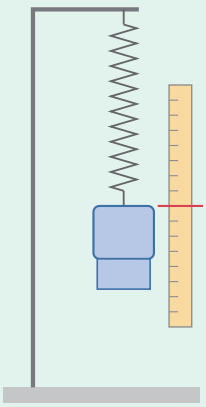
ばねにつるしたおもりは、5-15 で「sin の形でゆれる（単振動）」と分かりました。この章では、ばね・振り子・電気の回路の「ゆれ」を、微分方程式として 1 つずつ立てて解きます。どんな数でゆれ方が決まるのか、はじめにどう動かすとどうゆれるのかを、式と表計算の両方で調べます。

やってみよう ばねのゆれの周期をはかろう

用意するもの

やわらかいつるまきばね（100 g のおもりで 10 cm ほどのびるもの）、50 g のおもり 4 こ、スタンド、ものさし、スマートフォンのストップウォッチ

1. スタンドにばねをつるし、おもりを 2 こ（100 g）つけよう。おもりが止まった高さに、ものさしで印をつけよう。
2. おもりを印から 2 cm 下に引いて、そっと手をはなそう。10 往復する時間をはかり、10 でわって 1 往復の時間（周期）を求めよう。
3. 引く長さを 4 cm にして、②をくり返そう。
4. おもりを 1 こ（50 g）、4 こ（200 g）にかえて、②をくり返そう。



ばねとおもり

おもり	引いた長さ	10 往復の時間	周期
100 g	2 cm	6.3 s	0.63 s
100 g	4 cm	6.3 s	0.63 s
50 g	2 cm	4.5 s	0.45 s
200 g	2 cm	8.9 s	0.89 s

表 1　ミナさんがはかった結果

1 つの往復は短いので、10 往復をまとめてはかり、10 でわりました。ストップウォッチをおすタイミングのずれ（0.1〜0.2 秒ほど）が、10 分の 1 になるからです。

表から、2 つのことに気づきます。

- 引いた長さを 2 cm から 4 cm にしても、周期は 0.63 s のまま変わらない。

- おもりを 50 g から 200 g へ 4 倍にすると、周期は 0.45 s から 0.89 s へ、約 2 倍になる。

「4 倍で 2 倍」は、2-8 の振り子（長さを 4 倍にすると周期が 2 倍）と同じきまりです。$\sqrt{4} = 2$ なので、周期は質量の $\sqrt{}$ に比例しているようです。なぜそうなるのかを、この章で式から確かめます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

2-15　ばねの力は、のびに比例する：$F = kx$。k はばね定数〔N/m〕。

4-9　加法定理：$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

5-5　力＝質量×加速度（$F = ma$）。$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ は速度、$\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ は加速度。

5-15　$x = A\sin\omega t$ なら $\ddot{x} = -\omega^2 x$。ばねなら $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$。
0.5 kg・8 N/m のばねで $\omega = 4$、周期 $\dfrac{2\pi}{\omega} \approx 1.57$ s。

5-17　振り子：$\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{L}\sin\theta$。ふれが小さいと $\sin\theta \approx \theta$ で、周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$。

5-18　「2 回微分すると自分の $-\omega^2$ 倍」の答えは $A\sin\omega t + B\cos\omega t$。
A、B は、はじめの位置と速度で決める。差 $u = T - 20$ のように、ずらして使える。

6-2　2 階の式は、位置 x と速度 v の 2 つの列で進める。速度を先に新しくし、その新しい速度で位置を進める（速度を先に進めるオイラー法）。

6-4　コンデンサー：たまる電気の量 q〔C〕は電圧 V〔V〕に比例し、$q = CV$。
コイル：電流 i〔A〕が変わると、変わる速さに比例した電圧 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ が生まれる。

数学の道具

1 ばねの式を、力の図から立てる

5-15 のばねを、くわしく調べます。なめらかなレールの上に、質量 0.5 kg の台車があります。台車は、ばね定数 8 N/m のばねで、かべにつながっています。台車を右へ 10 cm 引いて、そっと手をはなします。

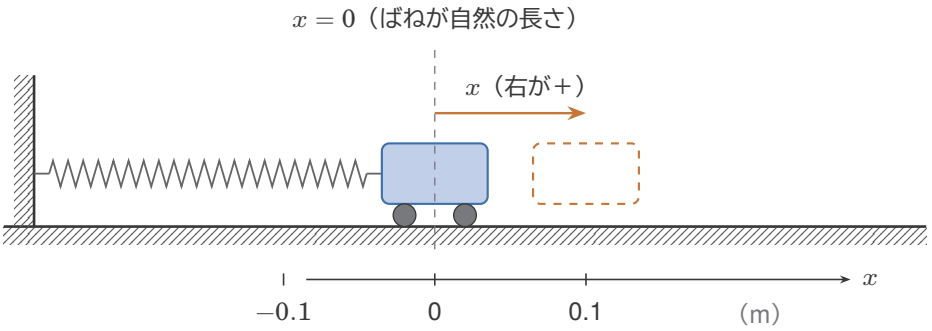


図 1　台車の位置 x は、ばねが自然の長さのときを 0 とし、右を＋にする。

位置の決め方

ばねがのびても縮んでもいない（自然の長さの）ときの台車の位置を 0 とします。右へずれたら x は＋、左へずれたら x は－です。こう決めると、x がそのまま「ばねののび」になります（縮んでいるときは、のびが－）。

ばねが台車をおす力・引く力

いろいろな位置で、ばねが台車にはたらかせる力を表にします。ばねの力の大きさは、のびの大きさ× k です（2-15）。向きは、右向きを＋とします。

位置 x〔m〕	-0.1	-0.05	**0**	**0.05**	**0.1**
ばねのようす	縮む	縮む	自然	のびる	のびる
力 F〔N〕	$+0.8$	$+0.4$	0	-0.4	-0.8

表 2　のびているときは左へ引き（－）、縮んでいるときは右へおす（＋）。

力はいつも、ずれ x と反対向きで、大きさは $8 \times |x|$ です。$x = 0.1$ のとき $F = -0.8$、$x = -0.1$ のとき $F = +0.8$。どちらも $F = -8x$ に合います。向きまでこめて書くと、

$$F = -kx$$

－ は、「ずれと反対向きに、もとの位置へもどそうとする」という意味です。マイナスをつけ忘れると、ずれた向きにさらにおし出す力になり、台車はどんどん遠くへ行ってしまいます。

力＝質量×加速度

台車には、重力と、レールが支える力もはたらきます。でも、この 2 つは上下の向きで打ち消しあい、左右の動きには関係しません。レールとの摩擦や空気の抵抗は、とても小さいので、ここでは考えません（6-7 で考えます）。左右の向きの力は、ばねの力だけです。5-5 の $F = ma$ に入れると、加速度は $\ddot{x}$ なので、

$$m\ddot{x} = -kx$$

これが、ばねと台車の**運動方程式**です。左は「質量×加速度」、右は「ばねの力」です。

両辺を m でわって、答えの候補を選ぶ

$m\ddot{x} = -kx$	運動方程式
$\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$	両辺を m でわる
$\ddot{x} = -16x$	数を入れる（$8 \div 0.5 = 16$）

「2 回微分すると、自分の -16 倍」の関数です。5-18 の答えの候補の表で、$-\omega^2 = -16$ の行です。$\omega^2 = 16$ なので $\omega = 4$（2 乗して 16 になる正の数）。答えの形は

$$x = A\sin 4t + B\cos 4t$$

$\sin 4t$ を 2 回微分すると、4 が 2 回かかって $4 \times 4 = 16$、cos の微分の $-$ がついて $-16\sin 4t$ になるからです（5-15）。だから、ここで出てくる 4 は、16（つまり $\dfrac{k}{m}$）の $\sqrt{\ }$ です。A と B は、はじめの状態で決めます（④で調べます）。

固有角振動数と周期

文字のまま書くと、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ なので、

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ω_{n}（オメガ・エヌ）を**固有角振動数**といいます。「固有」は、「その物が自分で決める」という意味です。ばねと台車の組を選んだ時点で、ゆれる速さ（1 秒に進む角）は決まっていて、手のはなし方では変わりません。下つきの n は natural（自然の）の頭文字です。

周期 T が $\dfrac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}}}$ になるのは、$\sin\omega_{\mathrm{n}}t$ の角 $\omega_{\mathrm{n}}t$ が、1 往復で 2π（1 周、4-8）だけ進むからです。$\omega_{\mathrm{n}}T = 2\pi$ を T について解きました。このばねでは、

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{16} = 4\ \mathrm{rad/s}, \qquad T = \frac{2\pi}{4} = \frac{6.283}{4} \approx 1.57\ \mathrm{s}$$

1 秒あたりの往復の回数（**振動数** f）は、$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{1.571} \approx 0.64\ \mathrm{Hz}$ です。Hz（ヘルツ）は「1 秒あたりの回数」の単位です。

単位で確かめる

$\dfrac{k}{m}$ の単位は〔N/m〕÷〔kg〕です。$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$（1 kg を 1 m/s^2 で加速する力）なので、

$$\frac{\mathrm{N/m}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg\,m/s^2}}{\mathrm{m} \times \mathrm{kg}} = \frac{1}{\mathrm{s^2}}$$

kg と m が約分されて、$\dfrac{1}{\mathrm{s^2}}$ が残ります。その $\sqrt{\ }$ は $\dfrac{1}{\mathrm{s}}$ で、「1 秒あたり」の量になりました。角はラジアンで数えるので、ω_{n} の単位は rad/s です。

式を読む

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ は、次のように読めます。

- 質量 m を 4 倍にすると、$\sqrt{4} = 2$ なので周期は 2 倍。重い物は動かしにくい（同じ力でも加速度が小さい）ので、ゆっくりゆれる。

- ばね定数 k を 4 倍（かたいばね）にすると、周期は $\frac{1}{2}$ 倍。引きもどす力が強いので、速くゆれる。

やってみようの「おもり 4 倍で周期 2 倍」は、この 1 つめです。周期が質量の $\sqrt{\ }$ に比例するのは、ω_{n} が $\frac{k}{m}$ の $\sqrt{\ }$ だからで、それは「2 回微分すると ω が 2 回かかる」からでした。

> **せいかくに言うと**
>
> ばねの力が $F = -kx$ になるのは、のびが小さい範囲だけです（フックの法則、1678 年）。のばしすぎると、力はのびに比例しなくなり、ばねはもとにもどらなくなります。また、ばね自身の質量も、ここでは考えていません。ばねがおもりよりずっと軽いときに、よく合う式です。

② 表計算でも動かしてみる

式の答えが本当に合っているか、6-2 の表計算で確かめます。きまりは「加速度 $= -\frac{k}{m} \times$ 位置」だけです。$\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ として、6-2 と同じ順で 1 行ずつ進めます。

1. 今の位置から加速度を求める：$a = -\frac{k}{m}x = -16x$
2. 新しい速度：$v + a \times \Delta t$（加速度は「1 秒あたりの速度の変化」だから）
3. 新しい位置：$x +$ (新しい速度) $\times \Delta t$（速度は「1 秒あたりの位置の変化」だから）

表計算では、6-2 と同じ型で、Δt をセル E2 に入れます。D2 に `=-8*B2/0.5`、C3 に `=C2+D2*$E$2`、B3 に `=B2+C3*$E$2` と書いて、下へコピーします。F 列には、くらべるために式の答えを入れました。

	A	B	C	D	E	F
1	t〔s〕	x〔m〕	v〔m/s〕	a〔m/s^2〕	Δt	$0.1\cos 4t$
2	0	0.10000	0	−1.60000	0.01	0.10000
3	0.01	0.09984	−0.01600	−1.59744		0.09992
4	0.02	0.09952	−0.03197	−1.59232		0.09968
5	0.03	0.09904	−0.04790	−1.58466		0.09928
81	0.79	−0.09995	0.00745	1.59913		−0.09998
159	1.57	0.10001	0.00111	−1.60008		0.10000

表 3 5 行めのあとは、とちゅうの行を省いた。F 列は、式の答え $x = 0.1\cos 4t$。

1 行めの計算を、手でたどります。

$a = -16 \times 0.1 = -1.6$ ① 今の位置から加速度

$v = 0 + (-1.6) \times 0.01 = -0.016$ ② 新しい速度

$x = 0.1 + (-0.016) \times 0.01$ ③ 新しい速度で位置を進める

$= 0.09984$

表の 3 行めと同じです。

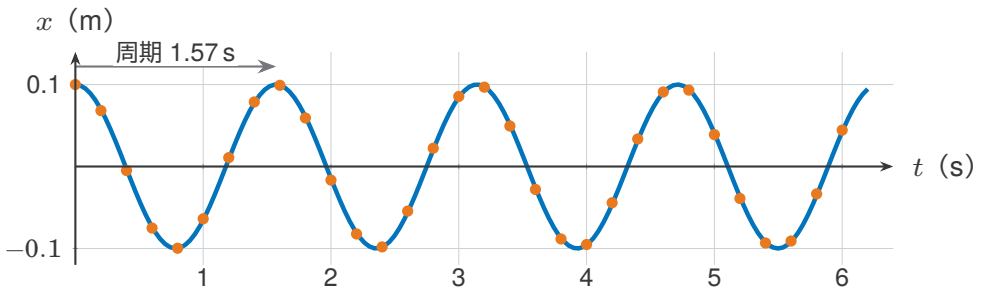


図 2 青い線は式の答え $x = 0.1\cos 4t$、オレンジの点は表計算（0.2 秒ごとに表示）。点は線にのり、1.57 秒ごとに同じ形をくり返す。

表計算の 159 行め（1.57 秒）で、台車はもとの位置 0.1 にもどっています。式で求めた周期 1.57 s と合います。式で解く方法と、数で進める方法の 2 通り

で、同じ動きが出てきました。手をはなした台車は、はじめは cos の山（いちばん右）にいて、そこから左へ動き出します。

③ 周期は、ゆれの大きさによらない

❓はてな？では、2 cm 引いたおもりと 6 cm 引いたおもりの周期をくらべました。まず、水平なばねの台車で考えます（つるしたばねは⑤で）。

式で考える

周期の式 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ には、質量 m とばね定数 k しか入っていません。どれだけ引いたか（ゆれの大きさ）は、どこにも入っていません。だから、周期はゆれの大きさによりません。

数で考える

式だけでは、なっとくしにくいかもしれません。表計算で、はじめの位置を 0.1 と 0.3（3 倍）にして、ならべてみます。

t	はじめ 0.1 のとき	はじめ 0.3 のとき	何倍？
0	0.10000	0.30000	3 倍
0.01	0.09984	0.29952	3 倍
0.02	0.09952	0.29856	3 倍
0.39	−0.00093	−0.00279	3 倍
0.79	−0.09995	−0.29985	3 倍

表 4　どの時刻でも、位置はぴったり 3 倍。0 を通る時刻も、いちばん左に来る時刻も同じ。

なぜ、ぴったり 3 倍になるのでしょう。1 行ずつたどると、次のようになっています。

1. 位置が 3 倍なので、ばねの力 $-kx$ も 3 倍。だから加速度も 3 倍。
2. 加速度が 3 倍なので、Δt のあいだにつく速度も 3 倍。
3. 速度が 3 倍なので、Δt のあいだに進む道のりも 3 倍。次の位置も 3 倍。

これが、どの行でもくり返されます。3 倍遠くからスタートしたおもりは、3 倍強い力で引きもどされ、3 倍の速さで走ります。**3 倍の道のりを 3 倍の速さで走るので、かかる時間は同じ**なのです。

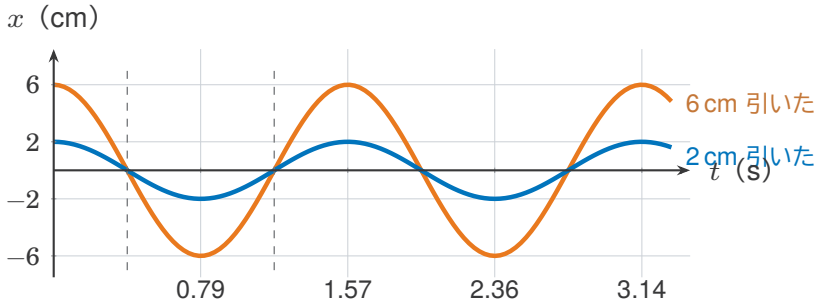


図 3　ゆれの大きさは 3 倍ちがうのに、0 を通る時刻（点線）も、山の時刻も同じ。

❓はてな？の答え

同じ時間です。ばねの力がずれに比例するので、遠くから始めたおもりほど強く引かれ、速く動きます。ゆれの大きさがいくつでも、1 往復の時間は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ です。

5-18 で、「答えを何倍しても答え」になる式を線形とよびました。$m\ddot{x} = -kx$ は線形なので、$x = 0.1\cos 4t$ が答えなら、3 倍した $x = 0.3\cos 4t$ も答えです。上の表は、そのことを数で見たものです。

ブランコや振り子は、少しちがいます。ふれが小さいときは周期は同じですが、大きくこぐと、少し長くなります。そのわけは⑦で調べます。

4 はじめの位置と速度から、振幅と初期位相を決める

こんどは、台車を右へ 10 cm 引いたところで、右向きに 0.4 m/s の速さでおし出すように手をはなします。はじめの位置は $x_0 = 0.1$、はじめの速度は $v_0 = 0.4$ です。台車は、どこまで右へ行くでしょう。それはいつでしょう。

A と B を決める

答えの形は $x = A\sin 4t + B\cos 4t$ でした。5-18 と同じ手順で、A と B を決めます。

$x(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B$	$t = 0$ を入れる（$\sin 0 = 0$、$\cos 0 = 1$）
$B = 0.1$	はじめの位置が 0.1
$\dot{x} = 4A\cos 4t - 4B\sin 4t$	x を微分して速度にする（5-15）
$\dot{x}(0) = 4A$	$t = 0$ を入れる
$A = 0.4 \div 4 = 0.1$	はじめの速度が 0.4

だから $x = 0.1\sin 4t + 0.1\cos 4t$ です。B ははじめの位置そのもの、A ははじめの速度を ω_{n} でわったものです。

この式のままでは、いちばん右へ行く位置（振幅）が見えません。0.1 と 0.1 をたして 0.2、ではありません。$\sin 4t$ と $\cos 4t$ の山の時刻がずれているからです（4-9 の合成と同じ）。1 つの cos の波にまとめます。

方法 1：加法定理でまとめる

振幅を X、ずれの角を ϕ として、$x = X\cos(4t + \phi)$ の形にしたいとします。4-9 の加法定理で広げると、

$$X\cos(4t + \phi) = X\cos\phi\cos 4t - X\sin\phi\sin 4t$$

これが $0.1\cos 4t + 0.1\sin 4t$ と、どの t でも同じになるには、$\cos 4t$ の前の数どうし、$\sin 4t$ の前の数どうしが等しければよいです。

$$X\cos\phi = 0.1, \qquad -X\sin\phi = 0.1$$

2 つの式を 2 乗してたすと、$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$（4-8）なので、

$$X^2 = 0.1^2 + 0.1^2 = 0.02, \qquad X = \sqrt{0.02} \approx 0.141$$

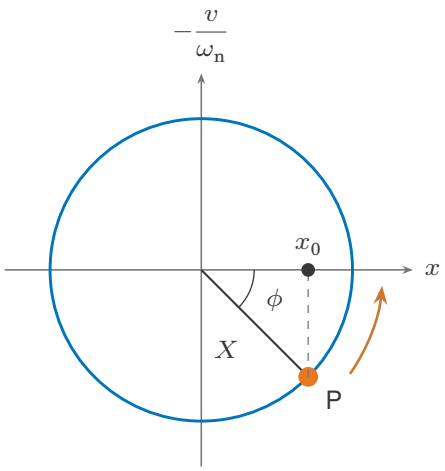
$\cos\phi = \dfrac{0.1}{0.141} = 0.707$、$\sin\phi = -\dfrac{0.1}{0.141} = -0.707$ なので、$\phi = -\dfrac{\pi}{4}$ $(-45°)$ です。

$$x = 0.141\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$$

X を**振幅**、ϕ を**初期位相**といいます（5-15 の記号カード）。台車は、右へ 14.1 cm まで行きます。いちばん右に来るのは、cos の中身が 0 になる $4t - \dfrac{\pi}{4} = 0$ のとき、つまり $t = \dfrac{\pi}{16} \approx 0.20\,\mathrm{s}$ です。

方法 2：回る点の影で考える

4-8 で、円の上を一定の速さで回る点に横から光を当てると、影は単振動をする、と学びました。台車の位置 x を、半径 X の円の上を、1 秒に ω_n ラジアンの割合で左回りに回る点 P の影（横の座標）と見ます。



点 P の影の速さは、P の速度の横向きの成分です。5-15 で、回る点の速度の横の成分は「たての座標の $-\omega_n$ 倍」でした。だから、P のたての座標は $-\dfrac{v}{\omega_n}$ です。はじめの P は、横 $x_0 = 0.1$、たて $-\dfrac{0.4}{4} = -0.1$ の点です。

6-2 では点 $\left(x,\ \frac{v}{4}\right)$ をかきました。ここでは、たてに $-$ をつけて上下を裏返したので、点は 4-8 と同じ左回りに回ります。

この図から、振幅と初期位相が読めます。

- 振幅 X は円の半径。三平方の定理（4-4）で $X = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} \approx 0.141$。
- 初期位相 ϕ は、はじめの P の向きの角。横 0.1、たて -0.1 なので $-45°$。
- P が左回りに 45° 回って横軸の上に来たとき、影はいちばん右です。45° は $\dfrac{\pi}{4}$ rad で、1 秒に 4 ラジアン回るので、$\dfrac{\pi}{4} \div 4 = \dfrac{\pi}{16} \approx 0.20\,\mathrm{s}$ 後。

方法 1 と同じ答えです。右向きにおし出したので、台車はすぐには引き返さず、少し右へ進んでから引き返します。だから山（いちばん右）は、手をはなした 0.2 秒あとに来ます。初期位相が負（$-45°$）なのは、「山が少しおくれて来る」ことを表しています。

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \phi \text{ は、点 } \left(x_0,\ -\frac{v_0}{\omega_n}\right) \text{ の向きの角}$$

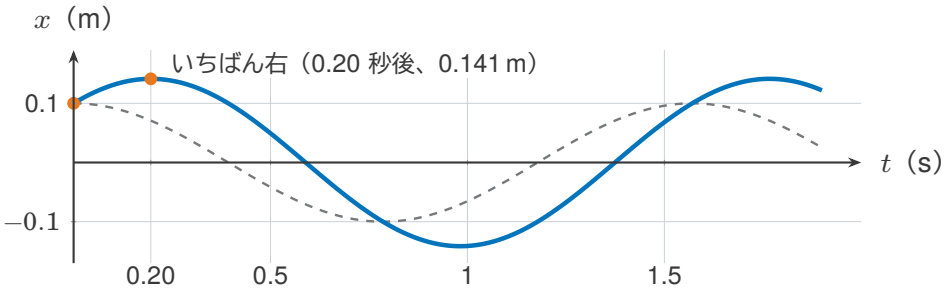


図 4　おし出してはなした台車（青）。点線（速さ 0 ではなした台車）より、山が少しおくれて高くなる。

せいかくに言うと

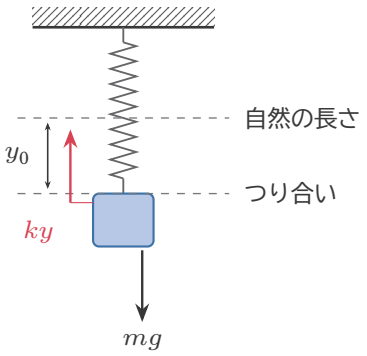
ϕ は、$\tan\phi = \dfrac{-v_0/\omega_n}{x_0}$ だけでは決まりません。たとえば点 $(0.1,\ -0.1)$ と点 $(-0.1,\ 0.1)$ は、どちらも $\tan\phi = -1$ ですが、向きは反対です（4-15 の $\tan^{-1}$ の注意と同じ）。図をかいて、点がどの向きにあるかを確かめてから角を決めます。

ミナ

方法 1 がむずかしければ、方法 2 の図だけでも大丈夫。点をかけば、振幅も初期位相も読めるよ。

5 つるしたばね：ずらして考える

はてな？のおもりは、たてにつるしたばねでした。こんどは、重力も式に入ります。質量 0.2 kg のおもりを、ばね定数 20 N/m のばねにつるします。



ばねが自然の長さのときのおもりの位置から、下向きにはかった位置を y とします（下が＋）。おもりには、

- 重力 mg（下向きなので＋）
- ばねの力 ky（のびが y なので、上向きに ky。だから $-ky$）

がはたらきます（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。だから運動方程式は

$$m\ddot{y} = mg - ky$$

右に mg という定数があるので、5-18 の候補の表のどの行とも形がちがいます。そこで、5-18 ④の「ずらし」を使います。

つり合いの位置を見つける

おもりが静かにぶら下がっているとき、加速度は 0 です。$m\ddot{y} = 0$ なので、$mg - ky = 0$。このときの y を y_0 と書くと、

$$y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0.2 \times 9.8}{20} = 0.098\,\mathrm{m}$$

ばねは 9.8 cm のびて、つり合います。

つり合いの位置からのずれを主役にする

つり合いの位置からのずれを $u = y - y_0$ とします。y_0 は定数なので微分すると 0 になり、$\ddot{u} = \ddot{y}$ です。右辺は、$y = u + y_0$ を入れて、

$mg - ky = mg - k(u + y_0)$　　$y = u + y_0$ を入れる

$= mg - ky_0 - ku$　　かっこをはずす

$= -ku$　　$mg - ky_0 = 0$（つり合いの式）を使う

だから、

$$m\ddot{u} = -ku$$

水平なばねの式と、まったく同じ形です。重さ mg は、ゆれの中心をつり合いの位置まで下げるだけで、ゆれ方（周期）は変えません。周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{0.2}{20}} = 2\pi \times 0.1 \approx 0.63\,\mathrm{s}$ です。

？はてな？ のおもりも、つり合いの位置から 2 cm・6 cm 引いたので、u の式で考えれば③と同じです。2 つのおもりは、同じ周期でゆれます。

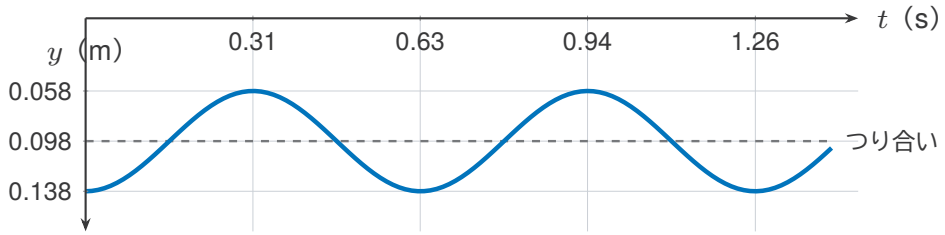


図 5　つり合いの位置から 4 cm 引いてはなしたおもりの位置 y（下が＋なので、グラフの下向きを＋にした）。ゆれの中心は $y_0 = 0.098\,\mathrm{m}$。

おもしろいこと

つり合いの式 $ky_0 = mg$ から、$\dfrac{m}{k} = \dfrac{y_0}{g}$ です。これを周期の式に入れると、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$$

つるしたばねの周期は、「おもりをつるしてのびた長さ y_0」と同じ長さの振り子の周期と同じです（⑦）。やってみようのばねは、100 g で約 10 cm のびたので、周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{0.1}{9.8}} \approx 0.63\,\mathrm{s}$。ミナさんがはかった値とぴったり合います。

6 エネルギーは保たれる

ゆれている台車は、はしでは止まり、まん中では速く走ります。速さはたえず変わるのに、変わらないものがあります。それがエネルギーです。

ばねにたくわえられるエネルギー

ばねを x だけのばす（縮める）には、仕事 $\frac{1}{2}kx^2$ が必要でした（5-12）。のびたばねは、このエネルギー（**弾性エネルギー**）をたくわえています。

動いている物がもつエネルギー

止まっている質量 m の物に、一定の力 F を加えて、速さ v まで加速するのに必要な仕事を考えます。加速度は $a = \frac{F}{m}$ で一定です。5-13 から、t 秒後の速さは $v = at$、進んだ道のりは $\frac{1}{2}at^2$ です。

$t = \frac{v}{a}$　　速さが v になる時刻（$v = at$ から）

$\text{道のり} = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$　　5-13 の式に t を入れる

$\text{仕事} = F \times \frac{v^2}{2a} = ma \times \frac{v^2}{2a}$　　仕事＝力×道のり、$F = ma$

$= \frac{1}{2}mv^2$　　a を約分する

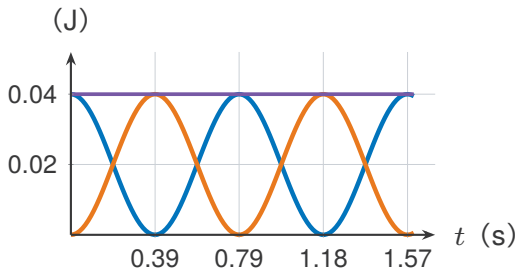
速さ v で動いている物は、この分のエネルギーをもっています。これを**運動エネルギー**といいます。v が 2 乗で入るのは、速さが 2 倍になると、加速にかかる時間も、そのあいだの平均の速さも 2 倍になり、道のりが 4 倍になるからです。

たすと一定

$x = 0.1\cos 4t$、$v = -0.4\sin 4t$ の台車で、2 つのエネルギーを計算します（$m = 0.5$、$k = 8$）。

時刻	0（右のはし）	0.196	0.393（まん中）
位置 x〔m〕	0.1	0.0707	0
速度 v〔m/s〕	0	-0.283	-0.4
$\frac{1}{2}kx^2$〔J〕	0.04	0.02	0
$\frac{1}{2}mv^2$〔J〕	0	0.02	0.04
合計（J）	0.04	0.04	0.04

表 5　ばねのエネルギーと運動エネルギーは入れかわるが、合計は 0.04 J のまま。



青はばねのエネルギー、オレンジは運動エネルギー、紫はその合計です。はしではばねのエネルギーだけ、まん中では運動エネルギーだけ。合計はいつも同じです。

なぜ一定なのか：微分して確かめる

合計 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ を時間で微分します。v^2 を微分すると、合成関数の微分（5-6）で $2v \times \dot{v}$ になります（外側の $(\ )^2$ の微分が $2v$、内側の v の微分が $\dot{v}$）。x^2 も同じです。

$$\dot{E} = \frac{1}{2}m \times 2v\dot{v} + \frac{1}{2}k \times 2x\dot{x} \qquad \text{合成関数の微分}$$

$$= mv\ddot{x} + kxv \qquad \dot{v} = \ddot{x},\ \dot{x} = v$$

$$= v(m\ddot{x} + kx) \qquad v \text{ でくくる}$$

$$= v \times 0 = 0 \qquad m\ddot{x} = -kx \text{ だから}$$

変わる速さがいつも 0 なので、E は一定です。運動方程式が成り立つことと、エネルギーが保たれることは、同じことの言いかえなのです（6-15 でくわしく）。

いちばん速い所の速さ

はし（$x = \pm X$）では速さ 0 なので、エネルギーはすべてばねにあって $\frac{1}{2}kX^2$。まん中（$x = 0$）ではすべて運動エネルギーで $\frac{1}{2}mv_{\max}^2$。2 つは等しいので、

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kX^2 \qquad \text{より} \qquad v_{\max} = X\sqrt{\frac{k}{m}} = X\omega_{\mathrm{n}}$$

このばねでは $0.1 \times 4 = 0.4\,\mathrm{m/s}$ です。

表計算のチェックにも使える

エネルギーは、表計算が正しく進んでいるかを見るのにも役立ちます。②の表計算（速度を先に進める方法、$\Delta t = 0.01$）では、合計は 0.039〜0.041 のあいだを少し上下するだけで、ほぼ一定です。ところが、6-2 の「ふつうのオイラー法」（今の速度で位置を進める）で $\Delta t = 0.05$ とすると、1 周期のあいだに合計は 0.04 から 0.135 へ、3 倍以上にふえてしまいます。ばねのゆれは、エネルギーが保たれるのに、計算の方法のせいでふくらんだのです。

⑦ 振り子：2-8 の「約 2」のなぞを解く

5-17 で、長さ L の振り子の式を、力の図から立てました。

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

ふれが小さいときは $\sin\theta \approx \theta$（5-17）なので、

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{L}\theta$$

これは、ばねの $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ と同じ形です。$\frac{k}{m}$ のかわりに $\frac{g}{L}$ が入っているだけなので、答えも同じ形で、

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

2-8 の約束：なぜ $\sqrt{\ }$ で、なぜ約 2 なのか

2-8 では、振り子の長さと周期をはかって、「長さ（m）の $\sqrt{\ }$ を 2 倍すると、周期（秒）のおよその値」というきまりを、表から見つけました。そのとき「なぜ $\sqrt{\ }$ になるのか、なぜ約 2 なのかは、6-6 で式から求めます」と約束しました。

- **なぜ $\sqrt{\ }$ か**　2 回微分すると ω が 2 回かかるので、式に出てくるのは $\omega^2 = \dfrac{g}{L}$ です（5-18）。だから ω はその $\sqrt{\ }$ になり、周期も $\sqrt{L}$ に比例します。
- **なぜ約 2 か**　周期の式を、$\sqrt{L}$ とそれ以外に分けます。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \times \sqrt{L} = \frac{6.283}{\sqrt{9.8}} \times \sqrt{L} = \frac{6.283}{3.130} \times \sqrt{L} \approx 2.007\sqrt{L}$$

2.007 は、1 周の角 2π を、地球の重力加速度 9.8 の $\sqrt{\ }$ でわった数でした。2 にとても近いのは、たまたまです。月の上（$g = 1.62\,\mathrm{m/s^2}$）なら $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1.62}} \approx 4.94$ で、同じ振り子の周期は約 2.5 倍になります。

ばねでは、質量 m が周期を決めました。振り子の式には、質量 m が入っていません。重いおもりは動かしにくいけれど、そのぶん重力も大きいので、2 つが打ち消しあうからです（5-17 で、両辺を mL でわったとき m が消えました）。

大きくふれると、周期は長くなる

ふれが大きいときは、$\sin\theta \approx \theta$ が使えません。そこで、$\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{L}\sin\theta$ のまま、6-2 の方法でコンピュータに計算させます（$L = 1\,\mathrm{m}$）。

Python

```
import math
g, L = 9.8, 1.0              # 重力加速度、糸の長さ
dt = 0.001                   # Δt（秒）
for deg in [10, 30, 60, 90, 120, 150]:
    th = math.radians(deg)   # はじめの角（ラジアン）
    om = 0.0                 # はじめの角速度
    t = 0.0
    while True:
        a = -g / L * math.sin(th)     # 角の加速度
        om = om + a * dt              # 速度を先に新しくする
        th2 = th + om * dt            # 新しい速度で角を進める
```

```
        t = t + dt
        if th > 0 and th2 <= 0:       # 0 を下向きに通ったら
            break
        th = th2
    print(deg, "度：周期", round(4 * t, 2), "秒")
```

実行結果

```
10 度：周期 2.01 秒
30 度：周期 2.04 秒
60 度：周期 2.15 秒
90 度：周期 2.37 秒
120 度：周期 2.76 秒
150 度：周期 3.54 秒
```

はしから手をはなした振り子が、まん中（$\theta = 0$）を初めて通るまでが $\frac{1}{4}$ 周期なので、その時刻を 4 倍しています。小さいふれの周期の式では $2.007\sqrt{1} \approx 2.01$ 秒です。10° ではほとんど同じですが、90° では 18 %、150° では 76 % も長くなりました。

なぜ長くなるのでしょう。$\sin\theta$ と θ をくらべます。

ふれの角	10°	30°	60°	90°	120°	150°
$\frac{\sin\theta}{\theta}$	0.995	0.955	0.827	0.637	0.413	0.191

表 6　θ はラジアン。角が大きいほど、$\sin\theta$ は θ より小さくなる。

引きもどす力は $mg\sin\theta$ です。ふれが大きいと、$\sin\theta$ は θ よりずっと小さいので、引きもどす力は、単振動の式で考えた力より弱くなります。弱い力で引きもどされるので、ゆっくりもどってきて、周期が長くなるのです。

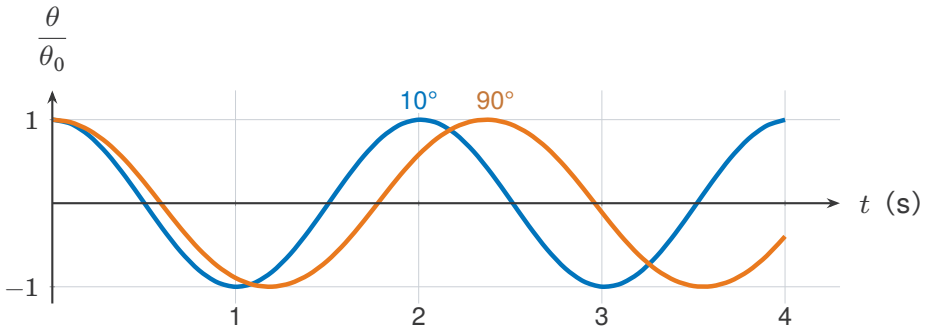


図 6　長さ 1 m の振り子の角を、はじめの角 θ_0 でわった値。10°（青）は 2.01 秒で、90°（オレンジ）は 2.37 秒でもとにもどる。

ブランコを小さくこぐときは、こぐ大きさによらず、1 往復の時間はほぼ同じです。大きくこぐと、少し長くなります。ばねとちがって、振り子の引きもどす力は、ふれに正確には比例していないからです。

8 電気のゆれ：コイルとコンデンサーの回路

2-15 で、「ばねにつるしたおもりのゆれと、電気の回路の中のゆれも、同じ形の式で書けます」と書きました。その回路を作ります。

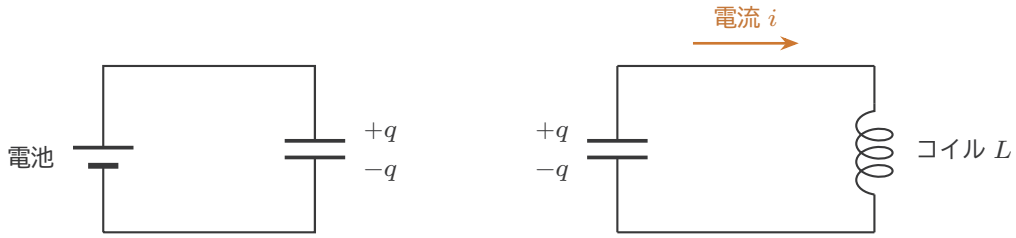


図 7　コンデンサー C に電池で電気をためてから（①）、電池をはずしてコイル L につなぎかえる（②）。電流 i は、コンデンサーの上の板から出てコイルを上から下へ流れる向きを＋とする。

コイルは、導線をぐるぐる巻いた部品です。電流が変わろうとすると、それをさまたげる電圧を生みます（6-4）。モーターの巻き線や、スピーカーの中にもあります。

コンデンサーにたまった電気が、コイルを通って流れ出します。電流が流れきってコンデンサーが空になっても、コイルは「流れ続けよう」とするので、電流はすぐには止まりません。そのため、コンデンサーは反対向きにためられ、また流れもどってきます。電気が行ったり来たりするのです。

式を立てる

1. コンデンサーの上の板にたまった電気を q〔C〕とします（下の板は $-q$）。電圧は $q=CV$ から $V=\dfrac{q}{C}$ です。
2. 電流 i〔A〕は、上の板から出てコイルを上から下へ流れる向きを＋とします。電流は「1 秒あたりに通りぬける電気の量」（5-12）で、上の板の電気はそのぶんへるので、$i=-\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ です。
3. コイルとコンデンサーは、同じ 2 本の導線の両はしにつながっているので、かかる電圧は同じです。コイルの電圧は $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ なので、

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{C}$$

③の式の i に、②の $i=-\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ を入れます。

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{C} \qquad \text{③の式}$$

$$L\times\left(-\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}\right)=\frac{q}{C} \qquad \text{②の } i \text{ を入れる（}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\ddot{q}\text{）}$$

$$L\ddot{q}=-\frac{q}{C} \qquad \text{両辺に } -1 \text{ をかける}$$

$$\ddot{q}=-\frac{1}{LC}q \qquad \text{両辺を } L \text{ でわる}$$

「2 回微分すると、自分の $-\dfrac{1}{LC}$ 倍」。ばねの $\ddot{x}=-\dfrac{k}{m}x$ と同じ形です。だから、たまった電気の量 q は、sin・cos の形でゆれます。これを**電気振動**といいます。

$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}$$

高校の物理で「電気振動の周期は $2\pi\sqrt{LC}$」と習う式は、こうして微分方程式から出てきます。

数を入れる

$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ のとき。接頭語を直すと、$10\,\mathrm{mH} = 0.01\,\mathrm{H}$、$1\,\mu\mathrm{F} = 0.000001\,\mathrm{F}$ です（m は $\frac{1}{1000}$、μ は $\frac{1}{1000000}$）。

$$LC = 0.01 \times 0.000001 = 0.00000001 = 10^{-8}$$

$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10\,000\ \mathrm{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{10\,000} \approx 0.000628\,\mathrm{s} = 0.628\,\mathrm{ms}, \qquad f = \frac{1}{T} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$

1 秒に約 1600 回も、電気が行ったり来たりします。ばねのゆれよりずっと速いのは、L と C がとても小さいからです。

単位で確かめる

コイルの $V = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ から、H（ヘンリー）= V/(A/s) = V s/A。コンデンサーの $q = CV$ と、C（クーロン）= A s（5-12）から、F（ファラド）= C/V = A s/V。かけると、

$$\mathrm{H} \times \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} \times \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{s}^2$$

LC は「時間の 2 乗」なので、$\sqrt{LC}$ は時間、$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ は「1 秒あたり」です。ばねの $\dfrac{m}{k}$ が s^2 だったのと同じです。

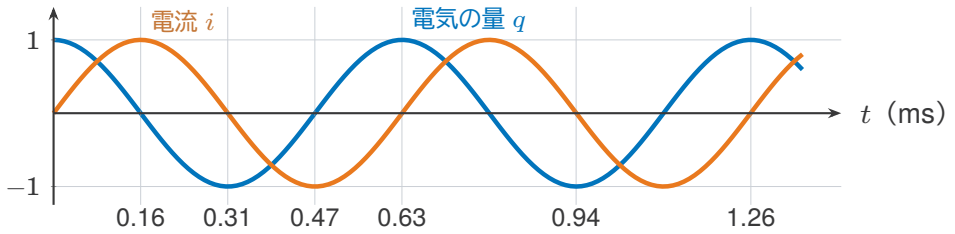


図 8 たまった電気の量 q（青）と電流 i（オレンジ）。どちらも、いちばん大きい値を 1 とした。q が 0 のとき電流がいちばん大きく、電流が 0 のとき q がいちばん大きい。

ばねとくらべる

	ばねとおもり	コイルとコンデンサー
ゆれる量	位置 x	電気の量 q
その速さ	速度 $\dot{x}$	$\dot{q}$（電流 i の -1 倍）
変化をきらう	質量 m	コイル L
もとにもどす	ばね定数 k	$\dfrac{1}{C}$
式	$m\ddot{x} = -kx$	$L\ddot{q} = -\dfrac{1}{C}q$
固有角振動数	$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
たくわえるエネルギー	$\dfrac{1}{2}kx^2$（ばね）	$\dfrac{q^2}{2C}$（コンデンサー）
動きのエネルギー	$\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$	$\dfrac{1}{2}Li^2$（コイル）

表 7 2 つの式は、文字をおきかえると同じになる（6-15 でまとめる）。

質量 m は、速度が変わるのをきらいます。コイル L は、電流が変わるのをきらいます。だから m と L が組になります。$\dfrac{1}{C}$ が k と組になるのは、C が大きいコンデンサーほど、少しの電圧でたくさんの電気をためられる「やわらかい」部品だからです。やわらかいばね（k が小さい）と同じです。

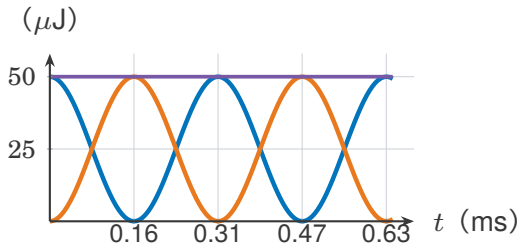
エネルギーも同じ形

ばねでは、エネルギーがばねと台車のあいだを行き来しました。LC 回路では、エネルギーがコンデンサーとコイルのあいだを行き来します。表のおきかえ（$k \to \dfrac{1}{C}$、$x \to q$、$m \to L$、$\dot{x} \to$ 電流）で、ばねのエネルギーの式を書きかえると、

$$\text{コンデンサー}\quad \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad \text{コイル}\quad \frac{1}{2}Li^2$$

（$q = CV$ を入れると $\dfrac{(CV)^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CV^2$。）この本では、この 2 つを部品のきまりとして使います（くわしくは物理シリーズ『電磁気学』）。⑥と同じように、2 つの合計は一定です。

たとえば、$C = 1\,\mu\text{F}$ のコンデンサーを $10\,\text{V}$ にためると、エネルギーは $\dfrac{1}{2} \times 0.000001 \times 10^2 = 0.00005\,\text{J}$ です。コンデンサーが空になる瞬間は、これがすべてコイルにあるので、$\dfrac{1}{2}Li^2 = 0.00005$。$L = 0.01\,\text{H}$ なら $i^2 = 0.01$ で、電流はいちばん大きいとき $0.1\,\text{A}$ です（例題 8）。



青はコンデンサー、オレンジはコイルのエネルギー、紫はその合計（$50\,\mu\text{J}$）です。6-6 ⑥のばねのグラフと同じ形で、エネルギーが 2 つの部品のあいだを行き来します。

せいかくに言うと

本物のコイルの導線には、わずかな抵抗があります。抵抗は電気のエネルギーを熱に変えるので、電気のゆれは少しずつ小さくなって、やがて止まります。ばねのゆれも、摩擦や空気の抵抗で止まります。「ゆれながら止まる」動きは、6-7 で調べます。

もっと知りたい ★★★★★

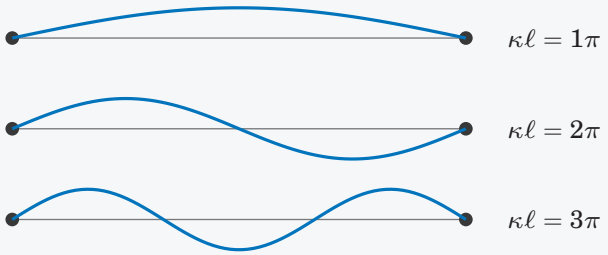
両はしで決める：固有値問題

ギターの弦は、両はしを止めてあります。弦の横へのずれを y、はしからの場所を x とすると、弦が 1 つの形のままゆれるとき、その形 $y(x)$ は $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\kappa^2 y$（$\kappa$ はカッパ。正の数）をみたします。ばねと同じ形ですが、変わる量が時間 t でなく、場所 x です。答えの形は $y = A\sin\kappa x + B\cos\kappa x$ です。

弦の長さを ℓ とすると、両はしは動かないので、$y(0) = 0$、$y(\ell) = 0$ です。

- $y(0) = A \times 0 + B \times 1 = B = 0$ なので、$y = A\sin\kappa x$。
- $y(\ell) = A\sin\kappa\ell = 0$。$A = 0$ なら弦はまっすぐのままで、ゆれていません。

ゆれている（$A \neq 0$）なら、$\sin\kappa\ell = 0$ でなければなりません。sin が 0 になるのは角が π、2π、3π、…のときだけなので、$\kappa\ell = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$。$\kappa$ は、とびとびの値しかとれません。



「両はしの条件を満たす 0 でない答えがある、とびとびの値をさがす問題」を、微分方程式の**固有値問題**といいます。ギターの弦は、この形の組み合わせでゆれ、$\kappa\ell = \pi$ が基音、$2\pi \cdot 3\pi$ が倍音になります。細い柱をおしつぶすときの曲がり方も、同じ問題です（物理 力-11）。7-8 の行列の固有値と、同じ「固有」のことばです。

たいせつ

ばね　$m\ddot{x} = -kx$　　$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

振り子　$\ddot{\theta} \approx -\dfrac{g}{L}\theta$　　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ **（小さいふれ）**

LC 回路　$L\ddot{q} = -\dfrac{1}{C}q$　　$\omega_{\mathrm{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$　　$T = 2\pi\sqrt{LC}$

はじめの状態　$x = X\cos(\omega_{\mathrm{n}}t + \phi)$　　$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}$

エネルギー　$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ **は一定**　　$v_{\max} = X\omega_{\mathrm{n}}$

周期は、ゆれの大きさによらない（振り子は小さいふれのとき）。

この章で出てきたことば

運動方程式　質量×加速度＝力、を式にしたもの。ばねでは $m\ddot{x} = -kx$。

固有角振動数　その物が自分で決める、1 秒に進む角 ω_{n}（rad/s）。ばねでは $\sqrt{k/m}$。

振動数　1 秒あたりの往復の回数 f（Hz）。$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{2\pi}$。

振幅・初期位相　$x = X\cos(\omega_{\mathrm{n}}t + \phi)$ の X（ゆれの大きさ）と ϕ（$t = 0$ での角）。

運動エネルギー　動いている物がもつエネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2$。

単振動　$x = X\cos(\omega_{\mathrm{n}}t + \phi)$ の形のゆれ。周期はゆれの大きさによらない。

電気振動　コイルとコンデンサーの回路で、電気が行ったり来たりすること。

記号カード　初めて出た章 6-6

ω_{n}

読み方　オメガ・エヌ
意味　固有角振動数。ばねは $\sqrt{k/m}$、振り子は $\sqrt{g/L}$、LC 回路は $1/\sqrt{LC}$。n は立てた字
英語　natural angular frequency

記号カード　初めて出た章 6-4

$L \cdot C$

読み方　エル・シー
意味　コイルのインダクタンス〔H〕と、コンデンサーの静電容量〔F〕
英語　inductance, capacitance

コラム　フックの「なぞの文字」

ばねの力がのびに比例することを見つけたのは、イギリスのフックです。1676 年、フックは発見を、ラテン語の文字をならべかえた「ceiiinosssttuv」というなぞの文字列で発表しました。ほかの人に先に発表されないように、でも中身はまだひみつにしておくための工夫です。2 年後の 1678 年に明かされた答えは「ut tensio, sic vis」（のびのとおりに、力も）。これが、この章のはじめに使った $F = kx$ です。今では「フックの法則」とよばれ、ばねばかりや体重計、建物の設計にまで使われています。

例題でたしかめよう

例題 1　ばねの固有角振動数と周期

質量 0.5 kg の台車を、ばね定数 8 N/m のばねにつなぎました。固有角振動数、周期、振動数を求めましょう。また、台車の質量を 2 kg にすると、周期はいくつになりますか（$\pi = 3.14$）。

考え方　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$、$T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$、$f = \dfrac{1}{T}$（①）。質量が 4 倍なら、周期は $\sqrt{4} = 2$ 倍。

式

$\dfrac{k}{m} = \dfrac{8}{0.5} = 16$ なので、$\omega_n = \sqrt{16} = 4$

$T = \dfrac{2 \times 3.14}{4} = 1.57$、　$f = \dfrac{1}{1.57} \approx 0.64$

質量が $2 \div 0.5 = 4$ 倍なので、周期は $\sqrt{4} = 2$ 倍

$1.57 \times 2 = 3.14$

答え　$\omega_n = 4$ rad/s、周期 1.57 s、振動数 0.64 Hz。2 kg では 3.14 s

じぶんでとこう 1

質量 2 kg のおもりと、ばね定数 50 N/m のばねの、固有角振動数・周期・振動数を求めましょう。また、質量を 0.5 kg にすると、周期はいくつになりますか（$\pi = 3.14$）。

例題 2　周期から質量をはかる

宇宙ステーションの中では、体重計が使えません。そこで、ばねで支えたいすをゆらし、周期から質量をはかります。ばね定数は 3000 N/m、いすだけの質量は 10 kg です。人が乗ると、周期は 0.96 s になりました。人の質量を求めましょう（$4\pi^2 = 39.48$）。

考え方　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を m について解く。両辺を 2 乗して $\sqrt{\ }$ をはずす。m は、いすと人を合わせた質量。

式

$$T^2 = 4\pi^2 \times \frac{m}{k}$$（両辺を 2 乗）

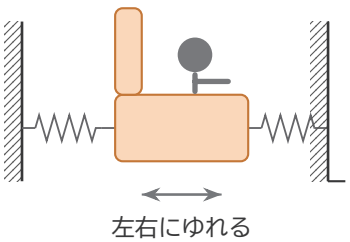
$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$（両辺に $\dfrac{k}{4\pi^2}$ をかける）

$$m = \frac{3000 \times 0.96^2}{39.48} = \frac{3000 \times 0.9216}{39.48} = \frac{2764.8}{39.48} \approx 70.0$$

人の質量は $70.0 - 10 = 60.0$

答え　約 60 kg

地球の上の体重計は、重さ（地球が引く力）をはかっています。宇宙ステーションでは重さを感じないので、体重計の目もりは 0 になります。でも、動かしにくさ（質量）は宇宙でも変わらないので、ゆれの周期ではかれるのです（コラム）。



じぶんでとこう 2

ばね定数 2000 N/m のばねで支えた、質量 8 kg のいすがあります。人が乗ると、周期は 1.07 s でした。人の質量を求めましょう（$4\pi^2 = 39.48$）。

例題 3　つるしたばねの、のびと周期

ばね定数 40 N/m のばねに、0.1 kg のおもりをつるしました。つり合うときのばねののびと、ゆれの周期を求めましょう。また、のびた長さ y_0 を使った $2\pi\sqrt{\dfrac{y_0}{g}}$ でも周期を計算し、同じになることを確かめましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

考え方　つり合いでは $ky_0 = mg$（⑤）。重さはゆれの中心を下げるだけで、周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ のまま。

式

$$y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0.1 \times 9.8}{40} = 0.0245$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{40}} = 2\pi\sqrt{0.0025} = 2\pi \times 0.05 \approx 0.314$$

$$2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.0245}{9.8}} = 2\pi\sqrt{0.0025} \approx 0.314$$

答え　のび 2.45 cm、周期約 0.31 s（2 つの式で同じ）

じぶんでとこう 3

ばね定数 25 N/m のばねに、0.4 kg のおもりをつるしました。つり合うときののびと周期を求め、$2\pi\sqrt{\dfrac{y_0}{g}}$ でも確かめましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\sqrt{0.016} = 0.126$）。

例題 4　はじめの位置と速度から、振幅と初期位相

質量 2 kg、ばね定数 8 N/m の台車を、$x_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ の所で、右向きに $v_0 = 0.346\,\mathrm{m/s}$（$= 0.2\sqrt{3}$）で動かしながらはなしました。振幅 X と初期位相 ϕ を求め、x を $X\cos(\omega_\mathrm{n} t + \phi)$ の形で書きましょう。いちばん右に来るのは何秒後ですか。

考え方　④の方法 2。点 $\left(x_0,\ -\dfrac{v_0}{\omega_\mathrm{n}}\right)$ をかき、原点からの距離が X、向きの角が ϕ。点が横軸の右に来るまで回る時間を求める。

式

$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = 2$。$\dfrac{v_0}{\omega_\mathrm{n}} = \dfrac{0.2\sqrt{3}}{2} = 0.1\sqrt{3} \approx 0.173$

点は $(0.1,\ -0.173)$。原点からの距離は

$$X = \sqrt{0.1^2 + (0.1\sqrt{3})^2} = \sqrt{0.01 + 0.03} = \sqrt{0.04} = 0.2$$

横 0.1、たて -0.173 の向きは、$\cos\phi = \dfrac{0.1}{0.2} = \dfrac{1}{2}$、$\sin\phi < 0$ なので $\phi = -60° = -\dfrac{\pi}{3}$

いちばん右は $2t - \dfrac{\pi}{3} = 0$ のとき。$t = \dfrac{\pi}{6} \approx 0.52$

答え　$x = 0.2\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$、振幅 0.2 m、約 0.52 s 後

じぶんでとこう 4

質量 0.5 kg、ばね定数 8 N/m の台車を、$x_0 = 0.0866\,\mathrm{m}$（$= 0.05\sqrt{3}$）の所で、右向きに $v_0 = 0.2\,\mathrm{m/s}$ で動かしながらはなしました。振幅と初期位相を求め、いちばん右に来る時刻を求めましょう。

例題 5　エネルギーから速さを求める

質量 0.5 kg、ばね定数 8 N/m の台車が、振幅 0.1 m でゆれています。いちばん速い所の速さと、$x = 0.06$ m を通るときの速さを求めましょう。

考え方　はしでは速さ 0 なので、エネルギーの合計は $\frac{1}{2}kX^2$（⑥）。どの位置でも、ばねのエネルギー＋運動エネルギー＝この合計。

式

合計 $E = \frac{1}{2} \times 8 \times 0.1^2 = 0.04$

まん中では $\frac{1}{2} \times 0.5 \times v^2 = 0.04$ より $v^2 = 0.16$、$v = 0.4$

$x = 0.06$ では、ばねのエネルギーが $\frac{1}{2} \times 8 \times 0.06^2 = 0.0144$

運動エネルギーは $0.04 - 0.0144 = 0.0256$

$\frac{1}{2} \times 0.5 \times v^2 = 0.0256$ より $v^2 = 0.1024$、$v = 0.32$

答え　いちばん速い所で 0.4 m/s、$x = 0.06$ m で 0.32 m/s

じぶんでとこう 5

質量 2 kg、ばね定数 50 N/m のおもりが、振幅 0.2 m でゆれています。いちばん速い所の速さと、$x = 0.12$ m を通るときの速さを求めましょう。

例題 6　振り子の長さと周期

（1）周期がちょうど 2 s の振り子の、糸の長さを求めましょう。

（2）この振り子を月（$g = 1.62\,\mathrm{m/s^2}$）にもっていくと、周期はいくつになりますか（地球では $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$4\pi^2 = 39.48$、$\sqrt{0.613} = 0.783$）。

考え方　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ を L について解く（例題 2 と同じく、両辺を 2 乗）。月では g だけを変える。

式

（1）$T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{L}{g}$ より $L = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = \dfrac{9.8 \times 4}{39.48} \approx 0.993$

（2）$\dfrac{L}{g} = \dfrac{0.993}{1.62} \approx 0.613$

$T = 2\pi\sqrt{0.613} = 6.283 \times 0.783 \approx 4.92$

答え　（1）約 0.99 m、（2）約 4.9 s

周期 2 秒の振り子は、片道がちょうど 1 秒です。昔の振り子時計は、この長さ（約 1 m）の振り子を「秒振り子」として使いました。

じぶんでとこう 6

（1）周期 1.5 s の振り子の、糸の長さを求めましょう。

（2）この振り子を火星（$g = 3.71\,\mathrm{m/s^2}$）にもっていくと、周期はいくつになりますか（地球では $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$4\pi^2 = 39.48$、$\sqrt{0.151} = 0.389$）。

例題 7　コイルとコンデンサーの回路の周期

$L = 10\,\mathrm{mH}$ のコイルと $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーの回路の、固有角振動数・周期・振動数を求めましょう。また、コンデンサーを $C = 4\,\mu\mathrm{F}$ にかえると、周期と振動数はいくつになりますか（$\pi = 3.14$）。

考え方　接頭語を直して（m は 10^{-3}、μ は 10^{-6}）、$\omega_\mathrm{n} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$（⑧）。$C$ が 4 倍なら $\sqrt{LC}$ は 2 倍なので、周期は 2 倍。

式

$L = 10 \times 10^{-3} = 10^{-2}$、$C = 10^{-6}$ なので $LC = 10^{-8}$

$\sqrt{LC} = 10^{-4}$、$\omega_\mathrm{n} = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4 = 10\,000$

$T = \dfrac{2 \times 3.14}{10\,000} = 0.000628$、$f = \dfrac{1}{0.000628} \approx 1592$

C が 4 倍：周期は 2 倍の 0.001256、振動数は $\dfrac{1}{2}$ 倍の 796

答え　$\omega_\mathrm{n} = 10\,000\,\mathrm{rad/s}$、周期 0.628 ms、振動数約 1590 Hz。$C = 4\,\mu\mathrm{F}$ では、周期 1.26 ms、振動数約 796 Hz

じぶんでとこう 7

$L = 1\,\mathrm{mH}$、$C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ の回路の、固有角振動数・周期・振動数を求めましょう。また、コイルを $L = 4\,\mathrm{mH}$ にかえると、周期はいくつになりますか（$\pi = 3.14$）。

例題 8　LC 回路のエネルギーと、いちばん大きい電流

$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを $10\,\mathrm{V}$ にためてから、$L = 10\,\mathrm{mH}$ のコイルにつなぎかえました。コンデンサーにたまったエネルギーと、回路に流れる電流のいちばん大きい値を求めましょう。

考え方　コンデンサーのエネルギーは $\dfrac{1}{2}CV^2$、コイルは $\dfrac{1}{2}Li^2$（⑧）。電流がいちばん大きいのは、コンデンサーが空になって、エネルギーがすべてコイルに移ったとき（例題 5 のまん中と同じ）。

式

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 0.000001 \times 10^2 = 0.00005$$

$$\frac{1}{2} \times 0.01 \times i^2 = 0.00005\ （両辺に\ 2\ をかけて\ 0.01\ でわる）$$

$$i^2 = \frac{0.0001}{0.01} = 0.01、\ i = 0.1$$

答え　エネルギー $0.00005\,\mathrm{J}$（$50\,\mu\mathrm{J}$）、電流のいちばん大きい値 $0.1\,\mathrm{A}$

じぶんでとこう 8

$C = 8\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを $5\,\mathrm{V}$ にためてから、$L = 20\,\mathrm{mH}$ のコイルにつなぎかえました。コンデンサーにたまったエネルギーと、電流のいちばん大きい値を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

ω_n と周期の計算をまちがえる

✕ $\omega_n = \dfrac{k}{m} = \dfrac{8}{0.5} = 16$

○ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{16} = 4$

式に出てくるのは $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ です。$\sin 16t$ を 2 回微分すると $-256\sin 16t$ で、-16 倍になりません。

✕ $T = \dfrac{1}{\omega_n} = \dfrac{1}{4} = 0.25\,\mathrm{s}$

○ $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = \dfrac{6.28}{4} \approx 1.57\,\mathrm{s}$

ω_n は「1 秒に進む角（rad）」で、1 往復は $2\pi\,\mathrm{rad}$ です。振動数は $f = \dfrac{\omega_n}{2\pi}$ です。

まちがえやすいところ

大きく引くと、周期が長くなると思う

✕ 6 cm 引いたほうが、遠くまで行くので周期が長い

○ ばねなら周期は同じ。振り子は、ふれが小さければ同じ

遠くから始めると、強い力で引かれて速く動きます。周期の式 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ に、振幅は入っていません。

⚠ まちがえやすいところ

つるしたばねで、ゆれの中心をまちがえる

✕ ゆれの中心は、ばねが自然の長さの位置

○ ゆれの中心は、おもりがつり合う位置（$y_0 = \dfrac{mg}{k}$ だけ下）

重さ mg は、ゆれの中心をつり合いの位置まで下げます。振幅は、つり合いの位置から何 cm 引いたかで決まります。

⚠ まちがえやすいところ

接頭語を直さずに計算する

✕ $L = 10$、$C = 1$ として $\omega_{\mathrm{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.32$

○ $L = 0.01\,\mathrm{H}$、$C = 0.000001\,\mathrm{F}$ として $\omega_{\mathrm{n}} = 10\,000$

mH は $\frac{1}{1000}$ H、μ F は $\frac{1}{1000000}$ F です。直さないと、答えが 3 万倍以上ずれます。

🔍 コラム　3 つのゆれを、くらべてみよう

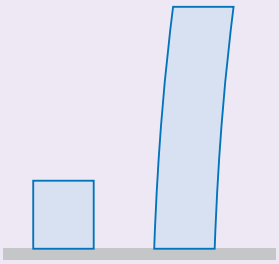
	ばねとおもり	振り子	LC 回路
式	$\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$	$\ddot{\theta} \approx -\dfrac{g}{L}\theta$	$\ddot{q} = -\dfrac{1}{LC}q$
ω_{n}	$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\sqrt{\dfrac{g}{L}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

3 つとも「2 回微分すると自分の $-\omega_{\mathrm{n}}^2$ 倍」の式なので、答えはどれも $X\cos(\omega_{\mathrm{n}}t + \phi)$ です（6-15 でまとめます）。

物理・工学ではこう使う

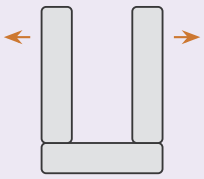
● **建物の固有周期と地震**

建物も、ばねとおもりと同じようにゆれます。重い建物ほど、やわらかい建物ほど、周期は長くなります。高さが 30 m ほどの建物では 1 秒ほど、200 m ほどの超高層ビルでは 5 秒前後です。地震のゆれの周期が建物の固有周期に近いと、ゆれが大きくなります（6-13）。だから、建物の設計では、まず固有周期を計算します。



● **クォーツ時計**

クォーツ時計の中には、音さの形をした小さな水晶があります。電圧をかけると、水晶は 1 秒に 32 768 回ゆれます。この数は 2^{15} なので、回数を 2 でわることを 15 回くり返すと、ちょうど 1 秒に 1 回の合図になります（3-11 の倍々の逆）。固有振動数が温度などでほとんど変わらないので、時計は正確に進みます。



● **IH 調理器とラジオ**

コイルとコンデンサーの電気振動は、決まった振動数の電流を作るのに使います。IH 調理器は、コイルに 1 秒に数万回向きが変わる電流を流して、なべを温めます。ラジオは、L と C の固有振動数を放送局の電波に合わせて、その局だけを選び出します（6-13）。

章末問題

基本 ★★★

1 質量 0.8 kg のおもりと、ばね定数 20 N/m のばねの、固有角振動数・周期・振動数を求めましょう（$\pi = 3.14$）。

2 ばね定数 49 N/m のばねに 0.5 kg のおもりをつるしました。つり合うときののびと、周期を求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\sqrt{0.0102} = 0.101$）。

3 質量 0.5 kg、ばね定数 8 N/m の台車を、$x_0 = 0.05\,\mathrm{m}$ の所で、右向きに $v_0 = 0.2\,\mathrm{m/s}$ で動かしながらはなしました。振幅と初期位相を求めましょう。

4 質量 1 kg、ばね定数 100 N/m のおもりが、振幅 0.05 m でゆれています。いちばん速い所の速さと、$x = 0.03\,\mathrm{m}$ を通るときの速さを求めましょう。

5 （1）長さ 2.45 m の振り子の周期を求めましょう。

（2）周期 1 s の振り子の長さを求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$4\pi^2 = 39.48$）。

6 $L = 100\,\mathrm{mH}$、$C = 10\,\mu\mathrm{F}$ の回路の、固有角振動数・周期・振動数を求めましょう（$\pi = 3.14$）。

コラム　宇宙で体重をはかる

1973 年、アメリカの宇宙ステーション「スカイラブ」の飛行士は、毎日、ゆれるいすに乗りました。いすを引いてはなし、3 往復ほどのゆれの時間を電気で正確にはかります。周期は質量の $\sqrt{}$ に比例するので、周期から体の質量がわかります。息を止め、体を動かさないように、いすにしっかりつかまってはかりました。体の中の動きでも、ゆれが変わってしまうからです。宇宙では、筋肉や骨がへって体の質量が変わるので、健康を見守るのに欠かせない測定でした。

チャレンジ ★★★

7 （例題 2 の手順を 2 回使います。）ばね定数 500 N/m のばねで支えた台があります。台だけをゆらすと周期は 0.40 s、荷物をのせると 0.80 s でした。台の質量と荷物の質量を求めましょう（$4\pi^2 = 39.48$）。

8 質量 0.5 kg、ばね定数 8 N/m の台車を、$x_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ の所で、右向きに $v_0 = 0.693\,\mathrm{m/s}\,(= 0.4\sqrt{3})$ で動かしながらはなしました。x を $X\cos(\omega_\mathrm{n} t + \phi)$ の形で書き、いちばん右に来る時刻を求めましょう。

9 ばねにおもりをつるすと、6.1 cm のびてつり合いました。このおもりのゆれの周期を求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\sqrt{0.00622} = 0.0789$）。

10 $C = 2\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを 20 V にためてから、$L = 50\,\mathrm{mH}$ のコイルにつなぎかえました。電流のいちばん大きい値と、電気振動の周期を求めましょう（$\pi = 3.14$、$\sqrt{10^{-7}} = 0.000316$）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ ばねの運動方程式を立て、$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{k/m}$ と周期を求められる。
→ 208 ページ
- ☐ はじめの位置と速度から、振幅と初期位相を決められる。
→ 215 ページ
- ☐ 振り子・LC 回路の周期を、ばねと同じ形の式から求められる。
→ 226 ページ

ばねも振り子も電気も、同じ式でゆれていた！　でも本物のゆれは、いつか止まるよね。次の章で調べよう。

ソラ

第 1 部　微分方程式の入口

★★★～★★★★

6-7 ゆれながら止まる：減衰振動

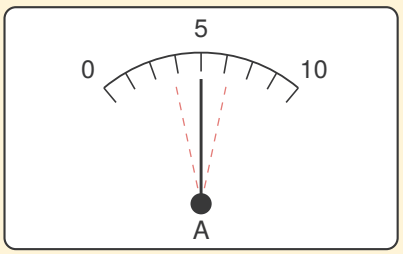
道しるべ　この章の前に 3-11 5-14 5-15 6-2 6-5 6-6
この章の先に 6-12 6-13 6-15

この章でできるようになること

- ★★★ ばね・質量・ダンパーの式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ を、力の図から立てられる。
- ★★★ 表計算で動かし、となりの山の比から、ゆれのへり方（対数減衰率）を読みとれる。
- ★★★★ 減衰比 ζ を計算して、「ゆれる・ちょうど・ゆっくり」のどれになるかを答えられる（RLC 回路でも）。

はてな？

理科室の電流計（アナログのメーター）にスイッチを入れると、針は目もりまでさっと動き、ほとんど行きすぎずに、すっと止まります。もし針がばねだけで動いていたら、目もりのまわりをいつまでもゆれ続けて、読めません。
針には、ゆれを止めるブレーキがついています。ブレーキは、どのくらいの強さにすればよいのでしょう。弱すぎても、強すぎても困りそうです。



ゆれ続けたら
目もりが読めない

6-6 では、ゆれは止まらないと考えました。でも本物のゆれは、空気の抵抗や摩擦で、いつか止まります。車や建物や計器では、わざと「ゆれを止める部品」をつけます。この章では、その部品（ダンパー）を式に入れて、ゆれがどのように止まるのかを、表計算で調べます。

やってみよう　ゆれの山の高さをはかろう

用意するもの

6-6 のやってみようのばねとおもり（100 g）、水を入れた大きなペットボトル（上を切ったもの）、ものさし、スマートフォン（スロー撮影）

1. ものさしをおもりの横に立て、つり合いの位置から 5 cm 引いてはなし、スロー撮影しよう。
2. 動画をコマ送りして、上に来たときの「つり合いの位置からの高さ」（山の高さ）を、1 回めから順に読もう。
3. おもりを水の中に入れて、①②をくり返そう。
4. となりの山の高さの比（あとの山÷前の山）を計算しよう。

山	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め
空気の中（cm）	5.0	4.6	4.2	3.9
水の中（cm）	5.0	2.0	0.8	0.3

表 1　ソラさんがはかった結果

となりの山の比（あとの山÷前の山）を計算します。

- 空気の中：$4.6 \div 5.0 = 0.92$、　$4.2 \div 4.6 \approx 0.91$、　$3.9 \div 4.2 \approx 0.93$
- 水の中：$2.0 \div 5.0 = 0.4$、　$0.8 \div 2.0 = 0.4$、　$0.3 \div 0.8 \approx 0.38$

どちらも、**となりの山の比が、ほぼ同じ**になりました。山の高さは「同じ数ずつ」ではなく、「同じ割合ずつ」へっています。3-11 で学んだ「倍々でへる」形です。水の中のほうが、1 回でへる割合が大きく、早く止まります。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

3-11　同じ割合ずつへる量は、指数関数で表せる（倍々でへる）。

5-14　$e^{-t/\tau}$ は、同じ時間ごとに同じ割合でへる。$e^x = y$ なら $x = \ln y$。

6-2　2 階の式は、位置 x と速度 v の 2 つの列で進める（速度を先に進めるオイラー法）。

6-5　空気の抵抗は、動きと反対向き。速さに比例する抵抗は $f = bv$。
2 乗に比例する抵抗の係数を c と書いた（$f = cv^2$）。

6-6　ばねとおもり：$m\ddot{x} = -kx$、$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$。0.5 kg・8 N/m で $\omega_n = 4$、周期 1.57 s。
エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$。LC 回路は $L\ddot{q} = -\dfrac{1}{C}q$。

数学の道具

1 ダンパー：速さに比例するブレーキ

ゆれを止めるために使う部品を、**ダンパー**といいます。車のタイヤの近くについている「ショックアブソーバー」や、ドアがゆっくり閉まるようにする「ドアクローザー」もダンパーです。

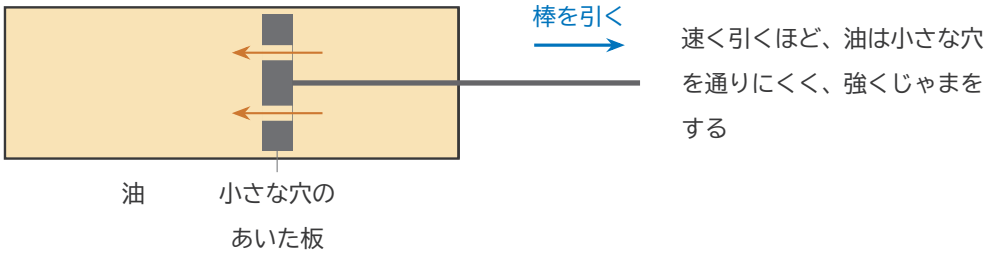


図 1　ダンパーのしくみ。筒の中に油が入っていて、小さな穴のあいた板（ピストン）が動く。

筒の中の油が、ピストンの小さな穴を通りぬけないと、棒は動けません。ゆっくり引けば油はゆっくり流れればよいので、力はほとんどいりません。速く引くと、油を急いで流さなければならないので、強い力が必要です。ダンパーの力の大きさは、ほぼ速さに比例します。

力の向きは、速度と反対

ダンパーは、動いている向きと反対向きにじゃまをします。右へ動いているときは左へ、左へ動いているときは右へ引きもどします。速度を $v = \dot{x}$（右向きが＋）とすると、

$$\text{ダンパーの力} \qquad -c\dot{x}$$

比例定数 c を**減衰係数**といいます。単位は、力〔N〕÷速さ〔m/s〕なので〔N·s/m〕です。たとえば $c = 0.4\,\mathrm{N\,s/m}$ のダンパーは、$0.2\,\mathrm{m/s}$ で右へ動いているとき、$-0.4 \times 0.2 = -0.08\,\mathrm{N}$（左向きに $0.08\,\mathrm{N}$）の力を出します。

> **せいかくに言うと**
>
> 6-5 では、空気の 2 乗に比例する抵抗の係数を c（単位〔$\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$〕）と書きました。この章からは、ダンパーの減衰係数を c（単位〔N·s/m〕）と書きます。同じ文字ですが、単位のちがう別の量です。機械の本では、ダンパーの係数を c と書くのがふつうなので、この本もそれにそろえます。ダンパーの力は、6-5 の「速さに比例する抵抗 bv」と同じ形です。

② ばね・質量・ダンパーの式を立てる

6-6 の台車（0.5 kg、ばね 8 N/m）に、ダンパーをならべてつけます。

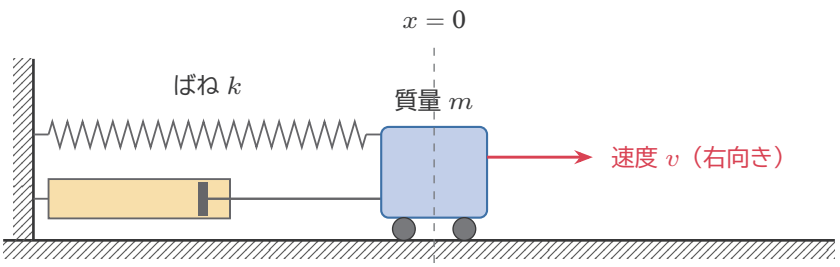


図 2　ばね（上）とダンパー（下）が、ならんで台車をかべにつないでいる。

台車にはたらく力

台車が位置 x にいて、速度 $\dot{x}$ で動いているとき、左右の向きの力は 2 つです。

- ばねの力 $-kx$（ずれと反対向き。6-6）
- ダンパーの力 $-c\dot{x}$（速度と反対向き。①）

$F = ma$（5-5）に入れると、

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \qquad \text{質量×加速度＝力の合計}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{右の 2 つを左へ移す}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

これが、**ばね・質量・ダンパー**の式です。左から「質量×加速度」「ダンパー」「ばね」の 3 つが、1 つずつ入っています。車のサスペンションも、建物のゆれも、計器の針も、まずこの形で考えます。

2 つの力の向きをくらべる

ばねの力は「位置」と反対、ダンパーの力は「速度」と反対です。ゆれる台車の 4 つの場面で、向きを見ます（$c = 0.4$、振幅 0.1 m のとき）。

場面	位置 x	速度 $\dot{x}$	ばね $-kx$	ダンパー $-c\dot{x}$
右のはし	＋	0	左向き	0
まん中を左へ	0	−	0	右向き
左のはし	−	0	右向き	0
まん中を右へ	0	＋	0	左向き

表 2　ばねの力は、はしで最大。ダンパーの力は、まん中（速さが最大）で最大。

ダンパーは、はしでは何もしません（止まっているから）。まん中を走りぬけるときに、いちばん強くブレーキをかけます。

答えの候補の表には、ない形

5-18 の答えの候補の表には、1 回微分と 2 回微分が両方入った式はありません。ためしに $x = \sin 4t$ を入れてみます（$m = 0.5$、$c = 0.4$、$k = 8$）。

$0.5\ddot{x} + 8x = -8\sin 4t + 8\sin 4t = 0$　　質量とばねの項（6-6 と同じ）

$0.4\dot{x} = 0.4 \times 4\cos 4t = 1.6\cos 4t$　　ダンパーの項

合計は $1.6\cos 4t$ になり、0 になりません。ダンパーの項が、sin を微分した cos を生んでしまい、ほかの項と打ち消しあえないのです。sin だけでも、e^{at} だけでも、うまくいきません。そこで、まず表計算で動きを見ます。式で解く方法は、6-12 で学びます。

③ 表計算で動かしてみる

6-2・6-6 と同じ型で計算します。変わるのは、加速度の式だけです。

1. 今の位置と今の速度から、加速度を求める：$a = \dfrac{-kx - cv}{m}$（ここが 6-6 とちがう）
2. 新しい速度：$v + a \times \Delta t$
3. 新しい位置：$x +$ (新しい速度) $\times \Delta t$

①の式は、②の運動方程式 $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ の両辺を m でわったものです。$c = 0.4$、$\Delta t = 0.01$ として、D2 に `=(-8*B2-0.4*C2)/0.5`、C3 に `=C2+D2*$E$2`、B3 に `=B2+C3*$E$2` と書いて、下へコピーします。

	A	B	C	D	E
1	t〔s〕	x〔m〕	v〔m/s〕	a〔m/s^2〕	Δt
2	0	0.10000	0	-1.60000	0.01
3	0.01	0.09984	-0.01600	-1.58464	
4	0.02	0.09952	-0.03185	-1.56687	
81	0.79	-0.07286	0.00265	1.16369	
159	1.57	0.05312	0.00468	-0.85374	

表 3　4 行めのあとは、とちゅうの行を省いた。81 行め（0.79 秒）のあたりで速度の符号が変わる（左のはし）。

2 行めの加速度は、速度が 0 なので、6-6 と同じ $-16 \times 0.1 = -1.6$ です。3 行めからは、ダンパーの $-0.4 \times v$ が加わります。たとえば 3 行めの加速度は

$$\frac{-8 \times 0.09984 - 0.4 \times (-0.016)}{0.5} = \frac{-0.79872 + 0.0064}{0.5} = -1.58464$$

で、6-6（-1.59744）より少し小さくなります。左へ動いているので、ダンパーが右向きに引いて、加速をじゃましているのです。

3 つのダンパーで、くらべる

c を 0.4、4、10 にかえて、同じ計算をします（どれも、はじめ $x = 0.1$、$v = 0$）。

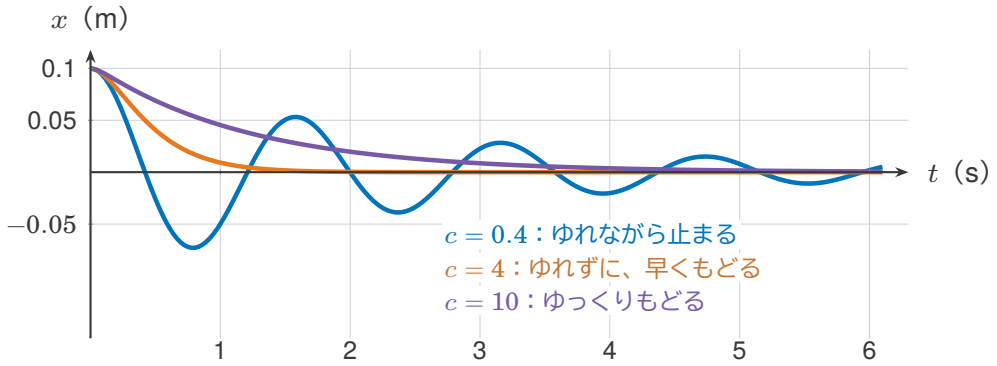


図 3　ダンパーの強さで、止まり方が 3 つに分かれる（青 $c = 0.4$、オレンジ $c = 4$、紫 $c = 10$）。

- $c = 0.4$（**弱いダンパー**）　ゆれながら、山がだんだん低くなって止まる。

- $c = 4$　0 をこえずに、すっともどる。3 本の中で、いちばん早く 0 に近づく。
- $c = 10$（**強いダンパー**）　0 をこえないが、ゆっくりとしかもどらない。2 秒たっても、まだ約 2 cm 残っている。

強いダンパーほど早く止まる、とは限りません。強すぎるダンパーは、もどる動きまでじゃましてしまうからです。

④ 山の高さは、同じ割合でへる

$c = 0.4$ のグラフの山（右のはし）を、表計算から読みとります。

山	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め	5 回め
時刻（s）	0	1.579	3.157	4.736	6.314
山の高さ（m）	0.1	0.0532	0.0283	0.0150	0.0080
前の山との比		0.532	0.532	0.532	0.532

表 4　山と山の時間は、どれも 1.579 秒。となりの山の比は、どれも 0.532。

やってみようと同じように、**となりの山の比が一定**です。山は、1.579 秒ごとに 0.532 倍になる「倍々でへる」形です。

つつみの曲線

「同じ時間ごとに同じ割合でへる」量は、指数関数 $e^{-\alpha t}$ で書けます（5-14）。山と山の時間 $T_\mathrm{d} = 1.579$ で 0.532 倍になるので、

$$e^{-\alpha \times 1.579} = 0.532 \qquad \text{1.579 秒で 0.532 倍}$$

$$-\alpha \times 1.579 = \ln 0.532 = -0.631 \qquad \text{両辺の自然対数をとる（5-14）}$$

$$\alpha = \frac{0.631}{1.579} \approx 0.400 \qquad \text{両辺を } -1.579 \text{ でわる}$$

山の頂上を結ぶと、$0.1e^{-0.4t}$ の曲線になります。T_d の d は、damped（減衰した）の頭文字です（6-12 の ω_d と同じ）。この曲線を、ゆれの**つつみ**といいます。ゆれは、上下のつつみ $\pm 0.1e^{-0.4t}$ のあいだにおさまりながら、小さくなっ

ていきます。ゆれそのものは、つつみ $0.1e^{-0.4t}$ と cos の波のかけ算に近い形です（5-18 ⑥の「ゆれながら止まる：e^{at} と sin のかけ算」の行。くわしくは 6-12）。

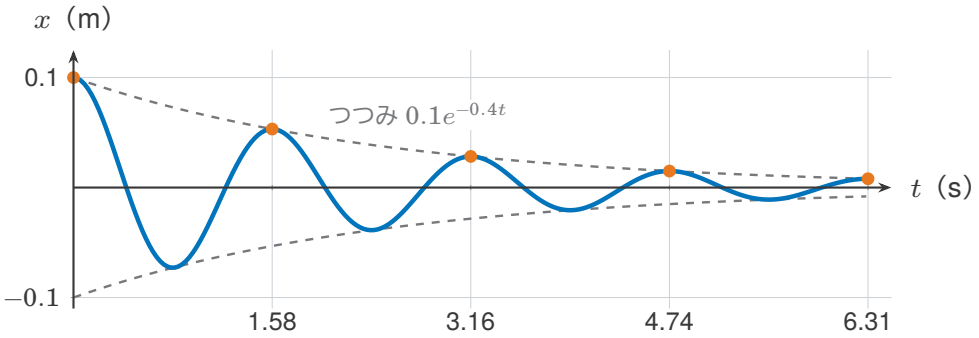


図 4　山（オレンジの点）は、つつみの曲線（点線）の上にのる。

へる速さ α は、c と m で決まる

$\alpha = 0.4$ はどこから来たのでしょう。c だけを 0.2、1、2 にかえて同じことをすると、次のようになります（$m = 0.5$）。

減衰係数 c	0.2	0.4	1	2
つつみから読んだ α	0.2	0.4	1.0	2.0
$\dfrac{c}{2m}$	0.2	0.4	1.0	2.0

表 5　α はいつも $\dfrac{c}{2m}$ と同じ。

ダンパーが強いほど速くへり、台車が重いほどゆっくりへる、というきまりです。

$$\text{つつみ}\quad e^{-\alpha t}\qquad \alpha = \frac{c}{2m}$$

なぜ 2 でわるのかは、このあとの「もっと知りたい」でエネルギーから説明します。

山と山の時間は、少し長くなる

山と山の時間 $T_\mathrm{d} = 1.579$ 秒は、ダンパーがないときの周期 $\dfrac{2\pi}{4} = 1.571$ 秒より、少しだけ長くなっています。ダンパーが動きにブレーキをかけるので、往復が少しおそくなるのです。$c = 2$ では 1.814 秒（15 % 長い）になります。くわしい式は 6-12 で求めます。

対数減衰率

となりの山の比の、逆数の自然対数を**対数減衰率**といい、δ（デルタ）で表します。

$$\delta = \ln \frac{\text{前の山}}{\text{あとの山}}$$

$c = 0.4$ では $\delta = \ln \dfrac{0.1}{0.0532} = \ln 1.880 \approx 0.631$ です。δ が大きいほど、1 回のゆれで大きくへります。

対数をとるのは、何回分かのへり方を「たし算」で考えられるからです。山が 1 回で 0.532 倍なら、n 回で 0.532^n 倍。対数をとると $n \times 0.631$ で、回数に比例します（3-12 の $\log a^n = n \log a$）。また、$\delta = \alpha T_\mathrm{d}$（へる速さ×山と山の時間）なので、$\delta$ と T_d をはかれば、α がわかります。建物や橋の「ゆれの止まりやすさ」は、たたいてゆらし、山の高さをはかって、この δ から調べます。

> **せいかくに言うと**
>
> 山の高さが「同じ割合」でへるのは、ブレーキの力が速さに比例する（$-c\dot{x}$）からです。床の上をすべる物の摩擦のように、ブレーキの力の大きさが速さによらず一定のときは、山の高さは 1 回ごとに「同じ量」ずつへり（等差）、ある所でぴたりと止まります。やってみようの水の中や空気の中のゆれは、速さに比例する抵抗に近いので、割合でへりました。

5 ちょうどよいブレーキをさがす：臨界と減衰比

❓はてな？の問いにもどります。ブレーキ（ダンパー）は、どれくらいの強さがよいのでしょう。$m = 0.5$、$k = 8$ のまま、c を少しずつかえて表計算し、2 つのことを調べます。

- 行きすぎ：0 をこえて反対側へ、いちばん遠くまで行った距離（はじめの 0.1 に対する割合）
- 落ち着く時刻：$|x|$ が 0.002（はじめの 2％）より小さくなって、もう出なくなる時刻

c	0.4	1	2	3	3.5	4	5	10
行きすぎ	73％	44％	16％	2.8％	0.3％	0	0	0
落ち着く時刻（s）	9.59	3.53	2.02	1.43	1.11	1.46	2.10	4.74

表 6　c が 4 より小さいと行きすぎ、4 以上では行きすぎない。

行きすぎがなくなる境目は、$c = 4$ です。$c = 4$ のとき、行きすぎずに落ち着くまでの時間がいちばん短く（1.46 秒）、それより強くすると、かえって時間がかかります（$c = 10$ で 4.74 秒）。この境目の c を**臨界減衰係数**といい、c_c と書きます。

境目の c のきまりを見つける

m と k をかえて、同じように境目をさがします。

m	k	境目の c	$\sqrt{mk}$	$2\sqrt{mk}$
0.5	8	4	2	4
0.5	2	2	1	2
2	8	8	4	8
1	25	10	5	10

表 7　どの組でも、境目の c は $2\sqrt{mk}$ に等しい。

$$c_c = 2\sqrt{mk}$$

重い台車ほど、かたいばねほど、強いブレーキが必要になります。なぜ $2\sqrt{mk}$ になるのかは、6-12 で、2 次方程式の判別式から説明します（3-10 で約束した「ゆれるか、ゆれないか」）。

減衰比 ζ

使っている c が、境目 c_c の何倍かを表す数を、**減衰比**といい、ζ（ゼータ）で表します。

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

ζ は「〔N·s/m〕÷〔N·s/m〕」なので、単位のない数です。ζ だけで、止まり方が 3 つに分かれます。

ζ	止まり方	②のグラフ
$\zeta < 1$	ゆれながら止まる（減衰振動）	$c = 0.4$（$\zeta = 0.1$）
$\zeta = 1$	ちょうど（臨界）	$c = 4$（$\zeta = 1$）
$\zeta > 1$	ゆれずに、ゆっくりもどる	$c = 10$（$\zeta = 2.5$）

表 8　大学の本では、3 つを「不足減衰」「臨界減衰」「過減衰」とよぶ（6-12）。

$\zeta < 1$ のゆれを、**減衰振動**といいます。この章の題の「ゆれながら止まる」動きです。

はてな？の答え

ブレーキは、ζ が 1 に近くなる強さにします。ζ が 1 より小さすぎると、針は目もりのまわりでゆれ続けます。ζ が 1 より大きすぎると、針はなかなか目もりに着きません。$\zeta = 1$ が、行きすぎずにいちばん早く止まる強さです。表を見ると、ζ を 1 より少しだけ小さく（$c = 3.5$、$\zeta = 0.875$）すると、ほんの少し（0.3 %）

行きすぎるかわりに、もっと早く（1.11 秒）落ち着きます。計器や車では、目的に合わせて、ζ を 1 のまわりから選びます。

アナログの電流計では、針の根もとのコイルを巻いたアルミのわくが、磁石のあいだで回ります。わくが動くと、わくの中に**うず電流**が流れ、動きをじゃまする力が生まれます。この力は速さに比例するので、ダンパーと同じはたらきをします。

ζ と、へる速さ・対数減衰率

④の $\alpha = \dfrac{c}{2m}$ を、ζ と ω_n で書きなおします。$c = 2\zeta\sqrt{mk}$ なので、

$$\alpha = \frac{c}{2m} = \frac{2\zeta\sqrt{mk}}{2m} \qquad c = 2\zeta\sqrt{mk} \text{ を入れる}$$

$$= \zeta\sqrt{\frac{mk}{m^2}} = \zeta\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad m = \sqrt{m^2} \text{ として、} \sqrt{\ } \text{ をまとめる}$$

$$= \zeta\omega_n \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6\text{-}6)$$

ζ が小さいときは、山と山の時間 T_d は $\dfrac{2\pi}{\omega_n}$ とほぼ同じなので、

$$\delta = \alpha T_d \approx \zeta\omega_n \times \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\zeta$$

ζ	0.05	0.1	0.25	0.5
表計算の δ	0.315	0.631	1.62	3.63
$2\pi\zeta$	0.314	0.628	1.57	3.14

表 9　ζ が 0.1 くらいまでなら、$\delta \approx 2\pi\zeta$ はよく合う。

だから、ゆれの山を 2 つはかれば、$\zeta \approx \dfrac{\delta}{2\pi}$ で減衰比がわかります。

ソラ

⑤は 1 回で全部わからなくても大丈夫。$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$ を計算して、1 とくらべられれば先へ進めるよ。

6 エネルギーは、どこへ行く？

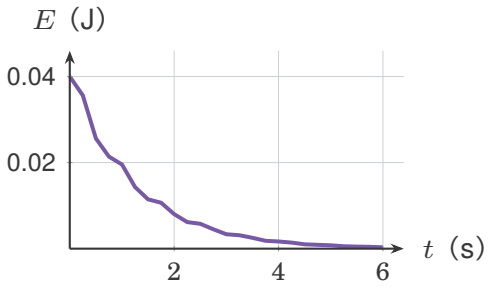
6-6 では、ばねのエネルギーと運動エネルギーの合計 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が一定でした。ダンパーがあると、どうなるでしょう。6-6 と同じように微分します。

$$\dot{E} = v(m\ddot{x} + kx) \qquad \text{6-6 と同じ計算}$$

$$= v \times (-c\dot{x}) \qquad \text{この章の式から } m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$$

$$= -cv^2 \qquad \dot{x} = v$$

c も v^2 も 0 以上なので、$\dot{E}$ はいつも 0 以下です。エネルギーは、ふえることがなく、動いているあいだずっとへっていきます。cv^2 は、ダンパーの力 cv と速さ v のかけ算です。力× 1 秒に進む距離なので、ダンパーが 1 秒あたりにする仕事（5-12 の電力と同じ「1 秒あたりのエネルギー」）です。

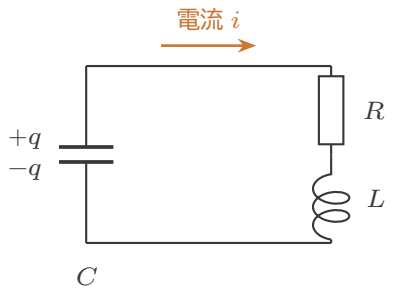


$c = 0.4$ のときの E（表計算で 0.25 秒ごと）。台車が速く走る所でエネルギーが大きくへり、はしの近く（速さが 0 に近い所）では、ほとんどへりません。1 周期（1.58 秒）で、0.04 J が 0.011 J までへりました。

へったエネルギーは、消えたのではありません。ダンパーの中で油が小さな穴をこすりながら流れ、油が温まります。ゆれのエネルギーは、**熱**に変わったのです。車で長いでこぼこ道を走ると、ショックアブソーバーがさわれないほど熱くなることがあります。

7 電気の減衰振動：RLC 回路

6-6 の LC 回路に、抵抗 R を入れます。抵抗は、電気のエネルギーを熱に変える部品です（電気ストーブの線と同じ）。



はじめにコンデンサーに電気をため（上の板が $+q$）、コイルと抵抗につなぎます。6-6 と同じように、電流 i は上の板から出てコイルのほうへ流れる向きを＋とし、$i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ です。コンデンサーの電圧 $\dfrac{q}{C}$ が、抵抗の電圧 Ri（オームの法則）と、コイルの電圧 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ に分かれます（6-4 の RL 回路と同じ考え）。

$$\frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$$ 電圧が 2 つに分かれる

$$\frac{q}{C} = -L\ddot{q} - R\dot{q}$$ $i = -\dot{q}$、$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\ddot{q}$ を入れる

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$ 右の 2 つを左へ移す

$$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0}$$

ばね・質量・ダンパーの式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ と同じ形です。6-6 の対応（$m \to L$、$k \to \dfrac{1}{C}$、$x \to q$）に、新しく**ダンパー** c → **抵抗** R が加わりました。どちらも、エネルギーを熱に変える部品です。

臨界の抵抗と減衰比

おきかえれば、臨界の値も減衰比も、そのまま使えます。

$$R_{\mathrm{c}} = 2\sqrt{L \times \frac{1}{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad \zeta = \frac{R}{R_{\mathrm{c}}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ のとき、$\dfrac{L}{C} = \dfrac{0.01}{0.000001} = 10\,000$ なので、$R_{\mathrm{c}} = 2\sqrt{10\,000} = 200\,\Omega$ です。単位は $\sqrt{\mathrm{H/F}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{V\,s/A}}{\mathrm{A\,s/V}}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{V^2}}{\mathrm{A^2}}} = \mathrm{V/A} = \Omega$ で、抵抗の単位になっています。

コンデンサーを 10 V にためてから、$R = 20\,\Omega$（$\zeta = 0.1$）、$200\,\Omega$（$\zeta = 1$）、$1\,\mathrm{k}\Omega$（$\zeta = 5$）でつないだときの、コンデンサーの電圧です。表計算では、Δt を 0.00001 s（10 μs）にして、ばねと同じ型で計算できます。

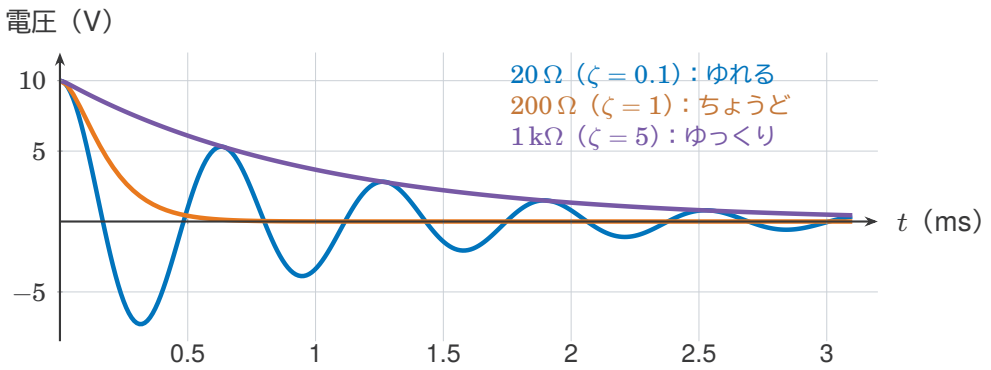


図 5 RLC 回路のコンデンサーの電圧。ばねの 3 本のグラフ（③）と同じ 3 つの止まり方。ゆれの周期は約 0.63 ms。

電気の回路でも、抵抗が小さいとゆれながら止まり、ちょうど R_c でゆれずに早く落ち着き、大きすぎるとゆっくり放電します。ばねのゆれが 1 秒ほどかかるのに対して、電気のゆれは 1000 分の 1 秒ほどで終わります。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

1 自由度の粘性減衰系の運動方程式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ を m で除し、固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ と減衰比 $\zeta = c/c_c$（$c_c = 2\sqrt{mk}$ は臨界減衰係数）を用いると

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

を得る。$0 < \zeta < 1$ のとき不足減衰であり、自由振動の振幅は $e^{-\zeta\omega_n t}$ に比例して減衰する。対数減衰率は $\delta = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ である。

訳 「1 自由度」は位置が 1 つの数 x で決まること。「粘性減衰」は速さに比例するブレーキ。「m で除し」は m でわって。$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$、$\frac{k}{m} = \omega_n^2$ と書きかえた形で、⑤の $\alpha = \zeta\omega_n$ と同じ。「不足減衰」は $\zeta < 1$ の「ゆれながら止まる」。δ のくわしい式は 6-12 で導く。

1

もっと知りたい ★★★★

なぜ $\alpha = \dfrac{c}{2m}$ なのか：エネルギーで考える

ダンパーが弱いとき、1 回のゆれのあいだは、ほとんど単振動（振幅 X）と同じに動きます。エネルギーは、はしでの値 $E = \dfrac{1}{2}kX^2$ です。

⑥より、エネルギーは 1 秒あたり cv^2 ずつへります。単振動の速度は $v = -X\omega_{\mathrm{n}} \sin(\omega_{\mathrm{n}} t)$ の形なので、v^2 の 1 周期の平均は、$\sin^2$ の平均が $\dfrac{1}{2}$（5-15）だから $\dfrac{1}{2}X^2\omega_{\mathrm{n}}^2$ です。$m\omega_{\mathrm{n}}^2 = k$ を使うと、

$$(cv^2 \text{ の平均}) = \frac{c}{2}X^2\omega_{\mathrm{n}}^2 = \frac{c}{m} \times \frac{1}{2}m\omega_{\mathrm{n}}^2 X^2 = \frac{c}{m} \times \frac{1}{2}kX^2 = \frac{c}{m}E$$

つまり $\dot{E} \approx -\dfrac{c}{m}E$ で、エネルギーは「自分に比例してへる」（6-4）ので、$E \propto e^{-\frac{c}{m}t}$ です（$\propto$ は「比例する」）。エネルギーは振幅の 2 乗に比例するので、振幅は $\sqrt{E}$ に比例し、

$$X \propto \sqrt{e^{-\frac{c}{m}t}} = e^{-\frac{c}{2m}t}$$

$\sqrt{}$ をとると肩が半分になる（$\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$）ことが、2 でわる理由でした。

たいせつ

式	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$　（ダンパーの力は $-c\dot{x}$、速度と反対向き）
山のへり方	となりの山の比は一定。つつみ $e^{-\alpha t}$、$\alpha = \dfrac{c}{2m} = \zeta\omega_{\mathrm{n}}$
対数減衰率	$\delta = \ln \dfrac{\text{前の山}}{\text{あとの山}} \approx 2\pi\zeta$（$\zeta$ が小さいとき）
減衰比	$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$　$\zeta < 1$ ゆれる、$\zeta = 1$ ちょうど、$\zeta > 1$ ゆっくり
RLC 回路	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = 0$　$\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
エネルギー	ダンパーや抵抗が、1 秒あたり cv^2 ずつ熱に変える。

この章で出てきたことば

ダンパー　速さに比例して、動きと反対向きの力を出す部品。ショックアブソーバー、ドアクローザー。

減衰係数　ダンパーの力 $-c\dot{x}$ の c〔N·s/m〕。

減衰振動　ゆれながら、山がだんだん低くなって止まる動き。

対数減衰率　となりの山の比の逆数の自然対数 δ。

臨界・減衰比　行きすぎがなくなる境目の $c_c = 2\sqrt{mk}$。$\zeta = \dfrac{c}{c_c}$。

つつみ　ゆれの山を結んだ曲線。減衰振動では $e^{-\alpha t}$ の形。

記号カード　初めて出た章 6-7

ζ

読み方　ゼータ

意味　減衰比。$\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$。1 より小さいとゆれ、1 でちょうど、1 より大きいとゆっくりもどる

英語　damping ratio

記号カード　初めて出た章 6-7

c

読み方　シー

意味　ダンパーの減衰係数〔N·s/m〕。6-5 の 2 乗の抵抗の係数 c〔N·s^2/m^2〕とは別の量

英語　damping coefficient

コラム　ドアクローザーのひみつ

学校や会社の重いドアの上についている箱が、ドアクローザーです。中には、ドアを閉める向きに引くばねと、油の入ったダンパーが入っています。ばねだけだと、ドアは「バタン！」と大きな音を立てて閉まり、指をはさむと危険です。ダンパーが、閉まる速さに比例したブレーキをかけるので、ドアはゆっくり、静かに閉まります。多くのドアクローザーには、油の通り道の太さを変えるねじがついていて、ねじを回すと c が変わり、閉まる速さを調節できます。

例題でたしかめよう

例題 1　式を立てて、加速度を求める

車の 1 つのタイヤの上に、車体の 300 kg がのっています。ばね定数は 30 000 N/m、ダンパーの減衰係数は 1800 N s/m です。車体が、つり合いの位置から上へ $x = 0.02\,\mathrm{m}$ の所を、下向きに 0.5 m/s で動いているとき（上向きを＋）、車体の加速度を求めましょう。

考え方　$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ (②)。上向きが＋なので、$x = 0.02$、$\dot{x} = -0.5$。ばねの力とダンパーの力を、符号に気をつけて 1 つずつ計算する。

式

ばねの力：$-kx = -30000 \times 0.02 = -600$（下向き）

ダンパーの力：$-c\dot{x} = -1800 \times (-0.5) = +900$（上向き）

合計：$-600 + 900 = 300$

加速度：$\ddot{x} = \dfrac{300}{300} = 1$

答え　上向きに $1\,\mathrm{m/s^2}$

下へ動いているので、ダンパーは上向きにじゃまをします。この瞬間は、ダンパーの力のほうがばねの力より大きいので、加速度は上向きです。

じぶんでとこう 1

$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$c = 0.4\,\mathrm{N\,s/m}$ の台車が、$x = 0.05\,\mathrm{m}$ の所を、右向きに 0.2 m/s で動いています（右向きを＋）。加速度を求めましょう。

例題 2　表計算の 2 行を手で計算する

$m = 0.5$、$k = 8$、$c = 0.4$ の台車を、$x = 0.1$、$v = 0$ からはなします。手で計算しやすいように $\Delta t = 0.05$ として、速度を先に進めるオイラー法で 2 歩進め、0.1 秒後の位置と速度を求めましょう。

考え方　③の順。①加速度 $a = \dfrac{-8x - 0.4v}{0.5}$、②新しい速度 $v + a\Delta t$、③新しい位置 $x +$ (新しい速度)Δt。

式

$$1\text{ 歩め：}a = \frac{-8 \times 0.1 - 0}{0.5} = -1.6$$

$$v = 0 + (-1.6) \times 0.05 = -0.08$$

$$x = 0.1 + (-0.08) \times 0.05 = 0.096$$

$$2\text{ 歩め：}a = \frac{-8 \times 0.096 - 0.4 \times (-0.08)}{0.5}$$

$$= \frac{-0.768 + 0.032}{0.5} = -1.472$$

$$v = -0.08 + (-1.472) \times 0.05 = -0.1536$$

$$x = 0.096 + (-0.1536) \times 0.05 = 0.08832$$

答え　0.1 秒後に $x \approx 0.0883\,\mathrm{m}$、$v \approx -0.154\,\mathrm{m/s}$

じぶんでとこう 2

$m = 0.5$、$k = 8$、$c = 4$ の台車を、$x = 0.1$、$v = 0$ からはなします。$\Delta t = 0.05$ で 2 歩進め、0.1 秒後の位置と速度を求めましょう。

例題 3　となりの山の比から、対数減衰率

減衰振動の山の高さが、0.1 m、0.0532 m、…と、同じ割合でへっていきます。対数減衰率 δ を求めましょう。また、山の高さがはじめの $\dfrac{1}{10}$ より小さくなるのは、何回めの山からですか（$\ln 1.88 = 0.631$、$\ln 10 = 2.303$）。

考え方　$\delta = \ln \dfrac{\text{前の山}}{\text{あとの山}}$（④）。$n$ 周期あとの山は 0.532^n 倍。対数をとると、n 周期で $n\delta$ だけへる。

式

$\dfrac{0.1}{0.0532} \approx 1.88$ なので、$\delta = \ln 1.88 = 0.631$

n 周期あとの山がはじめの $\dfrac{1}{10}$ になるのは、$n\delta = \ln 10$ のとき

$n = \dfrac{2.303}{0.631} \approx 3.65$

n は整数なので、4 周期あと（$0.532^4 \approx 0.080$）。1 回めの山から数えて 5 回め

答え　$\delta \approx 0.631$。5 回めの山（4 周期あと）から

じぶんでとこう 3

山の高さが 20 mm、16 mm、…と、同じ割合でへるゆれがあります。対数減衰率を求めましょう。また、山の高さがはじめの $\dfrac{1}{10}$ より小さくなるのは、何周期あとですか（$\ln 1.25 = 0.223$、$\ln 10 = 2.303$）。

例題 4　減衰比を計算して、止まり方を答える

$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$ の台車に、$c = 0.4$、4、10 のダンパーをつけます。それぞれの減衰比 ζ を求め、止まり方を答えましょう。また、例題 1 の車（$m = 300$、$k = 30\,000$、$c = 1800$）の ζ も求めましょう。

考え方　$c_\mathrm{c} = 2\sqrt{mk}$、$\zeta = \dfrac{c}{c_\mathrm{c}}$（⑤）。1 より小さいか、等しいか、大きいか。

式

$$c_\mathrm{c} = 2\sqrt{0.5 \times 8} = 2\sqrt{4} = 4$$

$$\zeta = \frac{0.4}{4} = 0.1、\quad \frac{4}{4} = 1、\quad \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\text{車：} c_\mathrm{c} = 2\sqrt{300 \times 30000} = 2\sqrt{9000000} = 2 \times 3000 = 6000$$

$$\zeta = \frac{1800}{6000} = 0.3$$

答え　0.1（ゆれながら止まる）、1（ちょうど）、2.5（ゆっくりもどる）。車は 0.3（少しゆれながら止まる）

じぶんでとこう 4

$m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 200\,\mathrm{N/m}$ のおもりに、$c = 10$、40、60 のダンパーをつけます。それぞれの ζ を求め、止まり方を答えましょう。

例題 5　ほしい減衰比にするダンパーを選ぶ

例題 1 の車（$m = 300\,\mathrm{kg}$、$k = 30\,000\,\mathrm{N/m}$）で、減衰比を $\zeta = 0.4$ にしたいと思います。ダンパーの減衰係数 c をいくつにすればよいですか。また、このときの固有角振動数 ω_n と、へる速さ α を求めましょう。

考え方　$\zeta = \dfrac{c}{c_\mathrm{c}}$ を c について解くと $c = \zeta \times c_\mathrm{c}$。$\alpha = \zeta\omega_\mathrm{n}$（⑤）。

式

$c_\mathrm{c} = 6000$（例題 4）なので、$c = 0.4 \times 6000 = 2400$

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{30000}{300}} = \sqrt{100} = 10$$

$$\alpha = 0.4 \times 10 = 4 \quad \left(\text{確かめ：}\frac{c}{2m} = \frac{2400}{600} = 4\right)$$

答え　$c = 2400\,\mathrm{N\,s/m}$、$\omega_\mathrm{n} = 10\,\mathrm{rad/s}$、$\alpha = 4\,\mathrm{/s}$

じぶんでとこう 5

$m = 400\,\mathrm{kg}$、$k = 40\,000\,\mathrm{N/m}$ の車で、$\zeta = 0.25$ にしたいとき、c と ω_n、α を求めましょう。

同じ車に荷物をたくさん積むと、m がふえます。$c_\mathrm{c} = 2\sqrt{mk}$ が大きくなるので、同じダンパーでも $\zeta = \dfrac{c}{c_\mathrm{c}}$ は小さくなり、車はゆれやすくなります。トラックやバスには、積む荷物の重さに合わせて、ばねやダンパーの強さを変えられるものもあります。

例題 6　つつみから、ゆれがおさまる時間を求める

例題 5 の車（$\alpha = 4\,/\mathrm{s}$）が、でこぼこを通って 5 cm ゆれ始めました。ゆれのつつみが 5 mm（はじめの $\frac{1}{10}$）になるのは何秒後ですか。また、α が半分の $2\,/\mathrm{s}$ なら何秒後ですか（$\ln 10 = 2.303$）。

考え方　つつみは $X_0 e^{-\alpha t}$（④）。$e^{-\alpha t} = \frac{1}{10}$ になる t を、両辺の自然対数をとって求める（5-14）。

式

$$e^{-4t} = \frac{1}{10}$$

$$-4t = \ln\frac{1}{10} = -\ln 10 = -2.303 \quad（両辺の自然対数をとる）$$

$$t = \frac{2.303}{4} \approx 0.58$$

$\alpha = 2$ なら $t = \frac{2.303}{2} \approx 1.15$

答え　約 0.58 s 後。$\alpha = 2$ なら約 1.15 s 後（2 倍かかる）

$\ln\frac{1}{10} = -\ln 10$ は、5-18 の冷めるお湯の $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ と同じきまりです。へる速さ α が半分になると、おさまるまでの時間は 2 倍になります。

じぶんでとこう 6

へる速さ $\alpha = 0.4\,/\mathrm{s}$ の台車（③の $c = 0.4$）のゆれのつつみが、はじめの $\frac{1}{10}$ になるのは何秒後ですか。また、$\frac{1}{100}$ になるのは何秒後ですか（$\ln 10 = 2.303$、$\ln 100 = 4.605$）。

例題 7　山の比から減衰比を見積もる

高いビルを、強い風のあとで計ってみると、ゆれの山が 1 回ごとに 0.9 倍になっていました。対数減衰率と、減衰比 ζ を見積もりましょう（$\ln\dfrac{1}{0.9}=0.105$、$\pi=3.14$）。

考え方　$\delta=\ln\dfrac{\text{前の山}}{\text{あとの山}}=\ln\dfrac{1}{0.9}$。$\zeta$ が小さいときは $\zeta\approx\dfrac{\delta}{2\pi}$（⑤）。

式

$$\delta=\ln\frac{1}{0.9}=0.105$$

$$\zeta\approx\frac{0.105}{2\times3.14}=\frac{0.105}{6.28}\approx0.017$$

答え　$\delta\approx0.105$、$\zeta\approx0.017$（約 2 %）

ビルの ζ は、ふつう 0.01〜0.05 ほどととても小さく、一度ゆれ始めると、なかなか止まりません。そこで、超高層ビルでは、柱やかべの中にダンパーを入れて、ζ を大きくします（物理・工学ではこう使う）。

じぶんでとこう 7

橋をたたいてゆらすと、ゆれの山が 1 回ごとに 0.8 倍になりました。対数減衰率と減衰比を見積もりましょう（$\ln1.25=0.223$、$\pi=3.14$）。

例題 8　RLC 回路の臨界の抵抗と減衰比

$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路の、臨界の抵抗 R_c を求めましょう。また、$R = 20\,\Omega$ のときの減衰比を求め、止まり方を答えましょう。

考え方　$R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$、$\zeta = \dfrac{R}{R_c}$（⑦）。接頭語を直してから計算する。

式

$L = 0.01$、$C = 0.000001$ なので、$\dfrac{L}{C} = \dfrac{0.01}{0.000001} = 10000$

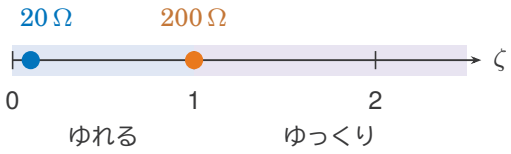
$R_c = 2\sqrt{10000} = 2 \times 100 = 200$

$\zeta = \dfrac{20}{200} = 0.1$

答え　$R_c = 200\,\Omega$。$\zeta = 0.1$ で、電圧はゆれながら 0 になる

じぶんでとこう 8

$L = 1\,\mathrm{mH}$、$C = 10\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路の、臨界の抵抗を求めましょう。また、$R = 5\,\Omega$ のときの減衰比を求め、止まり方を答えましょう。



例題 8 の回路で、抵抗を ζ の数直線にのせました。$\zeta = 1$（$200\,\Omega$）が境目です。$1\,\mathrm{k}\Omega$ は $\zeta = 5$ で、ずっと右の「ゆっくり」の側にあります。

例題 9　ダンパーが熱に変えたエネルギー

$k = 8\,\mathrm{N/m}$ のばねの台車が、山の高さ $0.1\,\mathrm{m}$ から、1 周期あとの山の高さ $0.0532\,\mathrm{m}$ までゆれました。このあいだにダンパーが熱に変えたエネルギーは何 J ですか。それは、はじめのエネルギーの何 % ですか。

考え方　山（はし）では速さが 0 なので、エネルギーはばねの $\frac{1}{2}kx^2$ だけ（⑥）。へった分が、熱に変わった分。

式

はじめ：$\frac{1}{2} \times 8 \times 0.1^2 = 0.04$

1 周期あと：$\frac{1}{2} \times 8 \times 0.0532^2 = 4 \times 0.00283 = 0.0113$

熱に変わった分：$0.04 - 0.0113 = 0.0287$

割合：$0.0287 \div 0.04 \approx 0.72$

答え　約 $0.029\,\mathrm{J}$。はじめの約 72 %

山の高さは 0.532 倍ですが、エネルギーは $0.532^2 \approx 0.28$ 倍です。エネルギーは高さの 2 乗に比例するからです。

じぶんでとこう 9

$k = 50\,\mathrm{N/m}$ のばねのおもりの山の高さが、$0.2\,\mathrm{m}$ から 1 周期あとに $0.1\,\mathrm{m}$ になりました。熱に変わったエネルギーと、その割合を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

ダンパーの力を、位置と反対向きにする

✕ 右のはし（$x > 0$）では、ダンパーが左へいちばん強く引く

○ 右のはしでは止まっている（$\dot{x} = 0$）ので、ダンパーの力は 0

ダンパーの力は $-c\dot{x}$ で、速度と反対向きです。位置と反対向きなのは、ばねの力 $-kx$ のほうです。

⚠ まちがえやすいところ

ブレーキが強いほど、早く止まると思う

✕ $c = 10$（$\zeta = 2.5$）のほうが、$c = 4$ より早く止まる

○ いちばん早く落ち着くのは、ζ が 1 の近く

強すぎるダンパーは、もどる動きもじゃまします。③のグラフで、$c = 10$ は 2 秒たっても、まだ約 2 cm 残っています（$c = 4$ ではもう 0.3 mm）。

⚠ まちがえやすいところ

臨界の c で 2 をかけ忘れる

✕ $c_c = \sqrt{mk} = \sqrt{0.5 \times 8} = 2$

○ $c_c = 2\sqrt{mk} = 2 \times 2 = 4$

⑤の表で、境目はどれも $\sqrt{mk}$ の 2 倍でした。$c = 2$ のグラフはまだ 16 % も行きすぎます。

⚠ まちがえやすいところ

対数減衰率で、比を逆にする

✕ $\delta = \ln \dfrac{0.0532}{0.1} = \ln 0.532 = -0.631$

○ $\delta = \ln \dfrac{0.1}{0.0532} = \ln 1.88 = 0.631$

δ は「前の山÷あとの山」（1 より大きい）の対数で、正の数になるように決めてあります。逆にすると、符号が反対になります。

⚠ まちがえやすいところ

6-5 の c と同じ量だと思う

✕ ダンパーの力は cv^2

○ ダンパーの力は $c\dot{x}$（速さに比例）。単位は〔N·s/m〕

6-5 の c は 2 乗の抵抗の係数〔$\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$〕でした。同じ文字でも、単位のちがう別の量です。

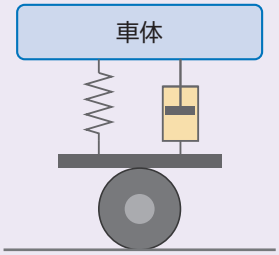
コラム　計算のせいでふくらむ？

6-2 のふつうのオイラー法（今の速度で位置を進める）で $c = 0.4$ のゆれを計算すると、$\Delta t = 0.1$ では、山は 0.1 から 0.19、0.34、0.64、…と、へるどころか 1 往復ごとに約 1.9 倍に高くなってしまいます。計算の方法がエネルギーを少しずつふやす分（6-2）が、ダンパーがへらす分より大きいからです。これを見て「ダンパーが効いていない」と思ったら、まちがいです。計算の方法を、速度を先に進めるオイラー法にかえるか、Δt を小さくして確かめます。表計算の答えをうのみにせず、エネルギーがふえていないかを見るのは、技術者の大事な習慣です。

物理・工学ではこう使う

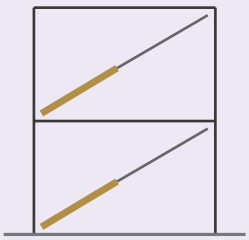
● **車のサスペンション**

タイヤと車体のあいだには、ばねとダンパー（ショックアブソーバー）がならんでいます。ばねがでこぼこの衝撃をやわらげ、ダンパーがそのあとのゆれを止めます。乗用車では、減衰比を 0.3 前後にすることが多く、少しだけゆれるかわりに、でこぼこの衝撃を体に伝えにくくしています。



● **超高層ビルの制振ダンパー**

ビルの柱と柱のあいだに、ななめにオイルダンパーを入れます。地震や強い風でビルが横にゆれると、ダンパーがのび縮みして、ゆれのエネルギーを熱に変えます。ζ がわずか 0.02 ほどのビルでも、0.1 ほどまで大きくでき、ゆれが早くおさまります。



ななめのダンパー

● **電源を入れたときの電圧のゆれ**

電子回路の電源の配線には、コイルとコンデンサーのはたらきが自然にあり、抵抗が小さいと、スイッチを入れた直後に電圧がゆれます（リンギング）。半導体の部品は、決められた電圧をこえるとこわれることがあるので、抵抗を入れて ζ を大きくし、ゆれをおさえます。

章末問題

基本 ★★★

1 $m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 50\,\mathrm{N/m}$、$c = 4\,\mathrm{N\,s/m}$ のおもりが、$x = 0.1\,\mathrm{m}$ の所を、左向きに $0.5\,\mathrm{m/s}$ で動いています（右向きを＋）。加速度を求めましょう。

2 $m = 0.5$、$k = 8$、$c = 2$ の台車を、$x = 0.1$、$v = 0$ からはなします。$\Delta t = 0.05$ で、速度を先に進めるオイラー法で 2 歩進めましょう。

3 山の高さが $50\,\mathrm{mm}$、$40\,\mathrm{mm}$、…と同じ割合でへるゆれの、対数減衰率を求めましょう。山がはじめの $\dfrac{1}{10}$ より小さくなるのは、何周期あとですか（$\ln 1.25 = 0.223$、$\ln 10 = 2.303$）。

4 $m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 100\,\mathrm{N/m}$ のおもりの臨界減衰係数を求めましょう。$c = 5$、20、30 のときの ζ と止まり方を答えましょう。

5 $L = 4\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路の、臨界の抵抗を求めましょう。$R = 40\,\Omega$ のときの ζ も求めましょう。

6 $k = 20\,\mathrm{N/m}$ のばねのおもりの山の高さが、$0.1\,\mathrm{m}$ から 1 周期あとに $0.06\,\mathrm{m}$ になりました。熱に変わったエネルギーと、その割合を求めましょう。

チャレンジ ★★★★

7 車体 $250\,\mathrm{kg}$、ばね定数 $25\,000\,\mathrm{N/m}$ の車で、減衰比を 0.3 にしたいとき、ダンパーの減衰係数と、へる速さ α を求めましょう。

8 塔をゆらすと、ゆれの山が 1 回ごとに 0.95 倍になりました。減衰比を見積もりましょう。また、山がはじめの半分より小さくなるのは何周期あとですか（$\ln \dfrac{1}{0.95} = 0.0513$、$\ln 2 = 0.693$、$\pi = 3.14$）。

9 $L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路で、減衰比を 0.5 にするには、抵抗を何 Ω にすればよいですか。また、$R = 300\,\Omega$ にすると、止まり方はどうなりますか。

10 ばね・質量・ダンパーのゆれの、へる速さが $\alpha = 1.5/\mathrm{s}$ です。ゆれのつつみが、はじめの $\dfrac{1}{10}$ になるのは何秒後ですか。$\dfrac{1}{100}$ になるのは何秒後ですか（$\ln 10 = 2.303$、$\ln 100 = 4.605$）。

11 $m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$ の台車に、$c = 1\,\mathrm{N\,s/m}$ のダンパーをつけました。減衰比 ζ と、へる速さ α を求めましょう。また、ゆれのつつみがはじめの $\dfrac{1}{10}$ になるのは何秒後ですか（$\ln 10 = 2.303$）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ ばね・質量・ダンパーの式を、力の図から立てられる。 → 249 ページ
- ☐ となりの山の比から、対数減衰率を求められる。 → 253 ページ
- ☐ 減衰比 ζ を計算して、止まり方を答えられる（RLC 回路でも）。 → 256 ページ

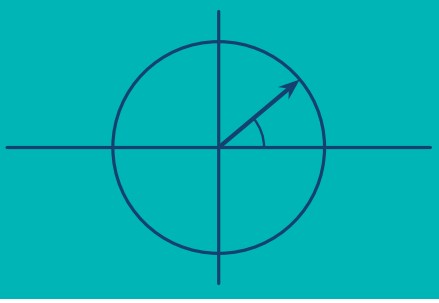
デルタ

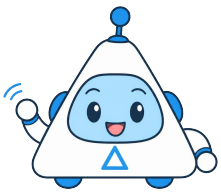
$\zeta = 1$ がちょうどよいブレーキ。でも、なぜ $2\sqrt{mk}$ なの？　そのなぞは、6-12 で 2 次方程式が教えてくれるよ。

第６巻　第２部

2 複素数と双曲線関数

- ？ 2 乗してマイナスになる数は、何の役に立つ？
- ？ かけ算で、点がくるりと回る？
- ？ 電線は、なぜこんな形にたるむ？





2 乗して -1 になる数 j を使うと、回転や波が、かけ算とたし算で計算できるようになるよ。オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ が、指数関数と三角関数をつなぐよ。

この部で学ぶこと

6-8 **2 乗してマイナスになる数：虚数** ★★★★☆ P.280

「2 回かけて− 1」になる数を、回転で考える

6-9 **複素平面：かけ算は回転と拡大** ★★★★☆ P.312

かけ算すると、矢印がくるっと回る

6-10 **オイラーの公式** ★★★★☆ P.344

指数関数と三角関数が、1 本の式でつながる

6-11 **双曲線関数 cosh・sinh** ×2 ★★★★☆ P.386

たるませた電線の形は、放物線ではない

この部を読むと…

複素数を平面の点として計算し、オイラーの公式で回転と波を書けるようになります。電気の交流の計算（第 9 巻・物理シリーズ）と、ゆれの式を解く道具になります。

第 2 部　複素数と双曲線関数

★★★★

6-8 2 乗してマイナスになる数：虚数

道しるべ　この章の前に 2-2 2-8 3-8 3-10 4-8 5-17　この章の先に 6-9 6-10 6-12

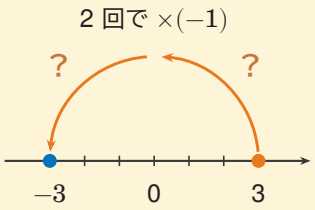
この章でできるようになること

- ★★★★「j をかけると 90° 回る」と考えて、$j^2 = -1$ になるわけを説明できる。
- ★★★★ 複素数のたし算・ひき算・かけ算・わり算ができる。
- ★★★★ 判別式がマイナスの 2 次方程式を解いて、虚数の解を求められる。

はてな？

2-2 で、$\times(-1)$ は「向きを反対にする」かけ算だと学びました。数直線の上で 3 に -1 をかけると、-3 になります。0 を中心に、ぐるっと半周（180°）回ったのと同じです。もう 1 回かけると、3 にもどります。

では、「2 回くり返すと $\times(-1)$ になる」かけ算はあるでしょうか。それは、2 乗すると -1 になる数をかけることです。そんな数は、どこにあるのでしょう。



3-10 では、$x^2 = -4$ のような方程式について「解はありません（このような数は 6-8 で新しく考えます）」と書きました。この章で、その約束を果たします。新しく出てくる数は、なぞの数ではありません。「90° 回す」という、はっきり

した意味をもつ数です。電気の回路やゆれの計算（6-10〜6-13）では、この数を毎日のように使います。

やってみよう 方眼紙の上で、90° ずつ回そう

用意するもの

方眼紙、定規、分度器

1. 方眼紙のまん中に原点 O をとり、横の線とたての線を引こう。O から右へ 3 目もりの点を A とし、O から A へ矢印をかこう。
2. 矢印 OA を、O を中心に左回りに 90° 回そう。矢印の先の点を B としよう。
3. 矢印 OB を、さらに左回りに 90° 回そう。矢印の先の点を C としよう。
4. 点 P (3, 1) でも、②③と同じように 2 回回して、点 Q、点 R をかこう。

はじめの点	90° 回す	もう 90° 回す
A (3, 0)	B (0, 3)	C (−3, 0)
P (3, 1)	Q (−1, 3)	R (−3, −1)

表 1　ミナさんがかいた結果

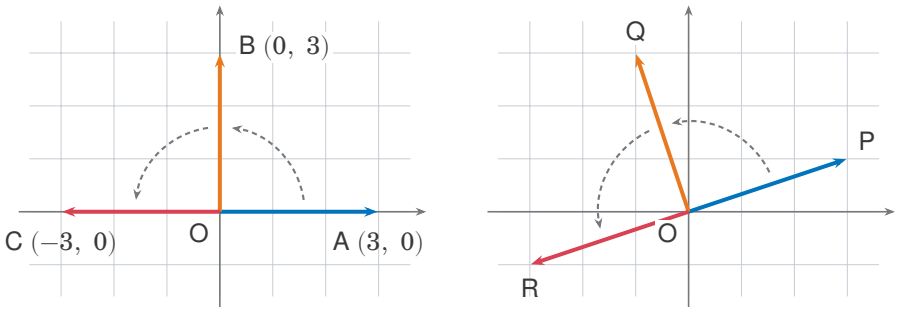


図 1　左：A を 90° ずつ 2 回回すと、C は −3。右：P を 2 回回した R は、P と原点について反対の位置。

C は -3 で、A の 3 に -1 をかけた数です。R $(-3,\ -1)$ も、P $(3,\ 1)$ の横と高さの両方に -1 をかけたものです。90° 回すことを 2 回くり返すと、180° 回すことになり、$\times(-1)$ と同じはたらきになりました。4-8 の「90° 回すと $(x,\ y) \to (-y,\ x)$」を 2 回使っても、

$$(x,\ y) \ \to \ (-y,\ x) \ \to \ (-x,\ -y)$$

で、同じことがわかります。2 回目は、1 回目の答え $(-y,\ x)$ の横 $-y$ と高さ x を、もう一度 $(x,\ y) \to (-y,\ x)$ に入れました。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 2-2　$\times(-1)$ で向きが反対になる。2 回かけると、もとの向きにもどる。
- 2-8　正の数も負の数も、2 乗すると正。$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$（$a$、$b$ は正の数）。
- 2-12　文字の部分が同じ項（同類項）どうしは、まとめられる：$3a + a = 4a$
- 3-8　$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$、$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
- 3-10　$ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$。判別式 $D = b^2 - 4ac$。分母と分子に同じ数をかけて、分母の $\sqrt{\ }$ をなくす（有理化）。
- 4-8　原点のまわりに左回りに 90° 回すと $(x,\ y) \to (-y,\ x)$。
- 4-11　ベクトルのたし算は、横どうし・たてどうしをたす（成分ごと）。

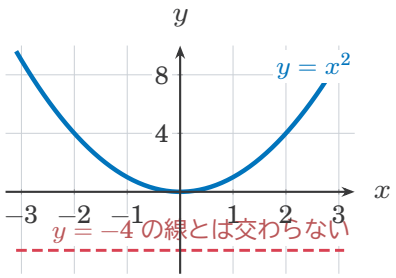
数学の道具

1 2 乗してマイナスになる数は、数直線の上にない

はじめに、なぜ「2 乗して -4 になる数はない」と言ってきたのかを、もう一度確かめます。

x	-3	-2	-1	**0**	**1**	**2**	**3**
x^2	9	4	1	0	1	4	9

表の下の段は、どれも 0 以上です。正の数どうしをかけても、負の数どうしをかけても（2-2）、答えは正になるからです。グラフ $y = x^2$（3-9）も、横軸より下にはきません。



これまでの数（数直線の上にならぶ数）を、まとめて実数といいました（4-10）。実数を 2 乗すると、かならず 0 以上になります。だから、2 乗して −4 になる数は、数直線のどこをさがしても見つかりません。

数の世界は、これまでも広がってきた

答えのない計算に出会ったとき、わたしたちはこれまでも、新しい数を考えてきました。

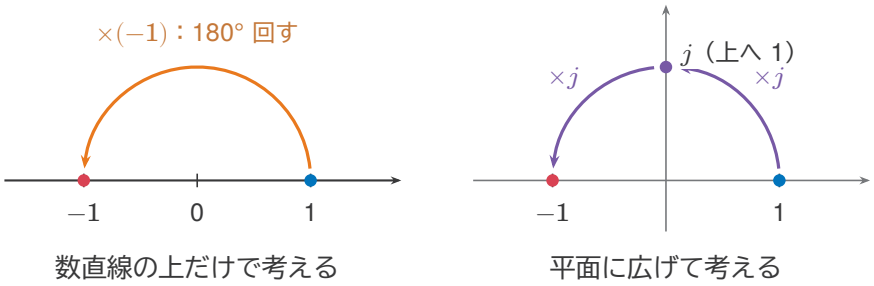
答えのなかった計算	新しく考えた数	章
$3 - 5$	負の数 -2	2-2
$2 \div 3$	分数 $\frac{2}{3}$	1-16・2-4
2 乗して 2 になる数	$\sqrt{2}$（分数で書けない数）	2-8・2-9
2 乗して −4 になる数	？（この章）	6-8

表 2　答えのない計算に、新しい数で答えてきた。

負の数も、はじめは「0 より小さい数なんて、ありえない」と考えられていました。それでも、温度や借金や向きを表すのにとても便利なので、使われるようになりました。2 乗してマイナスになる数も、同じです。数直線の上にはないけれど、新しく考えると、とても便利なのです。どこに置けばよいかを、次の②で考えます。

② 90° 回すかけ算：虚数単位 j

2-2 では、$\times(-1)$ を「向きを反対にする」かけ算だと考えました。向きを反対にすることは、0 を中心に 180° 回すことと同じです。



数直線の上だけで考える　　平面に広げて考える

図 2　左：$\times(-1)$ は 180° 回す。右：$\times j$ は 90° 回す。2 回で 180° 回って、1 が -1 になる。

見方 1：図で考える

「2 回くり返すと $\times(-1)$ になるかけ算」は、180° の半分、つまり 90° 回すかけ算です。ところが、数直線の上だけでは、90° 回すことはできません。90° 回すと、数直線の外に出てしまうからです。

そこで、数直線を平面に広げます。これまでの数（実数）は、横の線の上にならべます。そして、「0 を中心に左回りに 90° 回す」かけ算を、$\times j$（ジェイをかける）と書くことにします。

- 1 に j をかけると、1 を 90° 回した所、つまり 0 から真上へ 1 の所に行きます。$1 \times j = j$ なので、ここが数 j そのものの場所です。
- その j に、もう一度 j をかけると、さらに 90° 回って、-1 の所に行きます。

2 回の $\times j$ で $\times(-1)$ になったので、

$$j \times j = -1 \qquad \text{つまり} \qquad j^2 = -1$$

見方 2：座標で計算する

やってみようと同じく、4-8 の「90° 回すと $(x,\ y) \to (-y,\ x)$」で計算します。1 は横の線の上の点 $(1,\ 0)$ です。

$$(1,\ 0) \xrightarrow{\times j} (0,\ 1) \xrightarrow{\times j} (-1,\ 0)$$

1 回目で $(0,\ 1)$（真上へ 1。これが j）、2 回目で $(-1,\ 0)$（数直線の -1）。図で考えたことと、ぴったり合います。

右回りでもよい：$-j$

右回りに 90° 回しても、2 回くり返すと 180° 回って -1 になります。右回りに 90° 回した所、つまり真下へ 1 の所の数は、j の反対の $-j$ です（2-2 の「反対の数」）。式で確かめると、

$$(-j)^2 = (-1)^2 \times j^2 \qquad -j = (-1) \times j \text{ と見て、2 乗を分ける}$$

$$= 1 \times (-1) \qquad (-1)^2 = 1、\ j^2 = -1$$

$$= -1$$

2 乗して 1 になる数が 1 と -1 の 2 つあるように、2 乗して -1 になる数も、j と $-j$ の 2 つです。

？はてな？の答え

2 乗すると -1 になる数は、数直線の上にはありません。数直線を平面に広げたときの、**0 から真上へ 1 の所**（j）と、**真下へ 1 の所**（$-j$）にあります。「2 回くり返すと $\times(-1)$ になるかけ算」は、「90° 回す」かけ算だったのです。

この j を、**虚数単位**（きょすうたんい）といいます。「虚」は「目に見える形がない」という意味で、昔の人が「想像の中だけの数」と考えたことからついた名前です。でも、この章で見るように、j には「90° 回す」というはっきりした意味があります。

せいかくに言うと

数学では、j を「2 乗すると -1 になる新しい数」として決め（定義し）、そのうえで、たし算・かけ算の入れかえや、かっこのはずし方（分配法則）などの、これまでの計算のきまりが、そのまま使えるように数の世界を広げます。そう決めても計算にむじゅんが起きないことは、1830 年代にハミルトンが、複素数（③）を「2 つの実数の組」として決めなおして確かめました。「90° 回す」という図は、そう決めた j がどうふるまうかを目で見る、1 つの見方です。

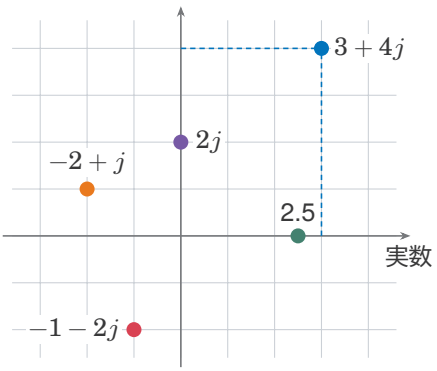
i ではなく j と書くわけ

数学の本や高校の教科書では、虚数単位を i（imaginary unit の頭文字）と書きます。ところが電気では、i を電流の文字に使います（電流の強さを表すフランス語 intensité の頭文字）。そこで電気や制御の本では、虚数単位を j と書きます。この本は、電気や機械で使うための数学なので、j を使います。プログラムの言語 Python も、$3+4j$ のように j を使います（⑩）。i と j は、書き方がちがうだけで、同じ数です。

③ 複素数 $a+bj$：実部と虚部

j に実数をかけたり、実数をたしたりした数を考えます。

$3j$ は、1 を 90° 回した j を 3 倍した数なので、0 から真上へ 3 の所です。$-2j$ は真下へ 2 の所です。そして、$3+4j$ は「右へ 3 進んで、上へ 4 進んだ所」、つまり平面の点 $(3,\ 4)$ です。



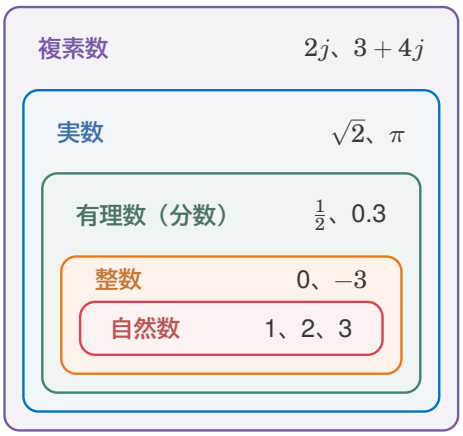


図 3　左：複素数は平面の点。横の線の上が実数。右：数の仲間。外側の箱ほど広い。

a、b を実数として、$a+bj$ の形の数を**複素数**（ふくそすう）という。
a を**実部**（じつぶ）、b を**虚部**（きょぶ）という。

「複」は「いくつかが組になった」という意味です。複素数は、実部と虚部の 2 つの実数が組になった数です。複素数を 1 つの文字で表すときは、z（ゼット）をよく使います。z の実部を $\mathrm{Re}\,z$、虚部を $\mathrm{Im}\,z$ と書きます（real part、imaginary part の頭文字）。たとえば $z=3+4j$ なら、

$$\mathrm{Re}\,z=3 \qquad \mathrm{Im}\,z=4$$

虚部は $4j$ ではなく、j にかかっている実数の 4 です。

名前	どんな数か	例
実数	虚部が 0（$b=0$）	2.5、-1、$\sqrt{2}$
虚数	虚部が 0 でない（$b\neq 0$）	$3+4j$、$-1-2j$、$2j$
純虚数	実部が 0 の虚数（$a=0$）	$2j$、$-j$

表 3 実数も、虚部が 0 の複素数と考える。

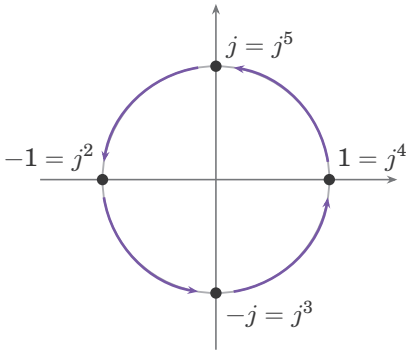
実数 2.5 は $2.5+0j$ と考えられるので、実数も複素数の仲間です。図 3 の右のように、数の仲間は、これまでも外側へ広がってきました。複素数は、そのいちばん外側です。

2 つの複素数が等しいのは、平面の同じ点になるとき、つまり**実部どうしも、虚部どうしも等しいとき**です。たとえば $a+bj=3-2j$ なら、$a=3$、$b=-2$ です。

❹ j を何回もかける：4 回でもとにもどる

j を何回もかけた数（j の累乗。2-7）を計算します。$j^2=-1$ を使います。

	計算	答え
j^1		j
j^2	決めた数	-1
j^3	$j^2 \times j = (-1) \times j$	$-j$
j^4	$j^3 \times j = (-j) \times j = -j^2$	1
j^5	$j^4 \times j = 1 \times j$	j
j^6	$j^4 \times j^2 = 1 \times (-1)$	-1



j をかけるたびに 90° ずつ回るので、4 回で 360° 回って、もとの 1 にもどります。だから、j の累乗は j、-1、$-j$、1 の 4 つをくり返します。j^n を求めるには、n を 4 でわったあまりを見ればよいのです。1-15 の「100 日後の曜日」や、4-8 の「何周と何度」と同じ考え方です。たとえば j^{10} は、$10 = 4 \times 2 + 2$ なので、4 回ずつ 2 組かけると 1 にもどり、あまりの 2 回分だけが残って $j^{10} = j^2 = -1$ です。

5-17 のオイラーの公式への入口で使った $j^2 = -1$、$j^3 = -j$、$j^4 = 1$ は、この表の 3 行です。

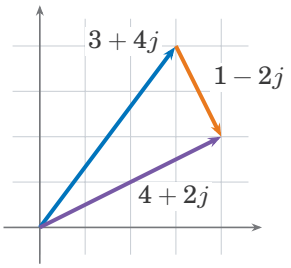
5 たし算・ひき算：実部どうし、虚部どうし

j を、x のような文字と同じように考えます。

2-12 で、$3 + 4x$ と $1 - 2x$ をたすときは、数どうし、x のつく項どうし（同類項）をまとめました。複素数も同じです。

$$(3 + 4j) + (1 - 2j)$$

$$= (3 + 1) + (4 - 2)j = 4 + 2j$$



平面で見ると、「右へ 3・上へ 4」の矢印のあとに、「右へ 1・下へ 2」の矢印をつないだ所です。4-11 のベクトルのたし算（成分ごとにたす）と同じです。

ひき算も同じで、$(3+4j)-(1-2j)=(3-1)+(4-(-2))j=2+6j$ です。かっこの前の $-$ は、かっこの中の両方の項につくことに注意しましょう。実数をかけるときは、分配法則で両方の項にかけます。$2(3+4j)=6+8j$。

❻ かけ算：展開して、$j^2=-1$

かけ算も、j を文字のように考えて、3-8 の展開をします。そのあとで j^2 を -1 におきかえます。$(3+4j)(1-2j)$ を、1 行ずつ計算します。まず、3-8 の「全部の組み合わせをかけてたす」で、

$$(3+4j)(1-2j)=3\times 1+3\times(-2j)+4j\times 1+4j\times(-2j)$$

となります。ここから先を、1 行に 1 つずつ進めます。

$=3-6j+4j-8j^2$ それぞれのかけ算をする

$=3-6j+4j-8\times(-1)$ $j^2=-1$ に入れかえる

$=3+8-2j$ 実部どうし、虚部どうしを集める

$=11-2j$

j^2 が出てきたら、すぐに -1 にすることが大切です。このかけ算は、文字のままでも同じように計算できます。

$$(a+bj)(c+dj)=ac+adj+bcj+bdj^2=(ac-bd)+(ad+bc)j$$

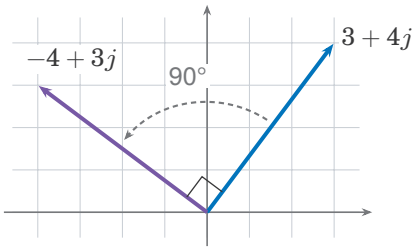
この式は覚えなくてかまいません。展開して $j^2=-1$ を使えば、いつでも作れます。

j をかけると、ほんとうに 90° 回る？

②では、「90° 回すかけ算」を $\times j$ と決めました。では、$3+4j$ に j をかけて、展開で計算してみます。

$j(3+4j) = 3j + 4j^2 = 3j - 4 = -4 + 3j$

点 $(3,\ 4)$ が、点 $(-4,\ 3)$ に移りました。4-8 の「90° 回すと $(x,\ y) \to (-y,\ x)$」で $x = 3$、$y = 4$ とすると $(-4,\ 3)$。ぴったり合います。展開のきまりで計算しても、j をかけることは、たしかに 90° 回すことなのです。



②では図から $j^2 = -1$ を決め、ここでは $j^2 = -1$ から計算して「90° 回る」を確かめました。2 つの見方は、行ったり来たりしても、同じ答えになります。

2 乗の計算

$(1+2j)^2$ は、3-8 の $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を使います。

$(1+2j)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2j + (2j)^2 = 1 + 4j + 4j^2 = 1 + 4j - 4 = -3 + 4j$

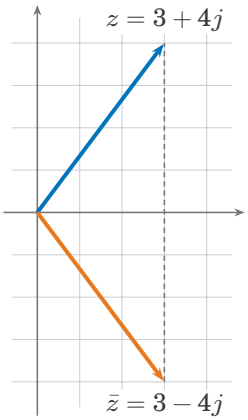
$(2j)^2 = 2^2 \times j^2 = 4 \times (-1) = -4$ です。まん中の項 $2ab$ を忘れないようにしましょう。

7 共役な複素数：かけると実数になる組

$3+4j$ と $3-4j$ のように、実部が同じで、虚部の符号だけが反対の 2 つの複素数を、たがいに**共役**（きょうやく）な複素数といいます。もとは「くびき」（2 頭の牛をならべてつなぐ横木）を表す字で書き、組になってはたらく 2 つ、という意味です。

平面で見ると、共役な 2 つの点は、横の線（実数の線）について線対称です（4-1）。横の線を鏡にして、うつした位置です。

z と共役な複素数を、$\bar{z}$（ゼット・バー）と書きます。$z = a + bj$ なら $\bar{z} = a - bj$ です。$\bar{z}$ と共役な複素数は、もう一度裏返すので、もとの z にもどります。



共役な 2 つをかけてみます。3-8 の「和と差の積」$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ で、$A = 3$、$B = 4j$ とします。

$(3 + 4j)(3 - 4j) = 3^2 - (4j)^2$　　和と差の積（3-8）

$= 9 - 16j^2$　　$(4j)^2 = 4^2 \times j^2 = 16j^2$

$= 9 - 16 \times (-1)$　　$j^2 = -1$

$= 9 + 16 = 25$

j が消えて、実数になりました。文字で書くと、

$$(a + bj)(a - bj) = a^2 - b^2j^2 = a^2 + b^2$$

$a^2 + b^2$ は、2 乗の和なので、いつも 0 以上の実数です。この「かけると実数になる」性質を、次のわり算で使います。

8 わり算：分母の共役をかける

$\dfrac{5}{1 + 2j}$ は、どんな複素数でしょう。このままでは、分母に j があって、$a + bj$ の形になっていません。

3-10 では、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の分母の $\sqrt{\ }$ をなくすために、分母と分子に同じ $\sqrt{2}$ をかけました（有理化）。分母と分子に同じ数をかけても、分数の大きさは変わらない

(2-4) からです。ここでも同じ考えで、分母と分子に、**分母と共役な数** $1-2j$ をかけます。⑦の性質で、分母が実数になるからです。

$$\frac{5}{1+2j}=\frac{5(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}$$ 分母と分子に $1-2j$ をかける

$$=\frac{5(1-2j)}{1^2+2^2}$$ 分母は⑦の a^2+b^2

$$=\frac{5(1-2j)}{5}$$ $1+4=5$

$$=1-2j$$ 5 で約分する

かけ算で確かめる

わり算はかけ算の逆 (1-14) なので、答えに分母をかけて、分子にもどるかを見ます。

$$(1-2j)(1+2j)=1^2+2^2=5$$

たしかに 5 にもどりました。

$\frac{1}{j}$ を 3 通りで求める

1 共役をかける　$j=0+1j$ と共役な数は $-j$ です。分母と分子に $-j$ をかけると、

$$\frac{1}{j}=\frac{1\times(-j)}{j\times(-j)}=\frac{-j}{-j^2}=\frac{-j}{-(-1)}=\frac{-j}{1}=-j$$

2 かけて 1 になる数をさがす　$\frac{1}{j}$ は、j にかけると 1 になる数です (逆数。2-4)。$j\times(-j)=-j^2=1$ なので、その数は $-j$ です。

3 回転で考える　$\times j$ は左回りに 90° 回すことでした。$\div j$ は、その逆なので、右回りに 90° 回すことです。1 を右回りに 90° 回すと、真下へ 1 の所、つまり $-j$ です。

3 通りとも、$\frac{1}{j}=-j$ になりました。

⑨ 2 次方程式の、虚数の解

いよいよ、3-10 で「解はありません」としていた方程式を解きます。

$x^2 = -4$

$x^2 = -4$ は、「2 乗すると -4 になる数」です。$(2j)^2 = 2^2 \times j^2 = 4 \times (-1) = -4$ なので、$2j$ が解です。$(-2j)^2 = (-2)^2 \times j^2 = 4 \times (-1) = -4$ なので、$-2j$ も解です。

$$x^2 = -4 \quad \text{の解は} \quad x = \pm 2j$$

2 乗して 4 になる数が ± 2 なのと同じで、2 つの解は「プラス・マイナス」の組です。そこで、a が正の数のとき、$\sqrt{-a}$ を次のように決めます。

$$a > 0 \text{ のとき} \qquad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\, j$$

たとえば $\sqrt{-4} = 2j$、$\sqrt{-16} = 4j$、$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\, j$ です。$x^2 = -a$ の解は $x = \pm\sqrt{a}\, j$ です。

$s^2 + 2s + 5 = 0$（3-10 の例）

3-10 の物理・工学ではこう使う（車のばねとダンパー）で出てきた 2 次方程式です。6-12 では、ここで文字 x のかわりに s を使います（3-10 と同じ）。2 通りで解きます。

方法 1：解の公式で

$a = 1$、$b = 2$、$c = 5$ です。判別式は $D = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$ で、マイナスです。

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2 \times 1} \qquad \text{解の公式（3-10）}$$

$$= \frac{-2 \pm 4j}{2} \qquad \sqrt{-16} = \sqrt{16}\, j = 4j$$

$$= -1 \pm 2j \qquad \text{分子の両方の項を 2 でわる}$$

方法 2：平方完成で

$s^2+2s=(s+1)^2-1$（3-8）なので、$s^2+2s+5=(s+1)^2+4$。だから、方程式は

$$(s+1)^2+4=0 \qquad \text{つまり} \qquad (s+1)^2=-4$$

かっこの中身 $s+1$ は「2 乗すると -4 になる数」なので、$s+1=\pm 2j$。両辺から 1 をひいて $s=-1\pm 2j$。方法 1 と同じ答えです。

代入して確かめる

$s=-1+2j$ を、もとの式の左辺に入れます。

$s^2=(-1+2j)^2=1-4j+4j^2$　　$(a+b)^2$ の展開（3-8）

$=1-4j-4=-3-4j$　　$j^2=-1$

$2s=2(-1+2j)=-2+4j$　　2 をかける

s^2+2s+5　　3 つをたす

$=(-3-4j)+(-2+4j)+5$

$=(-3-2+5)+(-4+4)j=0$　　実部どうし、虚部どうし

たしかに 0 になりました。$s=-1-2j$ でも同じように 0 になります。ノートで確かめてみましょう。

2 つの解から、もとの式を作る

3-10 では、$ax^2+bx+c=0$ の解が α、β なら、左辺は $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できました。$\alpha=-1+2j$、$\beta=-1-2j$ で確かめます。$s-\alpha=(s+1)-2j$、$s-\beta=(s+1)+2j$ なので、和と差の積（3-8）で、

$$(s-\alpha)(s-\beta)=(s+1)^2-(2j)^2=s^2+2s+1+4=s^2+2s+5$$

もとの式にもどりました。展開すると $(s-\alpha)(s-\beta)=s^2-(\alpha+\beta)s+\alpha\beta$ なので、2 つの解の和 $\alpha+\beta=-2$ と積 $\alpha\beta=(-1)^2+2^2=5$（⑦）が、式の係数の -2（s の係数 2 の符号を変えたもの）と 5 に合っています。

判別式と解の種類

$D<0$ のとき、解の公式の $\sqrt{D}$ が純虚数 $\sqrt{-D}\,j$ になります。だから、2 つの解は $p+qj$ と $p-qj$ の形の、共役な組になります（$p=-\dfrac{b}{2a}$、$q=\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$）。3-10 の表を、複素数まで広げて書きなおします。

判別式	3-10（実数の中で）	6-8（複素数まで広げて）
$D>0$	解は 2 つ	実数の解が 2 つ
$D=0$	解は 1 つ	実数の解が 1 つ（重なった解）
$D<0$	解はない	虚数の解が 2 つ（共役な組）

表 4　3-10 の「解はない」は、正しくは「実数の解はない」だった。

6-12 では、この表の 3 つの場合が、ばねにつるしたおもりや車の「ゆれずにもどる」「ちょうどよくもどる」「ゆれながらもどる」の 3 つに分かれることを学びます（例題 8）。

グラフと平面で見る

2 つの式 $s^2+3s+2=0$ と $s^2+2s+5=0$ を、グラフと平面でくらべます（図 4）。方法 2 の平方完成 $s^2+2s+5=(s+1)^2+4$ から、グラフ $y=s^2+2s+5$ の頂点は $(-1,\ 4)$ です（3-9）。いちばん低い所でも高さが 4 なので、横軸とは交わりません。ここで、解 $-1\pm2j$ をよく見ると、実部の -1 は頂点の横の位置、虚部の 2 は、2 乗すると頂点の高さ 4 になる数です。$(s+1)^2=-4$ の「4」が、そのまま頂点の高さになっているからです。

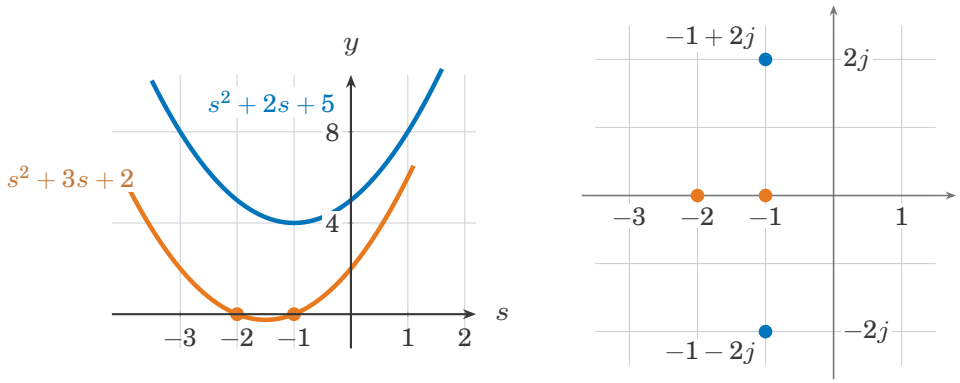


図 4　左：$y = s^2 + 3s + 2$（オレンジ）は横軸と -2、-1 で交わる。$y = s^2 + 2s + 5$（青）は交わらない。右：解を平面にかく。$D > 0$ の解（オレンジ）は横の線の上、$D < 0$ の解（青）は線の外に、上下対称にある。

$y = s^2 + 2s + 5$ のグラフが横軸と交わらないのは、解が「横の線（実数）の上にない」からでした。解は消えたのではなく、平面の上の、横の線からはなれた所にあったのです。6-12 では、この -1 と 2 が、車のゆれの「止まっていく速さ」と「ゆれの速さ」を表すことがわかります（物理・工学ではこう使う）。

10 コンピュータで複素数を計算する

Python では、虚数単位を j と書き、数のすぐあとにつけます。j そのものは 1j と書きます（j だけだと、文字の名前と区別がつかないため）。

Python

```
import cmath
z = 3+4j
w = 1-2j
print(z + w)
print(z * w)
print(z / w)
print(z.real, z.imag)
print(z.conjugate())
print(1j**2)
print(cmath.sqrt(-4))
```

実行結果

```
(4+2j)
(11-2j)
(-1+2j)
3.0 4.0
(3-4j)
(-1+0j)
2j
```

z.real は実部、z.imag は虚部、z.conjugate() は共役な複素数です。** は累乗、cmath.sqrt は複素数まで考えた $\sqrt{\ }$ です。⑥のかけ算の答え $11 - 2j$ が、

そのまま出てきました。z / w の答え $-1+2j$ が正しいかどうかは、例題 5 で手で確かめます。

表計算ソフトにも、複素数を文字の形 "3+4j" で計算する関数があります。

入れる式	答え	意味
=COMPLEX(3,4,"j")	3+4j	複素数を作る
=IMSUM("3+4j","1-2j")	4+2j	たし算
=IMPRODUCT("3+4j","1-2j")	11-2j	かけ算
=IMDIV("5","1+2j")	1-2j	わり算
=IMREAL("3+4j")	3	実部
=IMAGINARY("3+4j")	4	虚部

表 5　表計算の複素数の関数（"j" のかわりに "i" でもよい）

もっと知りたい ★★★★

複素数には、大きい・小さいがない

j は 0 より大きいでしょうか、小さいでしょうか。どちらと決めても、おかしなことが起きます。

- $j>0$ と決めると：正の数どうしをかけると正なので、$j\times j>0$。ところが $j\times j=-1$ で、$-1>0$ になってしまう。
- $j<0$ と決めると：$-j>0$ になるので、$(-j)\times(-j)>0$。ところが $(-j)^2=-1$ で、やはり $-1>0$ になってしまう。

だから、虚数には「大きい・小さい」を決めません。$3+4j>2+j$ のような式は、意味がありません。複素数の「大きさ」をくらべたいときは、原点からの距離（絶対値。6-9）をくらべます。

もっと知りたい ★★★★

複素数まで広げれば、方程式の解はいつもある

実数だけで考えると、2 次方程式には解が 2 つ・1 つ・0 の場合がありました。複素数まで広げると、2 次方程式の解は、いつでも 2 つです（$D = 0$ のときは、同じ解が 2 つ重なったと数えます）。3 次方程式なら 3 つ、n 次方程式なら n この解が、複素数の中にかならずあります。これを**代数学の基本定理**といいます。ガウスが 1799 年の学位論文で証明を示し、そのあと多くの人が、よりきちんとした証明を考えました。

「2 乗して -1」のために数を広げたら、もうそれ以上、方程式のために新しい数を考える必要はなくなったのです。第 9 巻の制御では、3 次の特性方程式の解をさがす場面が出てきます。6-9 では、$z^3 = 1$ の 3 つの解が、平面の上で正三角形の頂点にならぶことを見ます。

この章で出てきたことば

虚数単位　2 乗すると -1 になる数 j。かけると、左回りに 90° 回る。

複素数　$a + bj$（a、b は実数）の形の数。平面の点 $(a,\ b)$ で表せる。

実部・虚部　$a + bj$ の a と b。虚部は bj ではなく b。z の実部を $\mathrm{Re}\, z$、虚部を $\mathrm{Im}\, z$ と書く。

虚数・純虚数　虚部が 0 でない複素数が虚数。そのうち実部が 0 のものが純虚数。

共役な複素数　$a + bj$ と $a - bj$ のように、虚部の符号だけが反対の組。$\bar{z}$ と書く。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

$i^2 = -1$ をみたす数 i を虚数単位という。実数 x、y を用いて $z = x + iy$ と表される数を複素数といい、$x = \mathrm{Re}\, z$ を実部、$y = \mathrm{Im}\, z$ を虚部という。$\bar{z} = x - iy$ を z の共役複素数という。$z\bar{z} = x^2 + y^2$ は非負の実数である。

訳 数学の本では、虚数単位を i と書き、$x + iy$ のように i を前に書くことも多い。「用いて」は「使って」。「非負」は「マイナスでない」（0 以上）。z に $\bar{z}$ をかけると、0 以上の実数になる。

記号カード 初めて出た章 6-8

j

読み方 ジェイ
意味 虚数単位。2 乗すると -1。数学の本・高校では i と書く
英語 imaginary unit

記号カード 初めて出た章 6-8

$\bar{z}$

読み方 ゼット・バー
意味 z と共役な複素数。$z = a + bj$ なら $\bar{z} = a - bj$
英語 complex conjugate

たいせつ

虚数単位	$j^2 = -1$。$\times j$ は、**左回りに 90° 回すこと**
複素数	$a + bj$（a は実部、b は虚部）。**平面の点** $(a,\ b)$
計算	**j を文字のように計算し、j^2 が出たら -1 にする**
共役	$(a + bj)(a - bj) = a^2 + b^2$。**わり算は、分母と共役な数を分母・分子にかける**
2 次方程式	**$D < 0$ なら、虚数の解が 2 つ（共役な組）。** $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, j$

例題でたしかめよう

例題 1　j の累乗

次の数を、1、j、-1、$-j$ のどれかで答えましょう。

(1) j^3　　(2) j^8　　(3) j^{10}　　(4) j^{13}

考え方　j の累乗は、4 回でもとにもどる（④）。指数を 4 でわったあまりを見る。あまりが 1 なら j、2 なら -1、3 なら $-j$、0 なら 1。

式　(1) $j^3 = j^2 \times j = (-1) \times j = -j$

(2) $8 = 4 \times 2$ あまり 0。$j^8 = (j^4)^2 = 1^2 = 1$

(3) $10 = 4 \times 2 + 2$ あまり 2。$j^{10} = (j^4)^2 \times j^2 = 1 \times (-1) = -1$

(4) $13 = 4 \times 3 + 1$ あまり 1。$j^{13} = (j^4)^3 \times j = 1 \times j = j$

答え　(1) $-j$　(2) 1　(3) -1　(4) j

例題 2　たし算・ひき算・実数倍

$z = 3 + 4j$、$w = 1 - 2j$ のとき、次の計算をしましょう。

(1) $z + w$　　(2) $z - w$　　(3) $2z - 3w$

考え方　実部どうし、虚部どうしをまとめる（⑤）。かっこの前の $-$ は、かっこの中の両方の項につく。

式　(1) $(3 + 4j) + (1 - 2j) = (3 + 1) + (4 - 2)j = 4 + 2j$

(2) $(3 + 4j) - (1 - 2j) = 3 + 4j - 1 + 2j = 2 + 6j$

(3) $2z - 3w = (6 + 8j) - (3 - 6j) = (6 - 3) + (8 + 6)j = 3 + 14j$

答え　(1) $4 + 2j$　(2) $2 + 6j$　(3) $3 + 14j$

じぶんでとこう 1

次の数を、1、j、-1、$-j$ のどれかで答えましょう。

(1) j^5

(2) j^7

(3) j^{12}

(4) j^{22}

じぶんでとこう 2

$z = 2 - 5j$、$w = -1 + 3j$ のとき、次の計算をしましょう。

(1) $z + w$

(2) $z - w$

(3) $3z + 2w$

例題 3　かけ算

次の計算をしましょう。

(1) $(3 + 4j)(1 - 2j)$　(2) $(1 + 2j)^2$　　(3) $j(2 + 5j)$

考え方　展開して、j^2 を -1 にする（⑥）。

(2) は $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を使う（3-8）。

式　(1) $3 - 6j + 4j - 8j^2 = 3 - 2j - 8 \times (-1) = 3 + 8 - 2j$

(2) $1^2 + 2 \times 1 \times 2j + (2j)^2 = 1 + 4j + 4j^2 = 1 + 4j - 4$

(3) $2j + 5j^2 = 2j - 5$。確かめ：点 $(2,\ 5)$ を 90° 回すと $(-5,\ 2)$（4-8）

答え　(1) $11 - 2j$　(2) $-3 + 4j$　(3) $-5 + 2j$

例題 4　共役な複素数をかける

次の複素数 z について、共役な複素数 $\bar{z}$ と、積 $z\bar{z}$ を求めましょう。

(1) $z = 2 + 5j$　(2) $z = -3 - j$

考え方　虚部の符号を反対にすると $\bar{z}$。

積は $(a + bj)(a - bj) = a^2 + b^2$（⑦）。

式　(1) $\bar{z} = 2 - 5j$。$z\bar{z} = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

(2) $\bar{z} = -3 + j$。$a = -3$、$b = -1$ なので $z\bar{z} = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$

確かめ：$(-3 - j)(-3 + j) = 9 - 3j + 3j - j^2 = 9 + 1 = 10$

答え　(1) $\bar{z} = 2 - 5j$、$z\bar{z} = 29$　(2) $\bar{z} = -3 + j$、$z\bar{z} = 10$

じぶんでとこう 3

次の計算をしましょう。

(1) $(2 + 3j)(1 + j)$

(2) $(3 - j)^2$

(3) $j(4 - 3j)$

じぶんでとこう 4

次の z の $\bar{z}$ と $z\bar{z}$ を求めましょう。

(1) $z = 4 - 3j$

(2) $z = -1 + 2j$

かけ算の答えは、⑩の Python で `(2+3j)*(1+j)` のように計算して確かめられます。$z\bar{z}$ は、いつも「実部の 2 乗＋虚部の 2 乗」の、0 以上の実数になります。答えに j が残ったり、マイナスになったりしたら、どこかで $j^2 = -1$ の使い方をまちがえています。

例題5 わり算

次の計算をしましょう。

(1) $\dfrac{5}{1+2j}$　(2) $\dfrac{3+4j}{1-2j}$　(3) $\dfrac{2}{j}$

考え方 分母と共役な数を、分母と分子にかける（⑧）。分母は a^2+b^2 の実数になる。

式 (1) $\dfrac{5(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}=\dfrac{5(1-2j)}{1+4}=1-2j$

(2) 分母と分子に $1+2j$ をかける。分母は $1^2+2^2=5$

分子は $(3+4j)(1+2j)=3+6j+4j+8j^2=-5+10j$

$\dfrac{-5+10j}{5}=-1+2j$。確かめ：$(-1+2j)(1-2j)=3+4j$

(3) 分母と分子に $-j$ をかける。$\dfrac{2\times(-j)}{j\times(-j)}=\dfrac{-2j}{-j^2}=-2j$

答え (1) $1-2j$　(2) $-1+2j$　(3) $-2j$

例題6 $x^2=-a$ の形と、マイナスの数の $\sqrt{\ }$

(1) $x^2+9=0$ を解きましょう。

(2) $x^2=-5$ を解きましょう。

(3) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ を計算しましょう。

考え方 $a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,j$（⑨）。マイナスの数の $\sqrt{\ }$ は、先に j を使った形に直す。

式 (1) $x^2=-9$ なので $x=\pm\sqrt{9}\,j=\pm3j$（確かめ：$(3j)^2=9j^2=-9$）

(2) $x=\pm\sqrt{5}\,j$

(3) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=2j\times3j=6j^2=-6$

答え (1) $x=\pm3j$　(2) $x=\pm\sqrt{5}\,j$　(3) -6

じぶんでとこう 5

次の計算をしましょう。

(1) $\dfrac{10}{3-j}$

(2) $\dfrac{1+3j}{1+j}$

(3) $\dfrac{3}{j}$

じぶんでとこう 6

(1)(2) を解き、(3) を計算しましょう。

(1) $x^2+16=0$

(2) $x^2=-7$

(3) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$

例題 7　解の公式で、虚数の解を求める

$s^2+4s+13=0$ を解きましょう。また、2 つの解の和と積を求めて、式の係数と合うか確かめましょう。

考え方　解の公式（3-10）と $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,j$。2 つの解を α、β とすると $s^2+bs+c=(s-\alpha)(s-\beta)$ なので、和は $-b$、積は c（⑨）。

式　$a=1$、$b=4$、$c=13$。$D=4^2-4\times1\times13=16-52=-36$

$$s=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm6j}{2}=-2\pm3j$$

和は -4（係数 4 の符号を変えた数）。積は $(-2)^2+3^2=13$（数の項）

答え　$s=-2\pm3j$（和 -4、積 13 で、合っている）

例題 8 判別式で、解の種類を見分ける

次の 2 次方程式の判別式 D を求め、解の種類を答えてから、解きましょう。

(1) $s^2+3s+2=0$ (2) $s^2+4s+4=0$ (3) $s^2+s+1=0$

考え方 $D=b^2-4ac$ の符号で、解の種類がわかる（⑨の表）。

式 (1) $D=9-8=1>0$。$(s+1)(s+2)=0$ より $s=-1$、-2

(2) $D=16-16=0$。$(s+2)^2=0$ より $s=-2$

(3) $D=1-4=-3<0$。$s=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,j}{2}$

答え (1) 実数の解 2 つ。$s=-1$、-2 (2) 実数の解 1 つ。$s=-2$

(3) 虚数の解 2 つ。$s=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$

じぶんでとこう 7

$s^2-4s+13=0$ を解きましょう。また、2 つの解の和と積を求めて、式の係数と合うか確かめましょう。

じぶんでとこう 8

判別式 D を求め、解の種類を答えてから、解きましょう。

(1) $s^2+5s+6=0$

(2) $s^2+6s+9=0$

(3) $s^2+2s+2=0$

例題 9　和と積から、2 つの数を求める

「10 を 2 つに分けて、かけると 40 になるようにせよ」（コラムの、カルダーノの問題）。2 つの数を求め、たすと 10、かけると 40 になることを確かめましょう。

考え方　1 つの数を x とすると、もう 1 つは $10-x$。$x(10-x)=40$ を 2 次方程式の形にして、解の公式（3-10）で解く。

式　左辺を展開して $10x-x^2=40$。両辺から $10x-x^2$ をひいて

$$0=x^2-10x+40$$

$$D=(-10)^2-4\times1\times40=100-160=-60$$

$$\sqrt{-60}=\sqrt{60}\,j=2\sqrt{15}\,j\quad(60=4\times15、\sqrt{4}=2)$$

$$x=\frac{10\pm2\sqrt{15}\,j}{2}=5\pm\sqrt{15}\,j。x=5+\sqrt{15}\,j\text{ なら、もう 1 つは}$$

$$10-x=5-\sqrt{15}\,j$$

確かめ：和は $5+5=10$。積は $5^2+(\sqrt{15})^2=25+15=40$（⑦）

答え　$5+\sqrt{15}\,j$ と $5-\sqrt{15}\,j$

じぶんでとこう 9

たすと 6、かけると 13 になる 2 つの数を求めましょう。また、たすと 6、かけると 13 になることを確かめましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

$\sqrt{\ }$ の中どうしをかける

× $\sqrt{-4}\sqrt{-9}=\sqrt{36}=6$

○ $2j\times 3j=6j^2=-6$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ は、a、b が正の数のときに作ったきまり（2-8）です。先に j の形に直します。

まちがえやすいところ

j^2 の符号

× $(3j)^2=9$

○ $(3j)^2=9j^2=-9$

j^2 は $+1$ ではなく -1 です。j が残ったら、すぐ $j^2=-1$ を使います。

まちがえやすいところ

虚部はどれ？

× $3+4j$ の虚部は $4j$

○ $3+4j$ の虚部は 4

虚部は、j にかかっている実数です。実部も虚部も、どちらも実数です。

まちがえやすいところ

わり算で、分子だけにかける

× $\dfrac{5}{1+2j}=\dfrac{5(1-2j)}{1+2j}$

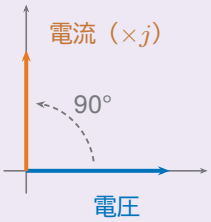
○ $\dfrac{5(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}$

分子だけにかけると、数の大きさが変わってしまいます。分母と分子の両方にかけます。

物理・工学ではこう使う

交流：90° のずれを j で書く

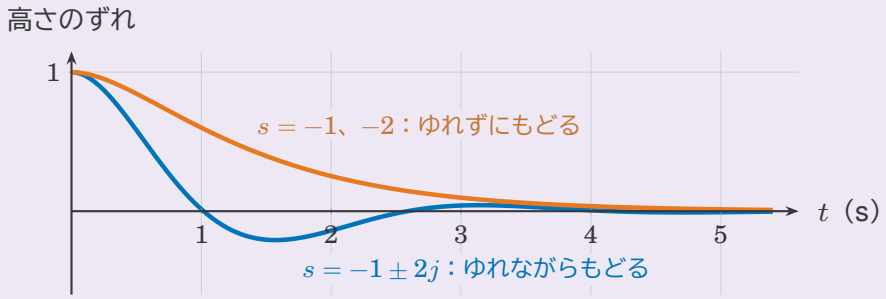
コンデンサーに流れる電流は、電圧より $\frac{1}{4}$ 周期（90°）先に山が来ます（5-15）。電気の計算では、この「90° 進む」を「j をかける」で表します。電圧と電流を、回る矢印の組として書くと、ずれのある交流のたし算やわり算が、複素数の計算でできるのです（6-10・6-13、物理シリーズ『電磁気学』）。



物理・工学ではこう使う

車のゆれ：解の実部と虚部が、ゆれ方を決める

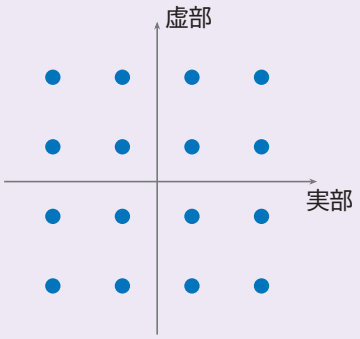
3-10 の車のばねとダンパーの式 $s^2+2s+5=0$ の解は $s=-1\pm 2j$ でした。6-12 では、このとき車の高さのずれが $e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$ になることを学びます。実部の -1 が e^{-t}（だんだん小さくなる速さ）に、虚部の 2 が $\cos 2t$（ゆれの速さ）に出てきます。解が実数の $s^2+3s+2=0$（$s=-1$、-2）では、ゆれずにもどります。



物理・工学ではこう使う

スマートフォンと Wi-Fi の電波

スマートフォンや Wi-Fi の電波は、波の「大きさ」と「ずれ（位相）」の組で、情報を送っています。この組は、平面の点、つまり複素数で表せます。となりの点の図は、16 この点を使い分ける方式（16QAM）で、1 回に 4 ビット（$2^4 = 16$ 通り。2-17）を送ります。受け取る側は、届いた波から複素数を計算し、いちばん近い点を選んで、0 と 1 にもどします。実際の Wi-Fi では、もっと多くの点を使う方式も使われています。



コラム　カルダーノの問題（1545 年）

イタリアのカルダーノは、3 次方程式の解き方をまとめた本の中で、「10 を 2 つに分けて、かけると 40 になるようにせよ」という問題を考えました。2 つの数を x と $10 - x$ とすると、$x(10 - x) = 40$、つまり $x^2 - 10x + 40 = 0$。解の公式で、$x = 5 \pm \sqrt{-15}$ が出てきます。カルダーノは、$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$ と確かめながらも、「役に立たない、頭をなやませるだけのもの」と書きました。実数の中では、たして 10 になる 2 つの数の積は、5 と 5 のときの 25 がいちばん大きいので、40 にはなりません。答えは、実数の外にしかなかったのです（例題 9）。

コラム　「ないはずの数」が、本物の答えを連れてきた

ボンベリ（1572 年）

イタリアのボンベリは、$x^3 = 15x + 4$ という 3 次方程式に、カルダーノの解き方を使いました。答えの 1 つは $x = 4$ です（$4^3 = 64$、$15 \times 4 + 4 = 64$）。ところが計算のとちゅうで、$\sqrt{-121} = 11j$ が出てきます。ボンベリは、虚数のまま計算を進めるきまりを作り、$(2 + j)^3 = 2 + 11j$ を使って、虚数を通りぬけて本物の答え 4 にたどりつきました。デカルト（1637 年）がこうした数を「想像上の（imaginary）数」とよんだことが、「虚数」という名前のもとです。「ないはずの数」は、いまでは電気・制御・通信に欠かせない道具です。

章末問題

6-8 のまとめ

基本 ★★★★

1 次の数を、1、j、-1、$-j$ のどれかで答えましょう（例題 1）。

(1) j^6　　(2) j^9　　(3) j^{15}　　(4) j^{20}

2 $z = 5 + 2j$、$w = -2 + j$ のとき、次の計算をしましょう（例題 2）。

(1) $z + w$　　(2) $z - w$　　(3) $2z + 3w$

3 次の計算をしましょう（例題 3）。

(1) $(1 + 3j)(2 - j)$　　(2) $(2 + j)^2$　　(3) $j(1 - 4j)$

4 $z = 3 - 2j$ の共役な複素数 $\bar{z}$ と、積 $z\bar{z}$ を求めましょう（例題 4）。

5 次の計算をしましょう（例題 5）。

(1) $\dfrac{5}{2 + j}$　　(2) $\dfrac{4 + 2j}{1 + j}$　　(3) $\dfrac{4}{j}$

6 次の方程式を解きましょう（例題 6）。

（1） $x^2 + 25 = 0$ （2） $x^2 = -3$

7 次の 2 次方程式の判別式 D を求め、解の種類を答えてから、解きましょう（例題 8）。

（1） $s^2 + 7s + 12 = 0$ （2） $s^2 + 2s + 10 = 0$

チャレンジ ★★★★

8 $s^2 + 6s + 10 = 0$ を解き、2 つの解の和と積を求めて、式の係数と合うか確かめましょう（例題 7）。

9 $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12}$ を計算しましょう。また、$\sqrt{(-3) \times (-12)}$ とくらべましょう（例題 6）。

10 たすと 4、かけると 5 になる 2 つの数を求めましょう。また、たすと 4、かけると 5 になることを確かめましょう（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ j をかけると 90° 回ることから、$j^2 = -1$ を説明できる。 → 284 ページ
- ☐ 複素数のたし算・ひき算・かけ算・わり算ができる。 → 289 ページ
- ☐ 判別式がマイナスの 2 次方程式を解いて、虚数の解を求められる。 → 293 ページ

ソラ

「ない」と思っていた数は、平面の上にあったんだね。次の章では、複素数のかけ算が「回転と拡大」になるしくみを、平面の上でくわしく見よう！

第 2 部　複素数と双曲線関数

★★★★

6-9 複素平面：かけ算は回転と拡大

道しるべ　この章の前に 4-2 4-4 4-7 4-9 4-15 6-8　この章の先に 6-10 6-13 7-6

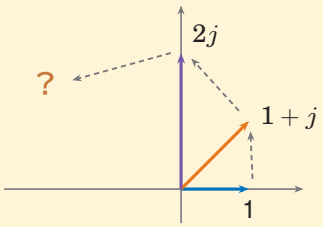
この章でできるようになること

- ★★★★ 複素数を平面の点で表し、絶対値と偏角を求められる。
- ★★★★ かけ算が「大きさはかけ算、角はたし算」になることを、図と式で説明できる。
- ★★★★ 複素数のかけ算で、点を回したり、ロボットのうでの先の位置を求めたりできる。

? はてな？

6-8 で、j をかけると、点が原点のまわりに 90° 回ることを見ました。では、$1+j$ をかけると、どうなるでしょう。

1 に $1+j$ をかけると $1+j$。もう一度かけると $(1+j)^2=2j$。点はだんだん回りながら、原点から遠ざかっていくようです。何回かけると、点はもとの向き（右向き）にもどるでしょうか。



6-8 では、複素数 $a+bj$ を平面の点 $(a,\ b)$ と考えました。この章では、この平面の上で、複素数のたし算・かけ算・わり算が、それぞれどんな動きになるのかを調べます。かけ算は「回転と拡大」という、図形のとてもきれいな動きになり

ます。この性質のおかげで、電気の交流やロボットの計算が、かけ算 1 回でできるようになるのです。

やってみよう 表計算で、$1+j$ を何回もかけよう

$a+bj$ に $1+j$ をかけると、6-8 のかけ算で

$$(a+bj)(1+j)=a+aj+bj+bj^2=(a-b)+(a+b)j$$

になります。新しい実部は $a-b$、新しい虚部は $a+b$ です。これを表計算で何回もくり返します。

1. A 列に回数 n（0〜8）、B 列に実部、C 列に虚部を入れる。2 行めは 1 と 0（はじめの数 1）。
2. B3 に `=B2-C2`、C3 に `=B2+C2` と入れて、下へコピーする。
3. D 列に原点からの距離 `=SQRT(B2^2+C2^2)`、E 列に向きの角 `=DEGREES(ATAN2(B2,C2))` を入れて、下へコピーする。
4. 方眼紙に点を打ち、距離と角が、1 回ごとにどう変わるかを調べよう。

	A	B	C	D	E
1	n	実部	虚部	距離	角（度）
2	0	1	0	（③の式）	（③の式）
3	1	=B2-C2	=B2+C2	（コピー）	（コピー）

	A	B	C	D	E
1	n	実部	虚部	距離	角（度）
2	0	1	0	1	0
3	1	1	1	1.414	45
4	2	0	2	2	90
5	3	−2	2	2.828	135
6	4	−4	0	4	180
7	5	−4	−4	5.657	−135
8	6	0	−8	8	−90
9	7	8	−8	11.314	−45
10	8	16	0	16	0

表 1　計算の結果（距離は小数第 3 位まで）

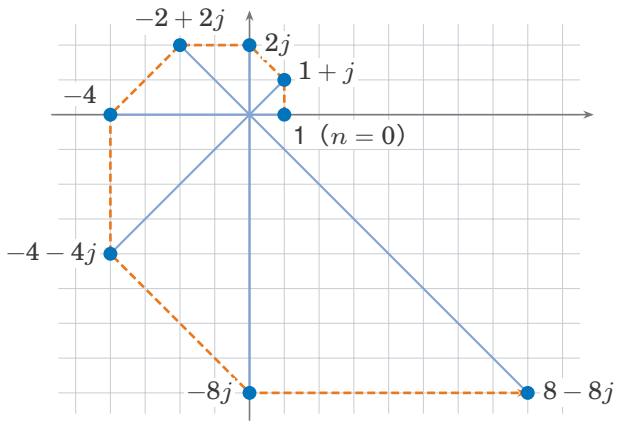


図 1　1 に $1+j$ を 1 回ずつかけた点（$n=0$〜7）。点は 45° ずつ左回りに回りながら、原点から遠ざかる。$n=8$ の 16 は、図の右の外。

表の D 列を見ると、距離は $1 \to 1.414 \to 2 \to 2.828 \to 4 \to \cdots$ と、1 回ごとに約 1.414 倍になっています。1.414 は $\sqrt{2}$ です（2-8）。E 列の角は、1 回ごとに 45° ずつふえています（135° の次の 180° をこえた所は、−135° と表示されます。−135° は、左回りに 225° 回ったのと同じ向きです。4-8）。そして、$1+j$ という数そのものの、原点からの距離は $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$、向きの角は 45° です。

$1+j$ をかけるたびに、「$1+j$ の距離の $\sqrt{2}$ 倍に拡大し、$1+j$ の角の 45° だけ回す」ことが起きているようです。この章で、そのわけを調べます。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

6-8 $j^2=-1$。$(a+bj)(c+dj)=(ac-bd)+(ad+bc)j$。$j$ をかけると左回りに 90° 回る。

$z=a+bj$ と共役な数 $\bar{z}=a-bj$。$z\bar{z}=a^2+b^2$

4-4 原点から点 $(a,\ b)$ までの距離は $\sqrt{a^2+b^2}$（三平方の定理）。

4-15 極座標 $(r,\ \theta)$：$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$。$\tan^{-1}$ は右半分の角しか答えないので、点の区画を見て直す。

4-9 加法定理（単位円の上の点への道すじを、まるごと回して作った）：

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

4-11 ベクトルのたし算・ひき算は、成分ごと。2 点の間の矢印は、（終わりの点）−（始めの点）。

4-7 2 リンクのうでの手の位置：$x=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$、$y=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

数学の道具

1 複素数を点で表す：複素平面

6-8 では、複素数 $a+bj$ を、平面の点 $(a,\ b)$ に置きました。この平面を**複素平面**（ふくそへいめん）といいます。横の軸は実部を表すので**実軸**、たての軸は虚部を表すので**虚軸**といいます。実軸は、これまでの数直線そのものです。

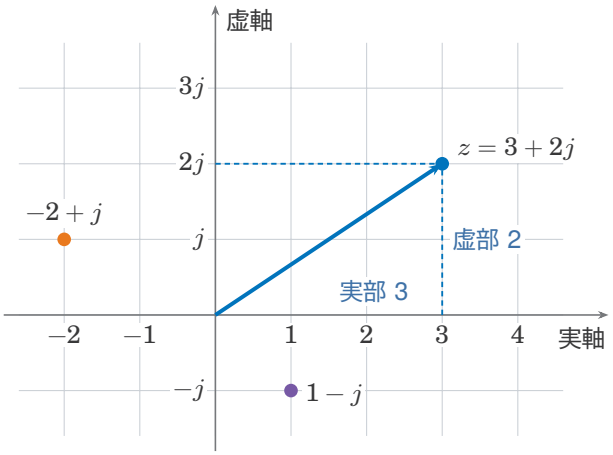


図 2　複素平面。$z=3+2j$ は、実部 3・虚部 2 の点。原点からの矢印でも表す。

複素数は、原点からその点への矢印（ベクトル。4-10）で表すこともできます。$z=3+2j$ は「右へ 3、上へ 2」の矢印です。点で考えるか、矢印で考えるかは、場面によって使い分けます。

複素数を平面の点で表す考えは、ノルウェー生まれの測量技師ウェッセル（1797 年に発表）と、パリのアルガン（1806 年）が、別々に思いつきました。ガウスが 1831 年にこの考えを広めたので、複素平面を「ガウス平面」ともいいます。

2 たし算・ひき算は、矢印のたし算・ひき算

複素数のたし算は、実部どうし、虚部どうしをたしました（6-8 ⑤）。これは、4-11 のベクトルの成分ごとのたし算と同じです。だから、複素平面の上では、**たし算は矢印をつなぐこと**です。

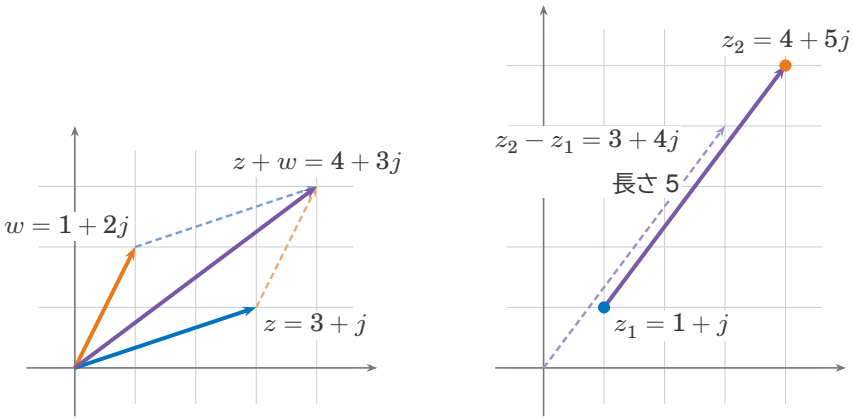


図 3 左：$z+w$ は、z の矢印の先に w の矢印をつないだ所（平行四辺形の対角線）。右：z_2-z_1 は、z_1 から z_2 への矢印。原点から引きなおすと（点線）$3+4j$。

2 つの点の距離

ひき算 z_2-z_1 は、「z_1 に何をたすと z_2 になるか」なので、z_1 から z_2 へ向かう矢印です（図 3 の右）。だから、2 つの点 z_1、z_2 の距離は、z_2-z_1 の矢印の長さです。$z_1=1+j$、$z_2=4+5j$ なら、$z_2-z_1=3+4j$ で、長さは $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ です。

実数をかけると

実数 k をかけた kz は、4-10 のベクトルの実数倍と同じで、$k>0$ なら同じ向きに k 倍、$k<0$ なら反対向きに $|k|$ 倍の矢印です。$-z$ は、z を原点のまわりに 180° 回した点です（6-8 の $\times(-1)$）。

③ 原点からの距離：絶対値

複素数 $z=a+bj$ の点と原点との距離を、z の**絶対値**（ぜったいち）といい、$|z|$ と書きます。三平方の定理（4-4）で、

$$|a+bj|=\sqrt{a^2+b^2}$$

たとえば $|3+4j| = \sqrt{9+16} = 5$、$|1+j| = \sqrt{2}$、$|-2j| = \sqrt{0+4} = 2$ です。実数 a（虚部 0）なら $|a| = \sqrt{a^2}$ で、3-2 で学んだ「0 からの距離」としての絶対値と同じです。$|-3| = 3$。

$\sqrt{\ }$ の中に入れるのは、実部と虚部（どちらも実数）の 2 乗です。j は入れません。また、6-8 ⑦の $z\bar{z} = a^2 + b^2$ から、

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

です。共役な $\bar{z}$ は、z を実軸で裏返した点なので、原点からの距離は同じで、$|\bar{z}| = |z|$ です。6-8 のもっと知りたいで見たように、複素数には大小がありません。複素数の「大きさ」をくらべるときは、絶対値をくらべます。

4 向きの角：偏角と極形式

原点から z への矢印が、実軸の正の向きから左回りに何度回った向きか、その角を z の**偏角**（へんかく）といい、$\arg z$（アーギュメント・ゼット）と書きます。4-15 の極座標の θ と同じものです。

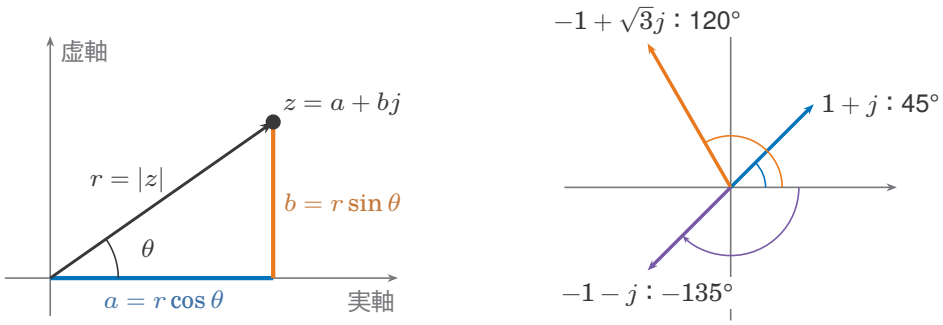


図 4　左：絶対値 r と偏角 θ。右：3 つの複素数の偏角。$-1-j$ は、右回りに 135°（$-135°$）。

偏角の範囲

角は、360° 回るともとの向きにもどるので（4-8 の一般角）、−135° と 225° は同じ向きです。この本では、偏角を −180° より大きく 180° 以下の角で答えることにします。Python の `cmath.phase`、表計算の `IMARGUMENT` や `ATAN2` が答える角と同じ範囲です（4-15 では 0°〜360° で答えましたが、どちらも同じ向きを表しています）。実軸の正の向きにある点（正の実数）は 0°、負の実数は 180° です。原点（0）だけは、向きが決まらないので、偏角を考えません。

偏角の求め方：区画に注意

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$（傾き。4-6）なので、電卓の $\tan^{-1}$ が使えそうです。ところが 4-15 で学んだように、$\tan^{-1}$ は右半分（−90°〜90°）の角しか答えません。たとえば $-1-j$ では $\tan\theta = \dfrac{-1}{-1} = 1$ で、$\tan^{-1}1 = 45°$ と出ますが、$-1-j$ は左下にあるので、45° は反対向きです。だから、点がどの区画にあるかを見て直します。

点のある所	偏角の求め方（$-180° < \theta \leqq 180°$）
右半分（$a > 0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ のまま
左上（$a < 0$、$b \geqq 0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ に 180° をたす
左下（$a < 0$、$b < 0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ から 180° をひく
虚軸の上（$a = 0$）	$b > 0$ なら 90°、$b < 0$ なら −90°

表 2 いちばん確かなのは、先に点をかいて、だいたいの向きを見ること。

$-1+\sqrt{3}\,j$ なら、$\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60°$ で、左上なので 180° をたして 120°。$-1-j$ なら、$\tan^{-1}1 = 45°$ から 180° をひいて −135° です（図 4 の右）。

極形式

絶対値 r と偏角 θ がわかると、実部と虚部は、4-15 の極座標と同じで、$a = r\cos\theta$、$b = r\sin\theta$ です（図 4 の左）。だから、

$$z = a + bj = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

この書き方を、複素数の**極形式**（きょくけいしき）といいます。「距離と向き」で書いた複素数です。たとえば $1 + j$ は、$r = \sqrt{2}$、$\theta = 45°$ なので $\sqrt{2}(\cos 45° + j\sin 45°)$。反対に、$2(\cos 120° + j\sin 120°)$ は、$\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$、$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -1 + \sqrt{3}\,j$$

です。かっこの中の $\cos\theta + j\sin\theta$ は、絶対値が $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$（4-8）の、単位円の上の点です。極形式は「単位円の上の、角 θ の点を、r 倍した点」と読めます。

5 かけ算は「大きさはかけ算、角はたし算」

やってみようでは、$1 + j$ をかけるたびに、距離が $\sqrt{2}$ 倍、角が 45° ずつふえました。これが $1 + j$ だけでなく、どんな複素数のかけ算でも成り立つことを、3 通りで確かめます。

見方 1：数で確かめる

$z = 1 + j$（絶対値 $\sqrt{2}$、偏角 45°）と、$w = 1 + \sqrt{3}\,j$（絶対値 $\sqrt{1+3} = 2$、偏角 60°）をかけます。

$zw = (1+j)(1+\sqrt{3}\,j)$	問題の式
$= 1 + \sqrt{3}\,j + j + \sqrt{3}\,j^2$	展開する（6-8 ⑥）
$= (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})j$	$j^2 = -1$。実部と虚部を集める
$\approx -0.732 + 2.732j$	$\sqrt{3} \approx 1.732$

この答えの絶対値と偏角を求めます。

- 絶対値：$\sqrt{(-0.732)^2 + 2.732^2} = \sqrt{0.536 + 7.464} = \sqrt{8} \approx 2.828$。これは $\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$（$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$）。
- 偏角：左上の点なので、$\tan^{-1}\dfrac{2.732}{-0.732} = \tan^{-1}(-3.732) = -75°$ に $180°$ をたして $105°$。これは $45° + 60°$。

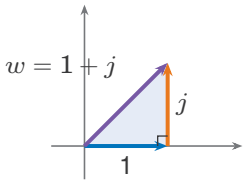
絶対値は $\sqrt{2}$ と 2 の**かけ算**、偏角は $45°$ と $60°$ の**たし算**になりました。

見方 2：図で考える（道すじごと回す）

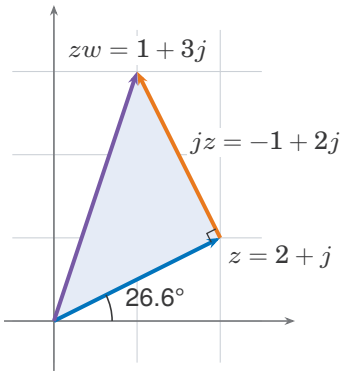
$w = c + dj$ を z にかけると、分配法則で

$$zw = z(c + dj) = c \times z + d \times (jz)$$

です。$c \times z$ は「z の矢印を c 倍」、jz は「z を $90°$ 回した矢印」（6-8）なので、$d \times (jz)$ は「z を $90°$ 回して d 倍」です。$z = 2 + j$、$w = 1 + j$（$c = 1$、$d = 1$）で図にします。



w への道すじ



左の三角形（1 と j の道すじ）を、

・$|z| = \sqrt{5}$ 倍に拡大して

・z の偏角 26.6° だけ回す

と、右の三角形になる。

だから zw の矢印は、

w の矢印を $\sqrt{5}$ 倍にして、

26.6° 回したもの。

図 5　$w = 1 \times 1 + 1 \times j$ への道すじ（左）と、$zw = 1 \times z + 1 \times (jz)$ への道すじ（右）。
直角三角形の形は同じで、大きさと向きだけがちがう。

右の三角形の 2 つの辺は、z の矢印（長さ $|z|$）と、それを 90° 回した jz の矢印（長さ $|z|$）です。左の三角形の辺 1 と j の両方を、それぞれ $|z|$ 倍にして z の向きに回したものなので、三角形の形はそのままで、$|z|$ 倍に拡大されて、z の偏角だけ回っています（4-3 の拡大）。だから、斜辺の zw は、w を $|z|$ 倍に拡大して、$\arg z$ だけ回した矢印です。

これは、4-9 で加法定理を作ったときの「道すじを、まるごと回す」図と同じ考えです。c、d がほかの数でも、三角形の横とたてが c と d になるだけで、同じことが言えます。

見方 3：式で確かめる（加法定理）

$z = r_1(\cos\alpha + j\sin\alpha)$、$w = r_2(\cos\beta + j\sin\beta)$ とします（α はアルファ、β はベータ。3-10）。実数の r_1、r_2 を前に集めると、

$$zw = r_1 r_2(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta)$$

です。ここから 1 行ずつ進めます。

$$= r_1 r_2\{\cos\alpha\cos\beta + j\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{展開する（4 つの組み合わせ）}$$

$$+ j\sin\alpha\cos\beta + j^2\sin\alpha\sin\beta\}$$

$$= r_1 r_2\{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \qquad j^2 = -1\text{。}j\text{ のない項と}$$

$$+ j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\} \qquad j\text{ のつく項に分ける}$$

$$= r_1 r_2\{\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)\} \qquad \text{加法定理（4-9）}$$

最後の式は、絶対値が $r_1 r_2$、偏角が $\alpha+\beta$ の複素数の極形式です。3 通りとも、同じ結論になりました。

$$|zw| = |z|\,|w| \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w$$

かけ算は、大きさはかけ算、角はたし算

4-9 では、加法定理を「道すじを回す」図から作りました。複素数で考えると、加法定理は「かけ算すると角がたされる」ことを、実部と虚部に分けて書いたものだったのです。

❓はてな？の答え

$1+j$ は、絶対値 $\sqrt{2}$、偏角 45° です。だから $1+j$ をかけるたびに、点は $\sqrt{2}$ 倍に拡大されて、45° ずつ左回りに回ります。もとの向き（偏角 0°）にもどるのは、$45° \times 8 = 360°$ で、**8 回かけたとき**です。そのとき、距離は $(\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$ 倍になっているので、$(1+j)^8 = 16$。やってみようの表の $n=8$ の行と、ぴったり合います。

6 特別な数をかける

⑤のきまりで、これまでのかけ算を見なおします。

かける数	絶対値	偏角	点の動き
j	1	90°	左回りに 90° 回す（6-8）
-1	1	180°	180° 回す（2-2）
$-j$	1	−90°	右回りに 90° 回す
正の実数 k	k	0°	回さずに k 倍
$\cos\theta + j\sin\theta$	1	θ	大きさを変えずに θ 回す

表 3　絶対値が 1 の数をかけると、回すだけ。偏角が 0° の数をかけると、拡大・縮小だけ。

$j \times j$ は、偏角が $90° + 90° = 180°$、絶対値が $1 \times 1 = 1$ なので -1。6-8 で図から考えた $j^2 = -1$ が、⑤のきまりからも出てきます。

2 回かけると j になる数

⑤のきまりを使うと、新しい数も見つけられます。2 回かけて j（絶対値 1、偏角 90°）になる数は、絶対値が 1 で、偏角が 90° の半分の 45° の数です。

$$\cos 45° + j\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$$

確かめると、$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+j)^2 = \dfrac{2}{4} \times 2j = j$。たしかに j になります。

共役な数とのかけ算

$\bar{z}$ は、z を実軸で裏返した点なので、絶対値は同じで、偏角は $-\theta$ です。だから $z\bar{z}$ は、偏角が $\theta + (-\theta) = 0°$、絶対値が $|z|^2$ の数、つまり正の実数 $|z|^2$ です。6-8 ⑦の $z\bar{z} = a^2 + b^2$ が、図の上でも説明できました。

7 わり算は「大きさはわり算、角はひき算」

わり算はかけ算の逆です（1-14）。$\dfrac{z}{w} = q$ とすると、$z = qw$ です。⑤から $|z| = |q|\,|w|$、$\arg z = \arg q + \arg w$ なので、

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

たとえば $\dfrac{1+\sqrt{3}\,j}{1+j}$ は、絶対値が $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$、偏角が $60°-45°=15°$ です。6-8⑧の方法で確かめます。

$$\frac{1+\sqrt{3}\,j}{1+j}=\frac{(1+\sqrt{3}\,j)(1-j)}{(1+j)(1-j)}$$ 分母と共役な $1-j$ をかける

$$=\frac{1-j+\sqrt{3}\,j-\sqrt{3}\,j^2}{2}$$ 展開する。分母は $1^2+1^2=2$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)j}{2}$$ $j^2=-1$

$$\approx 1.366+0.366j$$ $\sqrt{3}\approx 1.732$

絶対値は $\sqrt{1.366^2+0.366^2}=\sqrt{1.866+0.134}=\sqrt{2}$、偏角は右上の点なので $\tan^{-1}\dfrac{0.366}{1.366}=15°$。合っています。

⑧ 何回もかける：ド・モアブルの定理

絶対値 r、偏角 θ の数を n 回かけると、⑤のきまりで、絶対値は r を n 回かけた r^n、偏角は θ を n 回たした $n\theta$ になります。

$$\{r(\cos\theta+j\sin\theta)\}^n=r^n(\cos n\theta+j\sin n\theta)$$

$r=1$ のときの式 $(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$ を、**ド・モアブルの定理**といいます。フランスに生まれ、イギリスで活やくしたド・モアブル（1667～1754 年）の名前からきています。

何回も展開しなくてよい

$(1+j)^8$ を展開で計算すると、7 回もかけ算をしなければなりません。極形式なら、$1+j=\sqrt{2}(\cos 45°+j\sin 45°)$ なので、

$$(1+j)^8$$ $1+j$ は絶対値 $\sqrt{2}$、偏角 $45°$

$$=(\sqrt{2})^8(\cos 360°+j\sin 360°)$$ ド・モアブル：$45°\times 8=360°$

$$=16\times(1+0j)=16$$ $(\sqrt{2})^8=(\sqrt{2}^{\,2})^4=2^4=16$

1 行で終わりました。

$n = 2$ のとき：2 倍角の式がもう一度出てくる

$(\cos\theta + j\sin\theta)^2$ を、展開とド・モアブルの 2 通りで計算します。

- 展開：$\cos^2\theta + 2j\sin\theta\cos\theta + j^2\sin^2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + j(2\sin\theta\cos\theta)$
- ド・モアブル：$\cos 2\theta + j\sin 2\theta$

2 つは同じ数なので、実部どうし、虚部どうしが等しくなり（6-8 ③）、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

4-9 の 2 倍角の式が、複素数のかけ算から出てきました。

9 回転の道具：点を回す・うでを動かす

⑥の表から、**点を原点のまわりに θ だけ回すには、$\cos\theta + j\sin\theta$ をかければよい**ことがわかります。絶対値が 1 なので、大きさは変わりません。

点 $(3,\ 1)$ を 60° 回す

$\cos 60° + j\sin 60° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$ をかけます。

$$(3 + j)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$$ 問題の式

$$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j + \frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{2}j^2$$ 展開する

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)j$$ $j^2 = -1$。実部と虚部を集める

$$\approx 0.634 + 3.098j$$ $\sqrt{3} \approx 1.732$

回した点は約 $(0.63,\ 3.10)$ です（図 6）。

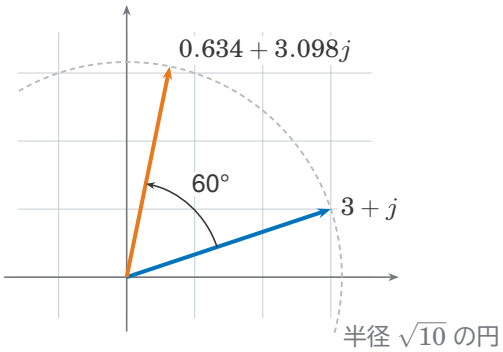


図 6 $3 + j$ に $\cos 60° + j \sin 60°$ をかけると、原点のまわりに 60° 回った点に移る。原点からの距離は変わらない。

原点からの距離を確かめると、$\sqrt{0.634^2 + 3.098^2} \approx 3.16$ で、もとの $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$ と同じです。

文字で書くと、点 $(x,\ y)$ を θ 回すと、

$$(x + yj)(\cos\theta + j\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + (x\sin\theta + y\cos\theta)j$$

で、回した点は $(x\cos\theta - y\sin\theta,\quad x\sin\theta + y\cos\theta)$ です。$\theta = 90°$ なら $(-y,\ x)$ で、4-8 の「90° 回す」になります。この式は、第 7 巻の「回転行列」（7-6）でもう一度出てきます。

Python で確かめる

6-8 ⑩の Python でも、絶対値・偏角・回転が計算できます。`abs(z)` は絶対値、`cmath.phase(z)` は偏角（ラジアン。$-\pi$ より大きく π 以下）、`math.degrees` はラジアンを度に直す関数、`cmath.rect(r, θ)` は絶対値 r、偏角 θ（ラジアン）の複素数を作る関数です。

Python

```
import cmath, math
z = 3+1j
print(abs(z))
print(math.degrees(cmath.phase(z)))
r = cmath.rect(1, math.radians(60))
print(z * r)
```

実行結果

```
3.1622776601683795
18.43494882292201
(0.6339745962155618+3.098076211353316j)
```

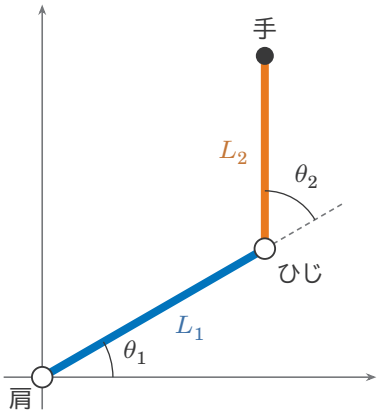
1 行めは $\sqrt{10} \approx 3.162$、2 行めは $3+j$ の偏角（$\tan^{-1}\dfrac{1}{3} \approx 18.4°$）、3 行めは、さっき手で計算した 60° 回した点です。

ロボットのうでの先の位置

4-7 の 2 リンクのうでを、複素数で計算します。肩を原点にして、上のうでの長さを L_1、下のうでの長さを L_2、肩の角を θ_1、ひじの角を θ_2 とします（4-7 と同じ決め方）。回転をかけ算で書くために、

$$u_1 = \cos\theta_1 + j\sin\theta_1 \qquad u_2 = \cos\theta_2 + j\sin\theta_2$$

とおきます。u_1 をかけると θ_1 回り、u_2 をかけると θ_2 回ります。



手の位置は、次の 2 つの動きを順に考えると求められます。

1. 上のうでを横にのばしたまま、ひじから先だけを θ_2 回す。手は $L_1 + L_2u_2$ の所。
2. うで全体を、肩のまわりに θ_1 回す。全体に u_1 をかける。

$$手 = u_1(L_1 + L_2u_2)$$

展開すると $L_1u_1 + L_2u_1u_2$ で、u_1u_2 は偏角 $\theta_1+\theta_2$ の数（⑤）なので、実部と虚部は 4-7 の式 $x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$、$y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

と同じです。複素数で書くと、「回す」がかけ算 1 回になるので、関節がいくつあっても、同じ形で順にかけていけば計算できます（例題 8）。

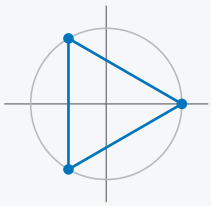
もっと知りたい ★★★★

1 の n 乗根：正多角形の頂点

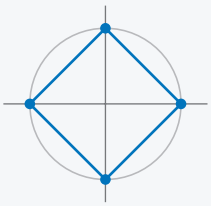
$z^3=1$ になる数 z を考えます。$|z|^3=1$ なので $|z|=1$、偏角は 3 倍すると 360° の整数倍（4-8 の一般角）になる角で、0°、120°、240°（$=-120°$）の 3 つです。

$$z=1,\quad \cos 120°+j\sin 120°=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j,$$
$$\cos 120°-j\sin 120°=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

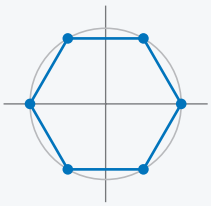
3 つの点は、単位円の上の正三角形の頂点です。あとの 2 つは、6-8 の例題 8（3）の $s^2+s+1=0$ の解と同じです。$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$（展開して確かめられる）だからです。同じように、$z^4=1$ の解は 1、j、-1、$-j$（正方形）、$z^6=1$ の解は正六角形の頂点です。これらを **1 の n 乗根**といいます。



$z^3=1$



$z^4=1$



$z^6=1$

3 つの解をたすと、$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=0$ です。120° ずつずれた 3 つの矢印をつなぐと、もとにもどるからです。これは、発電所から家庭や工場に送る「三相交流」の 3 本の電線の電圧の和が 0 になるしくみと同じです（物理・工学ではこう使う）。

専門書をのぞいてみよう　大学・電気の教科書ふうの書き方

複素数 z は極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表される。ここで $r = |z|$、$\theta = \arg z$ であり、偏角は 2π の整数倍を除いて一意に定まる。$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$、$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ が成り立つ。電気工学では、極形式を $\dot{V} = 100\angle 30^\circ$ のようにも書く。

訳　数学の本では、角をラジアンで書き、虚数単位を i と書く。「2π の整数倍を除いて一意に定まる」は「360° ずつのちがいをのぞけば、ただ 1 つに決まる」（4-8 の一般角）。$100\angle 30^\circ$ は「絶対値 100、偏角 30°」の複素数（読み方は「100、角度 30 度」など）。電気の本では、複素数で表した電圧や電流に、点をつけて $\dot{V}$ と書くことがある。

たいせつ

複素平面	$a + bj$ **は点** $(a,\ b)$**。たし算は矢印をつなぐ**
絶対値・偏角	$\lvert a + bj\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$**。偏角は区画を見て決める**
極形式	$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
かけ算	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert w\rvert$、$\arg(zw) = \arg z + \arg w$**（わり算は、わり算とひき算）**
ド・モアブル	$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$
回転	θ **回すには** $\cos\theta + j\sin\theta$ **をかける**

この章で出てきたことば

複素平面　複素数 $a + bj$ を点 $(a,\ b)$ で表す平面。横が実軸、たてが虚軸。ガウス平面ともいう。

絶対値　複素数の点と原点との距離 $|z|$。

偏角　実軸の正の向きから左回りにはかった、z の向きの角 $\arg z$。

極形式　複素数を絶対値 r と偏角 θ で $r(\cos\theta + j\sin\theta)$ と書く書き方。

ド・モアブルの定理　$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$。

記号カード 初めて出た章 6-9

$|z|$

読み方 ぜったいち・ゼット
意味 複素数 z の点と原点との距離。$|a+bj|=\sqrt{a^2+b^2}$
英語 absolute value

記号カード 初めて出た章 6-9

$\arg z$

読み方 アーギュメント・ゼット
意味 偏角。z の向きの角。この本では $-180^\circ < \theta \leqq 180^\circ$
英語 argument

例題でたしかめよう

例題 1　絶対値と偏角

次の複素数の絶対値と偏角を求めましょう（偏角は $-180^\circ < \theta \leqq 180^\circ$）。

（1）$3+4j$　（2）$-1+\sqrt{3}\,j$　（3）$-1-j$　（4）$-2j$

考え方 絶対値は $\sqrt{a^2+b^2}$（③）。偏角は、まず点の区画を見てから、$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ を直す（④の表）。

式 （1）$\sqrt{9+16}=5$。右上。$\tan^{-1}\dfrac{4}{3}\approx 53.1^\circ$ のまま

（2）$\sqrt{1+3}=2$。左上。$\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-60^\circ$、$-60^\circ+180^\circ=120^\circ$

（3）$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$。左下。$\tan^{-1}1=45^\circ$、$45^\circ-180^\circ=-135^\circ$

（4）$\sqrt{0+4}=2$。虚軸の下（$a=0$、$b<0$）で -90°

答え （1）5、約 53.1°　（2）2、120°　（3）$\sqrt{2}$、-135°　（4）2、-90°

例題 2　和・差と、2 点の距離

$z_1 = 1 + j$、$z_2 = 4 + 5j$ のとき、$z_1 + z_2$、$z_2 - z_1$ と、2 つの点の距離を求めましょう。

考え方　たし算・ひき算は成分ごと（②）。2 点の距離は、$z_2 - z_1$ の絶対値。

式　$z_1 + z_2 = (1 + 4) + (1 + 5)j = 5 + 6j$

$z_2 - z_1 = (4 - 1) + (5 - 1)j = 3 + 4j$

距離は $|3 + 4j| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

答え　$z_1 + z_2 = 5 + 6j$、$z_2 - z_1 = 3 + 4j$、距離 5

じぶんでとこう 1

次の複素数の絶対値と偏角を求めましょう。

(1) $5 - 12j$

(2) $-\sqrt{3} + j$

(3) $-2 - 2j$

(4) $3j$

じぶんでとこう 2

$z_1 = 2 + j$、$z_2 = 7 + 13j$ のとき、$z_1 + z_2$、$z_2 - z_1$ と、2 つの点の距離を求めましょう。

例題 3 極形式と $a+bj$ の書きかえ

(1)(2) を $a+bj$ の形に、(3)(4) を極形式に直しましょう。

(1) $2(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ)$

(2) $4\{\cos(-60^\circ) + j\sin(-60^\circ)\}$

(3) $1+j$

(4) -3

考え方 $a = r\cos\theta$、$b = r\sin\theta$（④）。反対は、絶対値と偏角を求めて $r(\cos\theta + j\sin\theta)$ に入れる。

式 (1) $\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$。$2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\times\dfrac{1}{2}j$

(2) $\cos(-60^\circ) = \dfrac{1}{2}$、$\sin(-60^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。$4\times\dfrac{1}{2} + 4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)j$

(3) $r=\sqrt{2}$、右上で $\tan^{-1}1 = 45^\circ$

(4) $r=3$、負の実数なので偏角は 180°

答え (1) $-\sqrt{3}+j$　(2) $2-2\sqrt{3}\,j$　(3) $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)$

(4) $3(\cos 180^\circ + j\sin 180^\circ)$

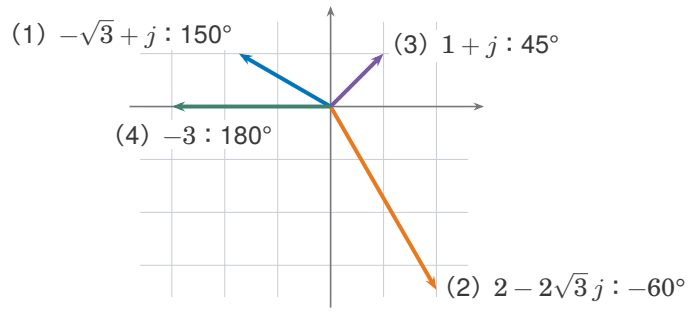


図 7 例題 3 の 4 つの数。矢印の長さが絶対値、向きが偏角。

例題 4　極形式のかけ算・わり算

$z = 2(\cos 30° + j \sin 30°)$、$w = 3(\cos 60° + j \sin 60°)$ のとき、zw と $\dfrac{w}{z}$ を、極形式と $a + bj$ の形の両方で求めましょう。

考え方　かけ算は、絶対値をかけて偏角をたす（⑤）。わり算は、絶対値をわって偏角をひく（⑦）。

式　zw：絶対値 $2 \times 3 = 6$、偏角 $30° + 60° = 90°$

$$6(\cos 90° + j \sin 90°) = 6(0 + 1j) = 6j$$

$\dfrac{w}{z}$：絶対値 $\dfrac{3}{2}$、偏角 $60° - 30° = 30°$

$$\frac{3}{2}(\cos 30° + j \sin 30°) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}j$$

答え　$zw = 6(\cos 90° + j \sin 90°) = 6j$

$$\frac{w}{z} = \frac{3}{2}(\cos 30° + j \sin 30°) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}j$$

じぶんでとこう 3

(1)（2）を $a + bj$ に、(3)（4）を極形式に。

(1) $6(\cos 30° + j \sin 30°)$

(2)

$2\{\cos(-135°) + j \sin(-135°)\}$

(3) $-1 + \sqrt{3}\,j$

(4) $-5j$

じぶんでとこう 4

$z = 4(\cos 70° + j \sin 70°)$、$w = 2(\cos 20° + j \sin 20°)$ のとき、zw と $\dfrac{z}{w}$ を極形式で求め、zw は $a + bj$ の形にも直しましょう。

例題 5　かけ算を 2 通りで計算する

$(1+j)(\sqrt{3}+j)$ を、(1) 展開して $a+bj$ の形で、(2) 極形式で、計算しましょう。また、答えが同じ数か確かめましょう（$\cos 75° \approx 0.259$、$\sin 75° \approx 0.966$）。

考え方　(1) は展開（6-8 ⑥）。(2) は絶対値と偏角を求めて⑤のきまり。

式　(1) $\sqrt{3}+j+\sqrt{3}\,j+j^2=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)j$

$\approx 0.732+2.732j$

(2) $1+j$ は $\sqrt{2}$、$45°$。$\sqrt{3}+j$ は 2、$\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30°$

積は、絶対値 $2\sqrt{2}$、偏角 $45°+30°=75°$

確かめ：$2\sqrt{2}\cos 75° \approx 0.732$、$2\sqrt{2}\sin 75° \approx 2.732$

答え　(1) $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)j$　(2) $2\sqrt{2}(\cos 75°+j\sin 75°)$。同じ数

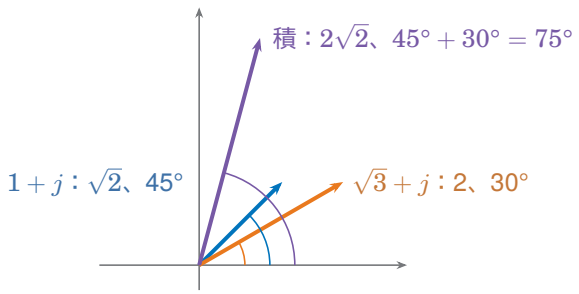


図 8　例題 5 のかけ算。積の矢印は、長さが $\sqrt{2}\times 2$、角が $45°+30°$。

例題 6　ド・モアブルの定理

次の数を計算しましょう。

(1) $(1+j)^8$

(2) $(1+\sqrt{3}\,j)^6$

(3) $(1+j)^4$

(4) $(1+\sqrt{3}\,j)^4$

考え方　極形式に直し、絶対値を n 乗、偏角を n 倍する（⑧）。
偏角が 180° をこえたら、360° をひいて同じ向きの角に直す（4-8 の一般角）。

式　(1) $1+j$ は $\sqrt{2}$、45°。$(\sqrt{2})^8=16$、$45^\circ\times 8=360^\circ$

$$16(\cos 360^\circ + j\sin 360^\circ)=16$$

(2) $1+\sqrt{3}\,j$ は 2、60°。$2^6=64$、$60^\circ\times 6=360^\circ$

$$64(\cos 360^\circ + j\sin 360^\circ)=64$$

(3) $(\sqrt{2})^4=4$、$45^\circ\times 4=180^\circ$。$4(\cos 180^\circ + j\sin 180^\circ)=-4$

(4) $2^4=16$、$60^\circ\times 4=240^\circ$。$240^\circ-360^\circ=-120^\circ$ と同じ向き

$$16\{\cos(-120^\circ)+j\sin(-120^\circ)\}=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$$

答え　(1) 16　(2) 64　(3) -4　(4) $-8-8\sqrt{3}\,j$

じぶんでとこう 5

$(1+\sqrt{3}\,j)(\sqrt{3}+j)$ を、展開と極形式の 2 通りで計算し、同じ数になるか確かめましょう。

じぶんでとこう 6

次の数を計算しましょう。

(1) $(1+j)^6$

(2) $(\sqrt{3}+j)^3$

(3) $(1+\sqrt{3}\,j)^3$

例題 7　点を回す

(1) 点 $(4,\ 2)$ を、原点のまわりに左回りに $90°$ 回した点を求めましょう。

(2) 点 $(2,\ 2)$ を、原点のまわりに左回りに $30°$ 回した点を求めましょう。

考え方　θ 回すには $\cos\theta + j\sin\theta$ をかける（⑨）。$90°$ なら j、$30°$ なら $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}j$。

式　(1)　$j(4+2j) = 4j + 2j^2 = -2 + 4j$

(2)　$(2+2j)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} + j + \sqrt{3}\,j + j^2$

$= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)j$　$(j^2 = -1)$

確かめ：$|2+2j| = 2\sqrt{2}$、偏角 $45° + 30° = 75°$。⑤のかけ算の例と同じ点

答え　(1)　$(-2,\ 4)$　(2)　$(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$、約 $(0.73,\ 2.73)$

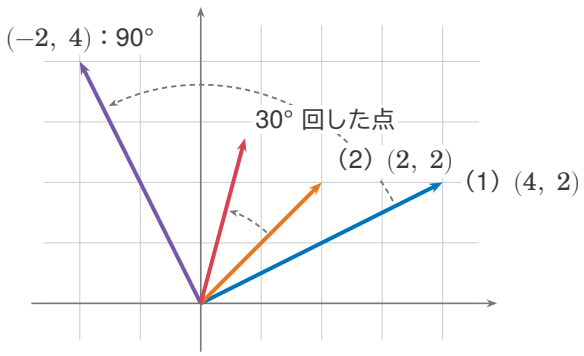


図 9　例題 7 の 2 つの回転。どちらも、原点からの距離は変わらない。

例題 8　ロボットのうでの先の位置

4-7 の 2 リンクのうでで、$L_1 = 40\,\text{cm}$、$L_2 = 30\,\text{cm}$、$\theta_1 = 30°$、$\theta_2 = 60°$ のとき、手の位置を、複素数のかけ算で求めましょう（$\sqrt{3} \approx 1.732$）。

考え方　手 $= u_1(L_1 + L_2 u_2)$（⑨）。ひじから先を θ_2 回してから、全体を θ_1 回す。

式　$u_2 = \cos 60° + j \sin 60° = 0.5 + 0.866j$

$$u_1 = \cos 30° + j \sin 30° = 0.866 + 0.5j$$

$$L_1 + L_2 u_2 = 40 + 30 \times (0.5 + 0.866j) = 55 + 25.98j$$

$$(55 + 25.98j)(0.866 + 0.5j)$$

$$= 55 \times 0.866 + 27.5j + 22.50j + 12.99j^2$$

$$= (47.63 - 12.99) + (27.5 + 22.50)j = 34.64 + 50.0j$$

答え　約 $(34.6,\ 50)$（4-7 で求めた位置と同じ）

じぶんでとこう 7

（1）点 $(3,\ -1)$ を 90° 回した点と、（2）点 $(2,\ -2)$ を 60° 回した点を求めましょう（左回り）。

じぶんでとこう 8

$L_1 = 40\,\text{cm}$、$L_2 = 30\,\text{cm}$、$\theta_1 = 60°$、$\theta_2 = 30°$ のときの手の位置を、複素数のかけ算で求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

偏角を $\tan^{-1}$ だけで決める

✕ $\arg(-1-j)=45°$

○ $\arg(-1-j)=-135°$

$\tan^{-1}1=45°$ は右上の向きです。$\tan^{-1}$ は右半分の角しか答えません。$-1-j$ は左下なので $45°-180°=-135°$。先に点をかいて、区画を見ます。

まちがえやすいところ

絶対値に j を入れる

✕ $|3+4j|=\sqrt{9+(4j)^2}$

○ $|3+4j|=\sqrt{9+16}=5$

絶対値は距離なので、実部と虚部（どちらも実数）の 2 乗をたします。

まちがえやすいところ

かけ算で、角をかけてしまう

✕ 偏角 $30°$ と $60°$ の数の積は、偏角 $1800°$

○ 偏角は $30°+60°=90°$

かけ算では、絶対値はかけ算、偏角は**たし算**です。

まちがえやすいところ

n 乗で、絶対値を忘れる

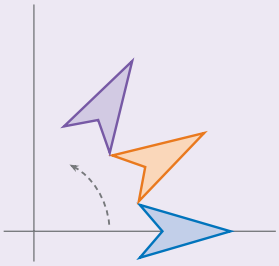
✕ $(1+j)^8=1$

○ $(1+j)^8=(\sqrt{2})^8=16$

偏角だけ $45°\times 8=360°$ にして、絶対値 $\sqrt{2}$ の 8 乗を忘れたまちがい。ド・モアブルの定理は絶対値 1 の数の式です。

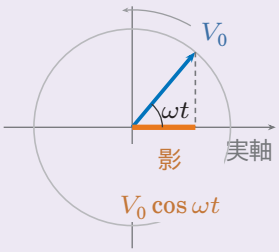
物理・工学ではこう使う

ゲームとロボット：回転はかけ算
ゲームやコンピュータグラフィックスで、キャラクターや絵を回すときは、⑨の「回転をかけ算で表す」考えを使います。平面では、点の 1 つ 1 つに $\cos\theta + j\sin\theta$ をかける計算（7-6 の回転行列と同じ）です。ロボットのうでのように回転が何回も重なるときも、かけ算を順につなぐだけです。3 次元の回転には、複素数をさらに広げた「クォータニオン（四元数）」という数がよく使われます。



物理・工学ではこう使う

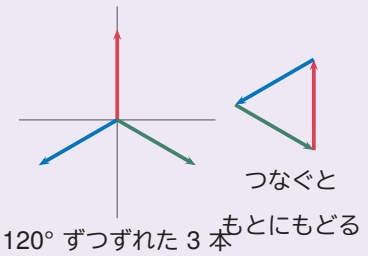
交流：回る矢印の影（6-10 の予告）
家のコンセントの交流の電圧 $V_0\cos\omega t$ は、絶対値 V_0、偏角 ωt の複素数、つまり角速度 ω で回る矢印の、実軸への影（実部）と見ることができます（4-8 の「円運動の影」）。電気の本では、この回る矢印を**フェーザ**とよびます。ずれのある 2 つの交流をたすことは、矢印をつなぐ（②）ことになり、計算がとても楽になります。くわしくは 6-10 で学びます。



物理・工学ではこう使う

三相交流とモーター

発電所から工場へ送る電気は、3 本の電線の電圧が 120° ずつずれた「三相交流」です（4-9）。3 つの電圧を回る矢印で表すと、たがいに 120° ずつ回った 3 本の矢印で、つなぐともとにもどるので、和はいつも 0 です（1 の 3 乗根。もっと知りたい）。工場のモーターでは、120° ずつずらして置いた 3 つのコイルにこの電流を流して、ぐるぐる回る磁石のはたらき（回転磁界）を作り、モーターを回しています（物理シリーズ『電磁気学』）。



コラム 「ないはずの数」が、平面の点になるまで

虚数は、はじめ「計算のとちゅうに出てくる、ふしぎな記号」でした（6-8 のコラム）。それを平面の点として目に見える形にしたのが、ノルウェー生まれで、デンマークで測量の仕事をしていたウェッセルです（1797 年に発表、1799 年に論文）。デンマーク語で書かれていたので、長いあいだ知られませんでした。1806 年には、パリのアルガンが同じ考えを本にしました。大数学者ガウスが 1831 年に「複素数」という名前とともにこの考えを示して、広く知られるようになりました。

アイルランドのハミルトンは、1830 年代に複素数を「2 つの実数の組」として決めなおし、さらに 3 次元の回転を表せる数（クォータニオン）を考え出しました（1843 年）。いまでは、ドローンや宇宙船の向きの計算、ゲームの 3 次元の画面に使われています。

章末問題

6-9 のまとめ

基本 ★★★★

1 次の複素数の絶対値と偏角を求めましょう（例題 1）。

（1）$-3+3j$　　（2）$1-\sqrt{3}\,j$　　（3）-4

2 （1）$4(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ)$ を $a+bj$ の形に、（2）$1-j$ を極形式に直しましょう（例題 3）。

3 $z_1=-1+2j$、$z_2=5+10j$ のとき、z_1+z_2、z_2-z_1 と、2 つの点の距離を求めましょう（例題 2）。

4 $z=3(\cos 40^\circ + j\sin 40^\circ)$、$w=2(\cos 50^\circ + j\sin 50^\circ)$ のとき、zw と $\dfrac{z}{w}$ を極形式で求め、zw は $a+bj$ の形にも直しましょう（例題 4）。

5 $(1+\sqrt{3}\,j)(1+j)$ を、展開と極形式の 2 通りで求めましょう（例題 5）。

6 次の数を計算しましょう（例題 6）。

（1）$(1+j)^{10}$　　（2）$(-1+\sqrt{3}\,j)^3$

7 点 $(5,\ 1)$ を、原点のまわりに左回りに 90° 回した点を求めましょう（例題 7）。

8 $-1+j$ を極形式に直しましょう（例題 3）。

チャレンジ ★★★★

9 点 $(-2,\ 4)$ を、原点のまわりに左回りに（1）90°、（2）45° 回した点を求めましょう（例題 7）。

10 2 リンクのうでで、$L_1 = 40\,\text{cm}$、$L_2 = 30\,\text{cm}$、$\theta_1 = 90°$、$\theta_2 = -90°$ のときの手の位置を、複素数のかけ算で求めましょう（例題 8）。

11 $|z| = 2$、$\arg z = 30°$ の複素数 z について、z^2、z^3、z^6 を $a + bj$ の形で求めましょう（例題 6）。

12 $z = 1 + \sqrt{3}\,j$、$w = 1 + j$ のとき、$\dfrac{z}{w}$ を極形式で求めましょう。また、分母と共役な数をかける方法（6-8）で $a + bj$ の形にも直し、絶対値が同じになるか確かめましょう（例題 4）。

13 $z = 4(\cos 100° + j \sin 100°)$、$w = 2(\cos 10° + j \sin 10°)$ のとき、$\dfrac{z}{w}$ を極形式と $a + bj$ の形で求めましょう（例題 4）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 複素数を平面の点で表し、絶対値と偏角を求められる。
  → 318 ページ
- ☐ かけ算が「大きさはかけ算、角はたし算」になることを説明できる。
  → 320 ページ
- ☐ かけ算で、点を回したり、うでの先の位置を求めたりできる。
  → 326 ページ

ミナ

かけ算が、回転と拡大になるなんて！　次の 6-10 では、e と回転がつながる「オイラーの公式」に進もう。

第 2 部　複素数と双曲線関数

★★★★~★★★★★

6-10 オイラーの公式

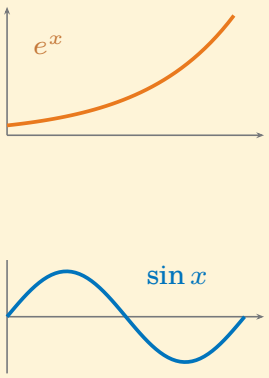
道しるべ　この章の前に 4-8 4-9 5-14 5-15 5-17 6-9
この章の先に 6-11 6-12 6-13 9-1 9-3

この章でできるようになること

- ★★★★ $e^{j\theta}$ が「単位円の上の、角 θ の点」であることを、小さな回転のくり返しと微分で説明できる。
- ★★★★ オイラーの公式で $e^{j\theta}$ を $a+bj$ に直し、$re^{j\theta}$ のかけ算・わり算・べきを「肩のたし算」で計算できる。
- ★★★★★ 同じ速さで回る矢印（フェーザ）のたし算で交流を合成し、「微分は $j\omega$ をかけること」を説明できる。

はてな？

e^2 は「e を 2 回かけた数」、$e^{0.5}$ は「2 回かけると e になる数」でした（5-14）。
では、$e^{j\theta}$ はどうでしょう。「e を $j\theta$ 回かける」と言われても、何のことか分かりません。ところが電気の技術者は、交流の計算で、毎日のように $e^{j\omega t}$ を使っています。$e^{j\theta}$ とは、いったい、どんな数なのでしょう。



6-8 で、2 乗すると -1 になる数 j を考えました。6-9 では、複素数を平面の点（矢印）と見ると、かけ算が「回転と拡大」になることを学びました。この章では、この 2 つと、第 5 巻の指数関数 e^x を組み合わせます。すると、指数関数と

三角関数が 1 本の式でつながり、回るもの・ゆれるもの・交流が、かけ算とたし算だけで計算できるようになります。

この章は、大学で学ぶ内容です。はじめての考えが続くので、1 回で分からなくても大丈夫です。「目でわかる」「手でわかる」の段だけでも、$e^{j\theta}$ の正体はつかめます。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

4-8 単位円の上で角 θ の点は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$。円を回る点の影は波になる。

4-9 加法定理：

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

4-9 合成：$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$

5-14 $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ は、n を大きくすると e^r に近づく。$(e^{at})'=ae^{at}$

5-15 円の上を回る点の速度は、半径に垂直。$(\sin\omega t)'=\omega\cos\omega t$。sin・cos の微分はラジアンで。

5-17 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$、$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$、$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$

6-8 $j^2=-1$。複素数 $a+bj$ の a が実部 $\mathrm{Re}\,z$、b が虚部 $\mathrm{Im}\,z$。

6-9 複素平面。$|z|$ は原点からの距離、$\arg z$ は角（偏角）。極形式 $r(\cos\theta+j\sin\theta)$。かけ算は「大きさはかけ算、角はたし算」。$j$ をかけると 90° 回る。共役 $\bar{z}$ は横軸で裏返し。

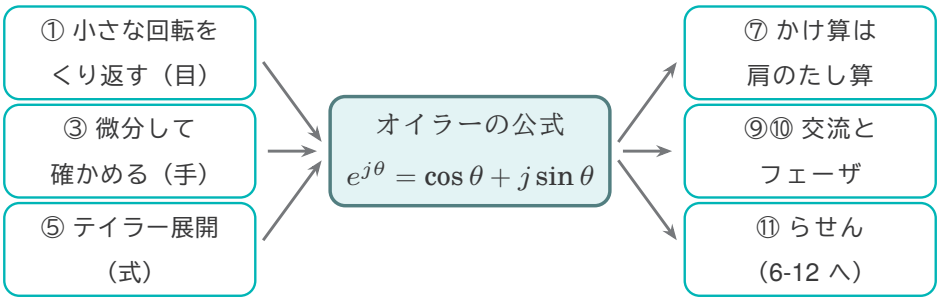


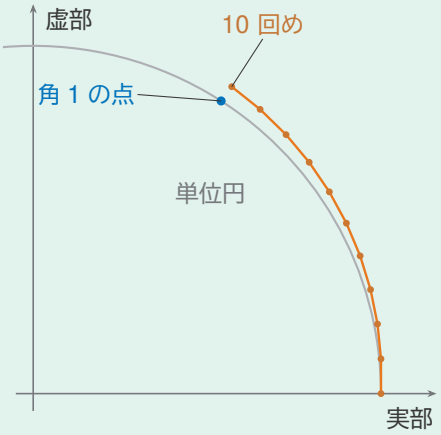
図 1 この章の道すじ。3 つのちがう道が、同じ 1 本の式にたどり着く。その式で、回転と交流が計算できる。

やってみよう　$1+0.1j$ を、10 回かけてみよう

表計算で、点 1 から始めて、$1+0.1j$ を何回もかけていきます。複素数 $a+bj$ は、横（実部）a と、たて（虚部）b の 2 つの列に分けて書きます。

1. 1 行めに「回数」「横（実部）」「たて（虚部）」と書く。2 行めに 0、1、0 と入れる（点 $1=1+0j$）。
2. B3 に `=B2-0.1*C2`、C3 に `=C2+0.1*B2` と入れる（$1+0.1j$ をかける計算。わけは下）。
3. 3 行めを、12 行めまで下へコピーする（10 回かけたことになる）。
4. 点 (横, たて) を方眼紙にかき、原点から半径 1 の円（単位円）もかいてみよう。

	A	B	C
1	回数	横	たて
2	0	1	0
3	1	1	0.1
4	2	0.99	0.2
5	3	0.97	0.299
6	4	0.9401	0.396
7	5	0.9005	0.490
8	6	0.8515	0.5801
9	7	0.7935	0.6652
10	8	0.7270	0.7446
11	9	0.6525	0.8173
12	10	0.5708	0.8825



点は、ほとんど単位円の上を、左回りに少しずつ進みました。10 回めの点 $(0.571,\ 0.883)$ は、単位円の上で角 1 ラジアンの所にある点（青）の近くです。

B3・C3 の式のわけ

今の点を $a+bj$（B2 が a、C2 が b）とします。$1+0.1j$ をかけて、かっこを外します（3-8 の展開、6-8 の $j^2=-1$）。

$(a+bj)(1+0.1j)$ かけ算の式

$=a+0.1aj+bj+0.1bj^2$ かっこを外す（4 つの項）

$=a+0.1aj+bj-0.1b$ $j^2=-1$ を使う

$=(a-0.1b)+(b+0.1a)j$ 実部と虚部に分ける

新しい横は $a-0.1b$（B3 の式）、新しいたては $b+0.1a$（C3 の式）です。なぜ点は円の上を回るのでしょう。そして、10 回めの点は、なぜ角 1 の点の近くに来たのでしょう。これが、この章の入口です。

数学の道具

目でわかる 小さな回転を、何回もくり返す ★★★★

1 $1+0.1j$ をかけると、何が起きる？

6-9 で学んだように、複素数のかけ算は「大きさはかけ算、角はたし算」です。そこで、かける数 $1+0.1j$ の大きさと角を調べます。

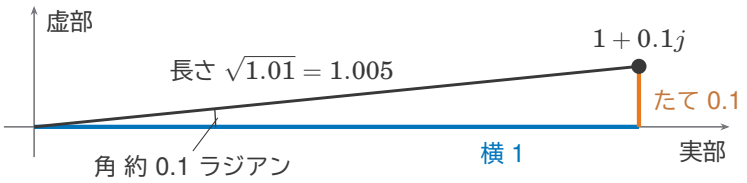


図 2 $1+0.1j$ は、長さがほとんど 1 で、角が約 0.1 ラジアンの矢印。

- **大きさ** 横 1、たて 0.1 の直角三角形の斜辺です（4-4 の三平方）。長さは $\sqrt{1^2+0.1^2}=\sqrt{1.01}$ で、1.00499…。ほとんど 1 です。

● **角**　$\tan^{-1} 0.1 = 0.0997$ ラジアンです（4-15）。ほとんど 0.1 ラジアンです。だから、$1 + 0.1j$ をかけるたびに、点は「長さはほとんど変わらず、角が約 0.1 ラジアンだけ左へ回る」のです。10 回かけると、角は約 $0.1 \times 10 = 1$ ラジアン、長さは $1.005^{10} = 1.051$ 倍になります。だから、10 回めの点は、単位円の上の角 1 の点の、少し外側に来ました。

もっと細かく回すと：$\left(1 + \frac{j}{n}\right)^n$

目標の「角 1 ラジアン」を、n 回に分けて回すことにします。1 回分は $1 + \frac{j}{n}$ をかけます（$n = 10$ が、やってみようの $1 + 0.1j$）。n をふやすと、点はどうなるでしょう。

n	$\left(1 + \frac{j}{n}\right)^n$	大きさ	角（ラジアン）
1	$1 + j$	1.414	0.785
2	$0.75 + j$	1.25	0.927
4	$0.629 + 0.938j$	1.129	0.980
10	$0.571 + 0.883j$	1.051	0.997
100	$0.543 + 0.846j$	1.005	0.99997
10 000	$0.5403 + 0.8415j$	1.00005	1.00000

表 1　n をふやすと、大きさは 1 に、角は 1 ラジアンに近づく。

$n = 2$ なら、$\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2 = 1 + j + \frac{j^2}{4} = 1 + j - 0.25 = 0.75 + j$ です（手で計算できます）。n を大きくすると、点は $\cos 1 + j \sin 1 = 0.5403 + 0.8415j$、つまり単位円の上の角 1 の点に近づいていきます。

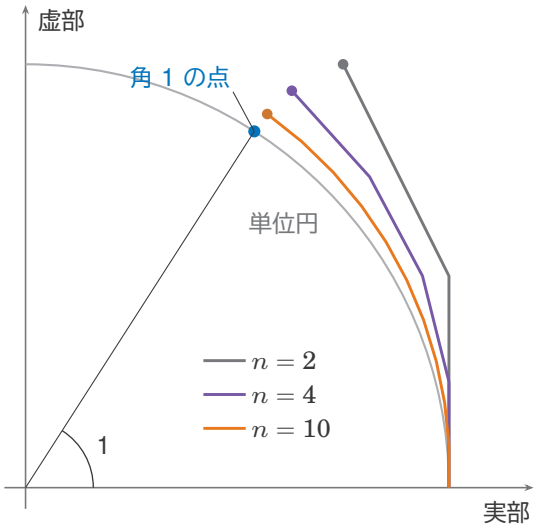


図 3 1 回分の回転を小さく（n を大きく）するほど、折れ線は単位円にそい、終わりの点は角 1 の点（青い点 $\cos 1 + j \sin 1$）に近づく。

角 θ でも同じ

1 ラジアンでなく角 θ だけ回したいときは、1 回分を $1 + \dfrac{j\theta}{n}$ にします。この数の角は、ほとんど $\dfrac{\theta}{n}$ です（小さい角では、$\tan^{-1} x \approx x$。5-17 の 1 次近似）。大きさは $\sqrt{1 + \dfrac{\theta^2}{n^2}}$ で、n が大きいとほとんど 1 です。だから n 回かけると、角は $\dfrac{\theta}{n} \times n = \theta$ に、大きさは 1 に近づきます。

$\left(1 + \dfrac{j\theta}{n}\right)^n$ は、n を大きくすると、
単位円の上の角 θ の点 $\cos\theta + j\sin\theta$ に近づく

はてな？の答え

ここで、5-14 を思い出しましょう。$\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n$ は、n を大きくすると e^r に近づきました。上の式は、この r のところに $j\theta$ を入れたものです。そこで、この行き着く先を $e^{j\theta}$ と書くことにします。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

これを**オイラーの公式**といいます。$e^{j\theta}$ は「e を $j\theta$ 回かけた数」ではありません。「$1+\dfrac{j\theta}{n}$ という、ほんの少しだけ回す数を、何回もかけた行き着く先」で、それは**単位円の上の、角 θ の点**です。

> **せいかくに言うと**
>
> 5-14 までの e^x は、x が実数のときの関数でした。x が複素数のときの e^x は、まだ決めていなかったので、ここで $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ と**決めた**（定義した）のです。好きに決めてよいなら、なぜこう決めるのでしょう。それは、こう決めると、指数関数のきまり（$e^ae^b=e^{a+b}$、$(e^{at})'=ae^{at}$、テイラー展開）が、そのまま成り立つからです。このあとの③④⑤で、1 つずつ確かめます。

2 回る矢印と、その影

θ のかわりに ωt（ω は角速度〔rad/s〕、4-8）を入れると、

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$

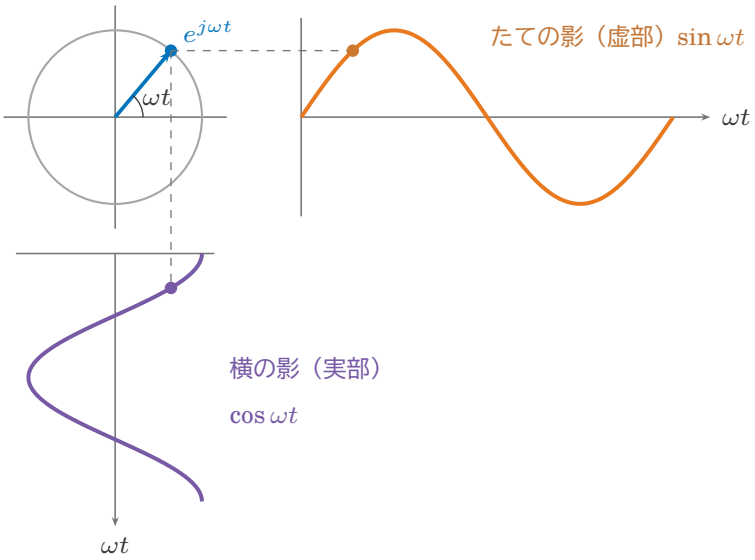


図 4　回る矢印 $e^{j\omega t}$（青）。たての位置（虚部）は sin の波（右）、横の位置（実部）は cos の波（下。時間は下へ進む）になる。

t がふえると、点 $e^{j\omega t}$ は、単位円の上を 1 秒に ω ラジアンずつ、左回りに回ります。4-8 で、回る点の影が波になることを学びました。ここでも同じです。

- 横の位置（実部）は $\cos\omega t$。真上から光を当てたときの、床の影です。

● たての位置（虚部）は $\sin \omega t$。真横から光を当てたときの、かべの影です。

1 つの $e^{j\omega t}$ の中に、cos の波と sin の波が、両方入っているのです。矢印をあつかうほうが、波を 2 本あつかうより楽になることが多い。これが、電気の技術者が $e^{j\omega t}$ を使うわけです（⑨⑩でくわしく）。

手でわかる 微分して確かめる ★★★★

③ e^{jt} を微分すると：速度は、位置を 90° 回したもの

①とは別の道から、オイラーの公式にたどり着いてみます。手がかりは、5-14 の微分のきまり $(e^{at})' = ae^{at}$ です。このきまりが $a = j$ でも成り立つとしたら、$z = e^{jt}$ はどんな動きをするでしょう。

1. $a = j$ を入れると、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = je^{jt} = jz$。$z$ を位置と見ると、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ は速度です（5-5）。だから「**速度＝位置に j をかけたもの**」。
2. j をかけると、矢印は長さを変えずに、左回りに 90° 回ります（6-9）。だから速度の矢印は、位置の矢印と**同じ長さで、90° 回った向き**です。
3. はじめ（$t = 0$）は $e^0 = 1$ なので、点は 1 から出発します。位置の矢印の長さは 1、速度の長さも 1 です。
4. 速度がいつも半径に垂直なので、点は原点からの距離を変えずに、円をえがいて回ります（5-15 ①：円の上を回る点の速度は半径に垂直）。速さは 1 なので、t 秒で進む弧の長さは t、回る角は t ラジアンです（弧の長さ＝半径×角、4-2）。

だから、e^{jt} は「単位円の上の角 t の点」、つまり $\cos t + j \sin t$ です。①と同じ答えにたどり着きました。

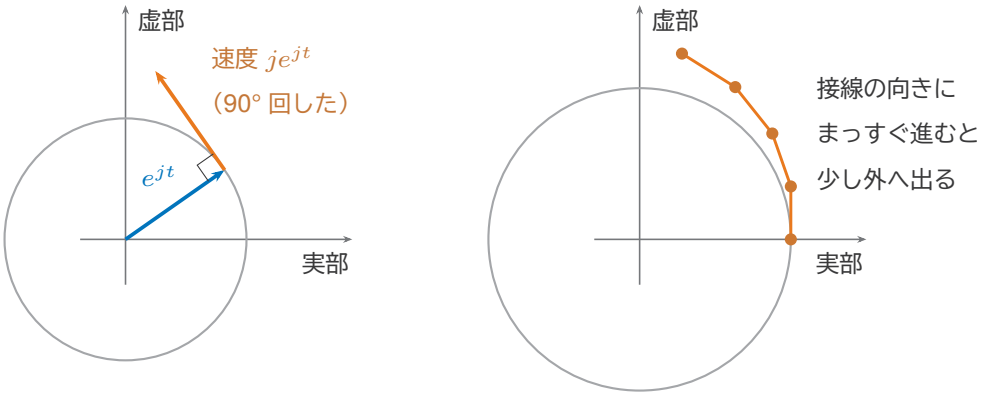


図 5　左：速度（オレンジ）は、位置（青）を 90° 回した向き。右：やってみようの計算は、「今の速度で、少しの時間まっすぐ進む」をくり返したもの（6-2 のオイラー法）。1 歩ごとに円の少し外へ出るので、点は少しずつふくらんだ。

やってみようは、オイラー法だった

やってみようの「$1+0.1j$ をかける」は、

$$\text{次の位置} = z + jz \times 0.1 \qquad \text{（今の位置＋今の速度}\times 0.1\text{）}$$

と同じです（$z(1+0.1j) = z + 0.1jz$）。これは、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = jz$ を、6-2 のオイラー法で $\Delta t = 0.1$ ずつ進めた計算です。6-2 で、ふつうのオイラー法でばねを動かすと、ゆれがふくらむことを見ました。ここで点が少しずつ外へ出たのも、同じ理由です。Δt を小さく（n を大きく）すると、ふくらみは小さくなり、点は円にそって回るようになります（①の表）。

逆向きに確かめる

$\cos t + j\sin t$ を微分して、本当に j 倍になるかを確かめます（5-15 の sin・cos の微分）。

$(\cos t + j\sin t)'$　　微分する（j は定数）

$= -\sin t + j\cos t$　　$(\cos t)' = -\sin t$、$(\sin t)' = \cos t$

一方、j をかけると、

$j(\cos t + j\sin t)$ j をかける

$= j\cos t + j^2 \sin t$ かっこを外す

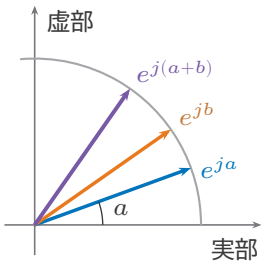
$= -\sin t + j\cos t$ $j^2 = -1$ を使い、実部を前に

2 つは同じです。$\cos t + j\sin t$ は、たしかに「微分すると自分の j 倍」で、$t = 0$ で 1 になります。5-14 のきまりが、e^{jt} でもそのまま成り立っています。

4 かけ算は「肩のたし算」

指数関数のいちばん大切なきまりは、$e^a e^b = e^{a+b}$（かけ算が、肩のたし算になる）でした（3-11・5-14）。$e^{j\theta}$ でも成り立つでしょうか。

図で e^{ja} は角 a、e^{jb} は角 b の、長さ 1 の矢印です。6-9 のきまり「かけ算は大きさをかけ、角をたす」から、$e^{ja} \times e^{jb}$ は、長さ $1 \times 1 = 1$、角 $a + b$ の矢印。これは $e^{j(a+b)}$ です。



$$e^{ja}\, e^{jb} = e^{j(a+b)}$$

式で

左のかけ算を、オイラーの公式で書いて広げます。

$$e^{ja}e^{jb} = (\cos a + j\sin a)(\cos b + j\sin b)$$ オイラーの公式

$$= \cos a\cos b + j\cos a\sin b + j\sin a\cos b + j^2\sin a\sin b$$ 展開する

$$= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + j(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$$ $j^2 = -1$、実部と虚部に分ける

$$= \cos(a+b) + j\sin(a+b)$$ 4-9 の加法定理

$$= e^{j(a+b)}$$ オイラーの公式

実部が cos の加法定理、虚部が sin の加法定理になりました。4-9 で苦労して作った 2 つの加法定理が、「肩のたし算」という 1 つのきまりにまとまっています。逆に言えば、加法定理を忘れても、$e^{ja}e^{jb} = e^{j(a+b)}$ を広げれば、いつでも作れます。

マイナスの角：$e^{-j\theta}$

θ に $-\theta$ を入れると、$\cos(-\theta) = \cos\theta$、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$（4-8）なので、

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

これは $e^{j\theta}$ を横軸で裏返した点、つまり共役 $\overline{e^{j\theta}}$ です（6-9）。右回りに θ だけ回した点です。また、肩のたし算から $e^{j\theta}e^{-j\theta} = e^0 = 1$ なので、$e^{-j\theta} = \dfrac{1}{e^{j\theta}}$ にもなっています。

ここまでで十分

$e^{j\theta}$ は単位円の上の角 θ の点。かけると θ 回る。

∂ 式でわかる テイラー展開・極形式・交流 ★★★★★

5 3つめの道：テイラー展開

5-17 のもっと知りたいでは、e^x のテイラー展開の x に $j\theta$ を入れて、オイラーの公式を作りました。もう一度、1 行ずつ見てみましょう。まず、j のべきは 4 つごとにくり返します（6-8）。

n	0	1	2	3	4	5	6	7
j^n	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$ に $x = j\theta$ を入れます。$(j\theta)^n = j^n\theta^n$ なので、表の j^n を使って、

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

j のつかない項と、j のつく項に分けると、

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

前のかっこは $\cos\theta$、後のかっこは $\sin\theta$ の展開そのものです（5-17 ⑤）。

数で確かめる（$\theta = 1$）

項を 1 つずつたしていくと、次のようになります（小数第 4 位まで）。

たした項	1	j	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{j}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{j}{120}$	$-\frac{1}{720}$
実部の合計	1	1	0.5	0.5	0.5417	0.5417	0.5403
虚部の合計	0	1	1	0.8333	0.8333	0.8417	0.8417

表 2　$\cos 1 = 0.5403$、$\sin 1 = 0.8415$ に近づく。①の表の行き着く先と同じ点。

①（小さな回転のくり返し）、③（微分）、⑤（テイラー展開）。3 つのちがう道が、すべて同じ $\cos\theta + j\sin\theta$ にたどり着きました。$e^{j\theta}$ をこう決めることが、とても自然だと分かります。

6 特別な角と、$e^{j\pi} = -1$

よく使う角の $e^{j\theta}$ を、表にします。単位円の上の点を読めば、すぐに分かります。

θ	(度)	$e^{j\theta}$	θ	(度)	$e^{j\theta}$
0	$0°$	1	$\frac{\pi}{2}$	$90°$	j
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$	π	$180°$	-1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$	$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	$-j$
			2π	$360°$	1

- $e^{j\pi/2} = j$：90° 回す数は j（6-8 で j を「90° 回す数」として作ったことと合う）。
- $e^{j\pi} = -1$：180° 回すと反対向き（2-2 の「$\times(-1)$ で向きが反対」）。
- $e^{j2\pi} = 1$：1 周回ると、もとにもどる。だから $e^{j(\theta+2\pi)} = e^{j\theta}e^{j2\pi} = e^{j\theta}$。$e^{j\theta}$ は、周期 2π でくり返します。

とくに $e^{j\pi} = -1$ を書きかえた

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

は**オイラーの等式**とよばれます。自然対数の底 e、円周率 π、2 乗して -1 の j、そして 1 と 0。べつべつの所から生まれた数が、1 本の式にならんでいます。オイラーは、1748 年の本『無限解析入門』で、もとになる公式を書きました。

Python で確かめる

Python では、j を `1j` と書きます（6-8）。`cmath` という道具で、複素数の e^z を計算できます。

Python

```
import cmath, math
print(cmath.exp(1j*math.pi/3))   # e の j×π/3 乗
print(cmath.exp(1j*math.pi))     # e の j×π 乗
```

実行結果

```
(0.5000000000000001+0.8660254037844386j)
(-1+1.2246467991473532e-16j)
```

1 行めは $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$（$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866\cdots$）です。2 行めの 1.22e-16 は 1.22×10^{-16} のことで、コンピュータの丸めのずれ（2-19）です。本当は 0 なので、$e^{j\pi}=-1$ です。

⑦ 極形式 $re^{j\theta}$：かけ算・わり算・べき

6-9 では、複素数を極形式 $z=r(\cos\theta+j\sin\theta)$ で書きました（$r=|z|$、$\theta=\arg z$）。かっこの中はオイラーの公式そのものなので、

$$z=r(\cos\theta+j\sin\theta)=re^{j\theta}$$

と短く書けます。この書き方だと、6-9 のきまりが、指数法則（3-11）としてそのまま出てきます。

計算	$re^{j\theta}$ で書くと	読み方
かけ算	$r_1e^{j\theta_1}\times r_2e^{j\theta_2}=r_1r_2\,e^{j(\theta_1+\theta_2)}$	大きさはかけ算、角はたし算
わり算	$\frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\,e^{j(\theta_1-\theta_2)}$	大きさはわり算、角はひき算
べき	$\left(re^{j\theta}\right)^n=r^n\,e^{jn\theta}$	大きさは n 乗、角は n 倍

表 3　6-9 のきまりは、$e^ae^b=e^{a+b}$、$\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$、$(e^a)^n=e^{na}$ と同じ形。

べきの行で $r=1$ にしたものが、6-9 のド・モアブルの定理です。

$$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$$

例： $(1+j)^8$

$1+j$ は、大きさ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$、角 $\dfrac{\pi}{4}$（45°）なので、$1+j=\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$。

$$(1+j)^8=\left(\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}\right)^8$$ 極形式に直す

$$=(\sqrt{2})^8\,e^{j\,8\times\pi/4}$$ 大きさは 8 乗、角は 8 倍

$$=16\,e^{j2\pi}$$ $(\sqrt{2})^8=2^4=16$

$$=16$$ $e^{j2\pi}=1$（1 周）

$(1+j)$ を 8 回かけて展開するより、ずっと楽です。

もっと知りたい ★★★★★

3 倍角の式を、オイラーの公式で作る

ド・モアブルの定理（上の表のべきの行で $r=1$）で $n=3$ とすると、

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + j\sin 3\theta$$

左を、$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$（3-8）で展開します。$j^2=-1$、$j^3=-j$ を使うと、

$$\cos^3\theta + 3j\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - j\sin^3\theta$$

実部どうしを等しいとおき、$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$（4-8）を使うと、

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\theta = 60°$ で確かめると、左は $\cos 180° = -1$、右は $4\times\frac{1}{8} - 3\times\frac{1}{2} = -1$。合っています。覚えにくい公式も、オイラーの公式から作れます。

8 cos と sin を、$e^{j\theta}$ で書く

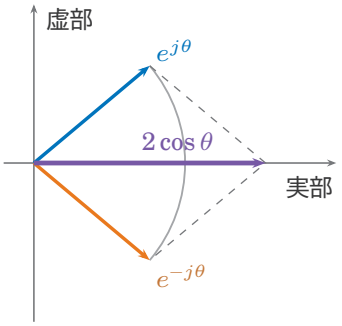
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ と、④の $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$ を、たしたり、ひいたりします。

たす　$j\sin\theta$ が打ち消しあって、

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$$

ひく　$\cos\theta$ が打ち消しあって、

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$$



それぞれ 2 と $2j$ でわると、

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

図で見ると、左回りに回る矢印 $e^{j\theta}$ と、右回りに回る矢印 $e^{-j\theta}$ は、いつも横軸について対称です。2 本をたすと、たての成分が打ち消しあい、和は横軸の上だ

けを行ったり来たりします。「**反対向きに回る 2 本の矢印をたすと、まっすぐゆれる**」。$\cos\theta$ の波は、2 つの回転の和だったのです。この見方は、9-3 のフーリエ級数で大活躍します。また、6-11 の双曲線関数は、この式の $j\theta$ を x にかえた形から生まれます。

$\theta = \frac{\pi}{3}$ で確かめる

⑥の表から $e^{j\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$、$e^{-j\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$（共役）。たすと 1 なので、$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$。ひくと $\sqrt{3}\,j$ なので、$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\,j}{2j} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。どちらも合っています。

9 交流は回る矢印：フェーザ

家のコンセントの電圧は、$V_0\sin(\omega t + \phi)$ の形の交流です（5-15。V_0 は振幅〔V〕、ϕ は初期位相）。これを、回る矢印の影として見ます。

1. 長さ V_0、角 ϕ の矢印 $V_0e^{j\phi}$ を用意する。
2. この矢印を、角速度 ω で回す。t 秒後には $V_0e^{j\phi} \times e^{j\omega t} = V_0e^{j(\omega t+\phi)}$（肩のたし算）。
3. そのたての影（虚部）が、$V_0\sin(\omega t + \phi)$。

①の矢印 $V_0e^{j\phi}$ を、交流の**フェーザ**といいます。長さが振幅、角が初期位相を表します。「回り始める前の矢印」なので、時間 t が入っていません。

同じ速さで回る矢印は、たし算できる

同じ ω の交流が 2 つあるとき、2 本の矢印は同じ速さで回るので、2 本のあいだの角は変わりません。2 本をたした矢印も、形を変えずに同じ速さで回ります。影は、矢印のたし算と同じようにたし算になる（たての成分どうしをたすだけ）ので、

> 同じ ω の波のたし算は、フェーザ（矢印）のたし算で計算できる

4-9 のやってみようを、矢印で解く

4-9 では、$\sin\theta + \sin(\theta + 60°)$ を加法定理と合成で計算しました。矢印でやってみます。

1. $\sin\theta$ のフェーザは、長さ 1、角 0 の矢印：1。
2. $\sin(\theta + 60°)$ のフェーザは、長さ 1、角 60° の矢印：$e^{j\pi/3} = 0.5 + 0.866j$。
3. たす：$1 + (0.5 + 0.866j) = 1.5 + 0.866j$。
4. 大きさは $\sqrt{1.5^2 + 0.866^2} = \sqrt{2.25 + 0.75} = \sqrt{3} \approx 1.73$。
5. 角は $\tan^{-1}\dfrac{0.866}{1.5} = \tan^{-1} 0.577 = 30°$（右上の点）。

だから $\sin\theta + \sin(\theta + 60°) = \sqrt{3}\,\sin(\theta + 30°)$。4-9 と同じ答えが、加法定理を使わずに、矢印のたし算だけで出ました。

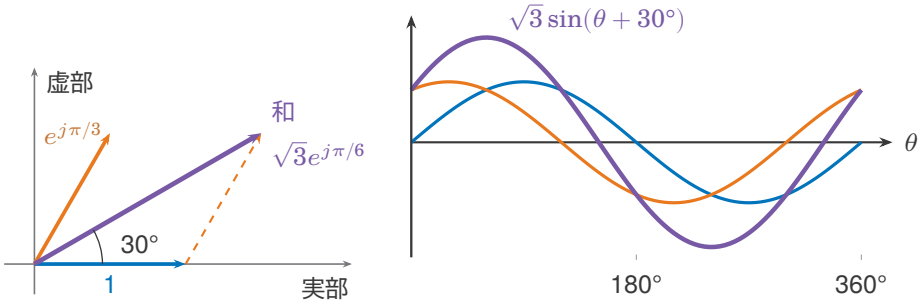


図 6　左：フェーザのたし算。オレンジの矢印を青の矢印の先へ平行に移す（点線）と、和（むらさき）の先に届く。右：青 $\sin\theta$ とオレンジ $\sin(\theta + 60°)$ の和が、むらさきの波 $\sqrt{3}\sin(\theta + 30°)$。

> **せいかくに言うと**
>
> ここでは、矢印のたての影（虚部）で sin を表しました。電気の本や、6-13 では、横の影（実部）で cos を表す約束を使うことが多いです。どちらの影を使っても、「同じ ω の波のたし算は、矢印のたし算」というきまりは同じです。ただし、1 つの計算の中では、どちらか一方に決めて使います。

三相交流：3 本の矢印の和は 0

4-9 で、山の位置が 120° ずつずれた 3 つの交流（三相交流）の和は、いつも 0 になることを、加法定理で確かめました。フェーザなら、長さ 1 で、角が 0、−120°、−240° の 3 本の矢印です。

$$1 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}$$

3 本のフェーザのたし算

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$$

オイラーの公式（−240° は 120° と同じ位置）

$$= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)j = 0$$

実部どうし、虚部どうしをたす

矢印を先から先へつないでいくと、正三角形ができて、もとの点にもどります。和の矢印が 0 なので、その影（3 つの電圧の和）も、いつでも 0 です。

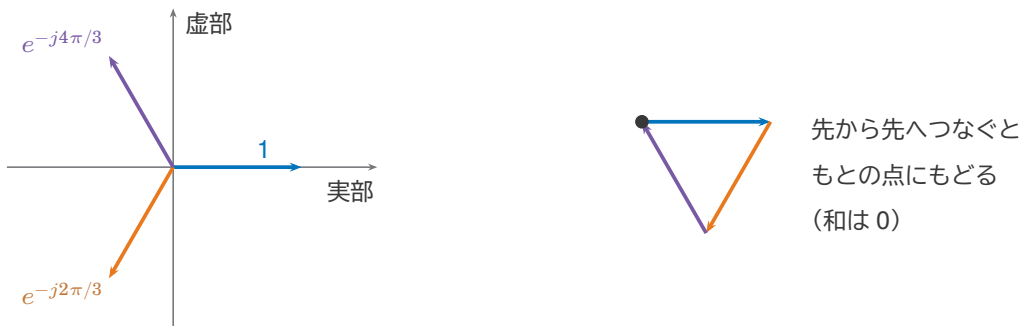


図 7　三相交流のフェーザ。左：120° ずつずれた 3 本の矢印。右：つなぐと正三角形になり、和は 0。

⑩ 微分は「$j\omega$ をかける」こと

$e^{j\omega t}$ を微分します。5-14 のきまり $(e^{at})' = ae^{at}$ で $a = j\omega$ とすると（③で、e^{jt} でも成り立つことを確かめた）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t} = j\omega\, e^{j\omega t}$$

回る矢印を微分すると、$j\omega$ がかかります。$j\omega$ は「大きさ ω、角 90°」の数（$j\omega = \omega e^{j\pi/2}$）なので、

微分すると、矢印は ω 倍の長さになり、90° 先へ進む

微分を、かけ算 1 回におきかえられるのです。

計算	矢印にかける数	意味
微分	$j\omega$	ω 倍し、90° 進める
2 回微分	$(j\omega)^2 = -\omega^2$	ω^2 倍し、180°（向きが反対）
積分	$\dfrac{1}{j\omega} = -\dfrac{j}{\omega}$	$\dfrac{1}{\omega}$ 倍し、90° おくらせる

表 4　2 回微分の行は、5-15・5-18 の「2 回微分すると、もとの $-\omega^2$ 倍」と同じ。

積分の行の $\dfrac{1}{j} = -j$ は、分母と分子に j をかけて、$\dfrac{j}{j^2} = \dfrac{j}{-1} = -j$（6-8）。$-j$ をかけると、右回りに 90° 回ります。

コンデンサーの電流は、電圧より 90° 進む

コンデンサーにたまる電気の量 q〔C〕は、電圧 v〔V〕に比例します（$q = Cv$。C〔F〕は静電容量）。電流 i〔A〕は、q の変わる速さです（6-4）。だから

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

電圧が $v = V_0 \sin\omega t$ なら、そのフェーザは V_0（角 0 の矢印）。微分は $j\omega$ をかけることなので、電流のフェーザは

$$j\omega C \times V_0 = \omega C V_0\, e^{j\pi/2}$$

長さ $\omega C V_0$、角 90° の矢印です。たての影をとると、

$$i = \omega C V_0 \sin(\omega t + 90°) = \omega C V_0 \cos \omega t$$

電流は電圧より 90°、つまり $\frac{1}{4}$ 周期先に進みます。5-15 で「位相のずれ (6-10)」と予告したことが、矢印 1 本で説明できました。

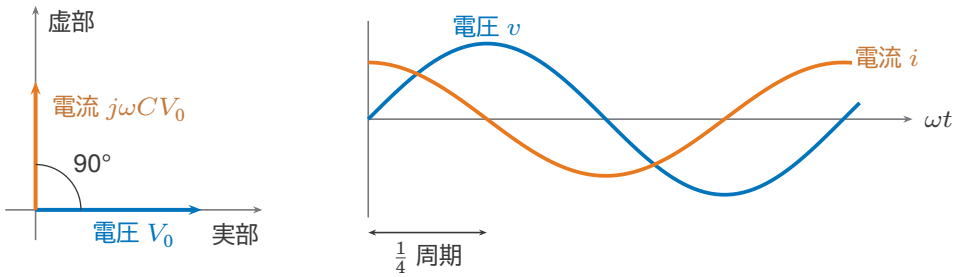


図 8　コンデンサーの電圧と電流。左：フェーザ。電流の矢印は、電圧の矢印より 90° 先にある。右：電流の山（オレンジ）は、電圧の山（青）より $\frac{1}{4}$ 周期早く来る。

コイルでは、電流が電圧より 90° おくれる

コイル（インダクタンス L〔H〕）の電圧は、電流の変わる速さに比例します（$v = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$。6-4）。電流が $I_0 \sin \omega t$ なら、電圧のフェーザは $j\omega L \times I_0$。電圧が電流より 90° 進む、言いかえると、電流が電圧より 90° おくれます。

抵抗の $v = Ri$ と同じように、「電圧＝（かける数）×電流」の形にそろえてみます。この「かける数」を**インピーダンス**といいます。

- コイル：電圧のフェーザ＝ $j\omega L$ ×電流のフェーザ。かける数は $j\omega L$。
- コンデンサー：上の式は「電流＝ $j\omega C$ ×電圧」でした。両辺を $j\omega C$ でわって「電圧＝ $\dfrac{1}{j\omega C}$ ×電流」。かける数は $\dfrac{1}{j\omega C}$。

コンデンサーの $j\omega C$ は「電圧から電流を求める数」、$\dfrac{1}{j\omega C}$ は「電流から電圧を求める数」で、向きが逆です。電圧と電流のどちらから求めるかを、いつも決めてから使いましょう。インピーダンス $j\omega L \cdot \dfrac{1}{j\omega C}$ を使って共振を調べるのが 6-13 です。

⑪ 肩に実部もあると：$e^{(\sigma+j\omega)t}$ はらせん

肩が $(\sigma + j\omega)t$（σ はシグマと読む実数）のときは、肩のたし算を逆に使って 2 つに分けます。

$$e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} \times e^{j\omega t}$$

$e^{j\omega t}$ は長さ 1 で回る矢印、$e^{\sigma t}$ は実数で、矢印の長さを決めます。だから、この点は**回りながら、長さが $e^{\sigma t}$ で変わる**、つまり、らせんをえがきます。

- $\sigma < 0$：長さがへっていく（5-14 の $e^{-t/\tau}$）。内向きのらせん。
- $\sigma = 0$：長さ 1 のまま。円。
- $\sigma > 0$：長さがふえていく。外向きのらせん。

横の影（実部）は $e^{\sigma t}\cos\omega t$ です。$\sigma < 0$ なら、「ゆれながら、だんだん小さくなる」波になります。5-18 で「ゆれながら止まる動きは、e^{at} と sin・cos のかけ算」と書いたのは、らせんの影だったからです。

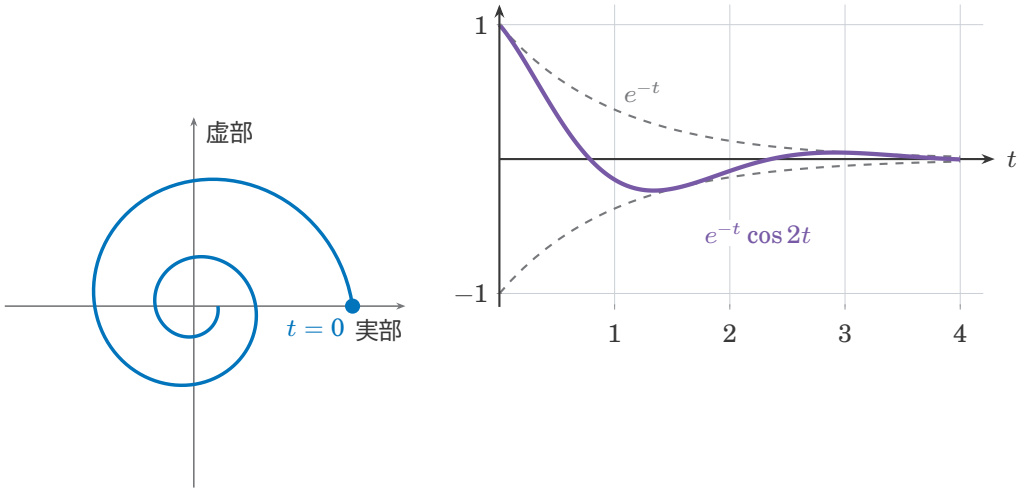


図 9 左：$\sigma < 0$ のときの $e^{(\sigma+j\omega)t}$ は、内向きのらせん。右：$e^{(-1+2j)t}$ の実部 $e^{-t}\cos 2t$（むらさき）。山の高さは点線 e^{-t} にそってへる。

3-10 の車の式とのつながり

3-10 では、車のばねとダンパーの式から、特性方程式 $s^2+2s+5=0$ が出てきました。6-8 で解くと $s=-1\pm 2j$ でした。$s=-1+2j$ なら、$e^{st}=e^{(-1+2j)t}$ の実部は $e^{-t}\cos 2t$ で、図の右のグラフです。「判別式が負なら、ゆれながらもどる」（3-10）のは、解が $\sigma+j\omega$ の形の複素数になり、e^{st} がらせんになるからです。くわしくは 6-12 で解きます。

専門書をのぞいてみよう　電気回路の教科書ふうの書き方

正弦波交流 $v(t)=\sqrt{2}\,V\sin(\omega t+\phi)$ を、フェーザ $\dot{V}=Ve^{j\phi}$ で表す。$v(t)$ の微分は $\dot{V}$ に $j\omega$ を乗ずることに、積分は $j\omega$ で除することに対応する。

訳　$\sqrt{2}\,V$ が振幅（山の高さ）。V は実効値（5-15。振幅を $\sqrt{2}$ でわった値）。日本の電気の本では、フェーザの大きさに実効値を使い、$\dot{V}$（ブイ・ドット）と書くことが多い。「乗ずる」はかける、「除する」はわる。電気の本では、$\dot{V}=V\angle\phi$ と書くこともある（6-9）。

この章で出てきたことば

オイラーの公式　$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$。指数関数と三角関数をつなぐ式。

オイラーの等式　$e^{j\pi}+1=0$。オイラーの公式で $\theta=\pi$ としたもの。

フェーザ　交流を表す、回り始める前の矢印（複素数）。長さが振幅、角が初期位相。

位相のずれ　2 つの波の山の位置のずれを、角で表したもの。フェーザでは、2 本の矢印のあいだの角。

たいせつ

オイラーの公式	$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$（単位円の上の角 θ の点）
肩のたし算	$e^{ja}e^{jb} = e^{j(a+b)}$。$re^{j\theta}$ は大きさをかけ、角をたす
cos と sin	$\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$　$\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$
交流の合成	同じ ω の波のたし算は、フェーザのたし算
微分	$e^{j\omega t}$ の微分は、$j\omega$ をかける（ω 倍して 90° 進める）

記号カード　初めて出た章 6-10

$e^{j\theta}$

読み方 イー・ジェイ・シータ（e の $j\theta$ 乗）
意味 単位円の上の角 θ の点。$\cos\theta + j\sin\theta$
英語 complex exponential

記号カード　初めて出た章 6-10

$j\omega$

読み方 ジェイ・オメガ
意味 $e^{j\omega t}$ を微分すると前に出る数。かけると ω 倍し 90° 進める
英語 j-omega

コラム　オイラーという人

レオンハルト・オイラー（1707～1783 年）は、スイスのバーゼルに生まれ、ロシアのサンクトペテルブルクとドイツのベルリンで研究した数学者です。e、π、$f(x)$、$\sum$ などの記号を広めたのもオイラーです。後の人生では、ほとんど目が見えなくなりましたが、計算を頭の中で進め、人に書きとってもらって、研究を続けました。一生のあいだに書いた論文や本は、800 をこえます。6-2 のオイラー法も、この章のオイラーの公式も、同じオイラーの仕事です。

例題でたしかめよう

例題 1　$e^{j\theta}$ を $a+bj$ に直す

次の数を $a+bj$ の形に直しましょう。

(1) $e^{j\pi/3}$　(2) $e^{j3\pi/4}$　(3) $4e^{-j\pi/2}$

考え方　オイラーの公式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ に入れる。角は単位円の上で読む（ラジアンを度に直すと分かりやすい：π rad が 180°）。マイナスの角は右回り。

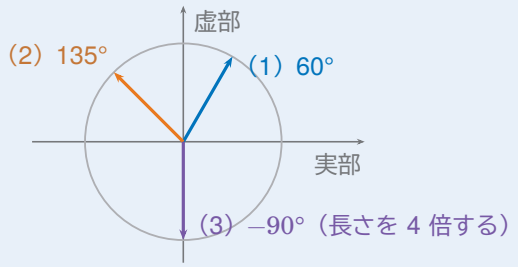
式　(1) $\dfrac{\pi}{3}$ は 60°。$\cos 60°+j\sin 60°=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$

(2) $\dfrac{3\pi}{4}$ は 135°（左上）。横は負、たては正。$\cos 135°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$\sin 135°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $-\dfrac{\pi}{2}$ は、右回りに 90°（真下）。

$e^{-j\pi/2}=\cos(-90°)+j\sin(-90°)=0-j=-j$

4 倍して $4\times(-j)=-4j$



答え　(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$　(2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}j$　(3) $-4j$

じぶんでとこう 1

次の数を $a+bj$ の形に直しましょう。

(1) $e^{j\pi/6}$　(2) $e^{j2\pi/3}$　(3) $2e^{-j\pi}$

例題 2　$a+bj$ を $re^{j\theta}$ に直す

次の数を $re^{j\theta}$ の形に直しましょう（$-\pi < \theta \leqq \pi$）。

（1）$-1+\sqrt{3}\,j$　（2）$1-j$

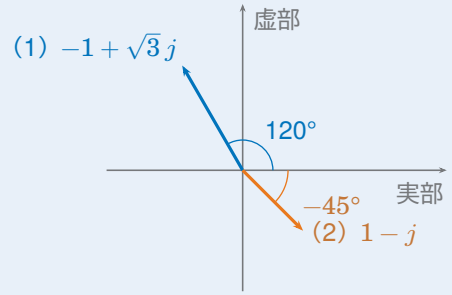
考え方　r は原点からの距離（三平方）。θ は、点がどの区画にあるかを図でたしかめてから決める（6-9）。

式　（1）$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$

$\cos\theta=\dfrac{-1}{2}$、$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。左上の点なので $\theta=120°=\dfrac{2\pi}{3}$

（2）$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。右下の点なので $\theta=-45°=-\dfrac{\pi}{4}$



答え　（1）$2e^{j2\pi/3}$　（2）$\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}$

じぶんでとこう 2

次の数を $re^{j\theta}$ の形に直しましょう（$-\pi < \theta \leqq \pi$）。

（1）$\sqrt{3}-j$　（2）$-2+2j$

例題 3　極形式のかけ算・わり算

次の計算をし、答えを $re^{j\theta}$ と $a+bj$ の両方で書きましょう。

(1) $2e^{j\pi/6} \times 3e^{j\pi/3}$　(2) $\dfrac{6e^{j\pi/2}}{2e^{j\pi/6}}$

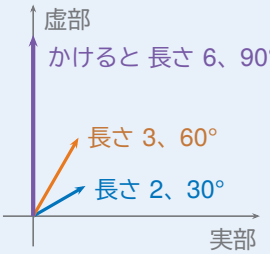
考え方　かけ算は大きさをかけて角（肩）をたす。わり算は大きさをわって角をひく（⑦の表）。

式　(1) 大きさ $2\times3=6$。角 $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$

$$6e^{j\pi/2}=6(\cos 90^\circ+j\sin 90^\circ)=6j$$

(2) 大きさ $6\div2=3$。角 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

$$3e^{j\pi/3}=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}j$$



答え　(1) $6e^{j\pi/2}=6j$　(2) $3e^{j\pi/3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}j$

じぶんでとこう 3

次の計算をし、$re^{j\theta}$ と $a+bj$ の両方で書きましょう。

(1) $4e^{j\pi/12} \times 2e^{j\pi/4}$　(2) $\dfrac{10e^{j5\pi/6}}{5e^{j\pi/2}}$

例題 4　べきを計算する

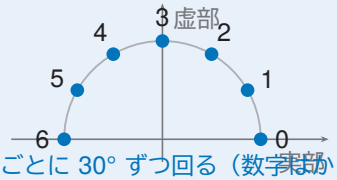
$(\sqrt{3}+j)^6$ を計算しましょう。

考え方　6 回かけて展開するのは大変。極形式に直してから、大きさを 6 乗、角を 6 倍する（⑦）。

式　$\sqrt{3}+j$ の大きさは $\sqrt{3+1}=2$。右上の点で $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので角は $\dfrac{\pi}{6}$ $(30°)$

$$(\sqrt{3}+j)^6=\left(2e^{j\pi/6}\right)^6=2^6\,e^{j6\times\pi/6}=64\,e^{j\pi}$$

$e^{j\pi}=-1$ なので $64\times(-1)$



1 回かけるごとに 30° ずつ回る（数字は かけた回数）

答え　-64

じぶんでとこう 4

$(1-j)^4$ を計算しましょう。

例題 5　cos・sin を $e^{j\theta}$ で計算する

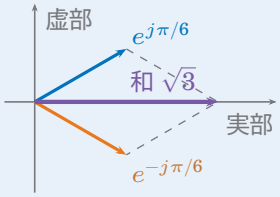
$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき、$\dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ と $\dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ を計算し、$\cos\dfrac{\pi}{6}$、$\sin\dfrac{\pi}{6}$ と同じになることを確かめましょう。

考え方　$e^{j\pi/6}$ を $a + bj$ に直し、$e^{-j\pi/6}$ はその共役（虚部の符号を反対に）にする（④）。

式　$e^{j\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}j$、$e^{-j\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}j$

たす：$\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$（虚部は打ち消しあう）。2 でわって $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ひく：$\dfrac{1}{2}j - \left(-\dfrac{1}{2}j\right) = j$（実部は打ち消しあう）。$2j$ でわって $\dfrac{j}{2j} = \dfrac{1}{2}$



答え　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $\dfrac{1}{2}$。$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ と同じ

じぶんでとこう 5

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ と $\dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ を計算しましょう。

例題 6　交流の電圧をフェーザでたす

2 つの交流の電源を直列につなぎました。電圧は $v_1 = 100\sin\omega t$〔V〕と $v_2 = 100\sin(\omega t + 60°)$〔V〕です。合計の電圧を、1 つの sin の形で表しましょう。

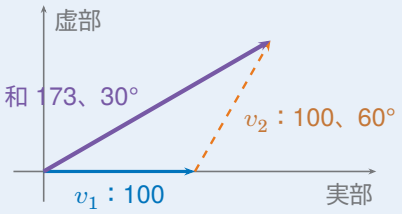
考え方　同じ ω なので、フェーザ（長さ＝振幅、角＝初期位相）をたし、和の矢印の長さと角を読む（⑨）。

式　v_1 のフェーザ：100。v_2 のフェーザ：$100e^{j\pi/3} = 50 + 86.6j$

和：$100 + 50 + 86.6j = 150 + 86.6j$

大きさ：$\sqrt{150^2 + 86.6^2} = \sqrt{22500 + 7500} = \sqrt{30000} \approx 173$

角：$\tan^{-1}\dfrac{86.6}{150} = \tan^{-1} 0.577 = 30°$（右上の点）



答え　$v_1 + v_2 \approx 173\sin(\omega t + 30°)$〔V〕（山の位置が 60° ずれているので、振幅は 200 ではない）

じぶんでとこう 6

$v_1 = 100\sin\omega t$〔V〕と $v_2 = 100\sin(\omega t + 120°)$〔V〕の和を、1 つの sin の形で表しましょう。

例題 7　sin と cos の和をフェーザで

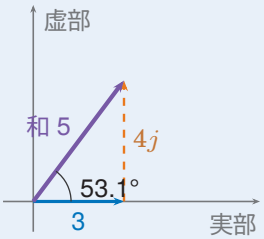
$3\sin\omega t + 4\cos\omega t$ を、1 つの sin の形で表しましょう（4-9 の例題と同じ数）。

考え方　$\cos\omega t = \sin(\omega t + 90°)$（4-8）なので、$4\cos\omega t$ のフェーザは長さ 4、角 90° の矢印 $4j$。

式　フェーザ：3 と $4e^{j\pi/2} = 4j$。和は $3 + 4j$

大きさ：$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

角：$\tan^{-1}\dfrac{4}{3} \approx 53.1°$（右上の点）



答え　$5\sin(\omega t + 53.1°)$

じぶんでとこう 7

$4\sin\omega t + 3\cos\omega t$ を、1 つの sin の形で表しましょう。

例題 8　微分・積分を $j\omega$ で計算する

e^{j2t} を、1 回微分、2 回微分、積分（積分定数は考えない）しましょう。また、それぞれ、もとの矢印 e^{j2t} を何倍し、何度回したものかを答えましょう。

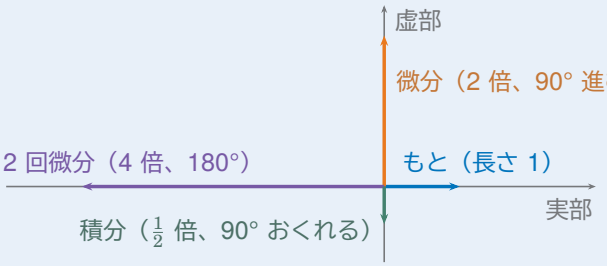
考え方　$\omega = 2$。微分は $j\omega = 2j$ をかける。積分は $j\omega$ でわる（⑩の表）。

式　微分：$2j\,e^{j2t}$。$2j = 2e^{j\pi/2}$ なので、2 倍して 90° 進めたもの

2 回微分：$(2j)^2 e^{j2t} = 4j^2 e^{j2t} = -4e^{j2t}$。4 倍して 180° 回したもの

積分：$\dfrac{e^{j2t}}{2j} = \dfrac{j}{2j^2}\,e^{j2t} = -\dfrac{j}{2}\,e^{j2t}$。$\dfrac{1}{2}$ 倍して 90° おくらせたもの

確かめ：$\left(-\dfrac{j}{2}e^{j2t}\right)' = -\dfrac{j}{2} \times 2j\,e^{j2t} = -j^2 e^{j2t} = e^{j2t}$



答え　微分 $2je^{j2t}$（2 倍、90° 進む）、2 回微分 $-4e^{j2t}$（4 倍、180°）、積分 $-\dfrac{j}{2}e^{j2t}$（$\dfrac{1}{2}$ 倍、90° おくれる）

じぶんでとこう 8

e^{j5t} を、1 回微分、2 回微分、積分（積分定数は考えない）しましょう。それぞれ何倍し、何度回したものですか。

例題 9　コンデンサーに流れる交流の電流

静電容量 $10\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 $50\,\mathrm{Hz}$ の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

考え方　電流のフェーザは、電圧のフェーザに $j\omega C$ をかけたもの（⑩）。$\omega = 2\pi f$（4-8）。

式　$\omega = 2\pi \times 50 = 2 \times 3.14 \times 50 = 314$〔rad/s〕

$C = 10\,\mu\mathrm{F} = 10 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{F}$

電流のフェーザ：$j\omega C \times 100 = j \times 314 \times 10^{-5} \times 100 = 0.314j$

長さ 0.314、角 90° の矢印

答え　振幅 約 0.31 A。電流は電圧より 90°（$\frac{1}{4}$ 周期）進む

じぶんでとこう 9

静電容量 $20\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 $60\,\mathrm{Hz}$ の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

例題 10　コイルに流れる交流の電流：インピーダンスでわる

インダクタンス 0.1 H のコイルに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 50 Hz の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

考え方　コイルは「電圧＝ $j\omega L$ ×電流」（⑩のインピーダンス）。電流を求めるので、電圧のフェーザを $j\omega L$ で**わる**。

式　$\omega = 2\pi \times 50 = 314$〔rad/s〕。$j\omega L = j \times 314 \times 0.1 = 31.4j$〔Ω〕

電流のフェーザ：$\dfrac{100}{31.4j} = \dfrac{100}{31.4} \times \dfrac{1}{j} = 3.18 \times (-j) = -3.18j$

（$\dfrac{1}{j} = -j$：⑩の表の下）。長さ 3.18、角 −90° の矢印

答え　振幅 約 3.2 A。電流は電圧より 90°（$\frac{1}{4}$ 周期）おくれる

じぶんでとこう 10

インダクタンス 0.2 H のコイルに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 60 Hz の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

例題 11　$e^{(\sigma+j\omega)t}$ の実部

$e^{(-1+2j)t}$ の実部を、t の式で書きましょう。また、$t=0$、$\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\pi}{2}$ のときの値を求めましょう（$e^{-\pi/2}=0.208$）。

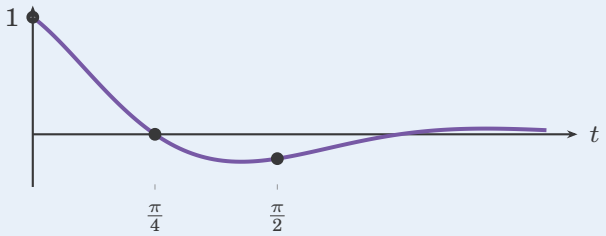
考え方　肩のたし算を逆に使って $e^{-t}\times e^{j2t}$ に分ける。e^{-t} は実数なので、実部は $e^{-t}\times\cos 2t$（⑪）。

式　$e^{(-1+2j)t}=e^{-t}e^{j2t}=e^{-t}(\cos 2t+j\sin 2t)$。実部は $e^{-t}\cos 2t$

$t=0$：$e^{0}\cos 0=1\times 1=1$

$t=\dfrac{\pi}{4}$：$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ なので 0

$t=\dfrac{\pi}{2}$：$e^{-\pi/2}\cos\pi=0.208\times(-1)=-0.208$



答え　$e^{-t}\cos 2t$。1、0、−0.208

じぶんでとこう 11

$e^{(-0.5+3j)t}$ の実部を t の式で書き、$t=0$、$\dfrac{\pi}{3}$ のときの値を求めましょう（$e^{-\pi/6}=0.592$）。

例題 12　オイラーの公式で 2 倍角の式を作る

$(e^{j\theta})^2 = e^{j2\theta}$ を使って、$\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ を、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表しましょう。

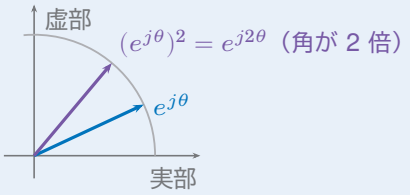
考え方　左は $(\cos\theta + j\sin\theta)^2$ を展開、右は $\cos 2\theta + j\sin 2\theta$。実部どうし、虚部どうしを等しいとおく（④と同じ）。

式　左：$(\cos\theta + j\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2j\sin\theta\cos\theta + j^2\sin^2\theta$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + j(2\sin\theta\cos\theta)$

右：$e^{j2\theta} = \cos 2\theta + j\sin 2\theta$

実部どうし・虚部どうしを等しいとおく



答え　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$、$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

じぶんでとこう 12

$e^{ja}e^{-jb} = e^{j(a-b)}$ を使って、$\cos(a-b)$ と $\sin(a-b)$ を、$\cos a$、$\sin a$、$\cos b$、$\sin b$ で表しましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

角を度のまま肩に入れる

× $e^{j60} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$

○ $e^{j\pi/3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$（60° は $\dfrac{\pi}{3}$ ラジアン）

$e^{j\theta}$ の θ はラジアンです。③で $(\cos t)' = -\sin t$ を使ったように、この公式は、ラジアンで書いた微分のきまり（5-15）から作ったからです。e^{j60} は、60 ラジアン（約 3438°）回した点になってしまいます。

まちがえやすいところ

$e^{j\theta}$ の大きさが、θ とともにふえると思う

× $|e^{j2}| = e^2 \approx 7.39$

○ $|e^{j2}| = \sqrt{\cos^2 2 + \sin^2 2} = 1$

$e^{j\theta}$ は、どんな θ でも単位円の上の点です（4-8 の $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$）。肩が実数の e^x とちがい、肩に j がつくと「ふえる」ではなく「回る」になります。

⚠ まちがえやすいところ

sin の式で、j でわるのを忘れる

✕ $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}$

○ $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

ひくと $2j\sin\theta$ が残るので、$2j$ でわります。$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で確かめると、$\dfrac{j-(-j)}{2} = j$ となって、$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ と合いません。

⚠ まちがえやすいところ

肩のたし算を、ふつうのたし算にする

✕ $e^{j(a+b)} = e^{ja} + e^{jb}$

○ $e^{j(a+b)} = e^{ja} \times e^{jb}$

肩（指数）がたし算のとき、本体はかけ算です（3-11 の $2^{3+2} = 2^3 \times 2^2$ と同じ）。$a = b = 0$ で確かめると、左は $e^0 = 1$、×の右は $1 + 1 = 2$ で合いません。

⚠ まちがえやすいところ

矢印のまま答える

✕ 電圧は $100e^{j\omega t}$〔V〕

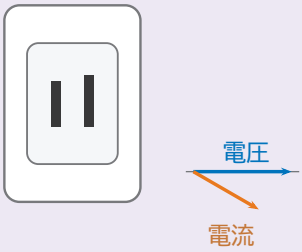
○ 電圧は $100\sin\omega t$〔V〕（矢印のたての影）

電圧計ではかれるのは実数です。矢印は計算の道具で、最後に決めたほうの影をとって答えます。

物理・工学ではこう使う

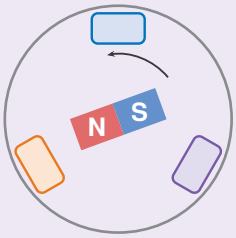
家のコンセントと交流の計算

日本の家のコンセントは、実効値 100 V（振幅は約 141 V）の交流です。周波数は、東日本が 50 Hz、西日本が 60 Hz です。モーター・照明・パソコンの電源などがつながると、電流と電圧の山の位置がずれます。電気の技術者は、電圧と電流をフェーザで表し、「矢印の図」（フェーザ図）をかいて、どれだけずれているか、どれだけの電力が使われるかを計算します。



物理・工学ではこう使う

三相交流の発電機

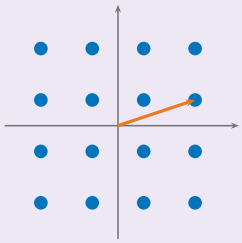


発電所の発電機では、まん中の磁石（電磁石）が回り、まわりに 120° ずつずらして置いた 3 組のコイルに、電圧が生まれます。3 つの電圧は、フェーザで書くと 120° ずつずれた 3 本の矢印で、その和は 0 です（⑨）。だから、3 つの負荷（電気を使う機械）が同じなら、もどりの電線を共通にしても、そこには電流がほとんど流れません。少ない電線で、大きな電力を送れます。

物理・工学ではこう使う

スマホの電波と、点の回転

スマホや Wi-Fi の電波は、「どれだけ強く、どの角だけずらして送るか」で情報を運びます。送る波を複素数（矢印）で表すと、送れる記号は、複素平面の上の点になります。たとえば 16 個の点を使えば、1 回に 4 ビット（$2^4 = 16$）の情報を送れます。受けとった側は、ずれて回ってしまった点に $e^{-j\theta}$ をかけて、角をもどしてから読みます。オイラーの公式は、ポケットの中でも毎秒たくさん使われています。



コラム　複素数は「計算の道具」だけ？

この章では、回る矢印（複素数）を、交流の計算を楽にする道具として使い、最後に影（実数）をとりました。電気・機械の工学では、これで正しい使い方です。ところが、原子や電子の世界を表す量子力学では、事情がちがいます。電子のふるまいを表す「波動関数」は、はじめから $e^{j\theta}$ をふくむ複素数の波で、その矢印の大きさの 2 乗が「そこに電子が見つかりやすさ」（確率）を表します。複素数そのものが、自然のしくみを表しているのです。くわしくは物理シリーズ『原子』で学びます。

章末問題

6-10 のまとめ

基本 ★★★★

1 次の数を $a+bj$ の形に直しましょう。

(1) $e^{j\pi/2}$　(2) $e^{j5\pi/6}$　(3) $2e^{-j\pi/3}$

2 次の数を $re^{j\theta}$ の形に直しましょう（$-\pi < \theta \leqq \pi$）。

(1) $1+j$　(2) $-\sqrt{3}+j$

3 次の計算をし、$a+bj$ の形で答えましょう。

(1) $4e^{j\pi/4} \times 0.5e^{j\pi/4}$　(2) $\dfrac{8e^{j\pi}}{2e^{j\pi/3}}$

4 $(1+\sqrt{3}\,j)^3$ を、極形式を使って計算しましょう。

5 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ と $\dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ を計算し、$\cos\dfrac{\pi}{2}$、$\sin\dfrac{\pi}{2}$ と同じになることを確かめましょう。

6 静電容量 $20\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 $50\,\mathrm{Hz}$ の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

7 e^{j3t} を、1 回微分、2 回微分、積分（積分定数は考えない）しましょう。それぞれ、もとの矢印を何倍し、何度回したものですか。

8 インダクタンス $0.05\,\mathrm{H}$ のコイルに、$v = 100\sin\omega t$〔V〕、周波数 $50\,\mathrm{Hz}$ の電圧をかけます。電流の振幅と、電圧とのずれを求めましょう（$\pi = 3.14$）。

チャレンジ ★★★★★

9 三相交流のフェーザ 1、$e^{j2\pi/3}$、$e^{j4\pi/3}$ を、それぞれ $a+bj$ に直してたし、和が 0 になることを確かめましょう。

10 $e^{(-0.5+2j)t}$ の実部を t の式で書き、$t=0$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$ のときの値を求めましょう（$e^{-\pi/4}=0.456$）。

11 $v_1=100\sin\omega t$〔V〕と $v_2=100\sin(\omega t-60°)$〔V〕の和を、フェーザを使って 1 つの sin の形で表しましょう（角がマイナスのフェーザは右回り）。

12 $100\sin\omega t+50\cos\omega t$ を、フェーザを使って、1 つの sin の形で表しましょう（$\tan^{-1}0.5=26.6°$）。

13 $e^{ja}e^{jb}=e^{j(a+b)}$ の両辺をオイラーの公式で書いて広げ、$\cos(a+b)$ と $\sin(a+b)$ の加法定理を作りましょう。また、$a=b=\theta$ とすると、2 倍角の式になることを確かめましょう。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ $e^{j\theta}$ が単位円の上の角 θ の点になるわけを、小さな回転のくり返しと微分で説明できる。 → 347 ページ
- ☐ $e^{j\theta}$ を $a+bj$ に直し、$re^{j\theta}$ のかけ算・わり算・べきを計算できる。 → 357 ページ
- ☐ フェーザのたし算で交流を合成し、微分が $j\omega$ をかけることだと説明できる。 → 360 ページ

ソラ

$e^{j\theta}$ は「回る」、e^{x} は「ふえる」。次の章では、cos のなかまの「ふえる版」、双曲線関数に出会うよ。

第 2 部　複素数と双曲線関数

★★★★~★★★★★

6-11 双曲線関数 cosh・sinh

道しるべ　この章の前に 5-14 5-17 5-18 6-3 6-5 6-10　この章の先に 6-12

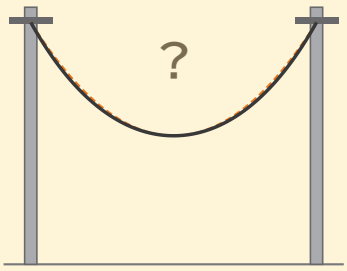
この章でできるようになること

- ★★★★ $\cosh x$・$\sinh x$・$\tanh x$ を e^x と e^{-x} で表し、値を求めて、グラフの形を説明できる。
- ★★★★ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と、cosh・sinh・tanh の微分のきまりを使える。
- ★★★★★ $y'' = a^2 y$ の答えを cosh・sinh で書き、空気の中の落下や、たるんだ電線の形に使える。

はてな？

電柱と電柱のあいだにかけた電線や、両手でつるしたネックレスは、なめらかにたるみます。その形は、3-9 で学んだ放物線にそっくりです。ガリレオも、1638 年の本で、つるしたくさりの形は放物線に近いと書きました。

ところが、くわしく調べると、この形は放物線ではありません。いったい、何という曲線なのでしょう。



6-10 で、$\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ という式を作りました。この章では、この式から j を外した形 $\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ を調べます。この関数が、たるんだくさりの形をえがき、空気の中を落ちるスカイダイバーの速さ（6-5）を表し、5-18 の「たおれる棒」の式もすっきり書けることを見ていきます。

この章も大学の内容です。「目でわかる」「手でわかる」の段だけでも、新しい関数の形と使い方がわかります。1 回で分からなくても大丈夫です。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 3-9 放物線 $y = ax^2$。
- 5-14 $(e^{ax})' = ae^{ax}$。$e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$。$e^{0} = 1$。
- 5-17 $e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$
- 5-18 $f'' = a^2 f$ の答えは $Ae^{at} + Be^{-at}$。たおれる棒 $\theta = 0.005(e^{2t} + e^{-2t})$。
- 6-3 つり橋のケーブルは、$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ が一定なので放物線。両はしの状態（境界条件）で数を決める。
- 6-4 変数分離：y をふくむ項を左に、t を右に集めて、両辺を積分する。
- 6-5 速さの 2 乗に比例する抵抗：$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv^2$。終端速度 $v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$。スカイダイバー（80 kg、$c = 0.26\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$）で $v_{\mathrm{t}} \approx 54.9\,\mathrm{m/s}$。
- 6-10 $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$、$\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$。

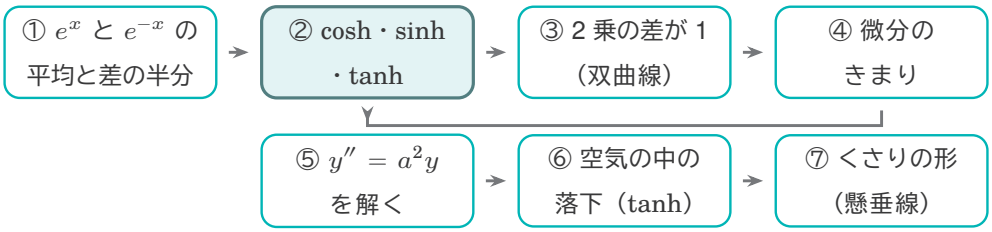


図 1 この章の道すじ。e^x と e^{-x} から新しい関数を作り、落下とくさりの形の 2 つの問題を解く。

やってみよう　ネックレスをつるして、形を写しとろう

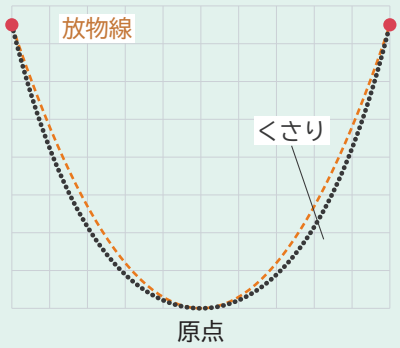
用意するもの

細いくさりのネックレス、方眼紙、コルクボード、がびょう 2 本

1. 方眼紙をコルクボードにはり、同じ高さに、20 cm はなしてがびょうを 2 本さす。
2. ネックレスをがびょうにかけて、いちばん下が、がびょうより 15 cm 下になるようにたらす。
3. いちばん下の点を原点にして、横に 2 cm ごとに、くさりの高さを読む。
4. 同じはばとたるみの放物線 $y = 0.15x^2$（$x = 10$ で 15）の値とくらべる。

横 x（cm）	くさり（cm）	放物線（cm）
0	0	0
2	0.4	0.6
4	1.8	2.4
6	4.3	5.4
8	8.5	9.6
10	15.0	15.0

表 1　ソラさんがはかった結果



はしと、いちばん下の点はそろえたのに、とちゅうでは、くさりのほうが放物線より最大 1 cm ほど低くなりました。くさりの形は、底のあたりが平らで、はしで急に立ち上がります。この形を式で表すのが、この章の目標の 1 つです。

数学の道具

目でわかる e^x と e^{-x} を組み合わせる ★★★★

1 ふえる e^x と、へる e^{-x}

e^x は右へ行くほどふえ、e^{-x} は右へ行くほどへります。e^{-x} のグラフは、e^x のグラフを、たての軸で折り返したものです（x を $-x$ にかえると、左右が入れかわる）。この 2 つから、新しい関数を 2 つ作ります。

- **平均** $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$（2 つの高さの、ちょうどまん中）
- **差の半分** $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

表で計算してみます（$e^1 = 2.718$、$e^{-1} = 0.368$ など）。

x	-2	-1	**0**	**1**	**2**
e^x	0.135	0.368	1	2.718	7.389
e^{-x}	7.389	2.718	1	0.368	0.135
平均 $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	3.762	1.543	1	1.543	3.762
差の半分 $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	-3.627	-1.175	0	1.175	3.627

表 2 平均は左右で同じ値。差の半分は、左右で符号だけが反対。

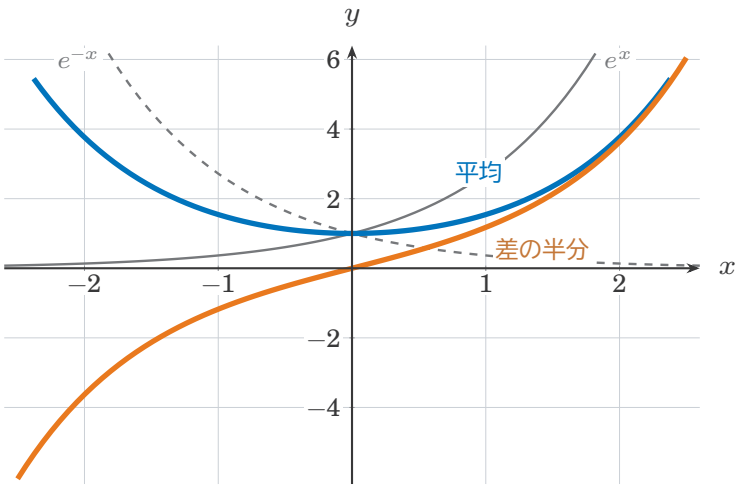


図 2　e^x と e^{-x}（灰色）の平均（青）と差の半分（オレンジ）。平均は谷の形、差の半分は原点を通ってふえ続ける。

図から読みとれること

1. **平均は、いちばん低い所が 1**　$x = 0$ では、どちらも $e^0 = 1$ なので平均は 1。x が 0 からはなれると、片方がどんどん大きくなり、もう片方は小さくなっても 0 より下にはならないので、平均は 1 より大きくなります。左右対称の谷の形で、くさりの形に似ています。

2. **差の半分は、原点を通る**　$x = 0$ で $1 - 1 = 0$。右では e^x のほうが大きいので正、左では負。原点について対称で、ずっとふえ続けます。

3. **遠くでは、2 つがくっつく**　x が大きいと e^{-x} はほとんど 0 なので、平均も差の半分も、ほとんど $\dfrac{e^x}{2}$ になります。たとえば $x = 3$ では、平均は 10.068、差の半分は 10.018 です。

手でわかる 名前をつけて、計算する ★★★★

② 双曲線関数 cosh・sinh・tanh

①の 2 つの関数と、その比に、名前をつけます。

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

まとめて**双曲線関数**といいます。「双曲線」という名前のわけは、③で分かります。読み方は次のとおりです。

記号	読み方	6-10 とのちがい
$\cosh x$	ハイパボリック・コサイン	$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$
$\sinh x$	ハイパボリック・サイン	$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$
$\tanh x$	ハイパボリック・タンジェント（タンジェント・エイチとも読む）	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

表 3 「ハイパボリック（hyperbolic）」は「双曲線の」という意味。cos の後ろの h は、その頭文字。

$\cos\theta$ の式から j をとると $\cosh x$ になります。$\sin\theta$ の式は、分母の $2j$ の j もとると $\sinh x$ になります。三角関数の「いとこ」のような関数です。

値を求める

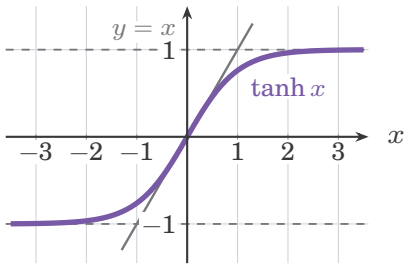
表計算では `=COSH(A2)`、`=SINH(A2)`、`=TANH(A2)` で計算できます。関数電卓では、hyp のキーを押してから cos・sin・tan のキーを押します。

x	0	0.5	1	1.5	2	3
$\cosh x$	1	1.128	1.543	2.352	3.762	10.068
$\sinh x$	0	0.521	1.175	2.129	3.627	10.018
$\tanh x$	0	0.462	0.762	0.905	0.964	0.995

表 4　$\tanh x$ は、x が大きくなると 1 に近づく。

$\tanh x$ のグラフ

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ は、分子と分母の両方が①の図の曲線です。x が大きいと、2 つはほとんど同じ $\dfrac{e^x}{2}$ になるので、比は 1 に近づきます。x が大きな負の数なら、$\sinh x$ は $-\dfrac{e^{-x}}{2}$ に近づくので、比は -1 に近づきます。$\tanh x$ は、**いつも -1 と 1 のあいだ**にあり、原点の近くでは、$y = x$ とほとんど同じ（傾き 1）です。どんな大きな数でも -1 から 1 のあいだにおさめるので、AI（ニューラルネットワーク）の中でも使われてきました。



③ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$：名前のわけ

三角関数には $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$（4-8）がありました。双曲線関数ではどうでしょう。まず数で確かめます。$x = 1$ なら、

$$\cosh^2 1 - \sinh^2 1 = 1.543^2 - 1.175^2 = 2.381 - 1.381 = 1.000$$

$x = 2$ でも $3.7622^2 - 3.6269^2 = 14.154 - 13.154 = 1.000$。どうやら、2 乗の「差」がいつも 1 になりそうです。

式で確かめる

$e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$ を使います（3-11 の指数法則）。

$$\cosh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$$ 定義を 2 乗する

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$ $(a+b)^2$ を展開（3-8）

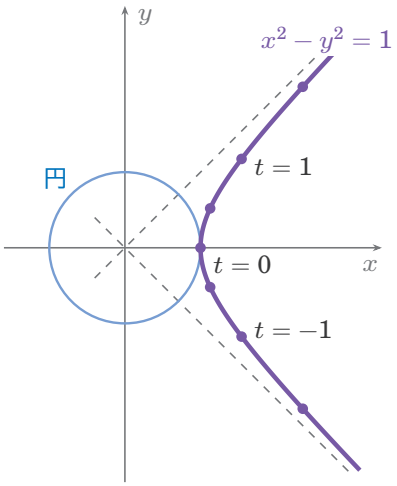
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$ $e^x e^{-x} = 1$

同じように、$\sinh^2 x = \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$（$(a-b)^2$ なので、まん中が -2）。ひくと、e^{2x} と e^{-2x} は消えて、

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{2-(-2)}{4} = 1$$

点 $(\cosh t,\ \sinh t)$ は、双曲線の上にある

4-8 では、点 $(\cos t,\ \sin t)$ が、
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ から、円
$x^2 + y^2 = 1$ の上を動きました。
同じように、点 $(\cosh t,\ \sinh t)$ は、
$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ から、曲線
$x^2 - y^2 = 1$ の上を動きます。この曲線を**双曲線**といいます（2 本の曲線が向かい合う形の、右の 1 本）。これが「双曲線関数」という名前のわけです。
t がふえると、点は右の曲線を下から上へ進み、ななめの点線（$y = x$、$y = -x$）に近づいていきます。



3-7 の反比例のグラフ $y = \dfrac{a}{x}$ も、双曲線の仲間です。$x^2 - y^2 = 1$ を 45° 回すと、反比例のグラフと同じ形（$y = \dfrac{1}{2x}$）になります。

ここまでで十分

cosh は平均、sinh は差の半分。$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$。

∂ 式でわかる 微分と、微分方程式への応用 ★★★★★

4 微分：cos・sin と、符号だけがちがう

5-14 の $(e^x)' = e^x$、$(e^{-x})' = -e^{-x}$ を使って、1 つずつ微分します。

$$(\cosh x)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2}$$ 定義を項ごとに微分（定数倍・たし算）

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$ $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$$(\sinh x)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2}$$ 定義を項ごとに微分

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$ $-(-e^{-x}) = +e^{-x}$

	三角関数（5-15）	双曲線関数
cos の微分	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cosh x)' = \sinh x$
sin の微分	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sinh x)' = \cosh x$
2 回微分	自分の -1 倍（ゆれる）	自分の $+1$ 倍（ふえる）

表 5　cosh の微分には、− がつかない。

$\cosh x$ は、2 回微分するともとにもどります（$\cosh \to \sinh \to \cosh$）。$\cos x$ は、2 回微分すると $-\cos x$ でした。符号が 1 つちがうだけで、「ゆれる」と「ふえる」に分かれます。グラフでも確かめられます。$\cosh x$ は $x > 0$ でふえているので、傾き $\sinh x$ は正です。

$\cosh ax$ のように中に a がかかっているときは、合成関数の微分（5-6）で、外の微分に中の微分 a をかけます。

$$(\cosh ax)' = a\sinh ax \qquad (\sinh ax)' = a\cosh ax$$

$\tanh x$ の微分

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ を、商の微分 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$（5-6 のもっと知りたい）で微分します。

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \qquad \text{定義}$$

$$= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x\,(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \qquad \text{商の微分}$$

$$= \frac{\cosh x\cosh x - \sinh x\sinh x}{\cosh^2 x} \qquad \text{④の 2 つの微分を入れる}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \text{③の } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

また、2 行めの分数を 2 つに分けると、$\dfrac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ とも書けます。

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$x = 0$ では $\tanh 0 = 0$ なので傾きは 1、x が大きいと $\tanh x \approx 1$ なので傾きは 0 に近づきます。グラフ（②）の形と合っています。「微分が、自分自身 $\tanh x$ で書ける」ことが、⑥の落下の計算で役に立ちます。

❺ $y'' = a^2 y$ を、cosh と sinh で解く

5-18 では、「2 回微分すると自分の a^2 倍」（$y'' = a^2 y$）の答えを $Ae^{at} + Be^{-at}$ と書きました。$\cosh at$ と $\sinh at$ も、2 回微分すると a^2 倍になります（④）。

$$(\cosh at)'' = a^2\cosh at \qquad (\sinh at)'' = a^2\sinh at$$

だから、線形（5-18）の考えで、たしたものも答えです。

$$y'' = a^2 y \text{ の答え：} \quad y = C\cosh at + D\sinh at$$

はじめの状態から、すぐに数が決まる

この書き方のよいところは、$t = 0$ での値です。$\cosh 0 = 1$、$\sinh 0 = 0$ なので、

1. はじめの値：$y(0) = C \times 1 + D \times 0 = C$。だから $C = y(0)$。
2. はじめの傾き：微分すると $y' = aC \sinh at + aD \cosh at$。$t = 0$ を入れると、

$$y'(0) = aC \times 0 + aD \times 1 = aD$$

だから $D = \dfrac{y'(0)}{a}$。

連立方程式を解かなくても、C と D が 1 つずつ決まります。e^{at} と e^{-at} では、どちらも $t = 0$ で 1 になるので、2 つの式を連立して解く必要がありました (5-18)。

5-18 のたおれる棒を書きなおす

5-18 では、次の式と、はじめの状態を考えました。

$$\ddot{\theta} = 4\theta, \quad \theta(0) = 0.01, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$a^2 = 4$ なので $a = 2$。①②から、$C = \theta(0) = 0.01$、$D = \dfrac{\dot{\theta}(0)}{2} = 0$ です。だから、

$$\theta = 0.01 \cosh 2t$$

5-18 の答え $0.005(e^{2t} + e^{-2t})$ と、定義から同じものです ($0.005 \times 2 = 0.01$)。

2 つの書き方の行き来

$y = C \cosh at + D \sinh at$ に定義を入れて、e^{at} と e^{-at} ごとにまとめると、

$$y = \frac{C + D}{2} e^{at} + \frac{C - D}{2} e^{-at}$$

逆に $y = Ae^{at} + Be^{-at}$ なら、$A = \dfrac{C + D}{2}$、$B = \dfrac{C - D}{2}$ をたしたりひいたりして、$C = A + B$、$D = A - B$ です。

もっと知りたい ★★★★★

冷却フィンの温度：両はしの条件と cosh

パソコンの CPU の熱を逃がすフィン（うすい金属の板）を考えます。根もとからの距離を x〔m〕、そこでの板の温度と部屋の温度の差を θ〔K〕とします。板の中を伝わる熱と、表面から空気へ逃げる熱のつり合いを考えると、

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \beta^2\theta$$

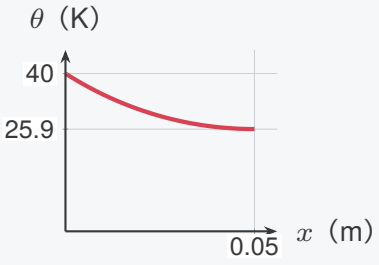
という、$y'' = a^2 y$ と同じ形の式が成り立ちます（β（ベータ）〔1/m〕は、板の材料・厚さ・風の強さで決まる数。くわしくは物理『熱』）。条件は、根もとの温度差 $\theta(0) = \theta_\mathrm{b}$ と、先たん（$x = L$）からは熱がほとんど逃げないこと $\theta'(L) = 0$ です。6-3 と同じ「両はしの条件」です。答えは

$$\theta = \theta_\mathrm{b}\frac{\cosh(\beta(L-x))}{\cosh\beta L}$$

です。確かめます。

1. 2 回微分すると、中の $\beta(L-x)$ の微分 $-\beta$ が 2 回かかって $(-\beta)^2 = \beta^2$ 倍。式をみたす。
2. $x = 0$ では、分子と分母が同じ $\cosh\beta L$ なので $\theta = \theta_\mathrm{b}$。
3. 1 回微分すると $-\beta\theta_\mathrm{b}\dfrac{\sinh(\beta(L-x))}{\cosh\beta L}$。$x = L$ では $\sinh 0 = 0$ なので傾きは 0。

たとえば $\beta = 20$〔1/m〕、$L = 0.05\,\mathrm{m}$（$\beta L = 1$）、$\theta_\mathrm{b} = 40\,\mathrm{K}$ なら、先たんの温度差は $\dfrac{40}{\cosh 1} = \dfrac{40}{1.543} \approx 25.9\,\mathrm{K}$。先へ行くほど板は冷えて、熱を逃がす力が弱くなります。フィンを長くしすぎても、あまり冷えなくなるわけです。



6 空気の中の落下：$v = v_{\mathrm{t}} \tanh \dfrac{gt}{v_{\mathrm{t}}}$

6-5 では、速さの 2 乗に比例する抵抗を受けて落ちるときの式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv^2 \qquad \text{（下向きが正）}$$

を、表計算で解きました。この式は、tanh を使うと、式でも解けます。はじめ止まっていた（$v(0) = 0$）ときの答えは、

$$v = v_{\mathrm{t}} \tanh \frac{gt}{v_{\mathrm{t}}} \qquad \left(v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{mg}{c}}\right)$$

です。なぜ tanh なのか、まず形から考えます。

- **はじめ**：$\tanh u$ は原点の近くで u とほとんど同じ（②）。だから、

$$v \approx v_{\mathrm{t}} \times \frac{gt}{v_{\mathrm{t}}} = gt$$

  空気の抵抗がないときの自由落下（5-13）と同じ速さで、速くなります。

- **やがて**：$\tanh u$ は 1 に近づく（②）。だから v は v_{t}（終端速度）に近づきます。

「はじめは傾き 1 でまっすぐ、やがて一定の値で平らになる」という tanh の形は、落下の速さの変わり方そのものです。

方法 1：微分して、式に入れて確かめる

$u = \dfrac{gt}{v_{\mathrm{t}}}$ とおきます。合成関数の微分（5-6）で、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{g}{v_{\mathrm{t}}}$ をかけます。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{t}} \times \frac{g}{v_{\mathrm{t}}}(1 - \tanh^2 u) \qquad (\tanh u)' = 1 - \tanh^2 u \ (④)$$

$$= g\left(1 - \frac{v^2}{v_{\mathrm{t}}^2}\right) \qquad \tanh u = \frac{v}{v_{\mathrm{t}}} \text{ を入れる}$$

$$= g - \frac{g}{v_{\mathrm{t}}^2}v^2 = g - \frac{c}{m}v^2 \qquad v_{\mathrm{t}}^2 = \frac{mg}{c} \text{ より } \frac{g}{v_{\mathrm{t}}^2} = \frac{c}{m}$$

最後の式は、運動の式 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv^2$ の両辺を m でわったものと同じです。$t = 0$ では $\tanh 0 = 0$ なので $v(0) = 0$。たしかに答えです。

方法 2：表計算の答えと重ねる

スカイダイバー（80 kg、$c = 0.26\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$、$v_\mathrm{t} = 54.9\,\mathrm{m/s}$）で、式の値と、6-2 のオイラー法（$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$）の値をくらべます。

時間 t〔s〕	1	2	3	5	10
式 $v_\mathrm{t}\tanh\dfrac{gt}{v_\mathrm{t}}$〔m/s〕	9.70	18.8	26.9	39.1	51.9
オイラー法〔m/s〕	9.71	18.9	27.0	39.3	52.0
抵抗なし gt〔m/s〕	9.8	19.6	29.4	49.0	98.0

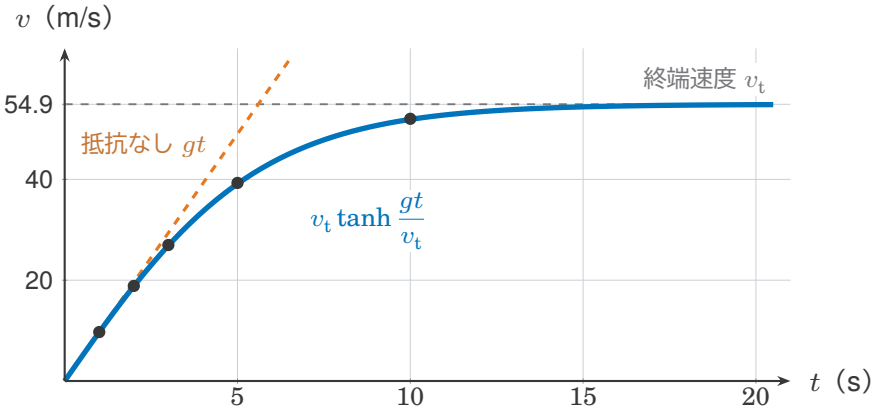


図 3 スカイダイバーの速さ。青い曲線が式の答え、黒い点がオイラー法（$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$）。はじめは gt（オレンジの点線）にそい、やがて終端速度に近づく。

表計算の点と式の曲線が、ほとんどぴったり重なりました（小さなずれは、オイラー法の Δt によるもの。6-2）。tanh の式があれば、何秒後の速さでも、表を作らずに 1 回の計算で求められます。

もっと知りたい ★★★★★

変数分離で、tanh の答えを導く

$v_t^2 = \dfrac{mg}{c}$ より $g = \dfrac{c}{m}v_t^2$。運動の式を m でわると $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{c}{m}(v_t^2 - v^2)$。6-4 の変数分離で、$v$ を左、t を右に集めます。

$$\frac{dv}{v_t^2 - v^2} = \frac{c}{m}\,dt$$

左の分数を、3-8 の恒等式の考えで 2 つに分けます（右辺を通分すると左辺にもどる）。

$$\frac{1}{v_t^2 - v^2} = \frac{1}{2v_t}\left(\frac{1}{v_t + v} + \frac{1}{v_t - v}\right)$$

両辺を積分します（5-16 の置換積分で $\int \frac{dv}{v_t - v} = -\ln(v_t - v)$）。$v(0) = 0$ で積分定数は 0 になり、

$$\frac{1}{2v_t}\ln\frac{v_t + v}{v_t - v} = \frac{c}{m}\,t$$

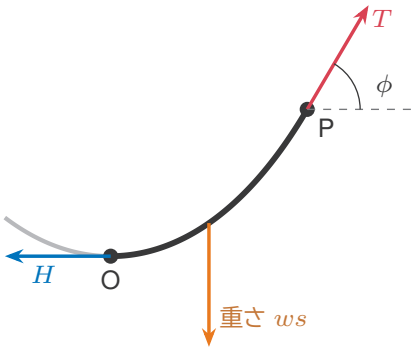
$u = \dfrac{gt}{v_t}$ とおくと、右辺に $2v_t$ をかけたものは $2u$ です（$\frac{c}{m} = \frac{g}{v_t^2}$）。だから $\dfrac{v_t + v}{v_t - v} = e^{2u}$。これを v について解き、分子と分母を e^u でわると、

$$v = v_t\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = v_t\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = v_t \tanh u$$

7 はてな？の答え：くさりの形は cosh

くさりの、いちばん下の点 O から、ある点 P までの部分を考えます。くさりは止まっているので、この部分にはたらく力はつり合っています（4-6 の力の分解）。くさり 1 m あたりの重さを w〔N/m〕、O から P までのくさりの長さを s〔m〕とします。

- O では、左のくさりが真横に引く。その力を H〔N〕とする。
- P では、右のくさりが、接線の向きに引く。その力を T〔N〕、横とのあいだの角を ϕ とする。
- この部分の重さ ws〔N〕が、真下にかかる。



横の力のつり合い：$T\cos\phi = H$

たての力のつり合い：$T\sin\phi = ws$

2 つの式をわると $\tan\phi = \dfrac{ws}{H}$。$\tan\phi$ は、P での接線の傾き y' です（5-3）。

そこで $a = \dfrac{H}{w}$〔m〕とおくと、

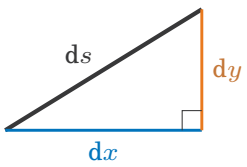
$$y' = \frac{s}{a} \qquad （傾き＝くさりの長さ \div a）$$

H はくさりのどこでも同じ（横の力のつり合い）なので、a は定数です。H〔N〕を w〔N/m〕でわるので、a の単位は m です。

くさりの長さを、三平方で表す

$y' = \dfrac{s}{a}$ を、もう 1 回 x で微分すると、

$y'' = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$。くさりをとても小さく区切ると、1 つ分はほとんどまっすぐで、横 $\mathrm{d}x$、たて $\mathrm{d}y$ の直角三角形の斜辺になります（4-4 の三平方）。



$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \quad より \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'^2}$$

（$\mathrm{d}x$ でわって、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$ を使いました。）だから、くさりの形は、次の微分方程式をみたします。

せいかくに言うと

くさりの小さな 1 つ分は、本当は少し曲がっているので、まっすぐな斜辺は近似です。区切りを小さくするほど近似は正しくなり、その行き着く先（極限）が曲線の長さ $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ です。ここでの $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+y'^2}$ は、この積分を微分したもの（5-11 の微積分の基本定理）なので、近似ではなく正しい式です。くわしくは大学で学びます。

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$$

答えは $y = a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right)$

いちばん下の点 O を原点にすると、答えは $y = a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right)$ です。式に入れて確かめます。

1. 微分する（④）：$y' = a \times \frac{1}{a}\sinh\frac{x}{a} = \sinh\frac{x}{a}$。もう 1 回：$y'' = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$。
2. 右辺：③の $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ から $1 + \sinh^2\frac{x}{a} = \cosh^2\frac{x}{a}$。cosh は正なので $\sqrt{1+y'^2} = \cosh\frac{x}{a}$。
3. 右辺は $\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$ で、①の y'' と同じ。
4. $y(0) = a(1-1) = 0$、$y'(0) = \sinh 0 = 0$。O が底（傾き 0）になっている。

くさりの形は、cosh のグラフを、たても横も a 倍に広げた形です。**？はてな？** の答えは、「cosh の曲線」でした。この曲線を**懸垂線**（けんすいせん）または**カテナリー**といいます。1691 年に、ライプニッツ、ホイヘンス、ヨハン・ベルヌーイが、それぞれこの答えにたどり着きました。カテナリーは、ラテン語で「くさり」を表す catena から来たことばです。

$y' = \frac{s}{a}$ から、O からのくさりの長さも分かります：$s = ay' = a\sinh\frac{x}{a}$。

やってみようの答え

はば 20 cm（$x = \pm 10$）、たるみ 15 cm なので、次の式をみたす a を表計算でさがします。

$$a\left(\cosh\frac{10}{a} - 1\right) = 15$$

すると $a \approx 4.76\,\text{cm}$。$x = 6$ では、

$$4.76 \times \left(\cosh\frac{6}{4.76} - 1\right) \approx 4.3\,\text{cm}$$

で、はかった値と合います。

6-3 のつり橋（放物線）とのちがい

6-3 のつり橋では、ケーブルにかかる橋の板の重さが、**横の長さ** x に比例しました。上と同じように考えると $y' = \dfrac{x}{a}$ で、積分すると放物線 $y = \dfrac{x^2}{2a}$ です。くさりでは、重さが**くさりの長さ** s に比例します。はしのほうでは、くさりがななめになって、横の長さより s のほうが長くなるので、重さが多くかかり、はしで急に立ち上がるのです。

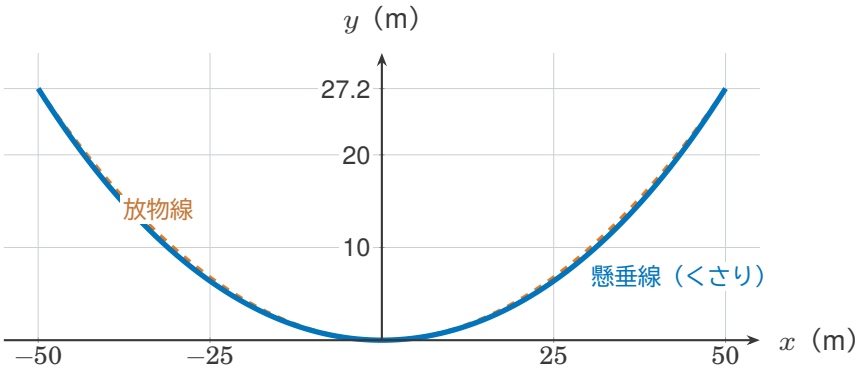


図 4　$a = 50\,\text{m}$、はば 100 m の懸垂線（たるみ 27.2 m）と、同じはば・たるみの放物線。$x = 25$ では、6.38 m と 6.79 m。

たるみが小さければ、ほとんど放物線

5-17 のテイラー展開で、e^{u} と e^{-u} の展開をたして 2 でわると、奇数乗の項は消えて、

$$\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$$

u が小さければ、$\cosh u \approx 1 + \dfrac{u^2}{2}$。だから

$$y = a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right) \approx a \times \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{2a}$$

これは、つり橋の放物線と同じ式です。電線のように、はばにくらべてたるみが小さいとき（$\dfrac{x}{a}$ が小さいとき）は、懸垂線と放物線はほとんど同じです。たとえば、はば 100 m で $a = 625$ m の電線では、たるみは懸垂線で 2.001 m、放物線で 2.000 m。ちがいは 1 mm です。ガリレオの「放物線に近い」は、たるみが小さければ正しかったのです。

もっと知りたい ★★★★★

$\cos(jx) = \cosh x$

6-10 の $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ の θ に、虚数 jx を入れてみます。$j \times j = -1$ なので、$e^{j\cdot jx} = e^{-x}$、$e^{-j\cdot jx} = e^{x}$ です。

$$\cos(jx) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

「cos に虚数を入れると cosh になる」のです。円の関数と双曲線の関数は、複素数の世界ではつながっています。また、$\sinh x$ の逆関数（$\sinh x = y$ から x を求める関数）は $\sinh^{-1} y$ と書き、電卓の hyp キーのあと $\sin^{-1}$ キーで計算できます。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

懸垂線の方程式は $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ で与えられる。ここで $a = \dfrac{H}{w}$ であり、H は最下点における張力、w は単位長さあたりの重量である。

訳　大学の本では、いちばん下の点の高さを a にして（$x=0$ で $y = a\cosh 0 = a$）、-1 をつけない形で書くことが多い。この章の $y = a(\cosh\frac{x}{a} - 1)$ を、たてに a だけずらしたもの。「張力」は、ひもやくさりが引く力。「単位長さあたりの重量」は、1 m あたりの重さ w。

たいせつ

定義

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}、\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

2 乗の差

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

点 $(\cosh t,\ \sinh t)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上

微分

$$(\cosh x)' = \sinh x、\quad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

使い方

$y'' = a^2 y$ の答えは $C\cosh at + D\sinh at$

$$C = y(0)、\quad D = \frac{y'(0)}{a}$$

この章で出てきたことば

双曲線関数　$\cosh x$・$\sinh x$・$\tanh x$ のこと。e^x と e^{-x} から作る。

双曲線　$x^2 - y^2 = 1$ のような曲線。反比例のグラフも双曲線。

懸垂線　カテナリーともいう。くさりや電線を両はしでつるしたときの形。$y = a(\cosh\frac{x}{a} - 1)$。

記号カード　初めて出た章 **6-11**

$\cosh x$

読み方　ハイパボリック・コサイン
意味　$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$。$\sinh x$（ハイパボリック・サイン）は $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
英語　hyperbolic cosine

記号カード　初めて出た章 **6-11**

$\tanh x$

読み方　ハイパボリック・タンジェント（タンジェント・エイチ）
意味　$\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$。-1 と 1 のあいだ
英語　hyperbolic tangent

例題でたしかめよう

例題 1　cosh・sinh・tanh の値

$e=2.718$、$e^{-1}=0.368$ として、$\cosh 1$、$\sinh 1$、$\tanh 1$ を求めましょう。

考え方　定義（②）に入れる。tanh は sinh を cosh でわる。

式
$$\cosh 1=\frac{2.718+0.368}{2}=\frac{3.086}{2}=1.543$$
$$\sinh 1=\frac{2.718-0.368}{2}=\frac{2.350}{2}=1.175$$
$$\tanh 1=\frac{1.175}{1.543}=0.7615\cdots$$

答え　$\cosh 1=1.543$、$\sinh 1=1.175$、$\tanh 1\approx 0.762$

例題 2 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を使う

$x > 0$ で $\sinh x = \dfrac{3}{4}$ のとき、$\cosh x$ と $\tanh x$ を求めましょう。

考え方 $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$（③）。$\cosh x$ はいつも正（①）なので、正のほうをとる。

式 $\cosh^2 x = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16}$

$\cosh x > 0$ なので $\cosh x = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$

$\tanh x = \dfrac{3}{4} \div \dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$

答え $\cosh x = \dfrac{5}{4}$、$\tanh x = \dfrac{3}{5}$

じぶんでとこう 1

$e^2 = 7.389$、$e^{-2} = 0.135$ として、$\cosh 2$、$\sinh 2$、$\tanh 2$ を求めましょう。

じぶんでとこう 2

$x > 0$ で $\sinh x = \dfrac{12}{5}$ のとき、$\cosh x$ と $\tanh x$ を求めましょう。

例題 3　双曲線関数の微分

次の関数を微分しましょう。

（1）$\cosh 3x$ を 1 回　（2）$\sinh 2x$ を 2 回　（3）$5\tanh 2t$ を 1 回

考え方　④の表と、合成関数の微分（中の微分をかける）。tanh は $(\tanh u)' = 1 - \tanh^2 u$。

式　（1）$(\cosh 3x)' = 3\sinh 3x$

（2）$(\sinh 2x)' = 2\cosh 2x$

もう 1 回：$(2\cosh 2x)' = 2 \times 2\sinh 2x = 4\sinh 2x$

（3）$(5\tanh 2t)' = 5 \times 2\,(1 - \tanh^2 2t)$

答え　（1）$3\sinh 3x$　（2）$4\sinh 2x$　（3）$10(1 - \tanh^2 2t)$

（1）で、cos のくせで $-3\sinh 3x$ としないように注意しましょう。（2）は「2 回微分で自分の $2^2 = 4$ 倍」になっています。

例題 4　微分方程式をみたすか確かめる

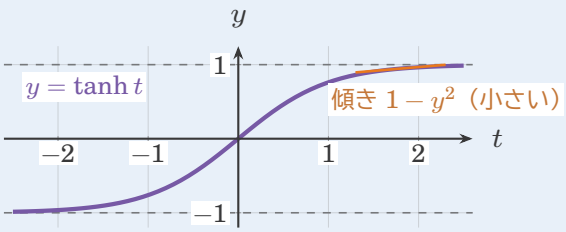
$y = \tanh t$ が、$y' = 1 - y^2$ と $y(0) = 0$ をみたすことを確かめましょう。

考え方　左辺 y' を計算し、右辺に $y = \tanh t$ を入れたものとくらべる。

式　左辺：$y' = (\tanh t)' = 1 - \tanh^2 t$

右辺：$1 - y^2 = 1 - \tanh^2 t$。左辺と同じ

$$y(0) = \tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = \frac{0}{1} = 0$$



答え　どちらもみたす

じぶんでとこう 3

次の関数を微分しましょう。

（1）$\cosh 2x$ を 1 回

（2）$\sinh 3x$ を 2 回

（3）$4 \tanh 0.5t$ を 1 回

じぶんでとこう 4

$y = 2 \tanh 3t$ が、$y' = 6 - 1.5y^2$ と $y(0) = 0$ をみたすことを確かめましょう。

例題 5　$y'' = a^2 y$ を cosh・sinh で解く

(1) $y'' = 4y$、$y(0) = 2$、$y'(0) = 6$ をみたす y を、$C\cosh 2t + D\sinh 2t$ の形で求めましょう。

(2) $y = 3e^{2t} + e^{-2t}$ を、$C\cosh 2t + D\sinh 2t$ の形に書きなおしましょう。

考え方　(1) $C = y(0)$、$D = \dfrac{y'(0)}{a}$ (⑤)。(2) $C = A + B$、$D = A - B$ (⑤の行き来)。

式　(1) $a^2 = 4$ なので $a = 2$

$C = y(0) = 2$、$D = \dfrac{y'(0)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

確かめ：$y' = 4\sinh 2t + 6\cosh 2t$ で、$y'(0) = 0 + 6 = 6$

(2) $A = 3$、$B = 1$ なので $C = 3 + 1 = 4$、$D = 3 - 1 = 2$

確かめ：$4\cosh 2t = 2e^{2t} + 2e^{-2t}$、$2\sinh 2t = e^{2t} - e^{-2t}$。たすと $3e^{2t} + e^{-2t}$

答え　(1) $y = 2\cosh 2t + 3\sinh 2t$　(2) $y = 4\cosh 2t + 2\sinh 2t$

じぶんでとこう 5

(1) $y'' = 9y$、$y(0) = 1$、$y'(0) = 6$ をみたす y を、$C\cosh 3t + D\sinh 3t$ の形で求めましょう。

(2) $y = 5e^{3t} + e^{-3t}$ を、$C\cosh 3t + D\sinh 3t$ の形に書きなおしましょう。

例題 6　スカイダイバーの速さ

スカイダイバー（$v_t = 54.9\,\mathrm{m/s}$）が、止まった状態から落ち始めます。$v = v_t \tanh\dfrac{gt}{v_t}$ を使って、(1) 3 秒後の速さ、(2) 終端速度の 90 % になる時刻を求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\tanh 0.535 = 0.490$、$\tanh 1.47 = 0.900$）。

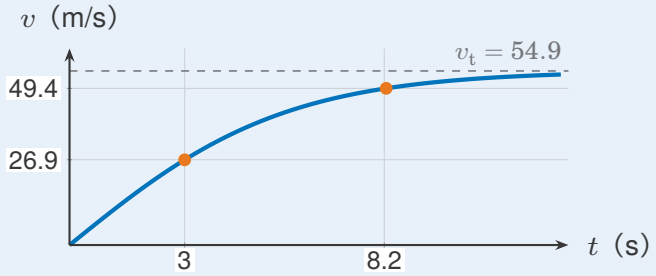
考え方　(1) $u = \dfrac{gt}{v_t}$ を計算して $\tanh u$ を使う。(2) $\tanh u = 0.9$ となる u から $t = \dfrac{uv_t}{g}$。

式　(1) $u = \dfrac{9.8 \times 3}{54.9} = \dfrac{29.4}{54.9} = 0.535$

$v = 54.9 \times \tanh 0.535 = 54.9 \times 0.490 = 26.9$

(2) $\dfrac{v}{v_t} = \tanh u = 0.9$ なので $u = 1.47$

$\dfrac{gt}{v_t} = 1.47$ より $t = \dfrac{1.47 \times 54.9}{9.8} = \dfrac{80.7}{9.8} = 8.2$



答え　(1) 約 26.9 m/s　(2) 約 8.2 秒後

じぶんでとこう 6

同じスカイダイバーの、(1) 5 秒後の速さ、(2) 終端速度の 95 % になる時刻を求めましょう（$\tanh 0.892 = 0.713$、$\tanh 1.83 = 0.950$）。

例題 7　懸垂線のたるみと長さ

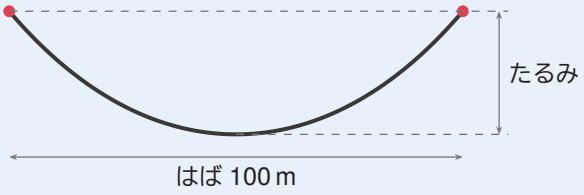
$a = 50\,\mathrm{m}$ の懸垂線 $y = a\left(\cosh\dfrac{x}{a} - 1\right)$ で、はば $100\,\mathrm{m}$（$x = -50$ から 50）のときの、たるみと、くさりの長さを求めましょう（$\cosh 1 = 1.543$、$\sinh 1 = 1.175$）。

考え方　たるみは、はし（$x = 50$）の高さ y。長さは、O から片がわが $s = a\sinh\dfrac{x}{a}$（⑦）なので、その 2 倍。

式　$\dfrac{x}{a} = \dfrac{50}{50} = 1$

たるみ：$50 \times (\cosh 1 - 1) = 50 \times 0.543 = 27.15$

長さ：$2 \times 50 \times \sinh 1 = 100 \times 1.175 = 117.5$



答え　たるみ 約 27.2 m、長さ 約 117.5 m

じぶんでとこう 7

$a = 100\,\mathrm{m}$、はば $100\,\mathrm{m}$ の懸垂線の、たるみと長さを求めましょう（$\cosh 0.5 = 1.128$、$\sinh 0.5 = 0.521$）。

例題 8　電線のたるみ：放物線で近似する

1 m あたりの重さが $w = 10\,\mathrm{N/m}$ の電線を、いちばん下での張力 $H = 5000\,\mathrm{N}$ で、はば 50 m にはりました。a を求め、たるみを $\dfrac{x^2}{2a}$（⑦の近似）で求めましょう。

考え方　$a = \dfrac{H}{w}$（⑦）。たるみは、はし $x = 25$ での高さ。$\dfrac{x}{a}$ が小さいので放物線で近似できる。

式　$a = \dfrac{5000}{10} = 500$〔m〕。$\dfrac{x}{a} = \dfrac{25}{500} = 0.05$（小さい）

$$\text{たるみ} \approx \frac{25^2}{2 \times 500} = \frac{625}{1000} = 0.625$$

答え　$a = 500\,\mathrm{m}$、たるみ 約 0.63 m（懸垂線の式でも 0.625 m）

じぶんでとこう 8

$w = 8\,\mathrm{N/m}$ の電線を、$H = 3200\,\mathrm{N}$ で、はば 80 m にはりました。a とたるみを求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

cosh の微分に − をつける

✕　$(\cosh x)' = -\sinh x$

○　$(\cosh x)' = \sinh x$

cos の微分のくせです。$\cosh x$ は $x > 0$ でふえているので、傾きは正のはず。$x = 1$ で $-\sinh 1 = -1.175$ では、へっていることになってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

2 乗の「和」が 1 だと思う

✕ $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$

○ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$x = 1$ で確かめると、$2.381 + 1.381 = 3.762$ で 1 になりません。ひき算で $2.381 - 1.381 = 1$ です。$\cos^2 + \sin^2 = 1$ と符号がちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

tanh が tan のようにくり返すと思う

✕ $\tanh x$ は周期的で、いくらでも大きくなる

○ $\tanh x$ はくり返さず、いつも -1 と 1 のあいだ

tan は、cos が 0 になる所で大きくなりますが、cosh は 0 にならない（いつも 1 以上）ので、tanh は大きくなりません。

⚠ まちがえやすいところ

たるみが大きいのに、放物線で計算する

✕ $a = 50\,\mathrm{m}$、はば 100 m でも、たるみ $\approx \dfrac{50^2}{2 \times 50} = 25\,\mathrm{m}$

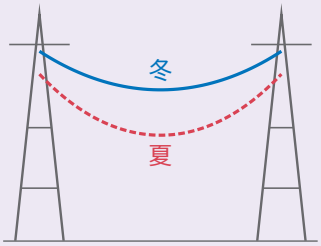
○ $50 \times (\cosh 1 - 1) \approx 27.2\,\mathrm{m}$

放物線の近似は、$\dfrac{x}{a}$ が小さいときだけ使えます。ここでは $\dfrac{x}{a} = 1$ で小さくないので、2 m もずれます。

物理・工学ではこう使う

送電線のたるみ

鉄塔のあいだの送電線は、懸垂線の形です。電線は、電気が流れたり夏の日ざしを受けたりして温まると、少しのびます（熱による伸び）。長さ s がのびると、たるみが大きくなり、電線が下がります。設計では、いちばん暑い日でも、電線が木や建物に近づきすぎないように、懸垂線の式でたるみを計算します。



物理・工学ではこう使う

アーチ：さかさまの懸垂線

くさりは、引っぱる力だけで形を保っています。その形を上下さかさまにすると、こんどは、押す力だけで形を保つアーチになります。石やれんがは、引っぱる力には弱く、押す力には強いので、懸垂線に近い形のアーチは、くずれにくいのです。スペインの建築家ガウディは、おもりをつけたひもをつるした模型をさかさまに見て、教会の形を決めました。アメリカのセントルイスにあるゲートウェイ・アーチ（高さもはばも約 192 m）も、懸垂線をもとにした形です。

コラム　ガリレオとくさり

ガリレオは、1638 年の本『新科学対話』の中で、つるしたくさりの形は放物線に近いと書きました。ガリレオは放物線を、投げた物の通り道として調べていたので、似た形を見つけておどろいたことでしょう。その後、くさりの形を正確に求める問題は、数学者たちの「挑戦状」になりました。1690 年にヤコブ・ベルヌーイがこの問題を出し、翌 1691 年に、弟のヨハン・ベルヌーイ、ライプニッツ、ホイヘンスが答えを発表しました。ヨハンは、兄が解けなかった問題を解いたことを、とても喜んだと伝えられています。この章で、みなさんも同じ答えにたどり着きました。

章末問題

6-11 のまとめ

基本 ★★★★

1　$e^{1.5}=4.482$、$e^{-1.5}=0.223$ として、$\cosh 1.5$、$\sinh 1.5$、$\tanh 1.5$ を求めましょう。

2　$x>0$ で $\sinh x=\dfrac{5}{12}$ のとき、$\cosh x$ と $\tanh x$ を求めましょう。

3　次の関数を微分しましょう。
(1) $\cosh 4x$ を 1 回　(2) $\sinh 5x$ を 2 回　(3) $3\tanh 2t$ を 1 回

4　$y=3\tanh 2t$ が、$y'=6-\dfrac{2}{3}y^2$ と $y(0)=0$ をみたすことを確かめましょう。

5　$y''=16y$、$y(0)=3$、$y'(0)=4$ をみたす y を、$C\cosh 4t+D\sinh 4t$ の形で求めましょう。

6　スカイダイバー（$v_t=54.9\,\mathrm{m/s}$）の、落ち始めて 2 秒後の速さを求めましょう（$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\tanh 0.357=0.343$）。

7 $a = 20\,\mathrm{m}$、はば 40 m の懸垂線の、たるみと長さを求めましょう（$\cosh 1 = 1.543$、$\sinh 1 = 1.175$）。

8 $e^{0.5} = 1.649$、$e^{-0.5} = 0.607$ として、$\cosh 0.5$、$\sinh 0.5$、$\tanh 0.5$ を求めましょう。

チャレンジ ★★★★★

9 $y = e^t - 3e^{-t}$ を、$C\cosh t + D\sinh t$ の形に書きなおしましょう。

10 質量 70 kg、$c = 0.25\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$ の人が、止まった状態から落ち始めます。終端速度 v_t と、4 秒後の速さを求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\sqrt{2744} = 52.4$、$\tanh 0.748 = 0.634$）。

11 1 m あたりの重さ $w = 12\,\mathrm{N/m}$ の電線を、$H = 7200\,\mathrm{N}$ で、はば 60 m にはりました。a とたるみを求めましょう。

12 $a = 40\,\mathrm{m}$、はば 40 m の懸垂線の、たるみと長さを求めましょう（$\cosh 0.5 = 1.128$、$\sinh 0.5 = 0.521$）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ $\cosh x$・$\sinh x$・$\tanh x$ を e^x と e^{-x} で表し、値とグラフの形を説明できる。 → 391 ページ
- ☐ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と、微分のきまりを使える。 → 394 ページ
- ☐ $y'' = a^2 y$ の答えを cosh・sinh で書き、落下や電線の形に使える。 → 395 ページ

ミナ

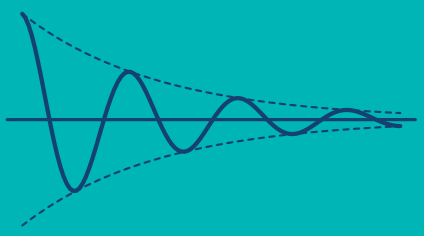
cos と sin は「回る・ゆれる」、cosh と sinh は「ふえる・たるむ」。
次の第 3 部では、ゆれと e^x が組み合わさった動きを、式で解くよ。

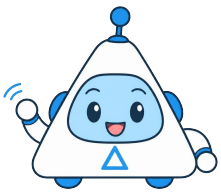
第６巻　第３部

式で解く

3

- 車のサスペンションは、なぜゆれをすぐに止める？
- ブランコをこぐと、なぜ大きくゆれる？
- 物理の法則は、みんな同じ形で書ける？





指数関数 e^{st} を入れてみる、という１つのアイデアで、ゆれながら止まる動きや共振が式で解けるよ。いくつもの量がからみあう動きも、和と差に分けると解けるよ。

この部で学ぶこと

6-12 減衰振動を式で解く：特性方程式 ★★★★★ P.420

2 次方程式の判別式が、ゆれ方を決める

6-13 ゆらし続けると：強制振動と共振 ★★★★★ P.458

小さな力でも、タイミングが合うと大きくゆれる

6-14 微分方程式がいくつも：連立微分方程式 ★★★★★ P.492

つながった 2 つの水そうの水位は、どう変わる？

6-15 まとめ：物理は「微分方程式＋はじめの状態」で書ける ★★☆☆☆ P.534

ばねも電気も熱も、同じ形の式で書ける

この部を読むと…

特性方程式で減衰振動を解き、共振のしくみを説明できるようになります。第 9 巻のラプラス変換と制御は、この部の考え方をそのまま使います。

第 3 部　式で解く

★★★★★

6-12 減衰振動を式で解く：特性方程式

道しるべ　この章の前に 3-10 5-16 5-18 6-7 6-8 6-10
この章の先に 6-13 6-14 9-7 9-9

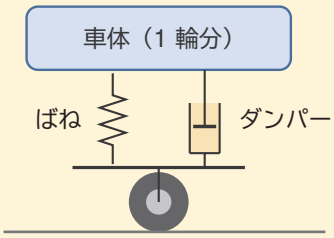
この章でできるようになること

- ★★★★ ばね・質量・ダンパーの式に e^{st} を入れて、特性方程式を作れる。
- ★★★★★ 特性方程式の解（2 つ・重解・複素数）から、動きの式を組み立てられる。
- ★★★★★ 減衰比 ζ で動き方を見分け、車や RLC 回路の数を求められる。

はてな？

3-10 で、車の動きの式から $s^2+3s+2=0$ や $s^2+2s+5=0$ のような 2 次方程式が出てきて、判別式の符号で「ゆれずにもどる」か「ゆれながらもどる」かが決まる、と予告しました。

車の動きは、時間で変わる「関数」です。それなのに、なぜ「数」を求める 2 次方程式が出てくるのでしょう。



6-7 では、ばね・質量・ダンパーの動きを、表計算で少しずつ進めて求めました。ゆれながら止まる・ちょうどよく止まる・ゆっくりもどる、の 3 つの動き方があ

り、その境め（臨界）が $c = 2\sqrt{mk}$ のあたりにあることも、表計算で見つけました。

この章では、同じ動きを「1 本の式」で求めます。かぎになるのは、たった 1 つのアイデア「e^{st} を入れてみる」です。すると、微分方程式が 2 次方程式に変わり、その解が動き方を教えてくれます。第 9 巻のラプラス変換と制御は、この考え方をそのまま使います。

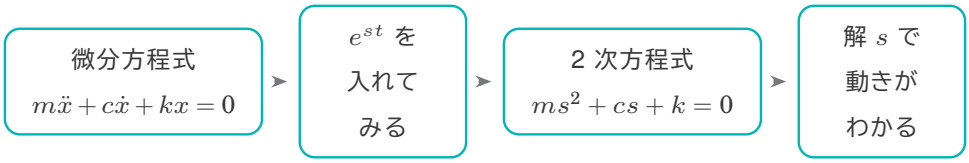


図 1　この章の道すじ。

この章では、時間で微分したものを $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$（速度）、$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$（加速度）と、点で書きます（5-5 の記号カード）。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- **3-10**　$as^2 + bs + c = 0$ の解は $s = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$。判別式 $D = b^2 - 4ac$ が正なら解は 2 つ、0 なら 1 つ（重解）、負なら（実数の）解はない。
- **5-6**　積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$。
- **5-14**　$(e^{at})' = ae^{at}$。$e^0 = 1$。e の何乗も、かならず正の数（0 にならない）。
- **5-18**　線形：答えどうしをたしても、答えを何倍しても答え。2 回微分の式の答えには数が 2 つあり、はじめの位置と速度で決める。
- **6-7**　ばね・質量・ダンパーの式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$。減衰比 $\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$。$\zeta < 1$ でゆれる、$\zeta = 1$ でちょうど、$\zeta > 1$ でゆっくり。
- **6-8**　$s^2 + 3s + 2 = 0$ の解は $s = -1$、-2。$s^2 + 2s + 5 = 0$ の解は $s = -1 \pm 2j$（$j^2 = -1$）。判別式で、解が 2 つ・1 つ・複素数を見分けた。
- **6-10**　$e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$。$e^{j\theta}$ の大きさはいつも 1。

やってみよう　3-10 の 2 台の車を、表計算で動かそう

3-10 の 2 つの式は、質量 $m = 1\,\mathrm{kg}$ の「おもちゃの車」の、ばね・質量・ダンパーの動きを表しています。どちらも、はじめに車体を少しおし下げて、その位置を $x = 1$ とし、静かに手をはなします（$\dot{x} = 0$）。

	式	ばね定数・ダンパー	3-10 の 2 次方程式
車 A	$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$	$k = 2$、$c = 3$	$s^2 + 3s + 2 = 0$
車 B	$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$	$k = 5$、$c = 2$	$s^2 + 2s + 5 = 0$

1. 6-7 と同じ型の表を作ろう。Δt は E2 のセルに 0.01 と書く。加速度は、式を $\ddot{x} = -3\dot{x} - 2x$ と変形して計算する（車 A）。
2. 速度を先に新しくし、その新しい速度で位置を進める（6-2 の「速度を先に進めるオイラー法」）。
3. $t = 0.5$、1、2、3 の x を読もう。車 B は、D2 の式を `=-2*C2-5*B2` に変えて、もう一度。

	A	B	C	D	E
1	t	x	v	a	Δt
2	0	1	0	`=-3*C2-2*B2`	0.01
3	`=A2+$E$2`	`=B2+C3*$E$2`	`=C2+D2*$E$2`	（上をコピー）	
4	（下へコピー）				

表 1　車 A の表。B3 は、同じ行の新しい速度 C3 を使う（速度を先に進める）。

t (s)	0	0.5	1	2	3
車 A の x	1	0.841	0.596	0.251	0.097
車 B の x	1	0.574	0.008	−0.135	0.041

表 2　表計算の結果（$\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$）。車 B は 0 の線をこえて、反対側へ行きすぎる。

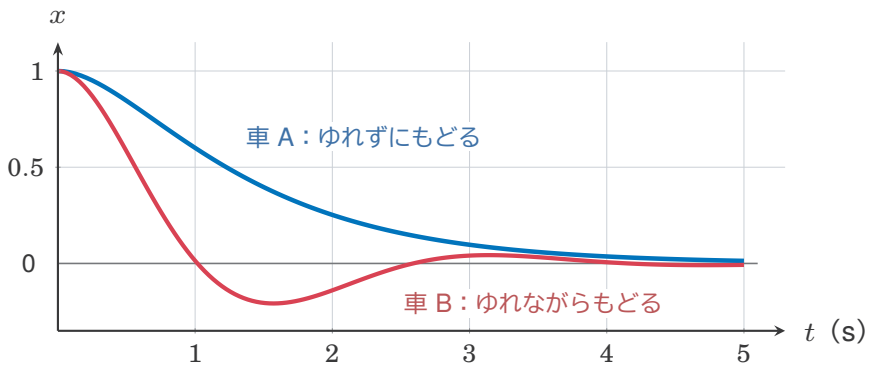


図 2　表計算でかいた 2 台の車の動き。3-10 の図と同じ形になった。

3-10 で予告したとおりの 2 つの動き方が、表計算で出てきました。表計算は、どんな式でも答えの「数」を出せる強い道具です。でも、「なぜ車 A はゆれず、車 B はゆれるのか」「どんな c ならゆれないのか」は、表を何回見ても、なかなかわかりません。それを教えてくれるのが、この章の「式で解く」方法です。

数学の道具

目でわかる　3 つの動き方をもう一度　★★★

1 6-7 の 3 本のグラフ

5-15 と 6-6 のばね（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$）に、ダンパーをつけたときの動きを、6-7 では表計算で調べました。はじめに 0.1 m 引いて、静かにはなします。

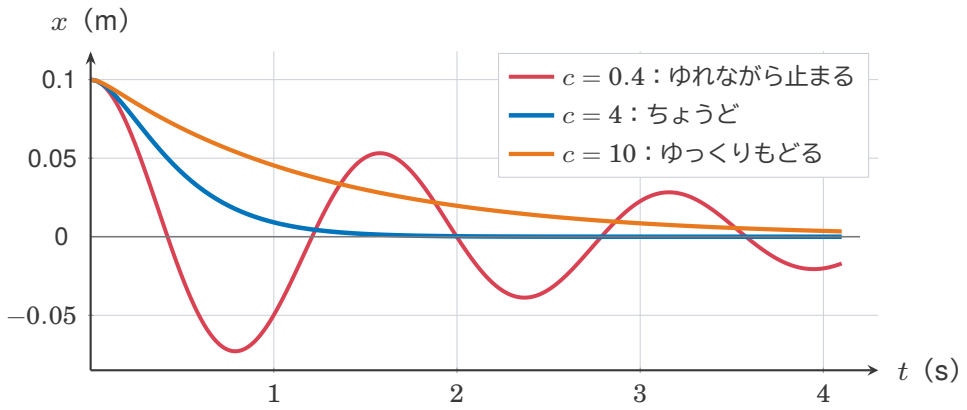


図 3　$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$ のばねに、3 通りのダンパー（c の単位は N·s/m）をつけたときの動き。

6-7 では、表計算をくり返して、次のことに気づきました。

1. c が小さいと、ゆれながら止まる。山の高さは、1 周期ごとに同じ割合（$c = 0.4$ では 0.532 倍）でへる。山をなぞる線（つつみ）は $e^{-\alpha t}$ で、$\alpha = \frac{c}{2m}$ だった。
2. c を大きくしていくと、$c = 4$ のあたりで、行きすぎずに止まるようになる。$4 = 2\sqrt{0.5 \times 8}$ で、ほかの m、k でも、境めはいつも $c = 2\sqrt{mk}$ だった。
3. c をもっと大きくすると、かえってゆっくりもどる（オレンジ）。

この章では、次の 3 つの「なぜ」に、式で答えます。

- なぜ、山の高さは同じ割合でへるのか。なぜ $\alpha = \frac{c}{2m}$ なのか。
- なぜ、境めは $2\sqrt{mk}$ なのか。なぜ、2 がつくのか。
- なぜ、ダンパーを強くしすぎると、かえってゆっくりになるのか。

手でわかる e^{st} を入れてみる

★★★★

2 なぜ e^{st} と置くのか

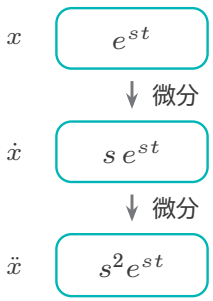
まず、式をもう一度ことばで読みます。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

「(2 回微分したもの) の m 倍と、(1 回微分したもの) の c 倍と、(もとの関数) の k 倍をたすと、いつでも 0」です。

3 つの項がいつでも打ち消しあうには、3 つが「同じ形」をしていないと困ります。形がちがうと、ある時刻では打ち消しあっても、別の時刻ではずれてしまうからです。

そこで、**微分しても形が変わらない関数**をさがします。5-18 の答えの候補リストで、それは e^{st} (s は定数) でした。微分するたびに s が 1 つ前に出るだけで、e^{st} の形は残ります。



微分するたびに s が 1 つかかる。

ためしに、ほかの関数を入れてみる

「形が同じでないと困る」ことを、車 A ($\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$) で確かめます。

- **$x = t^2$ を入れると**　$\dot{x} = 2t$、$\ddot{x} = 2$ なので、左辺は

$$2 + 3 \times 2t + 2t^2 = 2t^2 + 6t + 2$$

$t = 0$ でも 2 になり、0 になりません。t^2 は微分すると t になり、形が変わるので、打ち消しあえないのです。

- **$x = \sin t$ を入れると**　$\dot{x} = \cos t$、$\ddot{x} = -\sin t$ なので、左辺は

$$-\sin t + 3\cos t + 2\sin t = \sin t + 3\cos t$$

$t = 0$ で 3 になり、0 になりません。sin は 2 回微分すると sin にもどりますが、1 回微分の項 (ダンパー) だけ cos になって、残ってしまいます。

ダンパーのない 6-6 のばねでは、1 回微分の項がないので、sin でうまくいきました。

e^{st} を入れると

$x = e^{st}$ とすると、$\dot{x} = se^{st}$、$\ddot{x} = s^2e^{st}$ です（5-14）。$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に入れて、1 行ずつ変形します。

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$	6-7 の式
$m\,s^2e^{st} + c\,se^{st} + k\,e^{st} = 0$	x、$\dot{x}$、$\ddot{x}$ を入れた
$(ms^2 + cs + k)\,e^{st} = 0$	3 つの項に共通の e^{st} でくくった
$ms^2 + cs + k = 0$	e^{st} は 0 にならないので、両辺を e^{st} でわった

t が消えて、s の 2 次方程式になりました。e^{st} は、どの時刻でも 0 にならない（5-14）ので、わってもかまいません。この 2 次方程式をみたす s を選べば、e^{st} は、どの時刻でも式をみたします。

この 2 次方程式を**特性方程式**（とくせいほうていしき）といいます。「特性」は、その物（ばね・質量・ダンパーの組）の性質という意味です。m、c、k だけで決まり、はじめの位置や速度には関係しません。文字 s は、3-10 で使ったものと同じで、第 9 巻のラプラス変換でも同じ s を使います。

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$　→　**特性方程式**　$ms^2 + cs + k = 0$

作り方：$\ddot{x}$ を s^2 に、$\dot{x}$ を s に、x を 1 におきかえる

数で確かめる

車 A（$m=1$、$c=3$、$k=2$）の特性方程式は $s^2+3s+2=0$ です。3-10 と 6-8 で解いた式で、$(s+1)(s+2)=0$ と因数分解して、解は $s=-1$ と $s=-2$ でした。$s=-1$ なら $x=e^{-t}$ です。本当に式をみたすか、$t=0.5$ の数で確かめます（$e^{-0.5}=0.6065$）。

	式	係数	係数をかけた値
$\ddot{x}$	$(-1)^2e^{-t}=e^{-t}$	1	0.6065
$\dot{x}$	$-e^{-t}$	3	−1.8196
x	e^{-t}	2	1.2131
		3 つの合計	0

表 3 $x=e^{-t}$ を車 A の式に入れた。$0.6065-1.8196+1.2131=0$ で、3 つの項がぴったり打ち消しあう。

どの時刻でも、3 つの項は e^{-t} に 1、−3、2 をかけたものになり、$1-3+2=0$ だから、いつでも打ち消しあいます。この $1-3+2$ は、特性方程式の左辺 s^2+3s+2 に $s=-1$ を入れた値そのものです。

❸ 場合 1：解が 2 つあるとき

車 A では、e^{-t} も e^{-2t} も式をみたします。でも、どちらか 1 つだけでは、はじめの状態（$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）に合わせられません。e^{-t} は $t=0$ で速度が −1、e^{-2t} は速度が −2 で、どちらも 0 ではないからです。

2 つをまぜる：線形だからできる

5-18 で学んだように、この式は線形です。答えを何倍しても、答えどうしをたしても答えになります。だから、A、B を定数として

$$x=Ae^{-t}+Be^{-2t}$$

も答えです。代入して確かめます。$\dot{x}=-Ae^{-t}-2Be^{-2t}$、$\ddot{x}=Ae^{-t}+4Be^{-2t}$ を入れて、e^{-t} の項と e^{-2t} の項に分けると、

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$$ 左辺

$$= (A - 3A + 2A)e^{-t} + (4B - 6B + 2B)e^{-2t}$$ 2 つの項に分けた

$$= 0 \times Ae^{-t} + 0 \times Be^{-2t} = 0$$ $1 - 3 + 2 = 0$、$4 - 6 + 2 = 0$

A、B の 2 つがあるので、はじめの位置と速度の 2 つに合わせられます（2 回微分の式には数が 2 つ：5-18）。

はじめの状態で A、B を決める

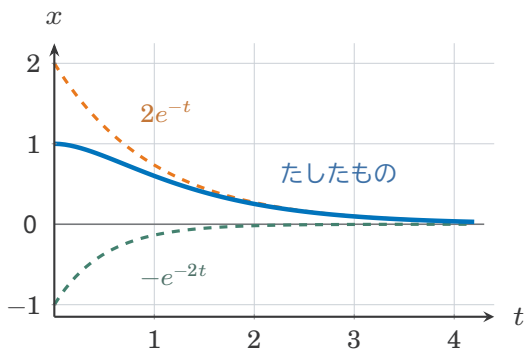
1. はじめの位置：$t = 0$ を入れると、$e^0 = 1$ なので $x(0) = A + B$。これが 1 なので $A + B = 1$。
2. はじめの速度：まず微分して $\dot{x} = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$。ここに $t = 0$ を入れると $\dot{x}(0) = -A - 2B$ で、これが 0 なので $-A - 2B = 0$。
3. ①と②の式をたすと $-B = 1$、つまり $B = -1$。①から $A = 1 - B = 2$。

車 A： $x = 2e^{-t} - e^{-2t}$

これが、3-10 の図の青い曲線の式です。表計算の結果とくらべます。

t (s)	0	0.5	1	2	3
式 $2e^{-t} - e^{-2t}$	1	0.845	0.600	0.252	0.097
表計算（$\Delta t = 0.01$）	1	0.841	0.596	0.251	0.097

表 4　小数第 3 位の小さなずれは、Δt が 0 でないため（6-2）。$\Delta t = 0.001$ にすると、表計算も 0.845、0.600 になる。



答えを 2 つの部分に分けて見ます。$-e^{-2t}$（緑）は速く 0 に近づき、$t = 2$ ではほとんど 0 です。そのあとは $2e^{-t}$（オレンジ）だけが残り、ゆっくり 0 に近づきます。ゆっくりなほう（$s = -1$）が、もどる速さを決めるのです。

なぜ、どちらの s も負になるのか

s が負なので、e^{st} は時間とともに 0 に近づき、車はもとの高さにもどります。もし s が正なら、e^{st} はどんどん大きくなって、車はどこかへ飛んでいってしまいます。ばねとダンパーなら、そんなことはおこりません。

2 つの解を s_1、s_2 とすると、特性方程式は $m(s - s_1)(s - s_2) = 0$ と書けます（3-10 の「解から因数分解の形を作る」）。展開してもとの式とくらべると、次の関係があります（2 次方程式の解と係数の関係）。

$$s_1 + s_2 = -\frac{c}{m} \qquad s_1 s_2 = \frac{k}{m}$$

m、c、k はどれも正なので、積 $s_1 s_2$ は正、和 $s_1 + s_2$ は負です。積が正なら 2 つは同じ符号、和が負なら、それは負。だから、**ばねとダンパーなら、s はかならず両方とも負**です。車 A で確かめると、和は $(-1) + (-2) = -3$ で $-\frac{3}{1}$ と同じ、積は $(-1) \times (-2) = 2$ で $\frac{2}{1}$ と同じです。

ここまでで十分

ここまでわかれば、ゴールです。この先は、式でくわしく調べます。

∂ 式でわかる 解が複素数のとき・1 つのとき　★★★★★

4 場合 3：解が複素数になるとき

車 B（$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$）の特性方程式は $s^2+2s+5=0$ です。判別式は $D=2^2-4\times1\times5=-16$ で負です。3-10 では「解はない」としましたが、6-8 で、2 乗して負になる数 j を学び、この式を解きました（6-8 で解いた式）。解の公式で、$\sqrt{-16}=4j$ として、

$$s=\frac{-2\pm4j}{2}=-1\pm2j$$

$e^{(-1+2j)t}$ は、どんな関数？

s が複素数でも、e^{st} を微分すると s が前に出るでしょうか。6-10 で確かめたのは、$e^{j\omega t}$（実部が 0）のときだけでした。そこで、$s=\sigma+j\omega$（σ、ω は実数）として、積の微分（5-6）で 1 行ずつ確かめます。

$$e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}\,e^{j\omega t}$$

指数法則（3-11）で、2 つのかけ算に分けた

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\sigma t}e^{j\omega t}\right)=\left(e^{\sigma t}\right)'e^{j\omega t}+e^{\sigma t}\left(e^{j\omega t}\right)'$$

積の微分（5-6）

$$=\sigma e^{\sigma t}e^{j\omega t}+e^{\sigma t}\cdot j\omega e^{j\omega t}$$

$(e^{\sigma t})'=\sigma e^{\sigma t}$（5-14）、$(e^{j\omega t})'=j\omega e^{j\omega t}$（6-10）

$$=\left(\sigma+j\omega\right)e^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

共通の $e^{\sigma t}e^{j\omega t}$ でくくった

$$=s\,e^{st}$$

$\sigma+j\omega=s$、指数法則でもとにもどした

たしかに、s が複素数でも「微分すると s が前に出る」が成り立ちます。だから、②の変形はそのまま使えて、$e^{(-1+2j)t}$ と $e^{(-1-2j)t}$ は、どちらも式をみたします。でも、虚数が入った関数を車の高さと言われても困ります。そこで、6-10 のオイラーの公式で、ばらしてみます。

$$e^{(-1+2j)t} = e^{-t}\,e^{j2t}$$ 指数法則 $e^{a+b}=e^a e^b$（3-11）

$$= e^{-t}(\cos 2t + j\sin 2t)$$ オイラーの公式（6-10）で $\theta = 2t$

$$e^{(-1-2j)t} = e^{-t}(\cos 2t - j\sin 2t)$$ 同じように $\theta = -2t$ とした。$\sin(-2t) = -\sin 2t$

どちらにも「e^{-t}（へっていく）」と「$\cos 2t$、$\sin 2t$（ゆれる）」が入っています。**解の実部 -1 が「へる速さ」、虚部 2 が「ゆれの角振動数」を決めている**のです。

実数の答えを組み立てる

線形なので、2 つの答えをたしても、何倍しても答えです。2 つをたして 2 でわると、j の項が消えます。

$$\frac{1}{2}\{e^{(-1+2j)t} + e^{(-1-2j)t}\}$$ 2 つをたして 2 でわった

$$= \frac{1}{2}\{e^{-t}(\cos 2t + j\sin 2t)$$ 上の 2 行を入れた

$$+ e^{-t}(\cos 2t - j\sin 2t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\times 2e^{-t}\cos 2t = e^{-t}\cos 2t$$ $+j\sin 2t$ と $-j\sin 2t$ が消えた

同じように、ひき算して $2j$ でわると $e^{-t}\sin 2t$ が出てきます。どちらも実数の関数で、どちらも答えです。だから、車 B の答えは次の形です。

$$x = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

これが、5-18 で予告した「ゆれながら止まる（e^{at} と sin のかけ算）」の正体です。

複素数を使わずに確かめる

本当に答えになっているか、$x = e^{-t}\cos 2t$ を積の微分（5-6）で微分して、式に入れてみます。

$$\dot{x} = -e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t \qquad (e^{-t})'\cos 2t + e^{-t}(\cos 2t)'$$

$$\ddot{x} = \left(e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t\right) \qquad -e^{-t}\cos 2t \text{ を微分した}$$

$$+ \left(2e^{-t}\sin 2t - 4e^{-t}\cos 2t\right) \qquad -2e^{-t}\sin 2t \text{ を微分した}$$

$$= -3e^{-t}\cos 2t + 4e^{-t}\sin 2t \qquad \text{同じ形の項をまとめた}$$

$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x$ を、$e^{-t}\cos 2t$ の項と $e^{-t}\sin 2t$ の項に分けて計算します。

- $e^{-t}\cos 2t$ の項：$\ddot{x}$ から -3、$2\dot{x}$ から $2 \times (-1) = -2$、$5x$ から 5。合計 $-3 - 2 + 5 = 0$。
- $e^{-t}\sin 2t$ の項：$\ddot{x}$ から 4、$2\dot{x}$ から $2 \times (-2) = -4$。合計 $4 - 4 = 0$。

たしかに 0 になります。**複素数は、答えを「見つける」ための道具で、見つかった答えは、実数だけで確かめられます。**（ばねや回路では、はかれるのは実数の量なので、こう考えます。量子力学では、複素数の波そのものが自然を表します：物理シリーズ。）

はじめの状態で A、B を決める

1. はじめの位置：$t = 0$ で $e^0 = 1$、$\cos 0 = 1$、$\sin 0 = 0$ なので $x(0) = A$。これが 1 なので $A = 1$。
2. はじめの速度：積の微分で

$$\dot{x} = -e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + e^{-t}(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

$t = 0$ を入れると $\dot{x}(0) = -A + 2B$。これが 0 なので、$2B = A = 1$、$B = \frac{1}{2}$。

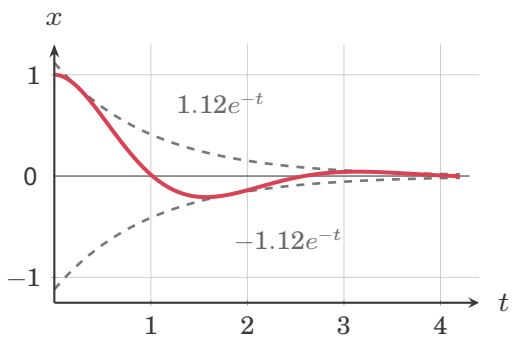
車 B： $x = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

②で、e^{-t} を微分した $-e^{-t}$ の部分を忘れると、$\dot{x}(0) = 2B$ となって、$B = 0$ とまちがえます（まちがえやすいところ）。

t (s)	0	0.5	1	2	3
式（上のわく）	1	0.583	0.014	−0.140	0.041
表計算（$\Delta t = 0.01$）	1	0.574	0.008	−0.135	0.041

表 5　車 B も、表計算と式がほぼ同じになった（ずれは Δt の分）。

山の高さは、なぜ同じ割合でへるのか



$\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$ は、4-9 の合成で、大きさ $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} \approx 1.12$ の 1 つの波にまとめられます。だから、ゆれは点線 $\pm 1.12e^{-t}$ のあいだにおさまり、点線にふれながら小さくなります。この点線を、ゆれの「つつみの線」といいます。

ゆれの周期は、$\cos 2t$ の周期 $\frac{2\pi}{2} = \pi \approx 3.14\,\mathrm{s}$ です。1 周期たつと、つつみの線 e^{-t} は $e^{-\pi} \approx 0.043$ 倍になります。どこから 1 周期はかっても、e^{-t} の性質（3-11 の倍々：同じ時間で同じ割合）から、同じ 0.043 倍です。**これが「山の高さが同じ割合でへる」理由**です。6-7 の $c = 0.4$ のばねでは、6-7 で見つけた $\alpha = \frac{c}{2m} = 0.4$ と、周期 1.579 s から、$e^{-0.4\times 1.579} = e^{-0.632} \approx 0.532$ 倍で、6-7 の表計算と同じです。

5 場合 2：解が 1 つ（重解）のとき

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ を考えます。特性方程式は $s^2 + 4s + 4 = 0$、因数分解すると $(s+2)^2 = 0$ で、解は $s = -2$ の 1 つだけ（重解）です。判別式は $D = 16 - 16 = 0$ です。

答えが 1 つ足りない

e^{-2t} は答えです。でも、2 回微分の式には、はじめの位置と速度に合わせる数が 2 つ必要です。「$Ae^{-2t} + Be^{-2t}$」としても、これは $(A+B)e^{-2t}$ で、数は $A+B$ の 1 つにまとまってしまいます。e^{-2t} とはちがう形の、もう 1 つの答えがほしいのです。

見つけ方 1：2 つの解を近づける

特性方程式の解が少しだけはなれていて、$s_1 = -2 + \varepsilon$、$s_2 = -2 - \varepsilon$（ε は小さい正の数。イプシロンと読む）だったとします。解が 2 つなら、$e^{s_1 t}$ と $e^{s_2 t}$ が答えです。線形だから、そのひき算を $s_1 - s_2 = 2\varepsilon$ でわったものも答えです。

$$\frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}$$

ε を小さくして、2 つの解を -2 に近づけると、これは何に近づくでしょう。$t = 1$ で計算します。

ε	$t=1$ での $\dfrac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}$	値
0.5	$\dfrac{e^{-1.5} - e^{-2.5}}{1}$	0.1410
0.1	$\dfrac{e^{-1.9} - e^{-2.1}}{0.2}$	0.1356
0.01	$\dfrac{e^{-1.99} - e^{-2.01}}{0.02}$	0.1353

表 6　ε を小さくすると、$te^{-2t} = 1 \times e^{-2} = 0.1353$ に近づく。

この式は「e^{st} の、s をほんの少し変えたときの変化÷ s の変化」、つまり 5-3 の微分の定義そのものです。e^{st} を（t ではなく）s で微分すると、t が前に出て

te^{st} になります。だから、近づく先は te^{-2t} です。**重解のときの、もう 1 つの答えは** te^{-2t} です。

> **せいかくに言うと**
>
> 「答えを近づけた先も、答えになる」のは、答えの式が s_1、s_2 についてなめらかに変わるので、近づけた先（極限）も、もとの式をみたすからです。極限をとってよいことのくわしい説明は大学で学びます。ここでは、見つけた te^{-2t} が本当に答えかどうかを、次の見つけ方 2 で、式に入れて確かめます。

見つけ方 2：入れて確かめる

$x = te^{-2t}$ を、積の微分（5-6）で 2 回微分します。

$$\dot{x} = e^{-2t} - 2te^{-2t} \qquad (t)'e^{-2t} + t(e^{-2t})'$$

$$\ddot{x} = -2e^{-2t} + (-2e^{-2t} + 4te^{-2t}) \qquad e^{-2t} \text{ と } -2te^{-2t} \text{ を、それぞれ微分した}$$

$$= -4e^{-2t} + 4te^{-2t} \qquad \text{同じ形の項をまとめた}$$

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x$ を、e^{-2t} の項と te^{-2t} の項に分けて計算します。e^{-2t} の項は $-4 + 4 \times 1 = 0$ です。te^{-2t} の項は $4 + 4 \times (-2) + 4 = 0$ です。たしかに答えです。

はじめの状態で決める

答えの形は $x = (A + Bt)e^{-2t}$ です。$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$ とします。

1. はじめの位置：$x(0) = (A + 0) \times 1 = A$。これが 1 なので $A = 1$。
2. はじめの速度：$\dot{x} = Be^{-2t} - 2(A + Bt)e^{-2t}$ より $\dot{x}(0) = B - 2A$。これが 0 なので $B = 2A = 2$。

$$x = (1 + 2t)e^{-2t}$$

t がかかっていても、e^{-2t} が速く 0 に近づくので、x は 0 に近づきます（5-18 ⑤：e^{-t} がかかると、t^n がかかっていても、やがて 0 に近づく）。$t = 0.5$、1、2 では、0.736、0.406、0.092 です。

6 3 つの場合を 1 つにまとめる：減衰比 ζ

ここまでの 3 つの場合を、ばね・質量・ダンパーの文字のままで、まとめます。

判別式で分ける

6-8 の例題では、判別式で解の種類（2 つ・1 つ・複素数）を見分けました。その 3 つが、ここまでの 3 つの場合です。特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$ の判別式は $D = c^2 - 4mk$ です。

判別式	c の大きさ	特性方程式の解と、答えの形	動き方
$D > 0$	$c > 2\sqrt{mk}$	負の解が 2 つ $Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$	ゆっくりもどる （過減衰）
$D = 0$	$c = 2\sqrt{mk}$	負の重解 $(A + Bt)e^{st}$	ちょうど （臨界減衰）
$D < 0$	$c < 2\sqrt{mk}$	複素数の解 $-\alpha \pm j\omega_\mathrm{d}$ $e^{-\alpha t}(A\cos\omega_\mathrm{d} t + B\sin\omega_\mathrm{d} t)$	ゆれながら止まる （減衰振動）

表 7　判別式の符号で、動き方が決まる。

$D = 0$ は $c^2 = 4mk$、つまり $c = 2\sqrt{mk}$ のときです（c は正）。**6-7 の表計算で見つけた境め $2\sqrt{mk}$ は、特性方程式の判別式が 0 になる所だったのです。** 2 がつくのは、判別式の「$4mk$」の 4 の平方根だからです。❓はてな？の答えは、ここにあります。判別式の符号が、ゆれ方を決めているのです。

それぞれの場合に、名前があります。大学の機械の本では「過減衰（かげんすい）・臨界減衰（りんかいげんすい）・減衰振動（げんすいしんどう）」、電気の本では「過制動・臨界制動・不足制動」といいます。減衰振動は「不足減衰」ともいいます。

6-7 で見つけた $\alpha = c/2m$ のわけ

両辺を m でわると、次の式になります。

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

解の公式（3-10）で解きます。s の係数 $\frac{c}{m}$ の半分を $\alpha = \frac{c}{2m}$ と書き、$\frac{k}{m} = \omega_n^2$（6-6）を使います。

$$s = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

解の公式（$a=1$、$b=\frac{c}{m}$、c の所は $\frac{k}{m}$）

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

分子の 2 つの項を 2 でわった（$\sqrt{\ }$ の中は 4 でわる）

$$= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$$

$\alpha = \frac{c}{2m}$、$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

- $\alpha < \omega_n$ なら、$\sqrt{\ }$ の中が負なので $s = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$。答えは $e^{-\alpha t}(\cdots)$ で、**6-7 で表計算から見つけた「つつみ $e^{-\alpha t}$、$\alpha = \frac{c}{2m}$」は、解の実部だった**のです。$m = 0.5$、$c = 0.4$ なら $\alpha = \frac{0.4}{2\times 0.5} = 0.4$ です。
- 境めは $\sqrt{\ }$ の中が 0、つまり $\alpha = \omega_n$ のときです。$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の両辺に $2m$ をかけると、$c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{m^2 k}{m}} = 2\sqrt{mk}$。6-7 の臨界の $c_c = 2\sqrt{mk}$ と同じです。

ζ と ω_n で書く

6-7 で紹介した標準の形 $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$ も、ここから導けます。固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と、減衰比 $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ を使って、係数を書きかえます。

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の両辺を 2 乗した

$$\frac{c}{m} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \times \frac{2\sqrt{mk}}{m}$$

$\frac{2\sqrt{mk}}{2\sqrt{mk}} = 1$ をかけた

$$= \zeta \times 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\zeta\omega_n$$

$\frac{\sqrt{mk}}{m} = \sqrt{\frac{mk}{m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

特性方程式に入れた

これを解の公式（3-10）で解くと、次のようになります。

$$s = -\zeta\omega_{\mathrm{n}} \pm \omega_{\mathrm{n}}\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- $\zeta > 1$ なら $\sqrt{\ }$ の中が正で、負の解が 2 つ（ゆっくり）。$\zeta = 1$ なら $\sqrt{\ }$ の中が 0 で、重解（ちょうど）。
- $\zeta < 1$ なら $\sqrt{\ }$ の中が負です。$\sqrt{\zeta^2 - 1} = j\sqrt{1 - \zeta^2}$ として、次の形になります。

$$s = -\alpha \pm j\omega_{\mathrm{d}} \qquad \alpha = \zeta\omega_{\mathrm{n}} = \frac{c}{2m}、\quad \omega_{\mathrm{d}} = \omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1 - \zeta^2}$$

α は、へる速さ（単位は 1/s）、ω_{d} は、減衰があるときのゆれの角振動数（rad/s）です。

ω_{d} は ω_{n} より少し小さいので、ダンパーをつけると、ゆれの周期 $T_{\mathrm{d}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{d}}}$（6-7 と同じ書き方）は少し長くなります。6-7 の表計算で「山と山の時間が少しだけ長くなった」のは、このためです。

記号カード　初めて出た章 **6-12**

s

読み方　エス
意味　特性方程式の文字。$x = e^{st}$ と置くと、微分が「s をかける」になる
英語　characteristic root

記号カード　初めて出た章 **6-12**

ω_{d}

読み方　オメガ・ディー
意味　減衰があるときのゆれの角振動数。$\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1 - \zeta^2}$
英語　damped natural frequency

6-7 のばねを式で解く

$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$ では、$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{8 \div 0.5} = 4\,\mathrm{rad/s}$、境めの c は $2\sqrt{0.5 \times 8} = 4\,\mathrm{N \cdot s/m}$ です。はじめ $x(0) = 0.1$、$\dot{x}(0) = 0$ で、3 つの c を解きます。

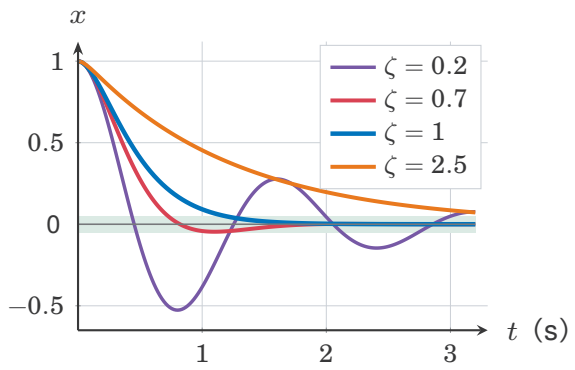
c	ζ	特性方程式（$\div m$）と解	答え
0.4	0.1	$s^2+0.8s+16=0$ $s=-0.4\pm 3.980j$	$e^{-0.4t}(0.1\cos 3.980t+0.0101\sin 3.980t)$
4	1	$s^2+8s+16=0$ $s=-4$（重解）	$(0.1+0.4t)e^{-4t}$
10	2.5	$s^2+20s+16=0$ $s=-0.835$、 -19.17	$0.1046e^{-0.835t}-0.0046e^{-19.17t}$

表 8　424 ページの 3 本の曲線は、この 3 つの式でかいた。

$c=10$ を見ると、なぜ「強くしすぎると、かえってゆっくりになる」かがわかります。2 つの解 -0.835 と -19.17 のうち、-19.17 の部分はすぐ消えますが、-0.835 の部分はゆっくりしかへりません。解の和は $-\frac{c}{m}=-20$、積は $\frac{k}{m}=16$ と決まっています。c を大きくすると和の大きさがふえ、積は 16 のままなので、片方の解はどんどん 0 に近づき、そのぶんゆっくりになるのです（$-19.17\times(-0.835)\approx 16$）。

7 ゆれずにいちばん早いのは $\zeta=1$。でも…

3-10 では「ゆれずに、いちばん早くもとにもどるのは $D=0$ のとき。実際の車は、ほんの少しだけゆれるように設計することが多い」と書きました。このわけを、数で確かめます。



$\omega_n = 4\,\mathrm{rad/s}$ のばねで、ζ だけを変えた（はじめ $x = 1$、$\dot{x} = 0$）。緑の帯は、もとの位置から $\pm 5\,\%$ の範囲。

ζ	行きすぎ	帯に入るまで
0.2	53 %	3.44 s
0.4	25 %	1.90 s
0.7	4.6 %	0.72 s
1	0	1.19 s
2.5	0	3.64 s

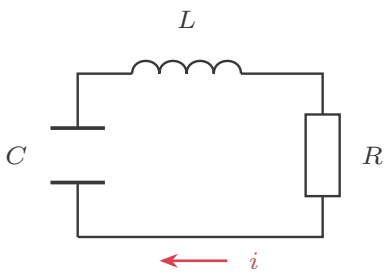
- **行きすぎない**ものの中では、$\zeta = 1$ がいちばん早く帯に入ります（1.19 s）。3-10 の「$D = 0$ がいちばん早い」は、このことです。
- ところが、**少し行きすぎてもよい**なら、$\zeta = 0.7$ のほうがずっと早く帯に入ります（0.72 s）。行きすぎは 4.6 % だけです。いきおいよくもどって、少し行きすぎてから帯におさまるからです。

早く落ち着かせたい計器や機械では、ζ を 0.7 くらいにすることがよくあります。車では、さらに「乗り心地」も考えます。ダンパーを強くする（c を大きくする）と、道のでこぼこで車輪がおし上げられたとき、その力がダンパーを通して車体にそのまま伝わり、ごつごつした乗り心地になります。そこで、ふつうの乗用車では、ζ を 1 よりかなり小さくして、ほんの少しゆれるようにします。

8 電気の回路でも同じ：RLC 回路

6-7 では、コイル L〔H〕・抵抗 R〔Ω〕・コンデンサー C〔F〕をつないだ回路で、コンデンサーにためた電気を流したときの、電荷 q〔C〕の式を作りました。$\dot{q} = i$ は電流です。

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$



ばね・質量・ダンパーの式と見くらべると、次のように対応します。

- 質量 m　と　コイル L
- ダンパー c　と　抵抗 R
- ばね定数 k　と　$\frac{1}{C}$

だから、特性方程式も同じ作り方で、

$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$ です。

対応を使えば、ばねで作った式をそのまま使えます。

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{境めの抵抗 } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の k を $\frac{1}{C}$ に、m を L におきかえました。境めの $2\sqrt{mk}$ も、同じようにおきかえています。

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \to \sqrt{\frac{1/C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\sqrt{mk} \to 2\sqrt{L \times \frac{1}{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

6-7 の数（$L = 10\,\mathrm{mH} = 0.01\,\mathrm{H}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$）で計算します。

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{0.01 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

単位は rad/s（振動数は 1592 Hz）

$$2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0.01}{10^{-6}}} = 2\sqrt{10^4} = 2 \times 100 = 200$$

境めの抵抗は 200 Ω

$R = 20\,\Omega$ なら $\zeta = \frac{20}{200} = 0.1$ でゆれながら止まり、$R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ なら $\zeta = 5$ でゆっくり止まります。6-7 の表計算と同じです。

単位で確かめる

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ が本当に Ω になるかを、単位で確かめます。

- コイルのきまり $V = L\frac{di}{dt}$ から、$1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{V\,s/A}$。
- コンデンサーのきまり $q = CV$ から、$1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V} = 1\,\mathrm{A\,s/V}$。電荷 1 C は、1 A の電流が 1 s 流れたときの量だからです。

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{V \cdot s/A}}{\mathrm{A \cdot s/V}} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{A}^2} \qquad \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{F}}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$$

オームの法則 $R = \frac{V}{I}$ の単位と同じ Ω になりました。

9 1 階の式も、同じ方法で解ける

6-4 の、コンデンサーの放電の式は $RC\dot{V} + V = 0$ でした（$\tau = RC$）。これにも $V = e^{st}$ を入れてみます。

$$RC\,se^{st} + e^{st} = 0 \qquad V = e^{st}、\dot{V} = se^{st} \text{ を入れた}$$

$$RC\,s + 1 = 0 \qquad e^{st} \text{ でわった（特性方程式は 1 次方程式）}$$

$$s = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau} \qquad s \text{ について解いた}$$

答えは $V = Ae^{-t/\tau}$ で、6-4 と同じです。1 階の式では、特性方程式は 1 次方程式になり、解は 1 つ。2 階の式では 2 次方程式で、解は 2 つ。**式の階数と、特性方程式の次数は同じ**です。

10 s の場所で、動きがわかる

特性方程式の解 s を、6-9 の複素平面（横が実部、たてが虚部）に点で打ってみます。

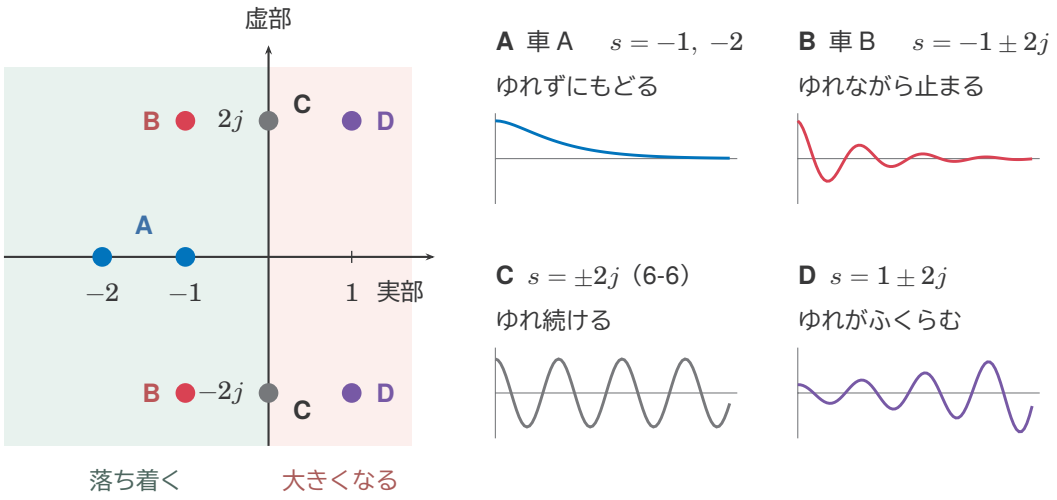


図 4　特性方程式の解 s を複素平面に打つ（左）と、そのときの動き（右）。左半分（実部が負）なら落ち着き、右半分（実部が正）なら大きくなる。虚部があれば、ゆれる。

- **実部**は、へる速さを決めます（実部が $-\alpha$ なら $e^{-\alpha t}$ でへる）。虚軸から左へ遠いほど、早く落ち着きます。
- **虚部**は、ゆれの角振動数です。横軸の上なら、ゆれません。
- 虚軸の上（実部が 0）は、ダンパーのない 6-6 のばね（$s = \pm j\omega_n$）です。ゆれがへりも、ふえもしません。
- 右半分に 1 つでも解があると、動きはどんどん大きくなります。5-18 の「たおれる棒」（$\ddot{\theta} = 4\theta$、$s = \pm 2$）は、$s = 2$ が右半分にあるので、たおれていきました。

ばね・質量・ダンパーの解は、いつも左半分にあります（③の解と係数の関係）。でも、エンジンやモーターで力を加える機械（ロボット、飛行機、ロケット）では、つくり方しだいで右半分に解ができて、ゆれがどんどん大きくなることがあります。そうならないように、解を左半分に置くことが、第 9 巻の制御工学の大きな目標です（9-9 では、この点を「極」とよびます）。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

定数係数の 2 階線形同次微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ に $y = e^{\lambda x}$ を代入すると、特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ を得る。その根を λ_1, λ_2 とすると、一般解は、(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$（実根）のとき $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$、(ii) 重根 λ のとき $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$、(iii) $\lambda = p \pm qi$ のとき $y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ である。

訳 この章の s を λ（ラムダ）、時間 t を x、虚数単位 j を i と書いている。a、b、c は m、c、k のこと（c の使い方が、この章とちがう）。「同次」は右辺が 0、「根」は解、「一般解」は数 C_1、C_2 が決まっていない答え。第 7 巻では、行列の固有値も同じ λ で書く。

もっと知りたい ★★★★★

ダンパーが熱にしたエネルギーを、5-16 の積分で求める

$m = 1\,\mathrm{kg}$、$c = 2\,\mathrm{N\cdot s/m}$、$k = 2\,\mathrm{N/m}$ のおもりを、ハンマーでたたいて速さ $1\,\mathrm{m/s}$ をあたえます（$x(0) = 0$、$\dot{x}(0) = 1$）。$s^2 + 2s + 2 = 0$ の解は $s = -1 \pm j$ で、$A = 0$、$B = 1$ より $x = e^{-t}\sin t$、$\dot{x} = e^{-t}(\cos t - \sin t)$ です。

ダンパーが 1 秒あたりにうばうエネルギー（仕事率、5-12）は「力×速さ」$= c\dot{x} \times \dot{x} = c\dot{x}^2$ なので、止まるまでの合計は $\int_0^\infty c\dot{x}^2\,\mathrm{d}t$ です。

$$\dot{x}^2 = e^{-2t}(1 - \sin 2t)$$

展開して $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$、$2\sin t\cos t = \sin 2t$

$$\int_0^\infty 2\dot{x}^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-2t}\mathrm{d}t - 2\int_0^\infty e^{-2t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$$

$c = 2$。2 つに分けた

1 つめは $2 \times \frac{1}{2} = 1$（5-14）。2 つめは、$u = 2t$ とおきかえる（5-16）と $\int_0^\infty e^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u$ になります。5-16 で $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x \cdot \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$ を求めたのと同じ部分積分 2 回で $\int e^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^{-u}(\sin u + \cos u) + C$（微分してもどるか確かめられる）なので、その値は $0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$。合計は

$$\int_0^\infty 2\dot{x}^2\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\quad(\mathrm{J})$$

はじめの運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{J}$ と、ぴったり同じです。あたえたエネルギーは、全部ダンパーの中で熱に変わったのです。

たいせつ

作り方	$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ に $x=e^{st}$ を入れる
	→ 特性方程式 $ms^2+cs+k=0$
解が 2 つ	$x=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$（ゆっくりもどる）
重解	$x=(A+Bt)e^{st}$（ちょうど。$c=2\sqrt{mk}$、$\zeta=1$）
複素数の解	$s=-\alpha\pm j\omega_{\mathrm{d}}$ なら
	$x=e^{-\alpha t}(A\cos\omega_{\mathrm{d}}t+B\sin\omega_{\mathrm{d}}t)$
数の決め方	A、B は、はじめの位置と速度で決める

この章で出てきたことば

特性方程式　微分方程式に e^{st} を入れて e^{st} でわった、s の方程式。

重解　2 次方程式の 2 つの解が重なって、1 つになったもの（$D=0$）。

減衰振動・臨界減衰・過減衰　ゆれながら止まる・ちょうど止まる・ゆっくりもどる動き。電気では不足制動・臨界制動・過制動。

つつみの線　ゆれの山をなぞった線。減衰振動では $e^{-\alpha t}$ の形。

特性方程式で解く手順

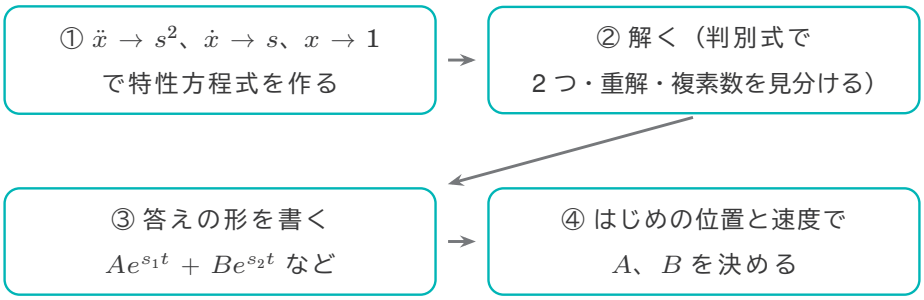


図 5　例題は、どれもこの 4 つの手順で解く。最後に、答えを式に入れて確かめるとよい。

例題でたしかめよう

例題 1　解が 2 つのとき

$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

考え方　e^{st} を入れて特性方程式を作る（②）。

解が 2 つなら $Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t}$。A、B は、はじめの位置と速度で決める（③）。

式　特性方程式：$s^2+5s+6=0$、$(s+2)(s+3)=0$ で $s=-2$、-3

答えの形：$x=Ae^{-2t}+Be^{-3t}$。位置：$x(0)=A+B=1$

速度：$\dot{x}=-2Ae^{-2t}-3Be^{-3t}$ より $\dot{x}(0)=-2A-3B=0$

位置の式を 2 倍して、速度の式にたす：$-B=2$

よって $B=-2$、$A=1-B=3$

答え　$x=3e^{-2t}-2e^{-3t}$

じぶんでとこう 1

$\ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$、$x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

例題 2　解が複素数のとき

$\ddot{x}+2\dot{x}+10x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

考え方　判別式が負なら、解は $-\alpha \pm j\omega_{\mathrm{d}}$ の形。

答えは $e^{-\alpha t}(A\cos\omega_{\mathrm{d}}t+B\sin\omega_{\mathrm{d}}t)$（④）。速度は積の微分で。

式　特性方程式：$s^2+2s+10=0$、$D=4-40=-36$

$$s=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2\pm 6j}{2}=-1\pm 3j$$

答えの形：$x=e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$。位置：$x(0)=A=1$

速度：$\dot{x}=-e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$

$$+e^{-t}(-3A\sin 3t+3B\cos 3t)$$

$\dot{x}(0)=-A+3B=0$ より $B=\frac{A}{3}=\frac{1}{3}$

答え　$x=e^{-t}\left(\cos 3t+\dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$

じぶんでとこう 2

$\ddot{x}+4\dot{x}+13x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう（6-8 の $s^2+4s+13=0$）。

例題 3　重解のとき

$\ddot{x}+6\dot{x}+9x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

考え方　重解 s なら、答えは $(A+Bt)e^{st}$（⑤）。$Ae^{st}+Be^{st}$ では数が 1 つしかない。

式　特性方程式：$s^2+6s+9=0$、$(s+3)^2=0$ で $s=-3$（重解）

答えの形：$x=(A+Bt)e^{-3t}$。位置：$x(0)=A=1$

速度：$\dot{x}=Be^{-3t}-3(A+Bt)e^{-3t}$ より $\dot{x}(0)=B-3A=0$、$B=3$

答え　$x=(1+3t)e^{-3t}$

3

じぶんでとこう 3

$\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$、$x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

例題 4　車の 1 輪分のゆれ

車の 1 輪分を、質量 $m = 300\,\mathrm{kg}$、ばね定数 $k = 30\,000\,\mathrm{N/m}$、ダンパー $c = 1800\,\mathrm{N \cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーと考えます。ω_n、ζ、ω_d、ゆれの周期を求めましょう。また、1 周期でゆれの山は何倍になりますか（$\sqrt{0.91} = 0.954$、$e^{-1.976} = 0.139$）。

考え方　$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{k}{m}}$、$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$、$\alpha = \zeta\omega_\mathrm{n}$、$\omega_\mathrm{d} = \omega_\mathrm{n}\sqrt{1-\zeta^2}$（⑥）。1 周期で、つつみの線 $e^{-\alpha t}$ が何倍になるかを見る（④）。

式　$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{30\,000 \div 300} = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{rad/s}$

$$2\sqrt{mk} = 2\sqrt{300 \times 30\,000} = 2\sqrt{9\,000\,000}$$

$$= 2 \times 3000 = 6000$$

$\zeta = \frac{1800}{6000} = 0.3$（1 より小さいので、ゆれながら止まる）

$\alpha = 0.3 \times 10 = 3\,\mathrm{/s}$

$\omega_\mathrm{d} = 10\sqrt{1 - 0.09} = 10 \times 0.954 = 9.54\,\mathrm{rad/s}$

周期：$\frac{2\pi}{\omega_\mathrm{d}} = \frac{6.283}{9.54} = 0.659\,\mathrm{s}$

1 周期で：$e^{-3\times0.659} = e^{-1.976} = 0.139$

答え　$\omega_\mathrm{n} = 10\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta = 0.3$、$\omega_\mathrm{d} = 9.54\,\mathrm{rad/s}$、周期 約 0.66 s、1 周期で約 0.14 倍

1 周期（約 0.66 s）で、ゆれは 7 分の 1 ほどになります。2 回ほど上下すると、ほとんどわからなくなります。$\omega_\mathrm{n} = 10\,\mathrm{rad/s}$ は、振動数にすると $\frac{10}{2\pi} \approx 1.6\,\mathrm{Hz}$ です。乗用車の車体の上下のゆれ（約 1〜1.5 Hz）に近い振動数です。

じぶんでとこう 4

$m = 400\,\mathrm{kg}$、$k = 40\,000\,\mathrm{N/m}$、$c = 4000\,\mathrm{N \cdot s/m}$ のとき、ω_n、ζ、ω_d、ゆれの周期を求めましょう。また、1 周期でゆれの山は何倍になりますか（$\sqrt{0.75} = 0.866$、$e^{-3.628} = 0.027$）。

例題 5　ちょうどよいダンパー

$m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 50\,\mathrm{N/m}$ のばねに、ゆれずにいちばん早くもどるダンパーをつけます。c を求めましょう。また、$x(0) = 0.1$、$\dot{x}(0) = 0$ のときの x を求めましょう。

考え方　ゆれずにいちばん早いのは $\zeta = 1$、つまり $c = 2\sqrt{mk}$（⑥⑦）。そのとき重解なので、答えは $(A + Bt)e^{st}$（⑤）。

式　$c = 2\sqrt{2 \times 50} = 2\sqrt{100} = 20$

特性方程式：$2s^2 + 20s + 50 = 0$。2 でわって $s^2 + 10s + 25 = 0$、$(s + 5)^2 = 0$、$s = -5$

答えの形：$x = (A + Bt)e^{-5t}$。位置：$A = 0.1$。速度：$\dot{x}(0) = B - 5A = 0$ より $B = 0.5$

答え　$c = 20\,\mathrm{N \cdot s/m}$、$x = (0.1 + 0.5t)e^{-5t}$

じぶんでとこう 5

$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 16\,\mathrm{N/m}$ のばねに、ゆれずにいちばん早くもどるダンパーをつけます。c と、$x(0) = 0.2$、$\dot{x}(0) = 0$ のときの x を求めましょう。

例題 6　RLC 回路の境めの抵抗

$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路について、ゆれずにいちばん早く電気がなくなる抵抗 R を求めましょう。また、$R = 20\,\Omega$ のときの ζ と ω_d、ゆれの振動数を求めましょう（$\sqrt{0.99} = 0.995$）。

考え方　m を L、c を R、k を $\frac{1}{C}$ におきかえて、境めは $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$、$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$（⑧）。振動数は $\omega_\mathrm{d} \div 2\pi$。

式　$\frac{L}{C} = \frac{0.01}{10^{-6}} = 10^4$、$\sqrt{10^4} = 100$、$R = 2 \times 100 = 200\,\Omega$

$\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{100}$ なので、$\zeta = \frac{20}{2} \times \frac{1}{100} = 0.1$

$\omega_\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10^4$

$\omega_\mathrm{d} = 10^4 \times 0.995 = 9950\,\mathrm{rad/s}$

振動数：$9950 \div 6.283 = 1584\,\mathrm{Hz}$

答え　境めは $200\,\Omega$。$R = 20\,\Omega$ では $\zeta = 0.1$、$\omega_\mathrm{d} = 9950\,\mathrm{rad/s}$、約 $1580\,\mathrm{Hz}$

じぶんでとこう 6

$L = 4\,\mathrm{mH}$、$C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路で、境めの抵抗を求めましょう。また、$R = 40\,\Omega$ のときの ζ と ω_d、ゆれの振動数を求めましょう（$\sqrt{0.99} = 0.995$）。

例題 7　RLC 回路の放電を式で解く

$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 200\,\Omega$（境めの抵抗）の回路で、はじめにコンデンサーを 10 V にしておき（電荷 $q(0) = CV = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$）、スイッチを入れます（電流 $\dot{q}(0) = 0$）。電荷 q の式を求めましょう。また、$t = 0.5\,\mathrm{ms}$ で、電荷ははじめの何倍になっていますか（$e^{-5} = 0.00674$）。

考え方　$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ に $q = e^{st}$ を入れて特性方程式を作る（⑧）。境めの抵抗なので重解になり、答えは $(A + Bt)e^{st}$（⑤）。

式　特性方程式：$0.01s^2 + 200s + 10^6 = 0$。両辺を 0.01 でわって

$s^2 + 2 \times 10^4 s + 10^8 = 0$、$(s + 10^4)^2 = 0$ で $s = -10^4$（重解）

答えの形：$q = (A + Bt)e^{-10^4 t}$。はじめ：$A = 10^{-5}$

電流：$\dot{q}(0) = B - 10^4 A = 0$ より $B = 10^4 \times 10^{-5} = 0.1$

$q = 10^{-5}(1 + 10^4 t)e^{-10^4 t}$

$t = 0.5\,\mathrm{ms} = 5 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$ では $10^4 t = 5$ なので

$(1 + 5)e^{-5} = 6 \times 0.00674 \approx 0.040$

答え　$q = 10^{-5}(1 + 10^4 t)e^{-10^4 t}$（C）、約 0.04 倍

0.5 ms（2000 分の 1 秒）で、電気の 96 % がなくなります。R を小さくすると、電荷はゆれながら（＋と－ を行ったり来たりしながら）へります。

じぶんでとこう 7

$L = 1\,\mathrm{mH}$、$C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 200\,\Omega$ の回路で、はじめ $q(0) = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$、$\dot{q}(0) = 0$ のときの電荷 q の式を求めましょう。また、$t = 50\,\mu\mathrm{s}$ で、電荷ははじめの何倍ですか（$e^{-5} = 0.00674$）。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

特性方程式で s を落とす

✕ $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$ の特性方程式は $s^2+3+2=0$

○ $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$ の特性方程式は $s^2+3s+2=0$

$\dot{x}$ は se^{st} なので、$\dot{x}$ の項には s が 1 つ残ります。x の項は e^{st} でわると 1 になり、s はつきません。$\ddot{x}$ は s^2、$\dot{x}$ は s、x は 1 と、項ごとに確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

重解で $Ae^{st}+Be^{st}$ と書く

✕ $s=-2$（重解）なので $x=Ae^{-2t}+Be^{-2t}$

○ $s=-2$（重解）なので $x=(A+Bt)e^{-2t}$

$Ae^{-2t}+Be^{-2t}=(A+B)e^{-2t}$ で、数は実は 1 つです。はじめの位置と速度の 2 つには合わせられません。2 つめの答えは te^{-2t} です。

⚠ まちがえやすいところ

速度を求めるとき、$e^{-\alpha t}$ の微分を忘れる

✕ $x=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ なので $\dot{x}(0)=2B$

○ 積の微分で $\dot{x}(0)=-A+2B$

e^{-t} も時間で変わるので、積の微分（5-6）を使います。$-A$ の部分を忘れると、B がまちがった値になります。

⚠ まちがえやすいところ

答えに j を残す

✕　$x = Ae^{(-1+2j)t}$

○　$x = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$

車の高さや電荷は、実数でしか表せません。複素数の解は「答えを見つける道具」です。オイラーの公式でばらして、cos と sin の実数の形に組み立ててから、A、B を決めます。

⚠ まちがえやすいところ

ω_d と ω_n を取りちがえる

✕　$\zeta = 0.5$ のゆれの周期は $\dfrac{2\pi}{\omega_\mathrm{n}}$

○　$\zeta = 0.5$ のゆれの周期は $\dfrac{2\pi}{\omega_\mathrm{d}}$、$\omega_\mathrm{d} = \omega_\mathrm{n}\sqrt{1-\zeta^2}$

ダンパーがあると、ゆれは少しゆっくりになります。$\zeta = 0.5$ なら $\sqrt{0.75} = 0.866$ で、周期は 15 % ほど長くなります。ζ が 0.1 くらいなら、ちがいは 0.5 % ほどで、ほとんど同じです。

コラム　e^{st} と置くアイデア

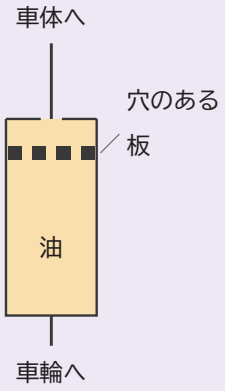
「微分方程式に e^{st} を入れて、s の代数方程式にする」方法は、オイラーが 1743 年に、定数係数の線形微分方程式の解き方としてまとめました。重解のときに t をかける工夫も、そのころに知られていました。約 150 年後、イギリスの電気技術者ヘビサイドは、「微分を s のような文字の『かけ算』として計算する」方法で、電信の回路の過渡現象を次々に計算しました。この方法を、数学として正しく整えたものが、第 9 巻のラプラス変換です。

物理・工学ではこう使う

車のサスペンション

ばね（コイルばね）と、ショックアブソーバー（ダンパー）が、車輪ごとについています。

ショックアブソーバーは、油の入った筒の中を、小さな穴のあいた板が動くしくみで、油が穴を通りぬけるときの抵抗が、速さに比例するような力になります。例題 4 に近く、車体の上下のゆれの ω_n は 6〜9 rad/s（約 1〜1.5 Hz）で、ζ は 1 よりかなり小さくして、乗り心地とゆれのおさまりの速さのかね合いをとります。



電子回路のリンギング

コンピュータの基板の配線にも、小さなコイル（配線の L）とコンデンサー（配線と地面のあいだの C）があります。スイッチが切りかわった瞬間、電圧が目標より行きすぎて、ゆれながら落ち着くことがあり、これをリンギングといいます。配線に小さな抵抗を入れて ζ を大きくし、ゆれをおさえます（物理シリーズ『電磁気学』の過渡現象）。

制御工学の「2 次遅れ」

モーターでロボットの腕を動かすとき、腕の角度 θ の式も、ばね・質量・ダンパーと同じ形になります。設計する人は、⑦の表のように、行きすぎと速さのかね合いで ζ を選びます（9-9）。

章末問題

6-12 のまとめ

基本 ★★★★

1 次の式の特性方程式を作り、判別式で「ゆっくりもどる・ちょうど・ゆれながら止まる」のどれかを答えましょう。

(1) $\ddot{x}+7\dot{x}+12x=0$　(2) $2\ddot{x}+4\dot{x}+10x=0$　(3) $\ddot{x}+8\dot{x}+16x=0$

2 $\ddot{x}+6\dot{x}+8x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

3 $\ddot{x}+6\dot{x}+25x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

4 $\ddot{x}+10\dot{x}+25x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

5 $m=2\,\mathrm{kg}$、$k=200\,\mathrm{N/m}$、$c=8\,\mathrm{N\cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーの ω_n、ζ、ω_d を求めましょう（$\sqrt{0.96}=0.980$）。

6 $L=20\,\mathrm{mH}$、$C=0.5\,\mu\mathrm{F}$ の RLC 回路で、ゆれずにいちばん早く電気がなくなる抵抗を求めましょう。

チャレンジ ★★★★★

7 車の 1 輪分を、$m=200\,\mathrm{kg}$、$k=20\,000\,\mathrm{N/m}$、$c=1200\,\mathrm{N\cdot s/m}$ と考えます。ζ、ω_d、ゆれの周期を求め、1 周期でゆれの山が何倍になるか求めましょう（$\sqrt{0.91}=0.954$、$e^{-1.976}=0.139$）。

8 $m=1\,\mathrm{kg}$、$k=4\,\mathrm{N/m}$ のばねに、ゆれずにいちばん早くもどるダンパーをつけます。c を求め、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ のときの x を求めましょう。また、$t=1$ での x を求めましょう（$e^{-2}=0.135$）。

9 $L=10\,\mathrm{mH}$、$C=1\,\mu\mathrm{F}$、$R=100\,\Omega$ の RLC 回路の ζ と ω_d、ゆれの振動数を求めましょう（$\sqrt{0.75}=0.866$）。

10 $m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$c = 0.4\,\mathrm{N \cdot s/m}$（6-7 のばね）の ζ、α、ω_d、ゆれの周期を求め、1 周期でゆれの山が何倍になるか求めましょう（$\sqrt{0.99} = 0.995$、$e^{-0.632} = 0.532$）。

11 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 0$、$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$ をみたす x を求めましょう。

12 $\ddot{x} + 8\dot{x} + 12x = 0$、$x(0) = 2$、$\dot{x}(0) = 0$ をみたす x を求めましょう。

13 $L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 50\,\Omega$ の RLC 回路の ζ と ω_d を求めましょう（$\sqrt{0.9375} = 0.968$）。

3

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 式に e^{st} を入れて、特性方程式を作れる。 → 425 ページ
- ☐ 解が 2 つ・複素数・重解のとき、答えを組み立てられる。 → 430 ページ
- ☐ ζ で動き方を見分け、車や RLC 回路の数を求められる。 → 436 ページ

ミナ

「e^{st} を入れてみる」だけで、微分方程式が 2 次方程式になった！
次の 6-13 では、外からゆすり続けるとどうなるかを調べよう。

第 3 部　式で解く

★★★★★

6-13 ゆらし続けると：強制振動と共振

道しるべ　この章の前に 3-8 5-7 6-6 6-10 6-12　この章の先に 6-14 9-8 9-12

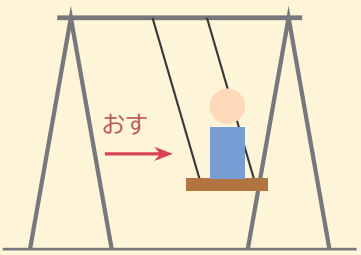
この章でできるようになること

- ★★★ ゆすり続けたときのゆれを、表計算と共振曲線で説明できる。
- ★★★★★ ゆすりに合うゆれ（特殊解）を、係数を比べる方法と複素数で求められる。
- ★★★★★ いちばん大きくゆれる角振動数を微分で求め、RLC 回路の共振周波数を求められる。

はてな？

ブランコに乗った友だちを、うしろから軽くおします。1 回の力は小さくても、何回もおすうちに、ブランコはどんどん高く上がります。

でも、おすタイミングがでたらめだと、うまく上がりません。いつ、どの向きにおせば、小さな力で大きくゆらせるのでしょう。



6-12 では、ばね・質量・ダンパーを「1 回はなしたあと」の動きを調べました。ゆれは、やがて止まりました。

この章では、外から**ゆすり続ける**とどうなるかを調べます。ブランコ、せんたく機の脱水、地震でゆれる建物、そしてラジオの電気の回路。どれも「ゆすり続

けられるもの」です。ゆするリズムが、その物が自分でゆれるリズム（6-6 の固有角振動数 ω_n）に近いと、小さな力でも、とても大きくゆれます。これを「共振」といいます。

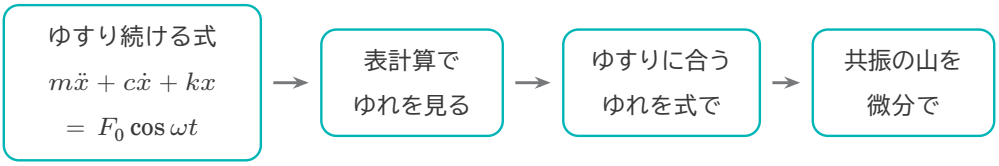


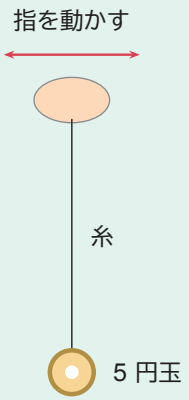
図 1　この章の道すじ。

やってみよう　5 円玉の振り子を、手でゆらそう

用意するもの

5 円玉、糸（約 30 cm）

1. 糸の先に 5 円玉を結び、糸の上のはしを指でつまむ。指を動かさずにゆらして、5 円玉が自分でゆれるリズムを数えよう（1 秒に 1 往復くらい）。
2. 5 円玉を止めてから、指を左右に 2 cm くらい、ゆっくり（3 秒で 1 往復くらい）動かそう。5 円玉はどう動く？
3. 指の動きを、①のリズムに合わせよう。
4. 指を、できるだけ速く（1 秒に 3 往復くらい）動かそう。



指の動き	5 円玉のゆれの大きさ	指と同じ向き？
② ゆっくり	指と同じくらい	同じ向き
③ 自分のリズム	どんどん大きくなる	（4 分の 1 周期おくれる）
④ 速く	ほとんど動かない	反対向き

表 1　ミナさんの観察。③では、指を少ししか動かしていないのに、5 円玉は大きくゆれた。

同じ指の動きでも、リズムしだいで、ゆれの大きさも向きも、まったくちがいました。30 cm の糸の振り子が自分でゆれる周期は、6-6 の $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ に $L = 0.3\,\mathrm{m}$ を入れて、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{9.8}} \approx 1.1\,\mathrm{s}$$

です。③は、ちょうどこのリズムでゆらしたのです。この章では、この 3 つのちがいを、表計算と式で説明します。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 3-8　恒等式：どんな x でも成り立つ式は、両辺の同じ形の項の係数が等しい（係数を比べる）。
- 5-7　$f'(x) = 0$ の所が、山（いちばん大きい）や谷（いちばん小さい）の候補。増減表で確かめる。
- 5-18　線形：答えどうしをたしても答え。一般解（数が決まっていない答え）と特殊解。
- 6-6　固有角振動数 $\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$。ばね 0.5 kg・8 N/m なら $\omega_\mathrm{n} = 4\,\mathrm{rad/s}$。
- 6-10　$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$。$e^{j\omega t}$ を微分すると $j\omega$ がかかる（90° 進む）。実部をとると $\cos\omega t$。
- 6-12　$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ の答えは、$e^{-\alpha t}$ でやがて消える。$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$。重解のときは te^{st}。

数学の道具

目でわかる　ゆすり続ける式　★★★

1 ゆすり続けるときの式

6-12 のばね・質量・ダンパーのおもりに、外から、向きと大きさがくり返し変わる力 $F_0\cos\omega t$ を加え続けます。F_0〔N〕は力のいちばん大きい値、ω〔rad/s〕はゆする速さ（ゆすりの角振動数）です。

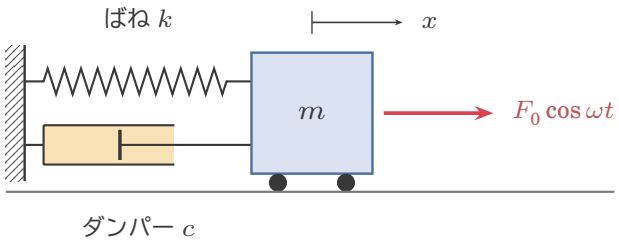


図 2 ばね・質量・ダンパーのおもりを、力 $F_0 \cos \omega t$ でゆすり続ける。

おもりにはたらく力は、ばねの力 $-kx$、ダンパーの力 $-c\dot{x}$、ゆする力 $F_0 \cos \omega t$ の 3 つです。力の合計＝質量×加速度（5-5）なので、

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \cos \omega t \qquad \text{力の合計＝質量×加速度}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \qquad -kx \text{ と } -c\dot{x} \text{ を左辺へ移した}$$

左辺は 6-12 とまったく同じです。ちがうのは、右辺が 0 でなく、ゆする力になったことだけです。このように、外からゆすり続けられて起きるゆれを、**強制振動**（きょうせいしんどう）といいます。

> **せいかくに言うと**
> やってみようのように、おもりではなく、つけ根を $Y\cos \omega t$ と動かしてゆらすこともあります。ばねののびは「おもりの位置－つけ根の位置」なので、ダンパーがなければ $m\ddot{x} = -k(x - Y\cos \omega t)$、つまり $m\ddot{x} + kx = kY\cos \omega t$ です。右辺の「ゆする力」が $kY\cos \omega t$ になるだけで、同じ形の式になります。

手でわかる 表計算でゆすってみる ★★★

2 表計算でゆすってみよう

6-12 のばね（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$c = 0.4\,\mathrm{N \cdot s/m}$。$\omega_n = 4\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta = 0.1$）を、$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$ でゆすります。はじめは静かに止まっていた（$x = 0$、$\dot{x} = 0$）とします。

表計算の型は 6-12 と同じです。ちがうのは、加速度の式に「ゆする力」が入ることだけです。Δt は F2、ゆすりの角振動数 ω は G2 のセルに入れます。

列	中身	3 行めの式（下へコピー）
A	時刻 t	`=A2+$F$2`
B	ゆする力	`=0.8*COS($G$2*A3)`
C	位置 x	`=C2+D3*$F$2`
D	速度 v	`=D2+E2*$F$2`
E	加速度 a	`=(B3-0.4*D3-8*C3)/0.5`

表 2　2 行めは $t=0$、$x=0$、$v=0$。加速度は「(ゆする力 − ダンパーの力 − ばねの力) ÷ 質量」。

ω を 2（ゆっくり）、4（ちょうど ω_n）、8（速く）にして、$\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ で 20 秒まで計算しました。

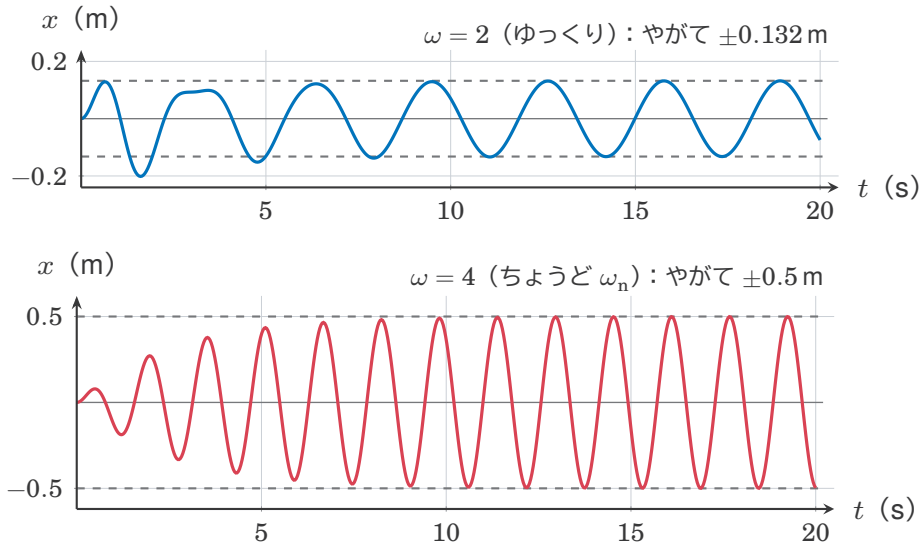


図 3　$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$ で、ゆっくり（上）と、ちょうど ω_n（下）でゆすった。たての目もりは上と下でちがう。点線は、やがて落ち着くゆれの大きさ。

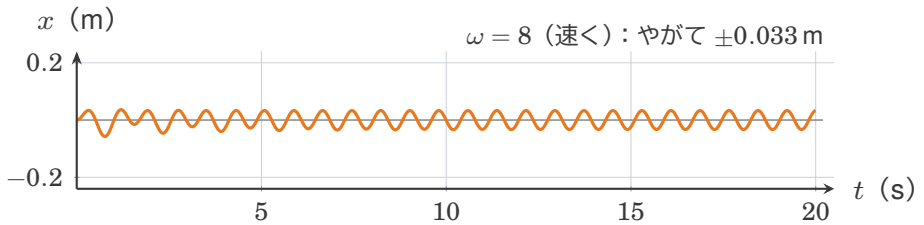


図 4　速く（$\omega = 8$）ゆすった。たての目もりは、いちばん上のグラフと同じ。

グラフから、3 つのことに気づきます。

1. **はじめはごちゃごちゃ、やがて同じリズムに。**はじめの数秒は、ゆれの山の高さがそろいません。10 秒ほどたつと、どれも、ゆすった ω と同じリズムで、同じ大きさでゆれ続けます。
2. $\omega = \omega_n$ **でとても大きい。**ゆれの大きさは、$\omega = 2$ で 0.132 m、$\omega = 4$ で 0.5 m、$\omega = 8$ で 0.033 m です。力の大きさはどれも同じ 0.8 N なのに、ちょうど ω_n でゆすると、ゆっくりのときの約 4 倍、速いときの約 15 倍もゆれます。
3. **速くゆすると、ほとんど動かない。**おもりは重いので、力の向きがすぐに変わると、ついていけないのです。

力を 0.8 N のまま、ばねを「ゆっくりおし続けた」ときののびは、$\frac{F_0}{k} = \frac{0.8}{8} = 0.1\,\mathrm{m}$ です。ちょうど ω_n でゆすると、その 5 倍（0.5 m）もゆれたことになります。

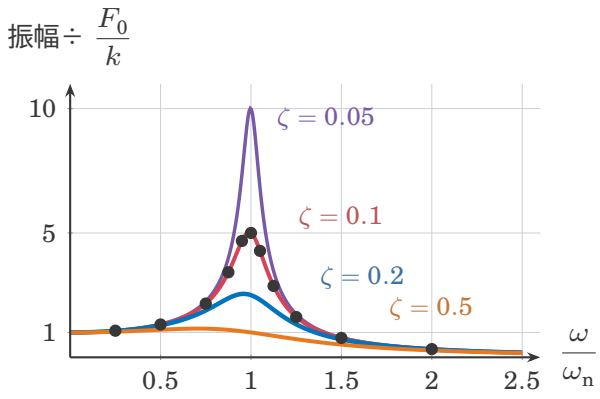
3 ゆれの大きさをグラフに：共振曲線

ω をいろいろ変えて、落ち着いたあとのゆれの大きさ（振幅）を、表計算で読みとりました。

ω	1	2	3	3.5	3.8	4
振幅（m）	0.107	0.132	0.216	0.342	0.468	0.500

ω	4.2	4.5	5	6	8	
振幅（m）	0.428	0.287	0.162	0.078	0.033	

表 3　$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$c = 0.4\,\mathrm{N \cdot s/m}$、$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$。



たては、振幅を「ゆっくりおし続けたときののび $\frac{F_0}{k}$」でわった値（何倍ゆれるか）です。横は、ω を ω_n でわった値です。黒い点が上の表（$\zeta = 0.1$）です。

ダンパー（ζ）を 4 通りに変えてかきました。

このようなグラフを**共振曲線**（きょうしんきょくせん）といいます。グラフから、次のことがわかります。

- ゆする速さ ω が ω_n に近いと、山のように大きくなる。このように、その物が自分でゆれる角振動数の近くでゆすると、大きくゆれることを**共振**（きょうしん）といいます。
- ダンパーが弱い（ζ が小さい）ほど、山は高く、細くとがる。$\zeta = 0.05$ では約 10 倍、$\zeta = 0.1$ では約 5 倍、$\zeta = 0.5$ では 1.15 倍ほど。
- ゆっくり（ω が 0 に近い）なら、ほぼ 1 倍。速く（ω が大きい）なると、0 に近づく。

ここまでで十分

ここまでわかれば、ゴールです。この先は、式でくわしく調べます。

∂ 式でわかる ゆすりに合うゆれを、式で求める ★★★★★

4 答えは「ゆすりに合うゆれ」＋「自分のゆれ」

462 ページのグラフの「はじめはごちゃごちゃ、やがて同じリズム」を、式で考えます。

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$ をみたす関数を、1 つ見つけたとします。これを x_p と書きます（ゆすりに合うゆれ。p は particular（特殊な）の頭文字）。一方、6-12 で解いた、右辺が 0 の式の答えを x_h と書きます（自分のゆれ）。この 2 つをたした $x=x_\mathrm{p}+x_\mathrm{h}$ を、式の左辺に入れてみます。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx$$

$x=x_\mathrm{p}+x_\mathrm{h}$ を入れる

$$=(m\ddot{x}_\mathrm{p}+c\dot{x}_\mathrm{p}+kx_\mathrm{p})+(m\ddot{x}_\mathrm{h}+c\dot{x}_\mathrm{h}+kx_\mathrm{h})$$

微分はたし算に分けられる（5-4）

$$=F_0\cos\omega t+0$$

x_p は右辺に合い、x_h は 0 になる

たしたものも答えです（5-18 の線形の考え）。

答え ＝ ゆすりに合うゆれ x_p ＋ 自分のゆれ x_h

- 自分のゆれ x_h は、6-12 の $e^{-\alpha t}(A\cos\omega_\mathrm{d}t+B\sin\omega_\mathrm{d}t)$ です。$e^{-\alpha t}$ がかかっているので、やがて消えます。
- だから、時間がたつと、ゆすりに合うゆれ x_p だけが残ります。これが「やがて同じリズムで、同じ大きさでゆれ続ける」の正体です。
- はじめの数秒の「ごちゃごちゃ」は、ω でゆれる x_p と、ω_d でゆれる x_h が重なっていたからです。

A、B は、はじめの状態に合わせて決めます。x_{p} だけでは、はじめの状態に合わせられないからです。大学の本では、x_{p} を**特殊解**、x_{h} をふくめた答えを**一般解**といいます（5-18）。

5 ゆすりに合うゆれの求め方 1：係数を比べる

x_{p} を見つけます。かぎは、6-12 と同じく「どんな形を置けばよいか」です。

ダンパーがないとき

まず $\ddot{x}+4x=3\cos t$ を考えます。右辺が $\cos t$ なので、x も $\cos t$ の形でゆれると考えて、$x=P\cos t$（P は定数）と置きます。$\cos t$ は、2 回微分すると $-\cos t$ にもどるので、左辺も $\cos t$ の形になるはずです。

$$\ddot{x}=-P\cos t \qquad (\cos t)''=-\cos t\ (5\text{-}15)$$

$$\ddot{x}+4x=-P\cos t+4P\cos t \qquad \text{左辺に入れた}$$

$$=3P\cos t \qquad \text{まとめた}$$

$$3P\cos t=3\cos t \qquad \text{右辺と同じになるように}$$

$$P=1 \qquad \cos t \text{ の係数を比べた（3-8）}$$

答えは $x_{\mathrm{p}}=\cos t$ です。入れて確かめると、$-\cos t+4\cos t=3\cos t$ で、たしかに右辺と同じです。

ダンパーがあるとき

次に $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=10\cos t$ です（6-12 の車 B を、力でゆすった式）。こんどは $x=P\cos t$ だけではうまくいきません。$\dot{x}$ の項から $\sin t$ が出てくるからです。そこで、$\sin t$ も入れて、$x=P\cos t+Q\sin t$ と置きます。

$$\dot{x}=-P\sin t+Q\cos t \qquad \text{1 回微分した}$$

$$\ddot{x}=-P\cos t-Q\sin t \qquad \text{もう 1 回微分した}$$

左辺 $\ddot{x}+2\dot{x}+5x$ を、$\cos t$ の項と $\sin t$ の項に分けて集めます。

	$\cos t$ の係数	$\sin t$ の係数
$\ddot{x}$	$-P$	$-Q$
$2\dot{x}$	$2Q$	$-2P$
$5x$	$5P$	$5Q$
合計	$4P+2Q$	$-2P+4Q$
右辺	10	0

表 4　どの時刻でも左辺＝右辺になるには、$\cos t$ の係数どうし、$\sin t$ の係数どうしが等しい（3-8 の恒等式）。

「係数どうしが等しい」は、$t=0$ と $t=\frac{\pi}{2}$ を入れても確かめられます。$t=0$ では $\cos 0=1$、$\sin 0=0$ なので $\cos t$ の係数だけが残り、$t=\frac{\pi}{2}$ では $\sin t$ の係数だけが残るからです。

$4P+2Q=10,\quad -2P+4Q=0$　　係数を比べた

$P=2Q$　　2 つめの式から

$8Q+2Q=10,\quad Q=1,\quad P=2$　　1 つめの式に入れた

$$x_{\mathrm{p}}=2\cos t+\sin t$$

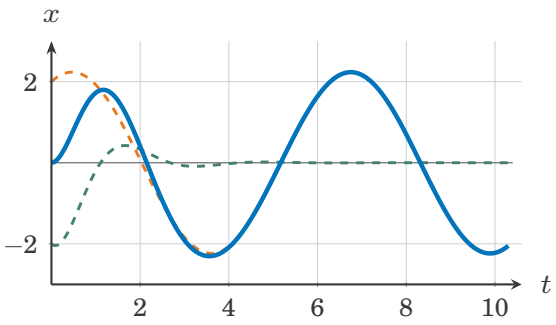
4-9 の合成で、x_{p} は振幅 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\approx 2.24$ の 1 つの波にまとめられます。

自分のゆれを足して、はじめの状態に合わせる

はじめ止まっていた（$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$）とします。自分のゆれは、6-12 の車 B と同じ $e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ です。

1. 答えの形：$x=2\cos t+\sin t+e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$
2. 位置：$x(0)=2+A=0$ より $A=-2$
3. 速度：$\dot{x}(0)=1+(-A+2B)=0$ より $1+2+2B=0$、$B=-1.5$

答えは $x = 2\cos t + \sin t - e^{-t}(2\cos 2t + 1.5\sin 2t)$ です。



オレンジの点線：ゆすりに合うゆれ
$2\cos t + \sin t$
緑の点線：自分のゆれ（すぐに消える）
青：たしたもの（本当の動き）

$t = 0$ では、緑がオレンジを打ち消して 0 から始まります。3 秒ほどで緑は消え、青はオレンジにぴったり重なります。

6 ゆすりに合うゆれの求め方 2：複素数で

係数を比べる方法は、cos と sin の 2 つを追いかけるので、計算が長くなります。6-10 のオイラーの公式を使うと、もっと短くなります。

右辺を、回る矢印の影と見る

$\cos t$ は、$e^{jt} = \cos t + j\sin t$ の実部（横への影）です（6-10）。そこで、本当の式のかわりに、

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 10e^{jt}$$

を解いて、最後に実部をとることにします。式が線形で、係数がどれも実数なので、「実部をとってから解く」と「解いてから実部をとる」は同じ答えになります。

微分は j をかけること

$x = Xe^{jt}$（X は複素数の定数）と置きます。6-10 で、$e^{j\omega t}$ を微分すると $j\omega$ がかかることを学びました（ここでは $\omega = 1$）。

$\dot{x} = jXe^{jt}, \quad \ddot{x} = j^2Xe^{jt} = -Xe^{jt}$ 微分すると j がかかる。$j^2 = -1$

$(-1 + 2j + 5)Xe^{jt} = 10e^{jt}$ 左辺に入れて、Xe^{jt} でくくった

$(4 + 2j)X = 10$ 両辺を e^{jt} でわった

$$X = \frac{10}{4 + 2j} = \frac{10(4 - 2j)}{(4 + 2j)(4 - 2j)}$$ 分母と分子に、分母の共役 $4 - 2j$ をかけた（6-8）

$$= \frac{40 - 20j}{16 + 4} = 2 - j$$ $(4 + 2j)(4 - 2j) = 16 - 4j^2 = 20$

微分方程式が、X の 1 次方程式（わり算 1 回）になりました。実部をとります。

$x = \mathrm{Re}[(2 - j)(\cos t + j \sin t)]$ e^{jt} をオイラーの公式で

$= \mathrm{Re}[2\cos t + 2j \sin t - j\cos t - j^2 \sin t]$ 展開した

$= 2\cos t + \sin t$ 実部は $2\cos t$ と $-j^2 \sin t = \sin t$

係数を比べた答えと、ぴったり同じです。

X の大きさが振幅、角が位相のおくれ

$X = 2 - j$ を複素平面に点で打つと、原点からの距離は $|X| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ で、これは振幅 $\sqrt{5}$ と同じです。角は $-26.6°$（$\tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.6°$ だけ時計回り）で、ゆれが力より $26.6°$ ぶん、おくれていることを表します（⑧でくわしく）。この X を**複素振幅**といいます。

記号カード　初めて出た章 **6-13**

X

読み方　エックス（大文字）
意味　複素振幅。$|X|$ が振幅、偏角が位相（おくれは負の角）
英語　complex amplitude

記号カード　初めて出た章 **6-13**

Q

読み方　キュー
意味　Q 値。共振の山の鋭さ。ζ が小さいとき $Q \approx \frac{1}{2\zeta}$。流量の Q とは別
英語　quality factor

どんな m、c、k でも

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$ で、同じことをします。$x = Xe^{j\omega t}$ と置くと、微分は $j\omega$ をかけることなので、

$$(m(j\omega)^2 + c(j\omega) + k)X = F_0 \qquad \ddot{x} \to (j\omega)^2,\ \dot{x} \to j\omega$$

$$(k - m\omega^2 + jc\omega)X = F_0 \qquad j^2 = -1$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + jc\omega} \qquad \text{両辺を（　）でわった}$$

6-12 の特性方程式の作り方（$\ddot{x} \to s^2$、$\dot{x} \to s$）の s に、$j\omega$ を入れた形です。振幅は X の大きさなので、分母の大きさ（三平方の定理、6-9）でわって、

振幅　$$|X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

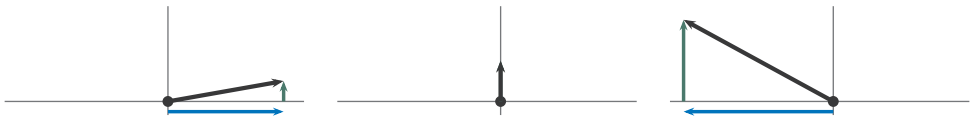
461 ページのばね（$m = 0.5$、$k = 8$、$c = 0.4$、$F_0 = 0.8$）で確かめます。

ω	$k - m\omega^2$	$c\omega$	$\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$	振幅
2	$8 - 2 = 6$	0.8	6.053	0.132
4	$8 - 8 = 0$	1.6	1.6	0.500
8	$8 - 32 = -24$	3.2	24.21	0.033

表 5　表計算で読んだ振幅（0.132、0.5、0.033）と同じになった。

なぜ ω_n で大きくなるのか

分母の $k - m\omega^2 + jc\omega$ を、3 つの矢印のたし算と見ます。k（ばね）は右向き、$-m\omega^2$（質量）は左向き、$jc\omega$（ダンパー）は上向きです。



ゆっくり
分母が大きい
→ 小さくゆれる

ちょうど ω_n
分母がいちばん小さい
→ 大きくゆれる

速く
分母が大きい
→ 小さくゆれる

図 5 青：$k - m\omega^2$（ばねと質量）、緑：$c\omega$（ダンパー）、黒：分母（たしたもの）。黒い矢印が短いほど、大きくゆれる。

ゆすりがゆっくりだと、質量の矢印 $-m\omega^2$ は小さく、ばねの k が勝って、分母は右向きに大きい。速いと、$-m\omega^2$ が大きく勝って、分母は左向きに大きい。**ちょうど $\omega = \omega_n$（$m\omega^2 = k$）のとき、ばねと質量の矢印がぴったり打ち消しあい**、ダンパーの $c\omega$ だけが残ります。だから分母がいちばん小さくなり、ゆれが大きくなるのです。ダンパーが弱いと、この残りがさらに小さいので、もっと大きくゆれます。

7 いちばん大きくゆれる ω を、微分で求める

共振の山のてっぺんは、ちょうど ω_n でしょうか。5-7 の「$f' = 0$ の所が山や谷」を使って調べます。

振幅がいちばん大きいのは、分母 $\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$ がいちばん小さいときです。$\sqrt{\ }$ の中が小さいほど $\sqrt{\ }$ も小さいので、$\sqrt{\ }$ の中を $G(\omega)$ として（6-12 の判別式 D と区別するため、G と書きます）、そのいちばん小さい所をさがします。$m = 0.5$、$k = 8$、$c = 0.4$ では、

$$G(\omega) = (8 - 0.5\omega^2)^2 + 0.16\omega^2 \qquad (0.4\omega)^2 = 0.16\omega^2$$

$$G'(\omega) = 2(8 - 0.5\omega^2) \times (-\omega) + 0.32\omega \qquad \text{合成関数の微分（5-6）。} (8 - 0.5\omega^2)' = -\omega$$

$$= -16\omega + \omega^3 + 0.32\omega \qquad \text{展開した}$$

$$= \omega(\omega^2 - 15.68) \qquad \omega \text{ でくくった}$$

$G'(\omega) = 0$ になるのは、$\omega = 0$ か、$\omega^2 = 15.68$ のときです。ω は正なので、$\omega = \sqrt{15.68} \approx 3.960$ です。

ω	**0**	…	**3.960**	…
$G'(\omega)$	0	−	0	+
$G(\omega)$		↘	いちばん小さい	↗
振幅	0.1	↗	いちばん大きい	↘

表 6　増減表（5-7）。$\omega = 3.960$ で、振幅は山になる。

てっぺんは、$\omega_\mathrm{n} = 4$ より少しだけ左（3.960）でした。そのときの振幅は $0.8 \div \sqrt{G(3.960)} \approx 0.5025\,\mathrm{m}$ で、$\omega = 4$ のときの $0.5\,\mathrm{m}$ より、ほんの少し大きいだけです。

どんな m、c、k でも

同じ計算を文字のままします。$G(\omega) = (k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2$ です。

$$G'(\omega) = 2(k - m\omega^2)(-2m\omega) + 2c^2\omega \qquad \text{合成関数の微分}$$

$$= 2\omega\{c^2 - 2m(k - m\omega^2)\} \qquad 2\omega \text{ でくくった}$$

$$k - m\omega^2 = \frac{c^2}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2} \qquad \{\,\} = 0 \text{ とおいた}$$

$$\omega^2 = \omega_\mathrm{n}^2(1 - 2\zeta^2) \qquad \frac{c^2}{2m^2} = \frac{4\zeta^2 mk}{2m^2} = 2\zeta^2\frac{k}{m}$$
$$(c = 2\zeta\sqrt{mk})$$

いちばん大きくゆれる角振動数 $\omega = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

そのときの振幅 $\dfrac{F_0}{k} \times \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

（振幅の式は、$\omega^2 = \omega_n^2(1-2\zeta^2)$ を G に入れると $G = 4\zeta^2k^2(1-\zeta^2)$ になることから出ます。）

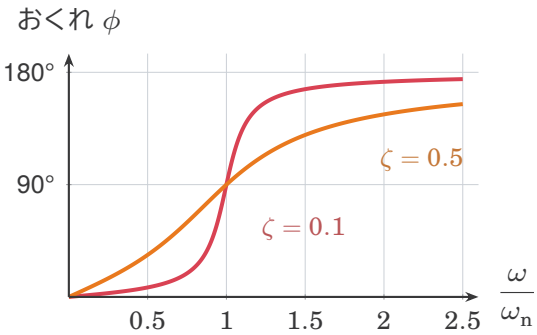
ζ	0.05	0.1	0.2	0.5
山の $\omega \div \omega_n$	0.9975	0.990	0.959	0.707
山の高さ（倍）	10.0	5.03	2.55	1.15

表 7　ζ が小さいと、山はほぼ ω_n にあり、高さはほぼ $\frac{1}{2\zeta}$ 倍。

ζ が $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ より大きいと、$1-2\zeta^2$ が負になり、山はなくなります（$\omega = 0$ のときがいちばん大きい）。

8 ゆれのおくれ：位相

やってみようでは、ゆっくりゆすると指と同じ向き、速いと反対向きでした。これも X の角でわかります。$X = \frac{F_0}{k-m\omega^2+jc\omega}$ の角は、分母の角の反対（マイナス）です（わり算は角のひき算：6-9）。分母の角を ϕ とすると、ゆれは力より ϕ だけおくれます。これを**位相のおくれ**といいます。



- ゆっくり：分母は右向き。おくれ 0° で、力と同じ向き。
- ω_n：分母は真上。おくれ 90°。
- 速い：分母は左向き。おくれ 180° で、力と反対向き。

461 ページのばねでは、$\omega = 2$ で 7.6°、$\omega = 4$ で 90°、$\omega = 8$ で 172.4° です（$\tan\phi = \frac{c\omega}{k-m\omega^2}$）。

？はてな？の答え：ブランコは、いつおせばよいか

ちょうど ω_n でゆするとき、ゆれ（位置）は力より 90°、つまり $\frac{1}{4}$ 周期おくれます。位置を微分した速度は、位置より $\frac{1}{4}$ 周期進んでいます（6-10：微分は 90° 進める）。だから、**速度と力は、ぴったり同じタイミング**になります。

「動いている向きに、いつもおす」。おす力が、いつも動きと同じ向きなので、力はいつも正の仕事（5-12）をして、エネルギーをつぎこみ続けます。ブランコなら、ブランコ自身のリズム（ω_n）で、前へ動いているときに前へおせばよいのです。**はてな？ の答えは、「その物が自分でゆれるリズムで、動いている向きにおす」**です。

9 ダンパーがなく、ちょうど ω_n でゆすると

$\ddot{x}+4x=\cos 2t$ を考えます（$\omega_n=2$ で、ちょうど $\omega=2$ でゆする）。⑤と同じく $x=P\cos 2t+Q\sin 2t$ と置くと、

$$\ddot{x}+4x=(-4P+4P)\cos 2t+(-4Q+4Q)\sin 2t=0$$

となり、右辺の $\cos 2t$ にはなりません。$\cos 2t$ と $\sin 2t$ は、それ自身が「自分のゆれ」（右辺が 0 の式の答え）なので、入れると 0 になってしまうのです。

6-12 の重解のときと同じように、t をかけた $x=\frac{1}{4}t\sin 2t$ を入れてみます。

$$\dot{x}=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t \qquad \text{積の微分（5-6）}$$

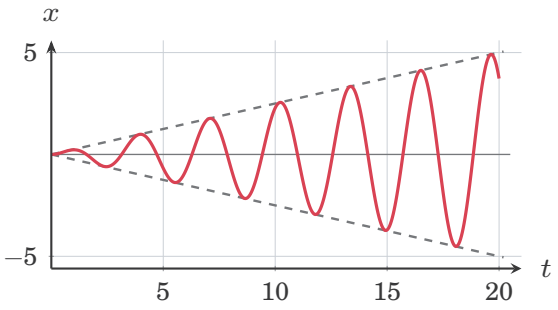
$$\ddot{x}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 2t-t\sin 2t \qquad \text{もう 1 回、積の微分}$$

$$=\cos 2t-t\sin 2t \qquad \text{まとめた}$$

$$\ddot{x}+4x=\cos 2t-t\sin 2t+t\sin 2t \qquad 4x=t\sin 2t \text{ をたした}$$

$$=\cos 2t$$

たしかに答えです。ゆれの大きさ $\frac{1}{4}t$ は、時間に比例して、どこまでも大きくなり続けます。

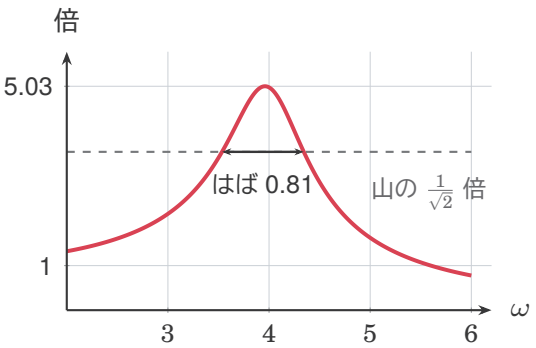


$x = \frac{1}{4}t\sin 2t$ のグラフ。点線 $\pm\frac{1}{4}t$ のあいだで、ゆれがどんどん大きくなる。

本物の物には、かならず少しはダンパー（空気の抵抗、材料の中のまさつ）があるので、ゆれは無限には大きくなりません。でも、ζ が 0.01 なら山の高さは約 50 倍で、物がこわれることもあります。

10 共振の鋭さ：Q 値

共振曲線の山の「鋭さ」を、1 つの数で表します。



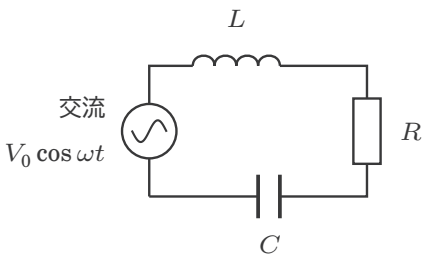
山の高さの $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 倍の高さで、山のはばをはかります。振幅の 2 乗（エネルギーや電力に比例する）で見ると、ちょうど半分になる高さなので、このはばを**半値幅**（はんちはば）といいます。

$\zeta = 0.1$、$\omega_n = 4$ では、はばは約 0.81 rad/s です。

ω_n を半値幅でわった数を **Q 値**（キューち）といいます。上の例では $Q = \frac{4}{0.81} \approx 4.9$ です。ζ が小さいときは、$Q \approx \frac{1}{2\zeta}$（$\zeta = 0.1$ なら 5）で、山の高さ（約 5 倍）とほぼ同じです。Q 値が大きいほど、山は高く、細くなります。ラジオで 1 つの放送局だけを選びたいときは Q 値を大きく、建物のゆれをおさえたいときは Q 値を小さくします。

11 電気の回路の共振：ラジオの同調

6-12 の RLC 回路に、交流の電源 $V_0 \cos \omega t$ をつなぎます。回路を流れる電流 i〔A〕を考えます。



電流を $i = \mathrm{Re}[Ie^{j\omega t}]$ と書きます（I は電流の複素振幅）。電圧を、部品ごとに求めます。

- 抵抗：Ri なので RI
- コイル：$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$。微分は $j\omega$ をかけるので $j\omega LI$
- コンデンサー：$\frac{q}{C}$。q は i を積分したもの。積分は微分の逆なので、$j\omega$ でわって $\frac{I}{j\omega C}$

3 つの電圧の和が、電源の電圧 V_0 と等しいので、

$$\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I = V_0$$

3 つの部品の電圧をたした

$$\left\{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right\} I = V_0$$

$\frac{1}{j} = -j$（6-8）

$$|I| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

大きさをとった（三平方の定理）

電流がいちばん大きいのは、分母がいちばん小さいとき、つまり $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ のときです。R^2 は ω によらないので、もう 1 つの 2 乗が 0 になればよいのです。

共振の角振動数　$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$　　**共振周波数**　$f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

これは、高校の物理で「共振周波数」として習う式です。6-12 の $\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ と同じで、コイルの $j\omega L$ とコンデンサーの $\frac{1}{j\omega C}$ がちょうど打ち消しあう所です（ばねと質量の矢印が打ち消しあうのと同じ）。このとき、電流は $\frac{V_0}{R}$ になり、抵抗だけの回路と同じになります。

せいかくに言うと

ばねで「位置の振幅」がいちばん大きくなるのは $\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ でした（⑦）。電気の電流は、ばねでは「速度」にあたります。速度の振幅は $\omega|X|$ で、これがいちばん大きくなるのは、ちょうど ω_n です。だから、電流の山は、ちょうど $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ にあります。

6-12 の回路（$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 20\,\Omega$）に $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ をつなぐと、共振周波数は約 $1592\,\mathrm{Hz}$、そのときの電流は $\frac{1}{20} = 0.05\,\mathrm{A} = 50\,\mathrm{mA}$ です。$1000\,\mathrm{Hz}$ では約 $10\,\mathrm{mA}$、$2000\,\mathrm{Hz}$ では約 $20\,\mathrm{mA}$ にへります。

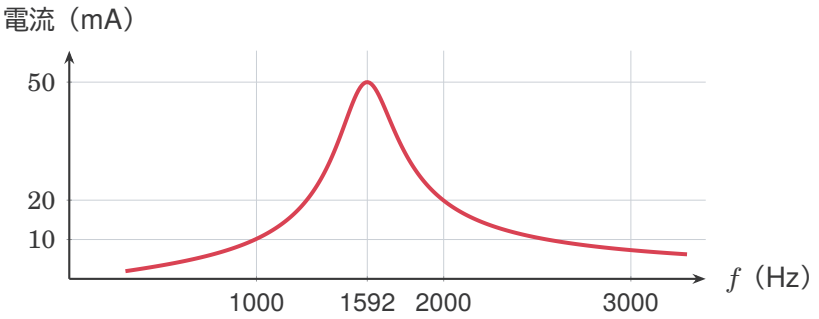


図 6 $L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 20\,\Omega$、$V_0 = 1\,\mathrm{V}$ の回路の電流。共振周波数の近くだけ、大きな電流が流れる。

ラジオの同調

空中には、たくさんの放送局の電波が、それぞれちがう周波数でとびかっています。ラジオのアンテナにつないだ LC の回路は、共振周波数に近い電波の電流だけを大きく流し、ほかの電波はほとんど流しません。ダイヤルを回すと、可変コンデンサーの C が変わり、共振周波数が変わって、別の局が選べます。これを**同調**といいます。

たとえば $L = 200\,\mu\mathrm{H}$ で $1\,\mathrm{MHz}$（$1000\,\mathrm{kHz}$）の局を選ぶには、$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ を C について解いて、

$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{(6.283\times 10^6)^2 \times 200 \times 10^{-6}}$$

$$\approx 1.27\times 10^{-10}\,\mathrm{F} = 127\,\mathrm{pF}$$

日本の AM 放送の周波数（$531\,\mathrm{kHz}$〜$1602\,\mathrm{kHz}$）を全部選ぶには、C を約 $49\,\mathrm{pF}$ から約 $449\,\mathrm{pF}$ まで変えられればよいことになります。

もっと知りたい ★★★★★

防振：ゆれを伝えにくくする

モーターやエンジンのように、中で回る部分がある機械は、回る速さ ω で床をゆすります。そこで、機械を防振ゴム（やわらかいばね k とダンパー c）の上にのせます。床に伝わる力は、ばねとダンパーの力 $kx + c\dot{x}$ です。機械をゆする力の何倍が床に伝わるかを、複素振幅で計算すると、$r = \frac{\omega}{\omega_\mathrm{n}}$ として、

$$\text{伝わる割合}\quad \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

になります（大学の本では「振動伝達率」）。$r = \sqrt{2}$ のとき、分母の $(1-r^2)^2 = 1$ となり、ちょうど 1 倍です。r が $\sqrt{2}$ より大きいと、1 倍より小さくなります。たとえば $\zeta = 0.1$ で $r = 2$ なら 0.36 倍、$r = 3$ なら 0.15 倍です。

だから、防振ゴムは、ω_n が機械の回る ω の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍より十分小さくなるように、やわらかいものを選びます。ゴムが固すぎて r が 1 に近いと、かえって共振して、大きなゆれが床に伝わってしまいます。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

非同次方程式 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$ の一般解は、同次方程式の一般解（過渡解）と、非同次方程式の一つの特殊解（定常解）の和で与えられる。定常解の振幅倍率は、振動数比 $r=\omega/\omega_{\mathrm{n}}$ を用いて

$$\frac{|X|}{F_0/k}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

で表され、$\zeta<1/\sqrt{2}$ のとき $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$ で最大値 $1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$ をとる。

訳 「非同次」は右辺が 0 でないこと。「過渡解」はやがて消える自分のゆれ、「定常解」は落ち着いたあとのゆすりに合うゆれ。「振幅倍率」は、ゆっくりおし続けたときののび F_0/k の何倍ゆれるか。この章の共振曲線と⑦の式と同じ。

もっと知りたい ★★★★★

1 階の式をゆする：RC 回路は「速いゆれを通しにくい」

6-4 の RC 回路（$\tau=RC$）に、交流 $V_0\cos\omega t$ をつなぐと、コンデンサーの電圧 v は $\tau\dot{v}+v=V_0\cos\omega t$ にしたがいます。$v=\mathrm{Re}[Ve^{j\omega t}]$ と置くと、微分は $j\omega$ をかけることなので、

$$(1+j\omega\tau)V=V_0 \qquad |V|=\frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

ゆっくりの交流（$\omega\tau$ が小さい）はそのまま通り、速い交流（$\omega\tau$ が大きい）は小さくなります。音の雑音を取りのぞく回路（ローパスフィルター）は、このしくみです。cos でない一般の形の右辺には、「積分因子」「定数変化法」とよばれる方法や、第 9 巻のラプラス変換・たたみこみ（9-6・9-7）を使います。

たいせつ

答えの形	**ゆすりに合うゆれ x_{p} ＋ 自分のゆれ x_{h}（やがて消える）**
置き方	**右辺が $\cos\omega t$ なら $x_{\mathrm{p}} = P\cos\omega t + Q\sin\omega t$**
複素数で	$x = \mathrm{Re}[Xe^{j\omega t}]$、$X = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2 + jc\omega}$
共振	**ω が ω_{n} に近いと大きくゆれる。山は $\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-2\zeta^2}$**
RLC	**共振周波数 $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$**

この章で出てきたことば

強制振動　外からゆすり続けられて起きるゆれ。

共振　その物が自分でゆれる角振動数の近くでゆすると、大きくゆれること。

共振曲線　ゆする角振動数と、落ち着いたあとの振幅の関係のグラフ。

位相のおくれ　ゆれが力より、どれだけ（角で）おくれるか。ω_{n} で 90°。

Q 値・半値幅　共振の山の鋭さ。半値幅は山の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の高さでのはば。

ゆすられる式の解き方の流れ

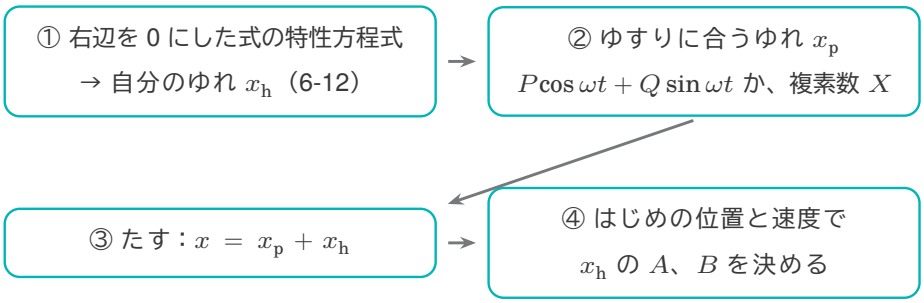


図 7　ゆすられる式は、この順で解く。共振のようすだけ知りたいときは、②の $|X|$ だけを見ればよい（自分のゆれは、やがて消えるから）。

例題でたしかめよう

例題 1　ダンパーのない強制振動

$\ddot{x}+9x=8\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

考え方　ダンパーがないので、$x_{\mathrm{p}}=P\cos t$ と置いて係数を比べる（⑤）。自分のゆれは $A\cos 3t+B\sin 3t$（6-6）。足してから、はじめの状態で A、B を決める（④）。

式　$x_{\mathrm{p}}=P\cos t$ を入れる：$-P\cos t+9P\cos t=8P\cos t=8\cos t$、$P=1$

答えの形：$x=\cos t+A\cos 3t+B\sin 3t$

位置：$x(0)=1+A=0$ より $A=-1$。速度：$\dot{x}(0)=3B=0$ より $B=0$

答え　$x=\cos t-\cos 3t$

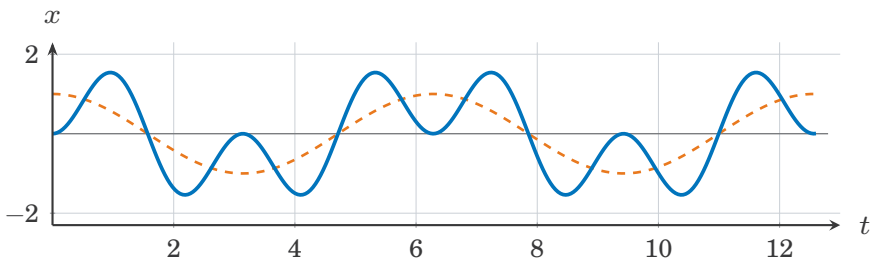


図 8　例題 1 の答え $x=\cos t-\cos 3t$（青）と、ゆすりに合うゆれ $\cos t$（オレンジの点線）。ダンパーがないので、自分のゆれ $-\cos 3t$ はいつまでも消えず、2 つのゆれが重なり続ける。

例題 2　係数を比べる

$\ddot{x}+4\dot{x}+3x=10\cos t$ の、ゆすりに合うゆれ x_{p} と、その振幅を求めましょう。

考え方　ダンパーがあるので $x_{\mathrm{p}}=P\cos t+Q\sin t$ と置き、$\cos t$ と $\sin t$ の係数を比べる（⑤）。振幅は $\sqrt{P^2+Q^2}$（4-9 の合成）。

式　$\dot{x}=-P\sin t+Q\cos t$、$\ddot{x}=-P\cos t-Q\sin t$

$\cos t$ の係数：$-P+4Q+3P=2P+4Q=10$

$\sin t$ の係数：$-Q-4P+3Q=-4P+2Q=0$ より $Q=2P$

1 つめに入れる：$2P+8P=10$、$P=1$、$Q=2$

振幅：$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\approx 2.24$

答え　$x_{\mathrm{p}}=\cos t+2\sin t$、振幅 約 2.24

じぶんでとこう 1

$\ddot{x}+16x=15\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

じぶんでとこう 2

$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=10\cos t$ の、ゆすりに合うゆれ x_{p} と、その振幅を求めましょう。

例題 3　自分のゆれを足して、はじめに合わせる

$\ddot{x}+4\dot{x}+3x=10\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

考え方　x_{p} は例題 2 の $\cos t+2\sin t$。自分のゆれは、特性方程式 $s^2+4s+3=0$ の解から（6-12）。足してから A、B を決める（④）。

式　特性方程式：$(s+1)(s+3)=0$ で $s=-1$、-3

答えの形：$x=\cos t+2\sin t+Ae^{-t}+Be^{-3t}$

位置：$x(0)=1+A+B=0$ より $A+B=-1$

速度：$\dot{x}=-\sin t+2\cos t-Ae^{-t}-3Be^{-3t}$

より $\dot{x}(0)=2-A-3B=0$

2 つの式をたす：$-2B=-3$、$B=1.5$、$A=-1-B=-2.5$

答え　$x=\cos t+2\sin t-2.5e^{-t}+1.5e^{-3t}$

例題 4　複素数で求める

$\ddot{x}+2\dot{x}+8x=20\cos 2t$ の、ゆすりに合うゆれを、複素数で求めましょう。また、振幅と位相のおくれを求めましょう。

考え方　$x=\mathrm{Re}[Xe^{j2t}]$ と置くと、微分は $j2$ をかけること（⑥）。X の大きさが振幅、角が位相（⑥⑧）。

式　$((j2)^2+2(j2)+8)X=20$ より $(-4+4j+8)X=(4+4j)X=20$

$$X=\frac{20}{4+4j}=\frac{20(4-4j)}{16+16}=\frac{80-80j}{32}=2.5-2.5j$$

$$x=\mathrm{Re}\left[(2.5-2.5j)(\cos 2t+j\sin 2t)\right]$$

$$=2.5\cos 2t+2.5\sin 2t$$

振幅：$|X|=\sqrt{2.5^2+2.5^2}=2.5\sqrt{2}\approx 3.54$

角：$2.5-2.5j$ は右下 45° の向きなので、おくれは 45°

答え　$x_{\mathrm{p}}=2.5\cos 2t+2.5\sin 2t$、振幅 約 3.54、おくれ 45°

じぶんでとこう 3

$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=10\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう（x_{p} はじぶんでとこう 2）。

じぶんでとこう 4

$\ddot{x}+2\dot{x}+7x=25\cos 2t$ の、ゆすりに合うゆれを、複素数で求めましょう。振幅と位相のおくれも求めましょう（$\tan^{-1}\frac{4}{3}=53.1°$）。

例題 5　いちばん大きくゆれる角振動数

$m=1\,\mathrm{kg}$、$k=100\,\mathrm{N/m}$、$c=4\,\mathrm{N\cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーを、$F_0=10\,\mathrm{N}$ でゆすります。振幅がいちばん大きくなる ω と、そのときの振幅を、微分で求めましょう。

考え方　振幅 $\frac{F_0}{\sqrt{G}}$ がいちばん大きいのは、$G(\omega)=(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2$ がいちばん小さいとき。$G'(\omega)=0$ をさがす（⑦、5-7）。

式　$G(\omega)=(100-\omega^2)^2+16\omega^2$

$$G'(\omega)=2(100-\omega^2)(-2\omega)+32\omega$$
$$=4\omega(\omega^2-100+8)=4\omega(\omega^2-92)$$

$G'=0$ で $\omega>0$ なのは $\omega^2=92$、$\omega=\sqrt{92}\approx 9.59\,\mathrm{rad/s}$

そのとき $G=(100-92)^2+16\times 92=64+1472=1536$

振幅：$\dfrac{10}{\sqrt{1536}}=\dfrac{10}{39.19}\approx 0.255\,\mathrm{m}$

答え　$\omega\approx 9.59\,\mathrm{rad/s}$、振幅 約 $0.255\,\mathrm{m}$

$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{100}=10\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta=\frac{4}{2\times 10}=0.2$ です。⑦の式でも、

$\omega=10\sqrt{1-2\times 0.2^2}=10\sqrt{0.92}\approx 9.59$　　振幅 $\dfrac{10}{100}\times 2.55\approx 0.255$

で、同じになります。

じぶんでとこう 5

$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 64\,\mathrm{N/m}$、$c = 4\,\mathrm{N \cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーを、$F_0 = 8\,\mathrm{N}$ でゆすります。振幅がいちばん大きくなる ω と、そのときの振幅を、微分で求めましょう。

例題 6　ふえ続けるゆれを確かめる

$x = t\sin 2t$ が $\ddot{x} + 4x = 4\cos 2t$ をみたすことを確かめましょう。また、$t = 10$ のころのゆれの大きさを答えましょう。

考え方　積の微分（5-6）で 2 回微分して、左辺に入れる（⑨）。ゆれの大きさは sin の前の t。

式　$\dot{x} = \sin 2t + 2t\cos 2t$

$$\ddot{x} = 2\cos 2t + 2\cos 2t - 4t\sin 2t = 4\cos 2t - 4t\sin 2t$$

$$\ddot{x} + 4x = 4\cos 2t - 4t\sin 2t + 4t\sin 2t = 4\cos 2t$$

答え　みたす。$t = 10$ のころのゆれの大きさは約 10

じぶんでとこう 6

$x = t\sin 3t$ が $\ddot{x} + 9x = 6\cos 3t$ をみたすことを確かめましょう。また、$t = 5$ のころのゆれの大きさを答えましょう。

例題 7　RLC 回路の共振とラジオ

(1) $L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 20\,\Omega$ の回路に $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ の交流をつなぎます。共振周波数と、そのときの電流を求めましょう。

(2) $L = 200\,\mu\mathrm{H}$ のコイルで、$1\,\mathrm{MHz}$ の放送を選ぶ C を求めましょう。

考え方　共振周波数 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$。共振では電流 $\frac{V_0}{R}$（⑪）。(2) は f の式を C について解く。

式　(1) $\sqrt{LC} = \sqrt{0.01 \times 10^{-6}} = \sqrt{10^{-8}} = 10^{-4}$

$$f = \frac{1}{2\pi \times 10^{-4}} = \frac{10^4}{6.283} \approx 1592\,\mathrm{Hz}。\text{電流 } \frac{1}{20} = 0.05\,\mathrm{A}$$

$$(2)\ C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{(6.283 \times 10^6)^2 \times 2 \times 10^{-4}}$$

$$\approx 1.27 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}$$

答え　(1) 約 1592 Hz、50 mA　(2) 約 127 pF

じぶんでとこう 7

(1) $L = 1\,\mathrm{mH}$、$C = 0.4\,\mu\mathrm{F}$、$R = 5\,\Omega$ の回路に $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ の交流をつなぎます。共振周波数と、そのときの電流を求めましょう。

(2) $L = 250\,\mu\mathrm{H}$ のコイルで、$800\,\mathrm{kHz}$ の放送を選ぶ C を求めましょう。

コラム　橋がゆれた：ミレニアム・ブリッジとタコマ橋

ロンドンのテムズ川にかかる歩行者用のミレニアム・ブリッジは、2000 年 6 月 10 日に開通しましたが、たくさんの人がわたると横に大きくゆれ、2 日後に通行止めになりました。歩く人の左右のゆれのリズムが、橋の横ゆれの固有周期に近く、ゆれ始めると人が橋に合わせて足をふみ出すので、さらにゆれが大きくなったのです。ダンパーをたくさんとりつけて ζ を大きくし、2002 年に再開しました。

一方、アメリカのタコマ橋（1940 年に風でくずれ落ちた）は、「共振の例」としてよく紹介されますが、正しくありません。一定の風がふいていただけで、外から決まったリズムでゆすられたわけではないからです。橋のゆれ自身が、風から力を受けるリズムを作り出して、ゆれを大きくしていました。これを自励振動（フラッター）といい、6-12 の「解が右半分にある」動きに近いものです。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

共振すると、ゆれは無限に大きくなる？

× 共振すると、振幅は無限大になる

○ ダンパーがあれば、振幅は有限（$\zeta = 0.1$ なら約 5 倍）

分母に $c\omega$ が残るので、0 にはなりません。ダンパーがまったくないときだけ、時間に比例して大きくなり続けます（⑨）。

⚠ まちがえやすいところ

いちばん大きくゆれるのは、いつも ω_n？

✕ 振幅の山は、いつもちょうど ω_n

○ 山は $\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$。$\zeta$ が小さければ、ほぼ ω_n

$\zeta = 0.5$ なら、山は $0.707\omega_n$ で、かなりずれます。電流（速度）の山は、ちょうど ω_n です。

⚠ まちがえやすいところ

ダンパーがあるのに $P\cos t$ だけを置く

✕ $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 10\cos t$ で $x = P\cos t$

○ $x = P\cos t + Q\sin t$

$\dot{x}$ から $\sin t$ が出てくるので、$\sin t$ の項も置かないと、係数を比べたときに $\sin t$ の式が合いません。

⚠ まちがえやすいところ

複素数のまま答える

✕ $x_p = (2-j)e^{jt}$

○ $x_p = \mathrm{Re}[(2-j)e^{jt}]$
$= 2\cos t + \sin t$

複素数は計算の道具です。最後に実部をとって、実数の答えにもどします。

⚠ まちがえやすいところ

x_p だけで、はじめに合わせる

✕ $x = P\cos t + Q\sin t$ の P、Q を、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ で決める

○ 自分のゆれを足してから、A、B をはじめの状態で決める

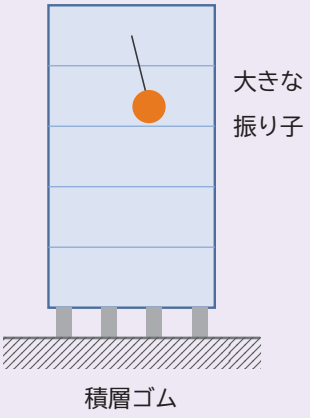
P、Q は右辺に合わせて決まってしまう数なので、はじめの状態には合わせられません。

物理・工学ではこう使う

建物と地震：免震と制振

建物にも固有周期があります。地震のゆれのリズムが建物の固有周期に近いと、共振して大きくゆれます。**免震**は、建物と地面のあいだに、やわらかい積層ゴムなどを入れて、建物全体の固有周期を長くし、地震のゆれのリズムからはずすしくみです（伝わる割合が 1 より小さくなる、もっと知りたいの防振と同じ考え）。

制振は、建物にダンパーをつけて ζ を大きくし、共振の山を低くするしくみです。台湾の高層ビル「台北 101」には、建物の固有周期に合わせた重さ約 660 トンの大きな振り子がつるしてあり、建物のゆれを打ち消す向きにゆれます。



せんたく機の脱水

脱水が始まって回転がだんだん速くなるとき、ある速さで、せんたく機がガタガタと大きくゆれ、そのあと静かになることがあります。回る速さが、せんたく機を支えるばねの ω_n を通りすぎるときに共振するのです。回転を上げきってしまえば、r が大きくなり、ゆれは小さくなります。

ラジオ・スマホの電波

⑪の同調は、ラジオだけでなく、スマホや Wi-Fi の受信回路でも、ほしい周波数の電波だけを選ぶのに使われています（物理シリーズ『電磁気学』の交流回路）。

章末問題

6-13 のまとめ

基本 ★★★★

1 $\ddot{x}+25x=24\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

2 $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=8\cos t$ の、ゆすりに合うゆれ x_{p} を、係数を比べて求めましょう。振幅も求めましょう。

3 $\ddot{x}+4\dot{x}+3x=20\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ をみたす x を求めましょう。

4 $\ddot{x}+4\dot{x}+10x=20\cos 2t$ の、ゆすりに合うゆれを、複素数で求めましょう。振幅と位相のおくれも求めましょう（$\tan^{-1}\frac{4}{3}=53.1°$）。

5 （1）$L=1\,\mathrm{mH}$、$C=0.1\,\mu\mathrm{F}$、$R=10\,\Omega$ の回路に $V_0=2\,\mathrm{V}$ の交流をつなぎます。共振周波数と、そのときの電流を求めましょう。
（2）$L=200\,\mu\mathrm{H}$ のコイルで、$600\,\mathrm{kHz}$ の放送を選ぶ C を求めましょう。

6 $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=10\cos t$ の、ゆすりに合うゆれを、複素数で求めましょう。振幅と位相のおくれも求めましょう（$\tan^{-1}\frac{1}{2}=26.6°$）。

7 $L=4\,\mathrm{mH}$、$C=1\,\mu\mathrm{F}$、$R=8\,\Omega$ の回路に $V_0=4\,\mathrm{V}$ の交流をつなぎます。共振周波数と、そのときの電流を求めましょう（$\sqrt{4\times10^{-9}}=6.32\times10^{-5}$）。

チャレンジ ★★★★★

8 $m=0.5\,\mathrm{kg}$、$k=8\,\mathrm{N/m}$、$c=0.8\,\mathrm{N\cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーを、$F_0=0.8\,\mathrm{N}$ でゆすります。ζ を求め、振幅がいちばん大きくなる ω と、そのときの振幅を、微分で求めましょう（$\sqrt{14.72}=3.837$）。

9 $x=t\sin 4t$ が $\ddot{x}+16x=8\cos 4t$ をみたすことを確かめましょう。また、$t=5$ のころのゆれの大きさを答えましょう。

10 $m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 25\,\mathrm{N/m}$、$c = 2\,\mathrm{N \cdot s/m}$ のばね・質量・ダンパーを、$F_0 = 5\,\mathrm{N}$ でゆすります。(1) 振幅がいちばん大きくなる ω とその振幅を、微分で求めましょう。(2) ちょうど $\omega = \omega_\mathrm{n}$ でゆすったときの振幅を求めましょう。

11 $\ddot{x} + 6\dot{x} + 13x = 15\cos t$ の、ゆすりに合うゆれを、複素数で求めましょう。振幅と位相のおくれも求めましょう（$\tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.6°$）。

12 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 5\cos t$ の、ゆすりに合うゆれ x_p を、係数を比べて求めましょう。振幅も求めましょう。

13 $\ddot{x} + 4x = 3\cos t$、$x(0) = 0$、$\dot{x}(0) = 0$ をみたす x を求めましょう。

ふりかえり　できるようになったかな？

- [ ] ゆすり続けたときのゆれを、表計算と共振曲線で説明できる。
→ 463 ページ
- [ ] ゆすりに合うゆれを、係数を比べる方法と複素数で求められる。
→ 466 ページ
- [ ] いちばん大きくゆれる ω を微分で求め、RLC 回路の共振周波数を求められる。
→ 471 ページ

ソラ

ブランコも、ラジオも、建物も、同じ式で説明できた！　次の 6-14 では、ゆれるものが 2 つ以上つながったときを調べよう。

第 3 部　式で解く

★★★★★

6-14 微分方程式がいくつも：連立微分方程式

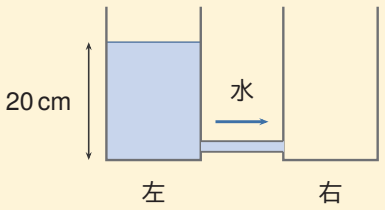
道しるべ　この章の前に 3-6 4-9 6-2 6-4 6-6 6-12
この章の先に 7-8 7-9 7-10 9-10 9-11

この章でできるようになること

- ★★★ からみあう 2 つの量の変化を、表計算で 2 つの列を同時に進めて計算できる。
- ★★★★ 和と差（重みをつけた和と差）に分けて、2 つの式を 6-4 の形にして解ける。
- ★★★★★ 振動モードや消去法で、連立微分方程式の答えを式で求められる。

はてな？

同じ形の 2 つの水そうを、底の近くで細い管でつなぎます。はじめ、左の水の深さは 20 cm、右は空っぽです。
管をあけると、水は左から右へ流れます。左の水位は下がり、右の水位は上がります。2 つの水位は、それぞれどう変わるでしょう。最後は何 cm になるでしょう。



これまでの章では、変わる量は 1 つでした。お湯の温度 T、ばねにつけたおもりの位置 x、コンデンサーの電圧 V です。ところが、身のまわりには、2 つ以上の量が、おたがいに相手の変わり方を決めあうことがたくさんあります。つながっ

た水そう、となり合う 2 つの部屋の温度、ばねでつながった 2 両の車両、親から子へ変わる放射性物質などです。

この章では、そういう「微分方程式の組」を、まず表計算で解き、つぎに式で解きます。★★★★★ の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、中学生でも読めるように書きました。式の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。表計算の段までで、未来はもう計算できます。

やってみよう　つないだ水そうの水位をはかろう

用意するもの

同じ形の円柱の入れ物 2 つ（底面積が 100 cm^2 ほど）、細いチューブ（長さ 1 m ほど）、せんたくばさみ、ものさし、タイマー

1. 2 つの入れ物の底の近くに穴をあけ、チューブでつなぐ。チューブはせんたくばさみでとめておく。
2. 左の入れ物に、水を深さ 20 cm まで入れる。右は空のまま。
3. せんたくばさみを外し、1 分ごとに 2 つの水位をはかって表に書く。
4. 2 つの水位の「合計」と「差」も計算しよう。何か気づくかな？

時刻 t（分）	0	1	2	3	4	5	6	8
左の水位（cm）	20.0	18.2	16.7	15.5	14.5	13.7	13.0	12.0
右の水位（cm）	0.0	1.8	3.3	4.5	5.5	6.3	7.0	8.0
合計（cm）	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
差（cm）	20.0	16.4	13.4	11.0	9.0	7.4	6.0	4.0

表 1　ソラさんがはかった結果

表から、2 つのことに気づきます。

1. **合計は、いつも 20 cm。**
   水は管を通って移るだけで、ふえもへりもしないからです（2 つの入れ物は同じ形なので、水位の合計が水の量を表します）。

2 差は、1 分ごとに、ほぼ同じ割合でへる。

$16.4 \div 20.0 = 0.82$、$13.4 \div 16.4 \approx 0.82$、$11.0 \div 13.4 \approx 0.82$ です。毎分、前の約 0.82 倍になっています。3-11 の「同じ時間ごとに同じ割合でへる」、つまり 6-4 の指数関数のへり方です。

左の水位だけ、右の水位だけを見ると、へり方もふえ方もはっきりしません。ところが「合計」と「差」に組みかえると、とても簡単なきまりが見えてきました。この組みかえが、この章のいちばん大切な考えです。

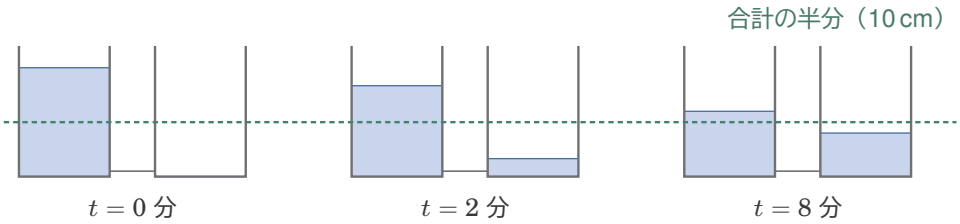


図 1　0 分、2 分、8 分の水位。合計の半分の 10 cm（点線）から見ると、左は上に、右は下に、いつも同じだけはなれている。そのはなれ（差の半分）が、だんだん小さくなる。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

3-6　連立方程式：2 つの式から、代入法（1 つの式を「$y = \cdots$」の形にして、もう 1 つに入れる）や加減法（式どうしをたす・ひく）で、文字を 1 つずつ消して解く。

6-2　オイラー法：次の値＝今の値＋（今の変わる速さ）× Δt。2 回微分の式は、位置 x と速度 v の 2 つの列で進める（速度を先に新しくし、その新しい速度で位置を進める）。

6-4　$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{\tau}$ の答えは $y = y_0 e^{-t/\tau}$。τ は時定数。半分になるまでの時間は $\tau \ln 2$。

6-6　$m\ddot{x} = -kx$ の答えは $x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$。固有角振動数は $\omega_n = \sqrt{k/m}$。

6-12　答えを e^{st} と置いて、特性方程式を作る。解が 2 つ（s_1、s_2）なら $Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$。重解 s なら $(A + Bt)e^{st}$。

4-9　振動数が少しちがう 2 つの波をたすと、大きさがゆっくり大きくなったり小さくなったりする（うなり）。

数学の道具

目でわかる からみあう 2 つの量 ★★★

1 つながった 2 つの水そう

やってみようの水そうで、何が水の流れを決めているかを考えます。管の中の水は、水位の高いほうから低いほうへ流れます。水位の差が大きいほど強く押されて、たくさん流れます。細い管の中をゆっくり流れるときは、1 分に流れる水の量は、水位の差に比例します。これは実験で確かめられたきまりです（物理シリーズ『力学』で、管の中の流れとしてくわしく学びます）。

ここでは、水位の差が 1 cm あたり、1 分に 10 cm^3 流れる管だとします。左の水位を h_1〔cm〕、右の水位を h_2〔cm〕とすると、1 分に流れる水の量は $10(h_1-h_2)$〔cm^3〕です。

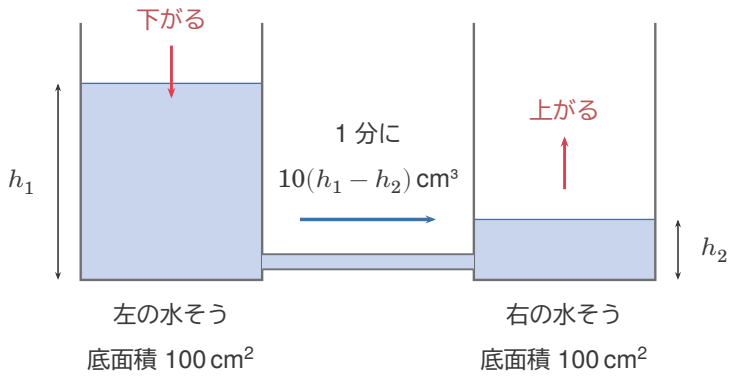


図 2 左から右へ流れる水の量は、水位の差 h_1-h_2 に比例する。左で出ていった水が、そのまま右に入る。

左の水そうからは、1 分に $10(h_1-h_2)\,\mathrm{cm}^3$ の水が出ていきます。底面積が 100 cm^2 なので、水位は 1 分に

$$10(h_1-h_2)\div 100=0.1(h_1-h_2)\quad〔\mathrm{cm}〕$$

下がります。「水の体積÷底面積＝高さ」だからです。右の水そうには、同じ量の水が入るので、同じだけ上がります。これを、変わる速さの式に書きます。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.1(h_1 - h_2)$$

読み方は「左の水位の変わる速さ（cm/分）は、水位の差の 0.1 倍で、下がる向き」「右の水位の変わる速さは、水位の差の 0.1 倍で、上がる向き」です。

- **0.1 はどこから？**

  管が流す量（差 1 cm あたり毎分 10 cm^3）を、底面積 100 cm^2 でわった数です。単位は「1/分」です。

- **マイナスはなぜ？**

  $h_1 > h_2$ のとき、左の水位は下がるので、変わる速さは負です。右は上がるので正です。

ここで大切なことがあります。左の水位の式の右辺に、**右の水位 h_2 が入っています**。右の水位の式には、左の水位 h_1 が入っています。だから、1 つの式だけを取り出して解くことはできません。6-4 の冷めるお湯では、右辺には温度 T だけが入っていたので、その式だけで解けました。

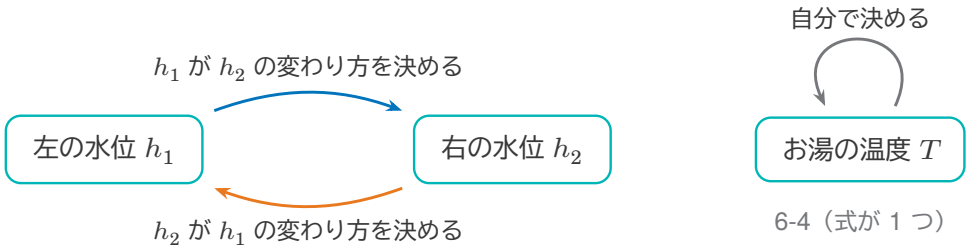


図 3　左：2 つの水位は、おたがいに相手の変わり方を決めあう。右：冷めるお湯は、自分の温度だけで変わり方が決まる。

このように、いくつかの量の変わる速さが、おたがいの量で決まるような微分方程式の組を、**連立微分方程式**（れんりつびぶんほうていしき）といいます。3-6 の連立方程式は「2 つの式を同時にみたす数の組」をさがしました。連立微分方程式は「2 つの式を同時にみたす**関数の組**」をさがします。

最後はどうなる？

水がいつまでも流れ続けることはありません。流れが止まるのは、2 つの水位が同じになって、差が 0 になったときです。このとき、どちらの式の右辺も 0 になり、水位は変わらなくなります（6-5 の終端速度で、変わる速さが 0 になる所をさがしたのと同じ考えです）。水の合計は 20 cm のままなので、

$$\text{最後の水位} = 20 \div 2 = 10 \quad 〔\text{cm}〕$$

です。では、どんな速さで 10 cm に近づくのでしょう。それは、③と⑤で、表計算と式で求めます。

② ばねでつながった 2 つのおもり

こんどは、動くものです。なめらかな床の上に、同じ質量 m の 2 つの台車を置き、図のように 3 本のばねでつなぎます。両はしのばねのばね定数は k、まん中の「つなぎのばね」のばね定数は K です。

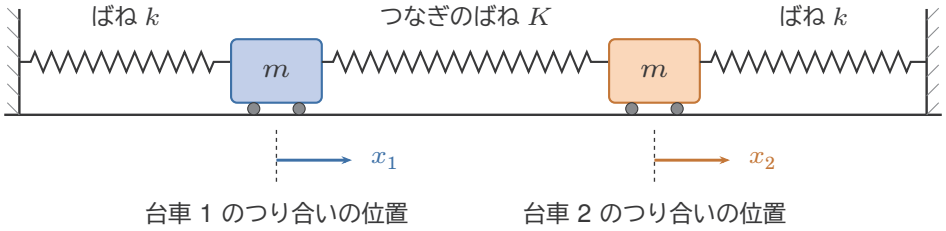


図 4　2 つの台車と 3 本のばね。x_1、x_2 は、それぞれの台車の、つり合いの位置からのずれ（右向きを正）。

まず、どんな動きになるかを見てみます。両はしのばねを $k = 100\,\text{N/m}$、まん中のばねを弱く $K = 10\,\text{N/m}$、台車をそれぞれ $m = 1\,\text{kg}$ とします。台車 2 を止めておいて、台車 1 だけを右へ 10 cm 引き、2 つとも静かに手をはなします。

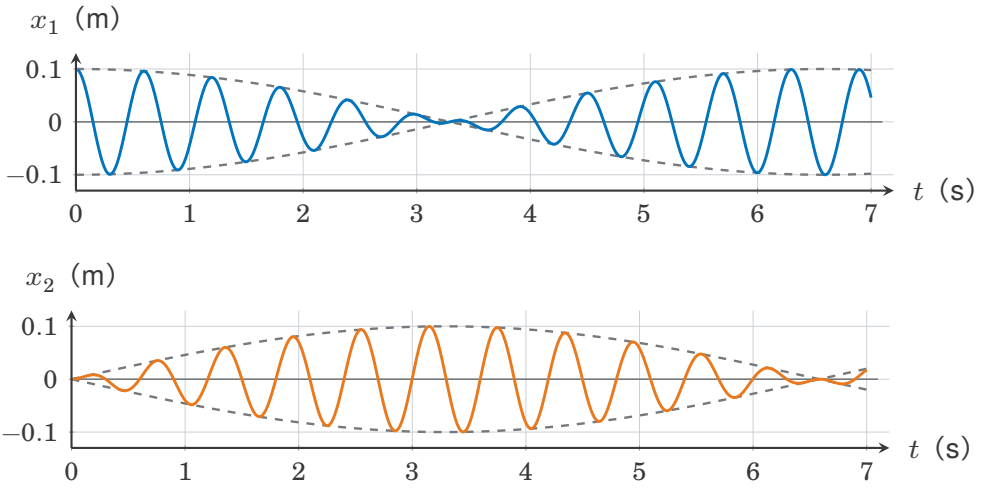


図 5　上が台車 1、下が台車 2 の位置（表計算で $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$ として計算したもの）。ゆれが台車 1 から台車 2 へうつり、約 3.3 秒で台車 1 はほとんど止まる。約 6.6 秒で、ゆれはまた台車 1 にもどる。

図 5 を見ると、はじめは台車 1 だけが大きくゆれ、台車 2 はほとんど動きません。ところが、台車 1 のゆれはだんだん小さくなり、そのかわりに台車 2 のゆれが大きくなります。約 3.3 秒で、ゆれはすっかり台車 2 にうつり、そのあとまた台車 1 にもどってきます。弱いばね 1 本で、ゆれが行ったり来たりするのです。点線のつつみの形は、4-9 のうなりとそっくりです。なぜこうなるかは、⑥で式から説明します。

2 つの台車の運動方程式

台車 1 と台車 2 にはたらく力を、1 つずつ書きます。ばねの力は「のび（またはちぢみ）×ばね定数」で、のびをもどす向きにはたらきます（6-6）。

1. **左のばね**　台車 1 が右へ x_1 ずれると、左のばねは x_1 だけのびて、台車 1 を左へ引きます。力は $-kx_1$。
2. **つなぎのばね**　のびは $x_2 - x_1$ です。たとえば $x_1 = 2\,\mathrm{cm}$、$x_2 = 5\,\mathrm{cm}$ なら、右はしが左はしより 3 cm 多く右へ動いたので、のびは 3 cm。のびたばねは両はしを内側へ引くので、台車 1 は右へ $+K(x_2 - x_1)$、台車 2 は左へ $-K(x_2 - x_1)$ の力を受けます。

③ 右のばね　台車 2 が右へ x_2 ずれると、右のばねは x_2 だけちぢんで、台車 2 を左へ押します。力は $-kx_2$。

2 つが同じだけ動いたとき（$x_1 = x_2$）は、つなぎのばねののびは 0 です。$x_2 - x_1$ という書き方は、このことも正しく表しています。力の合計＝質量×加速度（5-5）なので、

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1) \qquad m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1)$$

ここでも、台車 1 の式に x_2、台車 2 の式に x_1 が入っています。2 つのおもりの動きは、連立微分方程式で決まります。

手でわかる 表計算で、2 つを同時に進める　★★★

③ 2 つの列を、同じ行の値で進める

連立微分方程式も、6-2 のオイラー法で解けます。列を 2 つにして、2 つの水位を同時に進めるだけです。

$$\text{次の } h_1 = \text{今の } h_1 + (-0.1\times \text{ 今の差}) \times \Delta t$$

$$\text{次の } h_2 = \text{今の } h_2 + (\ \ 0.1\times \text{ 今の差}) \times \Delta t$$

大切なのは、**2 つとも「今の行」の値で計算する**ことです。左の水位を新しくしてから、その新しい値で右を計算してはいけません（まちがえやすいところ①）。表計算では、次のように入れます（F2 に Δt を入れる）。

- D2 に `=B2-C2`（差）、E2 に `=B2+C2`（合計）
- A3 に `=A2+$F$2`
- B3 に `=B2-0.1*D2*$F$2`、C3 に `=C2+0.1*D2*$F$2`
- 3 行めの A～E を、下へコピーする

B3 と C3 は、どちらも 2 行めの差 D2 を使っています。だから、2 つとも「今の行」の値で計算されます。

	A	B	C	D	E
1	t（分）	h_1	h_2	差	合計
2	0	20	0	20	20
3	1	18	2	16	20
4	2	16.4	3.6	12.8	20
5	3	15.12	4.88	10.24	20
6	4	14.096	5.904	8.192	20
7	5	13.277	6.723	6.554	20
12	10	11.074	8.926	2.147	20

表 2　$\Delta t = 1$ 分で進めた表（8〜11 行めは省略）。合計はぴったり 20 のまま。

2 行めから 3 行めへは、差が 20 なので、左は $0.1 \times 20 \times 1 = 2$ 下がって 18、右は 2 上がって 2 になります。3 行めから 4 行めへは、差が 16 なので、1.6 ずつ動いて 16.4 と 3.6 です。

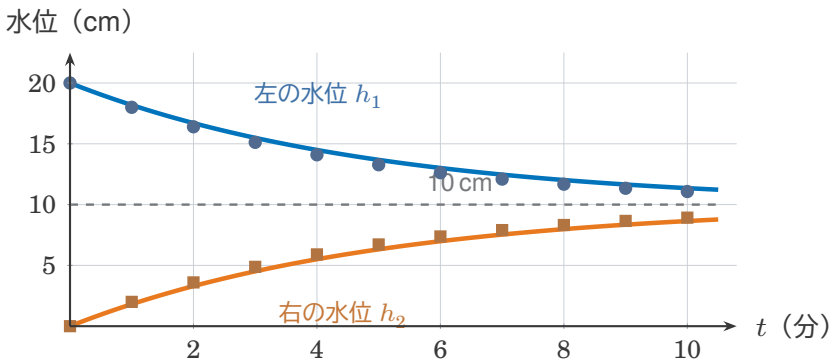


図 6　点は表計算（$\Delta t = 1$ 分）、線は⑤で求める式の答え。2 つの水位は、上と下から 10 cm に近づく。

表計算の点は、線（ほんとうの答え）より少しだけ速く 10 cm に近づいています。表では差が毎分ちょうど 0.8 倍（$1 - 0.2 = 0.8$）になりますが、やってみようでは約 0.82 倍でした。6-2 と同じで、1 分のあいだにも差は小さくなっていくのに、はじめの差のまま 1 分進めたからです。Δt を小さくすると、ずれ

は小さくなります（10 分後の h_1 は、$\Delta t = 1$ で 11.07、$\Delta t = 0.5$ で 11.22、$\Delta t = 0.1$ で 11.33。ほんとうは 11.35）。

④ 2 回微分の式は、1 回微分の式 2 つになる

6-2 では、ばねの動きを、位置 x と速度 v の 2 つの列で計算しました。じつはこれも、連立微分方程式を解いていたのです。

ばね $m\ddot{x} = -kx$ は、2 回微分が入った 1 つの式です。速度は位置の微分（$v = \dot{x}$）、加速度は速度の微分（$\ddot{x} = \dot{v}$）なので（5-5）、この式は次の 2 つの式の組と同じです。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}x$$

1 つめは「位置の変わる速さは速度」、2 つめは「速度の変わる速さ（加速度）は、位置の $-k/m$ 倍」です。1 つめの式に v、2 つめの式に x が入っているので、これは連立微分方程式です。

たいせつ

2 回微分の式 1 つは、1 回微分の式 2 つ（位置と速度）の組に書きかえられる。

ある時刻の「位置と速度の組」がわかれば、その先の動きは 1 つに決まります（2 回微分の式には、はじめの位置と速度の 2 つが必要でした。6-1）。この「組」を、その時刻の**状態**といいます。状態を、横に位置、たてに速度をとった平面の点で表すと、時間がたつにつれて点が動いていきます。

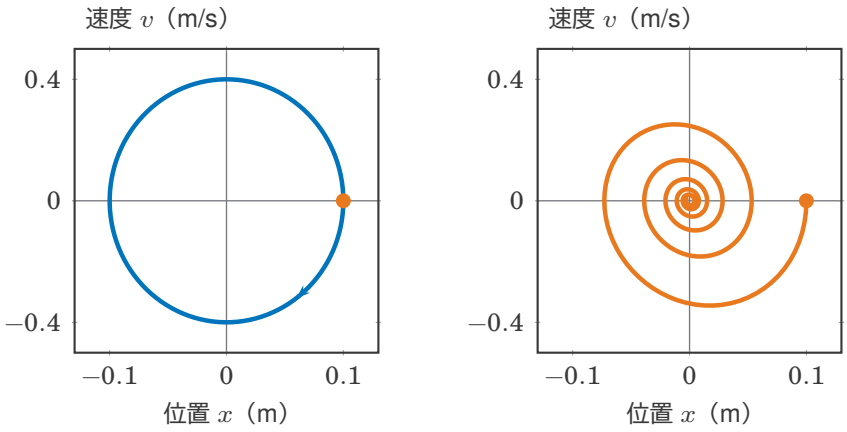


図 7　状態の点 $(x,\ v)$ の動き（6-6・6-7 のばね：0.5 kg、8 N/m、はじめ $x = 0.1\,\mathrm{m}$、$v = 0$。オレンジの点がスタート）。左：ダンパーなし。同じだ円を回り続ける。右：ダンパーあり（$c = 0.4\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$）。うずをまいて原点（止まった状態）へ近づく。

左の図では、点は時計回りに同じだ円を回り続けます。ばねのゆれが、いつまでも同じ大きさでくり返すからです。右の図では、ダンパーがエネルギーをうばうので、点はうずをまいて原点（位置 0・速度 0、つまり止まった状態）に近づきます。この「状態の点の動き」で見る考え方は、第 9 巻（9-10）の状態方程式で、機械やロボットを制御するときの基本になります。

2 つの台車を、4 つの列で進める

2 つの台車は、位置 x_1、x_2 と速度 v_1、v_2 の 4 つで状態が決まります。6-2 の型（速度を先に進める）で、4 つの列を同時に進めます。加速度は、②の運動方程式を m でわったものです。$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 100\,\mathrm{N/m}$、$K = 10\,\mathrm{N/m}$ なら、

$$a_1 = \frac{-kx_1 + K(x_2 - x_1)}{m} = -110x_1 + 10x_2$$

$$a_2 = \frac{-kx_2 - K(x_2 - x_1)}{m} = 10x_1 - 110x_2$$

（$-kx_1 - Kx_1 = -(100 + 10)x_1 = -110x_1$ のように、同じ文字の項をまとめました。）

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	x_1	x_2	v_1	v_2	a_1	a_2
2	0	0.1	0	0	0	−11	1
3	0.01	0.0989	0.0001	−0.11	0.01	−10.878	0.978
4	0.02	0.096712	0.000298	−0.21878	0.01978	−10.635	0.934

表 3 $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ で進めた表のはじめ（台車 1 を 0.1 m 引いてはなした）。

表の数は、次の順で計算します。

1. 2 行めの加速度：$a_1 = -110 \times 0.1 + 10 \times 0 = -11$
   $a_2 = 10 \times 0.1 - 110 \times 0 = 1$
2. 3 行めの速度：$v_1 = 0 + (-11) \times 0.01 = -0.11$
   $v_2 = 0 + 1 \times 0.01 = 0.01$
3. 3 行めの位置（新しい速度で）：$x_1 = 0.1 + (-0.11) \times 0.01 = 0.0989$
   $x_2 = 0 + 0.01 \times 0.01 = 0.0001$

台車 2 は、はじめは止まっていますが、つなぎのばねに引かれて、少しずつ動き出します。図 5 は、この表を $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$ で 7000 行計算してかいたものです。

ここまでで十分

表計算で、もう未来は計算できます。この先は式で解きます。

式でわかる 組み合わせて、ほどく ★★★★★

5 和と差に分ける

やってみようで気づいた「合計は一定」「差は同じ割合でへる」を、式で確かめます。2 つの式をもう一度書きます。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.1(h_1 - h_2)$$

2 つの式をたす：合計 $S = h_1 + h_2$

たし算の微分は、微分のたし算です（5-4：$(f+g)' = f' + g'$）。2 つの式の左辺どうし、右辺どうしをたします。右辺は $-0.1(h_1 - h_2) + 0.1(h_1 - h_2)$ で、打ち消しあって 0 になります。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0$$ 2 つの式をたした

$$\frac{\mathrm{d}(h_1 + h_2)}{\mathrm{d}t} = 0$$ 左辺は、たし算の微分（5-4）

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0$$ $S = h_1 + h_2$ と置いた

変わる速さが 0 なので、S は一定です。はじめの値 $S = 20 + 0 = 20$ のままです。左で下がった分だけ、右で上がるからです。

2 つの式をひく：差 $D = h_1 - h_2$

こんどは、左の式から右の式をひきます。右辺は、次のようになります。

$$-0.1(h_1 - h_2) - 0.1(h_1 - h_2) = -0.2(h_1 - h_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = -0.2(h_1 - h_2)$$ 左の式から右の式をひいた

$$\frac{\mathrm{d}(h_1 - h_2)}{\mathrm{d}t} = -0.2(h_1 - h_2)$$ 左辺は、ひき算の微分（5-4）

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -0.2D$$ $D = h_1 - h_2$ と置いた

$$D = 20e^{-0.2t}$$ 6-4 の形。はじめの差は 20

D だけの式になりました。「自分に比例してへる」形（6-4）なので、答えは $D = D_0 e^{-0.2t}$、はじめの差 $D_0 = 20 - 0 = 20$ です。時定数は $\tau = 1 \div 0.2 = 5$ 分。やってみようの「毎分約 0.82 倍」は、$e^{-0.2} = 0.8187$ だったのです。

もとの h_1、h_2 にもどす

$S = h_1 + h_2$ と $D = h_1 - h_2$ から、h_1 と h_2 を求めます。3-6 の加減法と同じです。

$$S + D = 2h_1$$ たすと h_2 が消える

$$h_1 = \frac{S + D}{2} = 10 + 10e^{-0.2t}$$ 2 でわって、S と D を入れた

$$S - D = 2h_2$$ ひくと h_1 が消える

$$h_2 = \frac{S - D}{2} = 10 - 10e^{-0.2t}$$ 2 でわって、S と D を入れた

代入して確かめる

$h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$ を微分すると（5-14）、

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = 10 \times (-0.2)e^{-0.2t} = -2e^{-0.2t}$$

右辺は $-0.1(h_1 - h_2) = -0.1 \times 20e^{-0.2t} = -2e^{-0.2t}$。同じなので、たしかに答えです。$h_2$ も同じように確かめられます。

はてな？の答え

左の水位は $h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$、右の水位は $h_2 = 10 - 10e^{-0.2t}$（cm、分）。どちらも最後は 10 cm になります。2 つの水位の差は、5 分（時定数）ごとに $e^{-1} \approx 0.37$ 倍、$5 \ln 2 \approx 3.5$ 分ごとに半分になります。

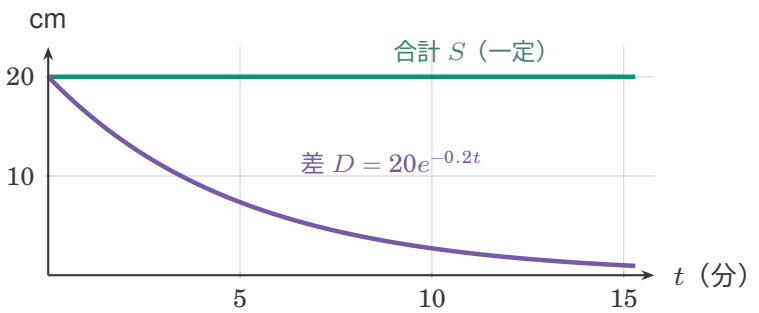


図 8　合計と差に組みかえると、片方は変わらず、もう片方は 6-4 の形でへるだけ。

> **せいかくに言うと**
> 和と差に分けると 2 つの式がばらばらになったのは、2 つの水そうが同じ形で、式が左右で同じ形（左と右を入れかえても同じ式）だったからです。形がちがう水そうでは、ただの和ではうまくいきません。次の小見出しのように、底面積をかけた「重みつきの和」を使います。

大きさのちがう水そうでは

左の水そうの底面積を $100\,\mathrm{cm}^2$、右を $300\,\mathrm{cm}^2$ にします。管は同じで、1 分に $10(h_1-h_2)\,\mathrm{cm}^3$ 流れます。はじめは左が 20 cm、右が空です。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{10(h_1-h_2)}{100}=-0.1(h_1-h_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=\frac{10(h_1-h_2)}{300}=\frac{1}{30}(h_1-h_2)$$

右は底面積が 3 倍なので、同じ水が入っても、水位は 3 分の 1 しか上がりません。だから h_1+h_2 は一定ではありません。一定なのは、水の体積 $100h_1+300h_2$ です。確かめます。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(100h_1+300h_2)=100\times(-0.1(h_1-h_2))+300\times\frac{1}{30}(h_1-h_2)$$

$$=-10(h_1-h_2)+10(h_1-h_2)=0$$

このように、底面積の重みをかけてたしたものを、**重みつきの和**といいます。はじめの体積は $100\times20+300\times0=2000\,\mathrm{cm}^3$ です。差 $D=h_1-h_2$ のほうは、

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=-0.1D-\frac{1}{30}D=-\frac{3+1}{30}D=-\frac{2}{15}D$$

で、やはり 6-4 の形です。時定数は $\tau=15\div2=7.5$ 分、$D=20e^{-t/7.5}$ です。最後は 2 つの水位がそろうので、$100h+300h=2000$ より $h=5\,\mathrm{cm}$。体積の式と差の式から h_1、h_2 を出します（3-6 の代入法：$h_1=h_2+D$ を体積の式に入れる）。

$$100(h_2+D)+300h_2=2000\quad\text{より}\quad h_2=5-\frac{D}{4}=5-5e^{-t/7.5}$$

$$h_1=h_2+D=5+15e^{-t/7.5}$$

左は 15 cm 下がり、右は 5 cm しか上がりません。右の底面積が 3 倍だからです。

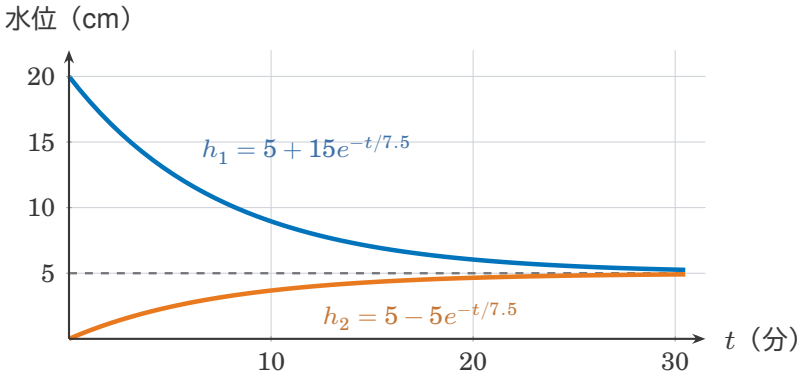


図 9　底面積が 100 cm² と 300 cm² の水そう。2 つの水位は 5 cm にそろう。

6 2 つのおもり：振動モード

②の台車の式にも、和と差を使います。

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1) \qquad m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1)$$

和 $u = x_1 + x_2$

2 つの式をたします。

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -kx_1 + K(x_2 - x_1) - kx_2 - K(x_2 - x_1)$$

$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$　　つなぎのばねの力は打ち消しあう

$m\ddot{u} = -ku$　　$u = x_1 + x_2$ と置いた

$\ddot{u} = -\dfrac{k}{m}u$　　両辺を m でわった。6-6 の形

差 $w = x_1 - x_2$

左の式から右の式をひきます。

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -kx_1 + K(x_2 - x_1) + kx_2 + K(x_2 - x_1)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(k + 2K)(x_1 - x_2)$$　　$K(x_2 - x_1) = -K(x_1 - x_2)$ が 2 つ分

$$m\ddot{w} = -(k + 2K)w$$　　$w = x_1 - x_2$ と置いた

$$\ddot{w} = -\frac{k + 2K}{m}w$$　　両辺を m でわった

どちらも、6-6 の「2 回微分すると自分の $-\omega^2$ 倍」の形です。だから、

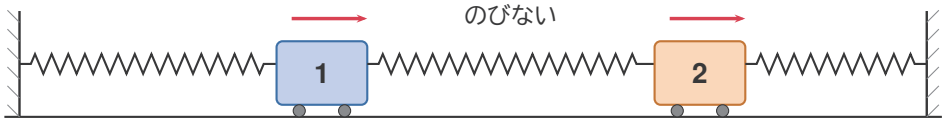
和 u は　$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　でゆれる

差 w は　$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2K}{m}}$　でゆれる

2 つの特別な動き方

式の意味を、図で考えます。

1 次モード：いっしょに動く　$x_1 = x_2$、$\omega_1 = \sqrt{k/m}$



2 次モード：反対に動く　$x_1 = -x_2$、$\omega_2 = \sqrt{(k + 2K)/m}$

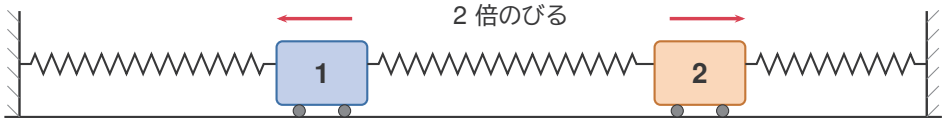


図 10　2 つの台車がいっしょに動くと、つなぎのばねはのびもちぢみもしない。反対に動くと、つなぎのばねは片方の台車のずれの 2 倍のびちぢみする。

● **いっしょに動く**（$x_1 = x_2$）

2 つの台車が同じだけ右へ動くと、つなぎのばねの長さは変わりません。だから、それぞれの台車は、外側のばね k だけに引かれます。台車 1 つとばね 1 本のときと同じなので、$\omega_1 = \sqrt{k/m}$ でゆれます。

● **反対に動く**（$x_1 = -x_2$）

台車 1 が右へ x_1、台車 2 が左へ x_1 動くと、つなぎのばねは $2x_1$ ちぢみます。台車 1 は、外側のばねから kx_1、つなぎのばねから $2Kx_1$ の力で押しもどされます。ばねが $k + 2K$ に強くなったのと同じなので、速くゆれます。

このように、全部の部分が同じ角振動数で、そろってゆれる動き方を**振動モード**（しんどうモード）といいます。角振動数の小さいほうから、1 次モード、2 次モードとよびます。

2 つの台車を同じ向きに同じだけずらしてはなすと、差 w ははじめから 0 で、ずっと 0 のままです。だから、いつまでも 1 次モードだけでゆれます。反対向きに同じだけずらすと、和 u が 0 のままなので、2 次モードだけでゆれます。

どんな動きも、2 つのモードのたし算

台車 1 だけを X 引いて、2 つとも静かにはなしたときを考えます。はじめは $x_1 = X$、$x_2 = 0$ なので、$u = X + 0 = X$、$w = X - 0 = X$。速度は 0 です。6-6 と同じように、はじめの位置が X で速度が 0 なら、答えは cos の形です。

$$u = X\cos\omega_1 t \qquad w = X\cos\omega_2 t$$

$x_1 = (u + w) \div 2$、$x_2 = (u - w) \div 2$ にもどすと（⑤と同じ加減法）、

$$x_1 = \frac{X}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \qquad x_2 = \frac{X}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$

台車 1 の動きも、台車 2 の動きも、2 つのモードのゆれのたし算です。

②の数（$m = 1$、$k = 100$、$K = 10$、$X = 0.1$）では、$\omega_1 = \sqrt{100} = 10$、$\omega_2 = \sqrt{120} \approx 10.95$（rad/s）です。2 つの角振動数が近いので、4-9 のうなり

になります。加法定理（4-9）の $\cos(P \pm Q) = \cos P \cos Q \mp \sin P \sin Q$ を、たしたり、ひいたりすると、

$$\cos(P+Q) + \cos(P-Q) = 2\cos P \cos Q$$

$$\cos(P+Q) - \cos(P-Q) = -2\sin P \sin Q$$

$P+Q = \omega_2 t$、$P-Q = \omega_1 t$ になるように、$P = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t$、$Q = \dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ とします。すると、

$$x_1 = X\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \cdot \cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

$$x_2 = -X\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

$(\omega_1+\omega_2)\div 2 \approx 10.48$ の速いゆれの大きさが、$(\omega_2-\omega_1)\div 2 \approx 0.477$ のゆっくりした cos と sin で変わります。$\cos 0.477t$ が 0 になるのは $0.477t = \pi \div 2$、つまり $t \approx 3.3\,\mathrm{s}$ のときです。このとき台車 1 は止まり、台車 2 のゆれの大きさは X です。図 5 のふしぎな動きは、こうして式で説明できました。

3 本とも同じばね（$K = k = 100\,\mathrm{N/m}$）なら、$\omega_1 = 10$、$\omega_2 = \sqrt{300} \approx 17.3$（rad/s）です。周期は $2\pi \div 10 \approx 0.63\,\mathrm{s}$ と $2\pi \div 17.3 \approx 0.36\,\mathrm{s}$。2 つの角振動数がはなれているので、うなりではなく、こみいった形のゆれになります。それでも、2 つのモードのたし算であることは同じです。

係数を表に並べると

②の式を m でわって、x_1 と x_2 の係数を表に並べてみます。

	x_1 の係数	x_2 の係数
$\ddot{x}_1 =$	$-\dfrac{k+K}{m}$	$\dfrac{K}{m}$
$\ddot{x}_2 =$	$\dfrac{K}{m}$	$-\dfrac{k+K}{m}$

表 4　2 つの式の係数を、表の形に並べた。

x_1 と x_2 を「1 対 1 でたす（和）」「1 対 1 でひく（差）」という組み合わせにしたら、2 つの式がばらばらにほどけました。こういう「ほどける組み合わせ」を、係数の表（行列）の計算で見つける方法が、第 7 巻の**固有ベクトル**（7-8）と**対角化**（7-9）です。おもりが 3 つ、4 つ…とふえても、表の計算でモードを見つけられるようになります。

❼ 消去法：1 つの式にまとめる

和と差のような、うまい組み合わせがいつも見つかるとはかぎりません。そのときは、3-6 の代入法と同じように、文字を 1 つ消します。1 つの式を「$h_2 = \cdots$」の形にして、もう 1 つの式に入れるのです。この方法を**消去法**（しょうきょほう）といいます。

水そうの式で

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1(h_1 - h_2)$$ 左の水そうの式

$$10\dot{h}_1 = -h_1 + h_2$$ 両辺に 10 をかけた

$$h_2 = h_1 + 10\dot{h}_1$$ $h_2 = \cdots$ の形にした

$$\dot{h}_1 + 10\ddot{h}_1 = 0.1(h_1 - (h_1 + 10\dot{h}_1))$$ 右の水そうの式に入れた

$$\dot{h}_1 + 10\ddot{h}_1 = -\dot{h}_1$$ 右辺をかっこの中から計算した

$$10\ddot{h}_1 + 2\dot{h}_1 = 0$$ h_1 だけの、2 回微分の式

4 行めは、右の水そうの式 $\dot{h}_2 = 0.1(h_1 - h_2)$ の h_2 に、3 行めの $h_1 + 10\dot{h}_1$ を入れたものです。左辺は、$h_2 = h_1 + 10\dot{h}_1$ を微分した $\dot{h}_2 = \dot{h}_1 + 10\ddot{h}_1$ です。2 つの 1 回微分の式から、h_1 だけの 2 回微分の式が 1 つできました。

これは 6-12 の形です。$h_1 = e^{st}$ と置くと、特性方程式は

$$10s^2 + 2s = 0 \qquad s(10s + 2) = 0 \qquad s = 0,\ -0.2$$

$e^{0t}=1$ なので、答えは $h_1=A+Be^{-0.2t}$ です。はじめの値 $h_1(0)=20$ と、はじめの変わる速さ $\dot{h}_1(0)=-0.1\times(20-0)=-2$ で A、B を決めます。

$$A+B=20、\quad -0.2B=-2 \quad より \quad B=10、A=10$$

⑤と同じ $h_1=10+10e^{-0.2t}$ になりました。$s=0$ の解は「変わらない部分」で、合計が一定であることを表しています。

直列の水そう：上から下へ流れ落ちる

こんどは、同じ形の水そうを、階段のように上下に置きます。上の水そうの水は、管を通って下の水そうに落ち、下の水そうの水は、同じような管から外に出ていきます。どちらの管も、流れる量はその水そうの水位に比例するとします。

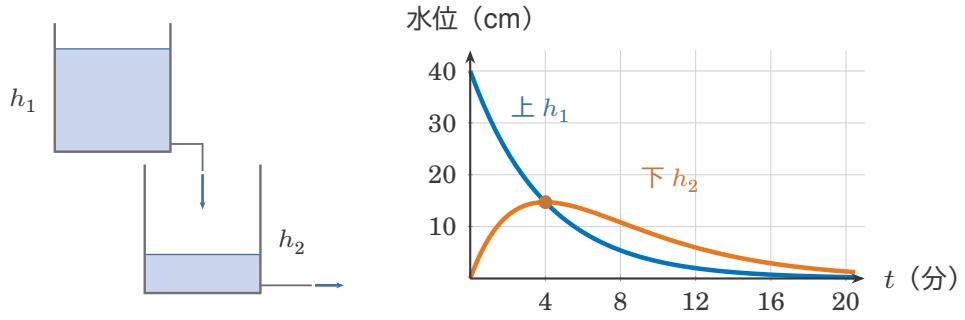


図 11　直列の水そう（時定数 4 分、はじめ上が 40 cm、下が空）。下の水位は、ふえてから、へる。いちばん高くなるのは 4 分後（点）。

それぞれの水そうだけで流れ出すときの時定数を τ とすると（6-4）、

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{h_1}{\tau} \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=\frac{h_1}{\tau}-\frac{h_2}{\tau}$$

下の水そうには、上から h_1/τ の割合で水位がふえるように水が入り、自分の管から h_2/τ の割合で出ていきます。上の式には h_1 しかないので、6-4 で $h_1=h_0e^{-t/\tau}$（h_0 ははじめの深さ）とすぐに解けます。下の式は、入る量が時間とともに変わるので、6-4 の形ではありません。そこで消去法を使います。

$h_1 = \tau\dot{h}_2 + h_2$	下の式の両辺に τ をかけて、$h_1 = \cdots$ にした
$\tau\ddot{h}_2 + \dot{h}_2 = -\dfrac{\tau\dot{h}_2 + h_2}{\tau}$	上の式 $\dot{h}_1 = -h_1/\tau$ に入れた
$\tau^2\ddot{h}_2 + 2\tau\dot{h}_2 + h_2 = 0$	両辺に τ をかけて、左辺に集めた
$\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1 = 0$	$h_2 = e^{st}$ と置いた（6-12）
$(\tau s + 1)^2 = 0$	2 乗の展開の形（3-8）
$s = -\dfrac{1}{\tau}$	重解

重解なので、6-12 のとおり、答えは $h_2 = (A + Bt)e^{-t/\tau}$ です。A と B は、はじめの状態で決めます。

1. はじめは下が空なので、$h_2(0) = A = 0$。
2. はじめの変わる速さは、下の式に $h_1 = h_0$、$h_2 = 0$ を入れて $\dot{h}_2(0) = h_0/\tau$。
3. $h_2 = Bte^{-t/\tau}$ を積の微分（5-6）で微分すると $\dot{h}_2 = B\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$。$t = 0$ では B なので、$B = h_0/\tau$。

$$h_2 = h_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

6-12 では、te^{st} は「重解のときに足りない 2 つめの答え」として出てきました。ここでは、それが主役です。下の水位がいちばん高くなるのは、微分が 0 になる時刻です（5-7）。③の $\dot{h}_2$ が 0 になるのは $1 - t/\tau = 0$、つまり $t = \tau$ のときで、そのときの水位は $h_0 e^{-1} \approx 0.37h_0$ です。

時定数がちがうとき：親と子

2 つの水そうの時定数がちがうとき（上が τ_1、下が τ_2）は、量を N_1、N_2 と書くと、

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_1}{\tau_1} \qquad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \frac{N_1}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_2}$$

となります。これは、放射性物質の「親」がこわれて「子」になり、子もまたこわれていくときの式と同じです。原子の数がへる速さは、そのときの数に比例します（6-4）。親の数 N_1 は親のこわれ方だけで決まり、子の数 N_2 は、親から生まれる分だけふえ、自分がこわれる分だけへります。この式は、1910 年にベイトマンが一般の場合まで解きました。

同じように消去法を使うと、特性方程式は $(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) = 0$ になり（例題 8 でくわしく計算します）、解は $s = -1/\tau_1$ と $s = -1/\tau_2$ の 2 つです。だから子の数は、

$$N_2 = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

の形になります。

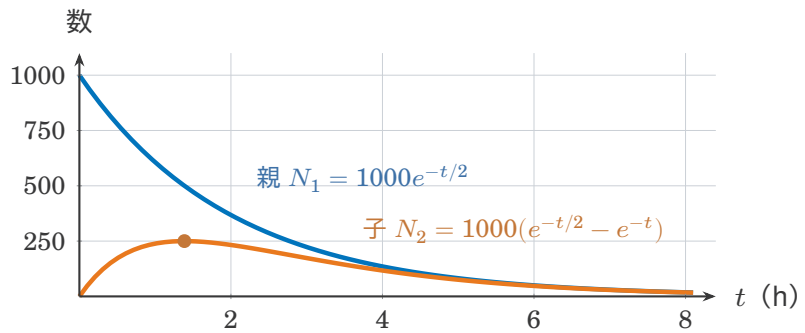


図 12　例題 8 の親と子（$\tau_1 = 2\,\mathrm{h}$、$\tau_2 = 1\,\mathrm{h}$、はじめ親 1000、子 0）。子は、ふえてからへる。直列の水そうと同じ形。

2 つの時定数が近づいていくと、この答えは直列の水そうの $te^{-t/\tau}$ の形に近づいていきます。

⑧ 熱と電気でも同じ形

2 つの物の温度が近づく

熱いお湯を入れた金属のコップを、冷たい水を入れた入れ物にひたします。外へ熱は逃げないとします（入れ物を発ぽうスチロールの箱に入れる）。熱は、温度の高いほうから低いほうへ流れます。1 秒に流れる熱（熱流、W）は、温度差に比例し、熱抵抗 R_{th}〔K/W〕に反比例します（6-4）。

$$\text{熱流 } P = \frac{T_1 - T_2}{R_{\mathrm{th}}} \quad 〔\mathrm{W}〕$$

お湯（熱容量 C_1〔J/K〕）は 1 秒に P の熱を失い、水（熱容量 C_2）は同じ P を受けとります。熱容量は「1 K（1 ℃）上げるのに必要な熱」なので、温度の変わる速さは「熱の出入り÷熱容量」です。

$$C_1\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{T_1 - T_2}{R_{\mathrm{th}}} \qquad C_2\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\mathrm{th}}}$$

大きさのちがう水そうと、まったく同じ形です。2 つの式をたすと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1T_1 + C_2T_2) = 0$$

熱容量をかけた重みつきの和（熱の量）が一定です。最後は 2 つの温度がそろうので、最後の温度は

$$T_\infty = \frac{C_1T_1(0) + C_2T_2(0)}{C_1 + C_2}$$

です。これは、中学の理科で「お湯と水をまぜたときの温度」を求めた式と同じです（まぜても、金属のかべごしでも、熱の合計は変わらないから）。差 $D = T_1 - T_2$ は、

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{D}{R_{\mathrm{th}}C_1} - \frac{D}{R_{\mathrm{th}}C_2}$$

$$= -\frac{1}{R_{\mathrm{th}}}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)D$$

で、6-4 の形でへります。2 つの温度は、上と下から T_∞ に近づきます（例題 4）。

2 つのコンデンサーをつなぐ

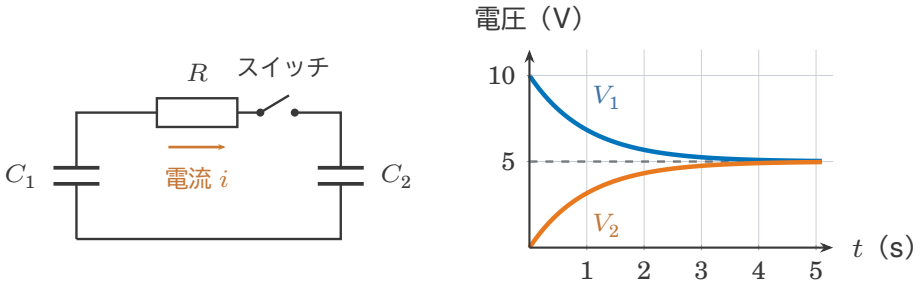


図 13　10 V に充電したコンデンサー（100 μF）と、空のコンデンサー（100 μF）を、20 kΩ の抵抗でつなぐ。2 つの電圧は 5 V に近づく。

コンデンサーは、電気をためる部品です（6-4）。ためた電気の量 q〔C〕と電圧 V〔V〕には $q = CV$ のきまりがあり、流れこむ電流 i〔A〕は q の変わる速さです（$i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$）。2 つのコンデンサーを抵抗 R でつなぐと、オームの法則で $i = (V_1 - V_2)/R$ の電流が流れます。左のコンデンサーからは電気が出ていき、右には入るので、

$$C_1 \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_1 - V_2}{R} \qquad C_2 \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

熱の式の T を V に、R_{th} を R にかえただけです。電気の量 $C_1V_1 + C_2V_2$ が一定で、電圧の差が 6-4 の形でへります。図のように $C_1 = C_2 = 100\,\mu\mathrm{F}$、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$ なら、差がへる速さは

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{2}{RC_1} = \frac{2}{20 \times 10^3\,\Omega \times 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}} = \frac{2}{2\,\mathrm{s}}$$

なので、時定数は $\tau = 2\,\mathrm{s} \div 2 = 1\,\mathrm{s}$ です（$\Omega \times \mathrm{F} = \mathrm{s}$ は 6-4）。$V_1 = 5 + 5e^{-t}$、$V_2 = 5 - 5e^{-t}$〔V〕になります。

	水そう	熱	電気
そろう量	水位 h	温度 T	電圧 V
ためる部分	底面積 A	熱容量 C_{th}	静電容量 C
流れにくさ	管の流れにくさ	熱抵抗 R_{th}	抵抗 R
一定の量	水の体積 Ah の和	熱 $C_{\mathrm{th}}T$ の和	電気の量 CV の和

表 5 3 つの「そろっていく」しくみは、同じ形の連立微分方程式で書ける（6-15 の相似の表へ）。

たいせつ

連立微分方程式 **いくつかの量の変わる速さが、おたがいの量で決まる**

表計算 **全部の列を、「今の行」の値で同時に進める**

和と差 **（重みつきの）和は一定。差は $e^{-t/\tau}$ でへる**

振動モード **いっしょ $\omega_1 = \sqrt{k/m}$、反対 $\omega_2 = \sqrt{(k+2K)/m}$**

どんな動きも、モードのたし算

消去法 **1 つの文字の式にまとめて、特性方程式（6-12）**

この章で出てきたことば

連立微分方程式 いくつかの量の変わる速さが、おたがいの量で決まるような、微分方程式の組。

状態 その時刻の位置と速度のように、その先の動きを決めるのに必要な量の組。

重みつきの和 底面積や熱容量のような「重み」をかけてから、たしたもの。

振動モード 全部の部分が、同じ角振動数でそろってゆれる動き方。角振動数の小さいほうから 1 次モード、2 次モード。

消去法 1 つの式を「$h_2 = \cdots$」の形にして、もう 1 つの式に入れ、文字を 1 つ消す方法。

記号カード　初めて出た章 **6-14**

$x_1,\ x_2$

読み方　エックス・いち、エックス・に
意味　下つきの数で、どの物の量かを区別する。6-2 の y_n（n 歩め）とはちがう
英語　subscript

記号カード　初めて出た章 **6-14**

$\omega_1,\ \omega_2$

読み方　オメガ・いち、オメガ・に
意味　1 次モード・2 次モードの角振動数（rad/s）。6-6 の ω_n の n は番号ではない
英語　mode frequency

もっと知りたい　★★★★

電気のエネルギーは、半分になる

図の 2 つのコンデンサーで、エネルギー $\frac{1}{2}CV^2$（5-12）をくらべます。

$$\text{はじめ}：\frac{1}{2}\times 100\times 10^{-6}\,\mathrm{F}\times(10\,\mathrm{V})^2 = 5\,\mathrm{mJ}$$

$$\text{最後}：2\times\frac{1}{2}\times 100\times 10^{-6}\,\mathrm{F}\times(5\,\mathrm{V})^2 = 2.5\,\mathrm{mJ}$$

電気の量は保たれるのに、エネルギーはちょうど半分になりました。のこりの半分は、電流が流れるあいだに抵抗で熱になったのです。ふしぎなことに、この「半分」は抵抗の大きさによりません。抵抗が小さいと、大きな電流が短い時間流れ、熱になる量は同じになるのです。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

連立 1 階線形微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax$ において、行列 A の固有値を λ_1、λ_2、対応する固有ベクトルを v_1、v_2 とすると、一般解は $x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ で与えられる。

訳　「x」は h_1、h_2 のように、いくつかの量をまとめて 1 つの文字にしたもの（第 7 巻のベクトル）。「行列 A」は⑥の係数の表。「固有ベクトル」は和や差のような、ほどける組み合わせで、「固有値」はそのときの s（この本では s、大学の本では λ と書くことが多い）。「答えは、モードごとの指数関数のたし算」という意味。

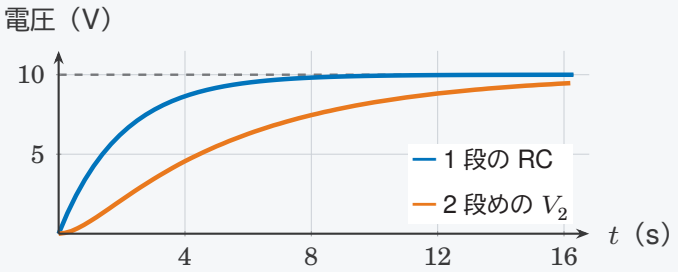
もっと知りたい ★★★★

2 段の RC：なめらかにする回路

抵抗とコンデンサーの組（6-4 の RC）を 2 段につなぐと、連立微分方程式になります。電池 $E = 10\,\mathrm{V}$、どちらも $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$（$RC = 2\,\mathrm{s}$）のとき、2 つの電圧は

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = \frac{(E - V_1) - (V_1 - V_2)}{RC} \qquad \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V_1 - V_2}{RC}$$

1 つめのコンデンサーには、電池から入る電流 $(E - V_1)/R$ と、2 つめへ出ていく電流 $(V_1 - V_2)/R$ の差がたまるからです。表計算で計算すると、2 段めの電圧 V_2 は、はじめは平らで、ゆっくり立ち上がります（図）。急な変化をなめらかにするので、電気の雑音を消す「フィルター」に使われます。



もっと知りたい ★★★★

えさと、食べる動物の数

ウサギ（えさ）の数 x とキツネ（食べる動物）の数 y の変わり方を、$\dot{x} = x - 0.05xy$、$\dot{y} = -y + 0.01xy$ と表すことがあります（ロトカ 1925 年、ヴォルテラ 1926 年）。xy は「出会う回数」を表します。量どうしのかけ算が入るので線形ではなく（5-18）、式では解けませんが、表計算なら解けます。ウサギがふえると少しおくれてキツネがふえ、ウサギがへるとキツネもへる、というくり返しになります。

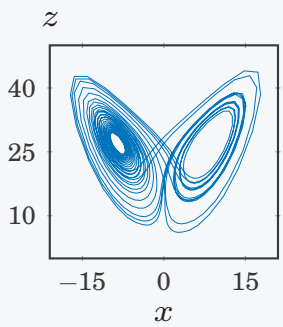
コラム　カオス：未来は、はじめの状態で決まる？

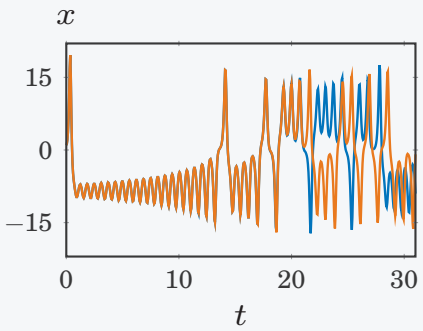
1961 年、アメリカの気象学者ローレンツは、12 個の量の連立微分方程式で、コンピュータに天気の動きを計算させていました。ある日、計算をとちゅうからやり直そうとして、前の計算結果の 0.506127 という数を、印刷されていた 0.506 で入れました。ほんの 0.000127 のちがいです。ところが、しばらくすると、天気の動きはまったくちがうものになってしまいました。

ローレンツは、1963 年の論文で、これを 3 つの量 x、y、z の式にまで簡単にしてみせました。

$$\dot{x} = 10(y - x) \qquad \dot{y} = x(28 - z) - y \qquad \dot{z} = xy - \tfrac{8}{3}z$$

xz や xy のかけ算が入っているので、線形ではありません。表計算で解くと、状態の点は、チョウの羽のような形の上を、左の輪と右の輪をでたらめにうつりながら、いつまでも回り続けます（下の左の図）。はじめの y を 1 と 1.001 にした 2 つの計算は、しばらく同じ動きをしますが、18 秒ほどで、まったくちがう動きになります（下の右の図。青とオレンジ）。





ほんの少しのちがいが、どんどん大きく育つ性質を、**カオス**といいます。ルールがはっきり決まっていても、はじめの状態を「完全に」は知ることができないので、遠い先までは予想できないのです。天気予報が 1〜2 週間より先を当てられないわけの 1 つが、これです。1972 年の学会でのローレンツの講演の題「ブラジルでの 1 匹のチョウのはばたきは、テキサスで竜巻を起こすか」から、この性質は「バタフライ効果」ともよばれます。

例題でたしかめよう

例題 1　表計算の 1 行を手で

同じ形の 2 つの水そうの水位 h_1、h_2（cm）が、次の式にしたがって変わります（t は分）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.2(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.2(h_1 - h_2)$$

はじめ $h_1 = 30$、$h_2 = 10$ です。$\Delta t = 0.5$ 分のオイラー法で、0.5 分後と 1 分後の水位を求めましょう。

考え方　③のように、2 つとも「今の行」の差を使って進める。合計が変わらないことで確かめる。

式　0.5 分後：今の差は $30 - 10 = 20$、変わる量は $0.2 \times 20 \times 0.5 = 2$

$h_1 = 30 - 2 = 28$、$h_2 = 10 + 2 = 12$

1 分後：今の差は $28 - 12 = 16$、変わる量は $0.2 \times 16 \times 0.5 = 1.6$

$h_1 = 28 - 1.6 = 26.4$、$h_2 = 12 + 1.6 = 13.6$

確かめ：合計は $28 + 12 = 40$、$26.4 + 13.6 = 40$。はじめの $30 + 10 = 40$ と同じ。

答え　0.5 分後 $h_1 = 28\,\mathrm{cm}$、$h_2 = 12\,\mathrm{cm}$

1 分後 $h_1 = 26.4\,\mathrm{cm}$、$h_2 = 13.6\,\mathrm{cm}$

じぶんでとこう 1

次の式で、はじめ $h_1 = 25$、$h_2 = 5$（cm）です。$\Delta t = 1$ 分のオイラー法で、1 分後と 2 分後の水位を求めましょう（t は分）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.1(h_1 - h_2)$$

例題 2　2 回微分の式を、1 回微分の式 2 つにする

ダンパーつきのばね $0.5\ddot{x}+0.4\dot{x}+8x=0$ を、位置 x と速度 v の 1 回微分の式 2 つに書きかえましょう。また、$x=0.1$、$v=0$ から、$\Delta t=0.1$ の「速度を先に進めるオイラー法」で 2 行進めましょう。

考え方　$\dot{x}=v$、$\ddot{x}=\dot{v}$（5-5）。もとの式を「$\ddot{x}=\cdots$」の形にする。表は 6-2 の順（加速度→速度→位置）。

式　両辺を 0.5 でわる：$\ddot{x}=-16x-0.8\dot{x}$

1 回微分の式 2 つ：$\dot{x}=v$、$\dot{v}=-16x-0.8v$

1 行め：$a=-16\times0.1-0.8\times0=-1.6$

$v=0+(-1.6)\times0.1=-0.16$

$x=0.1+(-0.16)\times0.1=0.084$

2 行め：$a=-16\times0.084-0.8\times(-0.16)$

$=-1.344+0.128=-1.216$

$v=-0.16+(-1.216)\times0.1=-0.2816$

$x=0.084+(-0.2816)\times0.1=0.05584$

答え　$\dot{x}=v$、$\dot{v}=-16x-0.8v$

$(x,\ v)$ は $(0.084,\ -0.16)$、$(0.05584,\ -0.2816)$

じぶんでとこう 2

$\ddot{x}+0.2\dot{x}+9x=0$ を、1 回微分の式 2 つに書きかえましょう。また、$x=0.2$、$v=0$ から、$\Delta t=0.1$ の「速度を先に進めるオイラー法」で 2 行進めましょう。

例題 3　和と差で解く

同じ形の 2 つの水そうの水位が、次の式にしたがいます（cm、分）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.2(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.2(h_1 - h_2)$$

はじめ $h_1 = 30$、$h_2 = 10$ です。h_1、h_2 を t の式で表しましょう。また、2 つの水位の差が 10 cm になるのは何分後ですか（$\ln 2 = 0.693$）。

考え方　⑤のように、和 S と差 D の式を作る。S は一定、D は 6-4 の形。最後に $h_1 = (S + D) \div 2$、$h_2 = (S - D) \div 2$ にもどす。

式　たす：$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0$ なので $S = 30 + 10 = 40$

ひく：$\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -0.2D - 0.2D = -0.4D$

はじめ $D = 30 - 10 = 20$ なので $D = 20e^{-0.4t}$

$$h_1 = \frac{40 + 20e^{-0.4t}}{2} = 20 + 10e^{-0.4t}$$

$$h_2 = \frac{40 - 20e^{-0.4t}}{2} = 20 - 10e^{-0.4t}$$

差が 10：$20e^{-0.4t} = 10$ より $e^{-0.4t} = \dfrac{1}{2}$

両辺の ln をとる：$-0.4t = -\ln 2$

$$t = \frac{0.693}{0.4} \approx 1.73$$

答え　$h_1 = 20 + 10e^{-0.4t}$、$h_2 = 20 - 10e^{-0.4t}$。約 1.7 分後

じぶんでとこう 3

同じ形の 2 つの水そうで、次の式にしたがい（cm、分）、はじめ $h_1 = 40$、$h_2 = 0$ です。h_1、h_2 を t の式で表し、差が 20 cm になる時刻を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.05(h_1 - h_2) \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.05(h_1 - h_2)$$

例題 4　2 つの物の温度

80 ℃のお湯 200 g（熱容量 $C_1 = 840\,\mathrm{J/K}$）を入れた金属のコップを、20 ℃の水 600 g（$C_2 = 2520\,\mathrm{J/K}$）にひたします。熱抵抗は $R_{\mathrm{th}} = 0.5\,\mathrm{K/W}$ で、外へ熱は逃げません。最後の温度、差がへるときの時定数、2 つの温度の式を求めましょう。

考え方　⑧の式。熱容量をかけた和（熱）は一定。差 $D = T_1 - T_2$ は、6-4 の形でへる。

式　最後の温度：$T_\infty = \dfrac{840 \times 80 + 2520 \times 20}{840 + 2520} = \dfrac{117\,600}{3360} = 35$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{3}{2520} + \frac{1}{2520} = \frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$$

$\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{0.5} \times \dfrac{1}{630} = \dfrac{1}{315}$ なので $\tau = 315\,\mathrm{s}$

差：はじめ $80 - 20 = 60$ なので $D = 60e^{-t/315}$

熱は一定：$840T_1 + 2520T_2 = 3360 \times 35$

$T_2 = T_1 - D$ を入れる：$3360T_1 - 2520D = 3360 \times 35$

$$T_1 = 35 + \frac{2520}{3360}D = 35 + \frac{3}{4}D = 35 + 45e^{-t/315}$$

$$T_2 = T_1 - D = 35 - 15e^{-t/315}$$

答え　35 ℃。$\tau = 315\,\mathrm{s}$（約 5 分）。

$T_1 = 35 + 45e^{-t/315}$、$T_2 = 35 - 15e^{-t/315}$

じぶんでとこう 4

90 ℃のお湯 100 g（$C_1 = 420\,\mathrm{J/K}$）のコップを、10 ℃の水 300 g（$C_2 = 1260\,\mathrm{J/K}$）にひたします。$R_{\mathrm{th}} = 1\,\mathrm{K/W}$ で、外へ熱は逃げません。最後の温度、時定数、2 つの温度の式を求めましょう。

例題 5　2 つのコンデンサー

$10\,\mathrm{V}$ に充電した $C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーと、空の $C_2 = 400\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを、$R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ の抵抗でつなぎます。最後の電圧、時定数、V_1、V_2 の式を求めましょう。

考え方　⑧の式。電気の量 $C_1V_1 + C_2V_2$ は一定。差の時定数は、例題 4 の R_{th} を R に、熱容量を静電容量にかえて求める。

式　電気の量 $(\mu\mathrm{C}) : 100 \times 10 + 400 \times 0 = 1000$。最後は $500V = 1000$ で $V = 2$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{100\,\mu\mathrm{F}} + \frac{1}{400\,\mu\mathrm{F}} = \frac{5}{400\,\mu\mathrm{F}} = \frac{1}{80\,\mu\mathrm{F}}$$

$\tau = R \times 80\,\mu\mathrm{F} = 10 \times 10^3\,\Omega \times 80 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 0.8\,\mathrm{s}$。差は

$$D = 10e^{-t/0.8}$$

電気の量の式に $V_1 = V_2 + D$ を入れる：

$$100(V_2 + D) + 400V_2 = 1000$$

$$V_2 = 2 - \frac{D}{5} = 2 - 2e^{-t/0.8}、V_1 = V_2 + D = 2 + 8e^{-t/0.8}$$

答え　$2\,\mathrm{V}$。$\tau = 0.8\,\mathrm{s}$。

$V_1 = 2 + 8e^{-t/0.8}$、$V_2 = 2 - 2e^{-t/0.8}$ (V)

じぶんでとこう 5

$9\,\mathrm{V}$ に充電した $C_1 = 200\,\mu\mathrm{F}$ と、空の $C_2 = 100\,\mu\mathrm{F}$ を、$R = 15\,\mathrm{k\Omega}$ でつなぎます。最後の電圧、時定数、V_1、V_2 の式を求めましょう。

例題 6　振動モード

$m = 2\,\mathrm{kg}$ の台車 2 つを、$k = 200\,\mathrm{N/m}$ の外側のばね 2 本と、$K = 100\,\mathrm{N/m}$ のつなぎのばねでつなぎます。

(1) 1 次モードと 2 次モードの角振動数と周期を求めましょう。

(2) $x_1 = 0.05$、$x_2 = 0.01$ (m) だけずらして、静かにはなしました。x_1、x_2 を求めましょう。

考え方　⑥の式。和 u、差 w は、はじめの値を大きさとする cos。

式　(1) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{200}{2}} = 10$、周期 $\dfrac{2\pi}{10} \approx 0.63$

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{200+200}{2}} = \sqrt{200} \approx 14.1$、周期 $\dfrac{2\pi}{14.1} \approx 0.44$

(2) $u = 0.05 + 0.01 = 0.06$、$w = 0.05 - 0.01 = 0.04$ から、

$u = 0.06\cos 10t$、$w = 0.04\cos 14.1t$

$x_1 = \dfrac{u+w}{2} = 0.03\cos 10t + 0.02\cos 14.1t$

$x_2 = \dfrac{u-w}{2} = 0.03\cos 10t - 0.02\cos 14.1t$

答え　(1) 10 rad/s（約 0.63 s）、約 14.1 rad/s（約 0.44 s）　(2) 式の段の x_1、x_2

じぶんでとこう 6

$m = 1\,\mathrm{kg}$ の台車 2 つを、$k = 16\,\mathrm{N/m}$ のばね 2 本と $K = 10\,\mathrm{N/m}$ のつなぎのばねでつなぎます。

(1) ω_1、ω_2 を求めましょう。

(2) $x_1 = 0$、$x_2 = 0.06$ (m) だけずらして静かにはなしたときの x_1、x_2 を求めましょう。

例題 7　消去法：直列の水そう

上の水そうから下の水そうへ水が落ち、下の水そうから外へ出ていきます（cm、分）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{h_1}{4} \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{h_1}{4} - \frac{h_2}{4}$$

はじめ $h_1 = 40$、$h_2 = 0$ です。下の水位 h_2 を求め、いちばん高くなる時刻と高さを求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

考え方　⑦の消去法。特性方程式が重解なので、答えは $(A + Bt)e^{st}$ の形。

式　下の式に 4 をかけて：$h_1 = 4\dot{h}_2 + h_2$

上の式 $\dot{h}_1 = -h_1/4$ に入れる：$4\ddot{h}_2 + \dot{h}_2 = -\dfrac{4\dot{h}_2 + h_2}{4}$

両辺に 4 をかけて整理：$16\ddot{h}_2 + 8\dot{h}_2 + h_2 = 0$

特性方程式 $16s^2 + 8s + 1 = (4s + 1)^2 = 0$ より $s = -\frac{1}{4}$（重解）、

$h_2 = (A + Bt)e^{-t/4}$

$h_2(0) = A = 0$。$\dot{h}_2(0) = 40 \div 4 - 0 = 10$ で、$Bte^{-t/4}$ の微分の $t = 0$ の値は B なので $B = 10$

いちばん高い時刻：$\dot{h}_2 = 10\left(1 - \dfrac{t}{4}\right)e^{-t/4} = 0$ より $t = 4$。

$h_2 = 40e^{-1} \approx 14.7$

答え　$h_2 = 10te^{-t/4}$。4 分後に約 14.7 cm

じぶんでとこう 7

次の式で、はじめ $h_1 = 30$、$h_2 = 0$ です（cm、分）。h_2 を求め、いちばん高くなる時刻と高さを求めましょう（$e^{-1} = 0.368$）。

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{h_1}{2} \qquad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}$$

例題 8　親と子

放射性物質の親の数 N_1 と子の数 N_2 が、次の式にしたがいます（t は時間〔h〕）。

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_1}{2} \qquad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \frac{N_1}{2} - N_2$$

はじめ $N_1 = 1000$、$N_2 = 0$ です。N_2 を求め、子がいちばん多くなる時刻と数を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$）。

考え方　消去法。子の式を $N_1 = \cdots$ にして親の式に入れる。

式　子の式に 2 をかけて：$N_1 = 2(\dot{N}_2 + N_2)$

親の式に入れる：$2(\ddot{N}_2 + \dot{N}_2) = -(\dot{N}_2 + N_2)$

整理：$2\ddot{N}_2 + 3\dot{N}_2 + N_2 = 0$。特性方程式は $(2s+1)(s+1) = 0$

$s = -\dfrac{1}{2}$, -1 なので $N_2 = Ae^{-t/2} + Be^{-t}$

$N_2(0) = A + B = 0$ より $B = -A$。$\dot{N}_2(0) = 1000 \div 2 - 0 = 500$

より $-\dfrac{A}{2} - B = 500$

$B = -A$ を入れて $\dfrac{A}{2} = 500$、$A = 1000$、$B = -1000$

$\dot{N}_2 = 1000\left(-\dfrac{1}{2}e^{-t/2} + e^{-t}\right) = 0$ より $e^{-t} = \dfrac{1}{2}e^{-t/2}$

両辺を $e^{-t/2}$ でわって $e^{-t/2} = \dfrac{1}{2}$、$t = 2\ln 2 \approx 1.39$

$e^{-t} = (e^{-t/2})^2 = \dfrac{1}{4}$ なので、$N_2 = 1000\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 250$

答え　$N_2 = 1000(e^{-t/2} - e^{-t})$。約 1.4 時間後に 250

じぶんでとこう 8

飲み薬が胃腸から血液に入り、血液から体の外へ出ていきます。胃腸の薬の量 G、血液の薬の量 B（mg）が次の式にしたがい（t は時間〔h〕）、はじめ $G = 200$、$B = 0$ です。B を求め、いちばん多くなる時刻と量を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$）。

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -G \qquad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = G - \frac{B}{2}$$

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 片方を先に新しくしてしまう

× 先に出した $h_1 = 18$ を使って $h_2 = 0 + 0.1 \times (18 - 0) = 1.8$

○ 今の行の差 20 を使って $h_2 = 0 + 0.1 \times 20 = 2$

×では合計が $18 + 1.8 = 19.8$ になり、水が消えてしまいます。左から出た水と右に入る水は、同じ時刻の差で決まります。

まちがえやすいところ

② 和と差のまま答える

× $h_1 = 20e^{-0.2t}$

○ $h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$

$20e^{-0.2t}$ は差 D です。最後に $h_1 = (S + D) \div 2$ にもどすのを忘れないようにしましょう。

⚠ まちがえやすいところ

③ 代入するとき微分を忘れる

✕ $h_2 = h_1 + 10\dot{h}_1$ を微分して、$\dot{h}_2 = \dot{h}_1 + 10\dot{h}_1$

○ $\dot{h}_2 = \dot{h}_1 + 10\ddot{h}_1$

$10\dot{h}_1$ を微分すると $10\ddot{h}_1$（2 回微分）になります。

⚠ まちがえやすいところ

④ モードの ω をたす

✕ x_1 は $\omega_1 + \omega_2$ でゆれる

○ ω_1 のゆれと ω_2 のゆれのたし算

たすのは cos の式どうしで、角振動数どうしではありません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 重みを忘れる

✕ 最後は $20 \div 2 = 10\,\mathrm{cm}$

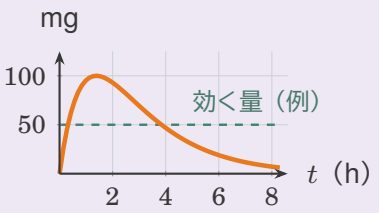
○ 体積 $2000 \div 400 = 5\,\mathrm{cm}$

$100\,\mathrm{cm}^2$ と $300\,\mathrm{cm}^2$ の水そうで一定なのは、水の体積です。

物理・工学ではこう使う

飲み薬の血液中の量

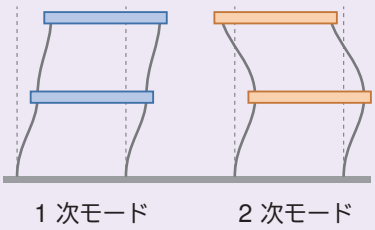
薬は胃腸から血液に入り、肝臓やじん臓で取りのぞかれます。血液の薬の量は、じぶんでとこう 8 と同じ形の式で、ふえてからへります。何時間おきに飲むかは、このような式と、たくさんの人の測定で決められています（薬物動態学）。



物理・工学ではこう使う

建物の各階のゆれ：振動モード

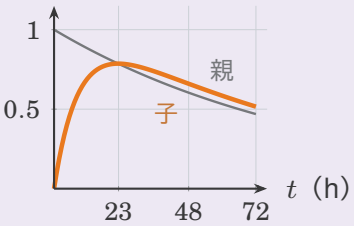
建物は、各階の床（おもり）が、柱とかべ（ばね）でつながったものと考えられます。2 階建てなら⑥の台車と同じ形の式になり、1 次モード（全部の階が同じ向き）と 2 次モード（上と下が反対）があります。地震のゆれの周期がモードの周期に近いと、大きくゆれます（6-13 の共振）。1 次モードの周期は、おおよそ「階数× 0.1 秒」といわれます（目安）。



物理・工学ではこう使う

病院の「テクネチウム・ジェネレーター」：親と子

体の中を写す検査に使うテクネチウム 99m（半減期約 6 時間）は、作りおきができません。そこで病院では、親のモリブデン 99（半減期約 66 時間）の容器をおき、生まれた子を必要なときに取り出します。子は例題 8 と同じ形の式でふえ、取り出してから約 23 時間後にいちばん多くなります（グラフは 1 時間にこわれる数で、はじめの親を 1 とした。親の約 9 割が子になる）。



章末問題

6-14 のまとめ

基本 ★★★

1 $\dfrac{dh_1}{dt} = -0.3(h_1 - h_2)$、$\dfrac{dh_2}{dt} = 0.3(h_1 - h_2)$（cm、分）、はじめ $h_1 = 50$、$h_2 = 10$ です。$\Delta t = 0.5$ 分のオイラー法で、0.5 分後と 1 分後の水位を求めましょう（例題 1）。

2 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 25x = 0$ を 1 回微分の式 2 つに書きかえ、$x = 0.1$、$v = 0$ から、$\Delta t = 0.1$ の「速度を先に進めるオイラー法」で 1 行進めましょう（例題 2）。

3 同じ形の 2 つの水そうで、$\dfrac{dh_1}{dt} = -0.1(h_1 - h_2)$、$\dfrac{dh_2}{dt} = 0.1(h_1 - h_2)$（cm、分）、はじめ $h_1 = 12$、$h_2 = 4$ です。h_1、h_2 を求め、差が半分の 4 cm になる時刻を求めましょう（例題 3）（$\ln 2 = 0.693$）。

4 60 ℃のお湯 200 g（$C_1 = 840\,\mathrm{J/K}$）のコップを、15 ℃の水 400 g（$C_2 = 1680\,\mathrm{J/K}$）にひたします（$R_{\mathrm{th}} = 0.5\,\mathrm{K/W}$、外へ熱は逃げない）。最後の温度、時定数、2 つの温度の式を求めましょう（例題 4）。

5 $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ の台車 2 つを、$k = 50\,\mathrm{N/m}$ のばね 2 本と $K = 25\,\mathrm{N/m}$ のつなぎのばねでつなぎます。

(1) ω_1、ω_2 を求めましょう。

(2) $x_1 = 0.04$、$x_2 = 0$（m）だけずらして静かにはなしたときの x_1、x_2 を求めましょう（例題 6）。

6 $\dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{h_1}{5}$、$\dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1}{5} - \dfrac{h_2}{5}$（cm、分）、はじめ $h_1 = 50$、$h_2 = 0$ です。h_2 を求め、いちばん高くなる時刻と高さを求めましょう（例題 7）（$e^{-1} = 0.368$）。

チャレンジ ★★★★

7 6 V に充電した $C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}$ と、空の $C_2 = 50\,\mu\mathrm{F}$ を、$R = 30\,\mathrm{k\Omega}$ でつなぎます。最後の電圧、時定数、V_1、V_2 の式を求めましょう（例題 5）。

8 親の数 N_1 と子の数 N_2 が $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{N_1}{3}$、$\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{N_1}{3} - N_2$（$t$ は時間〔h〕）にしたがい、はじめ $N_1 = 900$、$N_2 = 0$ です。N_2 を求め、3 時間後の N_2 を求めましょう（例題 8）（$e^{-1} = 0.368$、$e^{-3} = 0.050$）。

9 底面積 $200\,\mathrm{cm}^2$ の水そう（左）と $100\,\mathrm{cm}^2$ の水そう（右）を、1 分に $20(h_2 - h_1)\,\mathrm{cm}^3$ 流れる管でつなぎます。はじめ左は空、右は 30 cm です。最後の水位と、h_1、h_2 の式を求めましょう（例題 4）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ からみあう 2 つの量を、表計算で同時に進めて計算できる。
  → 499 ページ
- ☐ 和と差（重みつきの和と差）に分けて、2 つの式を解ける。
  → 503 ページ
- ☐ 振動モードや消去法で、連立微分方程式の答えを求められる。
  → 507 ページ

ソラ：組みかえると、ばらばらに解けた！　次は第 6 巻のまとめだよ。

第 3 部　式で解く

★★～★★★

6-15 まとめ：物理は「微分方程式＋はじめの状態」で書ける

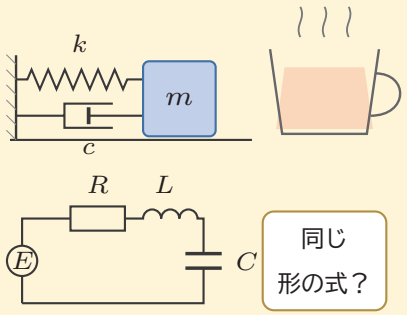
道しるべ　この章の前に 4-1 5-5 5-12 6-1 6-4 6-6 6-7 6-14
この章の先に 7-0 8-13 9-5 9-10

この章でできるようになること

- ★★ 運動の法則・回路のきまり・熱の出入りから、微分方程式とはじめの状態を書ける。
- ★★ 相似の表で、ばね・電気・熱の量を対応させ、同じ形の答えを使える。
- ★★★ 式の形から、どの解き方（この巻のどの章）を使えばよいか選べる。

はてな？

ばねにつけたおもり、電気の回路、冷めるお湯。この巻では、まったくちがう物なのに、同じ形の式が何度も出てきました。
なぜ、同じ形になるのでしょう。そして、同じ形だと、何がうれしいのでしょう。



この章は、第 6 巻のまとめです。新しい計算はほとんどありません。そのかわり、これまでの章をつなげて、「物理の法則は、なぜ微分方程式になるのか」「な

ぜ、ちがう物が同じ形の式になるのか」を考えます。最後に、この巻で学んだ解き方を 1 枚の地図にまとめます。

やってみよう　式のカードを仲間分けしよう

この巻に出てきた式を、8 枚のカードにしました。

ア	冷めるお湯 $\dfrac{dT}{dt} = -0.05(T-20)$（6-4）	イ	ばね $0.5\ddot{x} = -8x$（6-6）
ウ	RC の充電 $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{10-V}{2}$（6-4）	エ	LC 回路 $L\ddot{q} = -\dfrac{q}{C}$（6-6）
オ	落ちる物 $m\dfrac{dv}{dt} = mg - bv$（6-5）	カ	ばね・ダンパー $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$（6-7）
キ	RL 回路 $L\dfrac{di}{dt} = E - Ri$（6-4）	ク	RLC 回路 $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{q}{C} = 0$（6-7）

1. 何回微分が入っているか（1 回か 2 回か）で、2 つのグループに分けよう。
2. 同じグループの中で、文字をかえるとぴったり同じ形になる組を見つけよう。
3. それぞれの組で、「何」と「何」が入れかわっているかを書き出そう。

1 回微分のグループは、ア・ウ・オ・キ。どれも「目標の値との差に比例して近づく」形（6-4 ④）です。2 回微分のグループは、イ・エ・カ・ク。イとエは「ゆれる」形（6-6）、カとクは「ゆれながら止まる」形（6-7）です。

③で、たとえばオとキをくらべると、質量 m とコイル L、抵抗の係数 b と抵抗 R、重さ mg と電池 E、速さ v と電流 i が入れかわっています（6-5 ⑦）。このような入れかわりの組を、この章で 1 つの表にまとめます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-1　物理の**法則**は、実験と観察で見つけたきまり。数学の**定理**は、定義と公理から証明で導いたきまり。
- 5-5　力の合計＝質量×加速度（$F = ma$）。加速度は位置の 2 回微分。
- 5-12　ばねを x のばす仕事は $\frac{1}{2}kx^2$。コンデンサーにたまるエネルギーは $\frac{1}{2}CV^2$。
- 6-1　ルールの作り方：主役の量を決める→変わる速さを微分で書く→法則を式にして「＝」でつなぐ。はじめの状態は、階数の数だけ要る。
- 6-4　目標へ近づく形 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau}$。$\tau$ は時定数（RC、L/R、$C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$、$m/b$）。
- 6-7　ばね・質量・ダンパー $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$。減衰比 $\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$ で、ゆれ方が決まる。

数学の道具

1 法則は「次の瞬間」を決める

5-5 で、「運動の法則は『2 回微分をふくむ式』になります。これが第 6 巻の微分方程式です」と書きました。ニュートンの運動の法則

$$\text{力の合計} = m\times \text{加速度} \qquad F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

は、「今の位置と速度がわかれば、次の瞬間の速度の変わり方（加速度）がわかる」という形をしています。力がばねの力 $-kx$ なら $m\ddot{x} = -kx$（6-6）、重さと空気の抵抗なら $m\dot{v} = mg - bv$（6-5）。どちらも、力のきまりを入れただけで、微分方程式になりました。

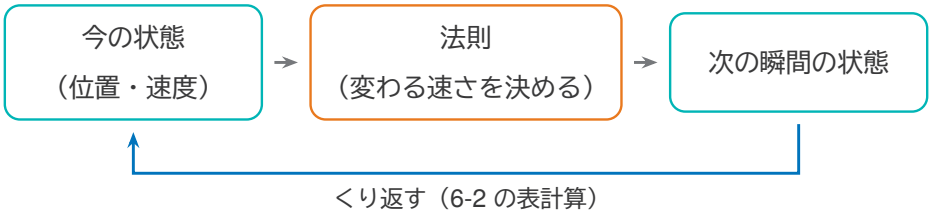


図 1　物理の法則は「今の状態から、次の瞬間の状態を決めるルール」。はじめの状態から、これをくり返すと未来が決まる。

法則と、導いたきまり

4-1 では、数学の「定理」（証明で導いたもの）と、物理の「法則」（実験で確かめたもの）を区別しました。この巻に出てきたきまりを、2 つに分けてみます。

法則（実験で確かめられた出発点）	導いたきまり（微分方程式を解いて出したもの）
運動の法則 $F = ma$	ばねの周期 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$（6-6）
フックの法則 $F = -kx$	終端速度 $v_{\mathrm{f}} = mg/b$（6-5）
オームの法則 $V = RI$	時定数 $\tau = RC$、L/R（6-4）
コンデンサー $q = CV$・コイル $V = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	電気振動の周期 $2\pi\sqrt{LC}$（6-6）
ニュートンの冷却の法則（近似）	冷める温度 $T = 20 + 60e^{-t/20}$（6-4）

表 1　左の少数の法則から、右のたくさんのきまりが、数学で導かれる。

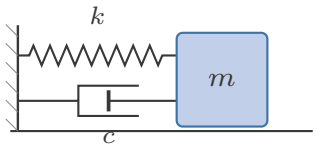
高校の物理で「覚える式」として出てくる右の列のきまりは、どれも左の法則から、微分方程式を解いて出したものです。4-1 で「少数の法則から同じ形の式で書けることを見ます」と書いたのは、このことです。

コラム　ラプラスの悪魔

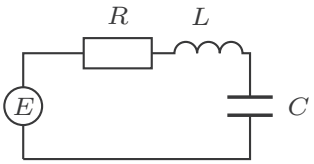
1814 年、フランスの数学者ラプラスは、「ある瞬間の、すべての物の位置と速度を知り、それをすべて計算できる知性があれば、その知性にとって未来はすべて見通せるだろう」と書きました。この「知性」は、のちに「ラプラスの悪魔」とよばれます。この章の「微分方程式＋はじめの状態で未来が決まる」を、宇宙全体にまで広げた考えです。けれども、6-14 のコラムで見たように、ほんの少しのはじめのずれが大きく育つ（カオス）ので、じっさいには、はじめの状態をどれだけ正確にはかれるかで、予想できる先の長さが決まります。

② ためる・失う・押す：式を立てる 3 つの部品

ばねも電気も熱も、同じ形の式になるのはなぜでしょう。式を立てたときの「部品」を、くらべてみます。



ばね・質量・ダンパー
（6-7）



RLC 回路
（6-7）

冷めるお湯
（6-4）

図 2　3 つのしくみ。どれも「ためるもの」と「失うもの」があり、それぞれのきまりが比例の形。

- **位置・電気・熱をためる部品（ためるもの）**

  ばねはのびの形でエネルギーをため（$\frac{1}{2}kx^2$）、コンデンサーは電気をため（$\frac{1}{2}CV^2$）、お湯は熱をためます（熱容量 C_{th}）。

- **運動の勢いをためる部品（慣性）**

  おもりは速さの形でエネルギーをため（$\frac{1}{2}mv^2$）、コイルは電流の形でためます（$\frac{1}{2}Li^2$）。「流れ続けようとする」はたらきです。

- **失う部品**

ダンパー、抵抗、熱抵抗。速さや電流や熱の流れに比例して、エネルギーを熱にして逃がします。

● **押す部品**

外からの力、電池の電圧、部屋との温度差。

（かっこの中の名前は、③の相似の表の行の名前です。）そして、部品のきまりが、どれも「比例」です（ばねの力は kx、抵抗の電圧は Ri、熱流は温度差÷ R_{th}）。比例のきまりを「合計」でつなぐので、どの分野でも、定数がかかった微分の項をたした線形の式（5-18）になるのです。

部品を「合計」でつなぐきまり

部品のきまりだけでは、式はできません。部品どうしを「合計」でつなぐきまりが、分野ごとに 1 つずつあります。

	つなぐきまり	式
力学	力の合計＝質量×加速度（運動の法則）	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - cv - kx$
電気	電池の電圧＝部品の電圧の合計（回路を 1 周すると電圧の上がり下がりの合計は 0。キルヒホッフの電圧の法則）	$E = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \dfrac{q}{C}$
熱	たまる熱＝入る熱－出る熱（エネルギーの保存）	$C_{\mathrm{th}}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P - \dfrac{T - T_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{th}}}$

表 2 3 つの分野の「つなぐきまり」。右の列が、そのまま微分方程式になる。

電気の行の「1 周すると 0」は、2-15・6-6・6-7 で「電圧が 2 つに分かれる」「同じ 2 本の線につながっているので電圧が同じ」として使ってきたことを、1 つのきまりにしたものです。熱の行は、6-4 ⑥の電気ポットの式そのものです（T_{a} は部屋の温度）。

❓はてな？の答え

ばねも電気も熱も、①「ためるもの・慣性・失うもの・押すもの」という同じ役わりの部品でできていて、②部品のきまりがどれも比例で、③それを「合計」でつなぐからです。だから、同じ形の式になります。うれしいのは、1 つの答えを作れば、文字をおきかえるだけで全部に使えることです（④で確かめます）。

3 相似の表

ちがう分野なのに、式が同じ形になることを**相似**（そうじ）といいます。力学の式と電気の式をならべます。

$$\text{力学：}\quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+cv+kx=F\quad\left(v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\text{電気：}\quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{q}{C}=E\quad\left(i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$$

左から 1 つずつ見ると、$m \leftrightarrow L$、$c \leftrightarrow R$、$k \leftrightarrow 1/C$、$x \leftrightarrow q$、$v \leftrightarrow i$、$F \leftrightarrow E$ と対応しています（6-6 ⑧・6-7 ⑦）。物理シリーズ『力学』の表 2 と同じ組です。熱と、6-14 の水そうも入れて、1 つの表にします。

役わり	力学	電気	熱	水（管とタンク）
流れるもの	速度 v	電流 i	熱流 P	流量 Q
押すもの	力 F	電圧 E	温度差 ΔT	圧力差（水位の差）
ためるもの	ばねのやわらかさ $1/k$	静電容量 C	熱容量 C_{th}	タンク
慣性	質量 m	インダクタンス L	（ない）	管の中の水
失うもの	ダンパー c	抵抗 R	熱抵抗 R_{th}	管の流れにくさ

表 3　相似の表（物理シリーズ『力学』の表 2 と同じ組）。力 ↔ 電圧、速度 ↔ 電流。物理シリーズでは、電源の電圧を小文字の e と書く。

● **ばねは「やわらかさ $1/k$」がコンデンサーの C。**

ばねの力は kx、コンデンサーの電圧は $\dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C} \times q$。$k$ と $\dfrac{1}{C}$ が同じ役わりなので、「ためるもの」の列は k ではなく $\dfrac{1}{k}$ を書きます。やわらかいばね（k が小さい）ほど、たくさんのびてためられる、という意味です。

● **熱には「慣性」がない。**

熱の流れには、質量やコイルのような「流れ続けようとする」部品がありません。だから熱の式は、ためる部品と失う部品だけの 1 階の式になり、ゆれる答え（6-6・6-12 の sin・cos）が出てきません。お湯の温度が、部屋の温度を行きすぎて下がり、またもどる、ということはないのです（6-14 の 2 つの物の温度も、ゆれずに近づきました）。

> **せいかくに言うと**
>
> 相似は「式の形が同じ」ということで、物そのものが同じなのではありません。たとえば力学と電気では、力×速度も電圧×電流も 1 秒あたりのエネルギー（仕事率、W）になりますが、熱では、熱流がすでに 1 秒あたりのエネルギーなので、温度差×熱流は仕事率になりません。また、力と電流を組にする、もう 1 つの相似の決め方もありますが、このシリーズでは物理第 1 巻の表と同じ「力⇔ 電圧」にそろえます。

1 回微分の仲間：時定数と最後の値

6-4 ⑧の表に、6-5 と 6-14 の行を加えて、もう一度ならべます。どれも $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau}$ の形で、答えは $y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)e^{-t/\tau}$ です。

しくみ	変わる量	最後の値	時定数	例の数
冷めるお湯（6-4）	温度 T	部屋の温度	$C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$	20 分
ヒーターで温める（6-4）	温度 T	$T_{\mathrm{a}}+PR_{\mathrm{th}}$	$C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}}$	
RC の充電（6-4）	電圧 V	E	RC	2 s
RL の電流（6-4・6-5）	電流 i	E/R	L/R	
落ちる物（6-5）	速さ v	mg/b	m/b	
2 つの水そうの差（6-14）	水位の差	0	$\frac{1}{0.2}$ 分	5 分

表 4　1 回微分の仲間。1 つの答えの形で、全部が表せる。

2 回微分の仲間：ゆれの速さと減衰比

2 回微分の式は、相似の表で文字をおきかえるだけで、6-6・6-7 で作った式がそのまま使えます。

	ばね・質量・ダンパー	RLC 回路
固有角振動数 ω_{n}	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
臨界の値	$c_{\mathrm{c}}=2\sqrt{mk}$	$R_{\mathrm{c}}=2\sqrt{\frac{L}{C}}$
減衰比 ζ	$\frac{c}{2\sqrt{mk}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

表 5　k を $\frac{1}{C}$、m を L、c を R にかえると、左の列から右の列ができる。

たとえば、ばねの $\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{k/m}$ の k に $\frac{1}{C}$、m に L を入れると、$\sqrt{\frac{1/C}{L}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ になります。

4 同じ形なら、答えも同じ

6-7 のばね（$m=0.5\,\mathrm{kg}$、$k=8\,\mathrm{N/m}$、$c=0.4\,\mathrm{N\,s/m}$）と、RLC 回路（$L=10\,\mathrm{mH}$、$C=1\,\mu\mathrm{F}$、$R=20\,\Omega$）をくらべます。

	ばね	RLC 回路
ω_n	$\sqrt{8 \div 0.5} = 4\,\mathrm{rad/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10\,000\,\mathrm{rad/s}$
ζ	$\dfrac{0.4}{2\sqrt{0.5 \times 8}} = 0.1$	$\dfrac{20}{2}\sqrt{\dfrac{0.000001}{0.01}} = 0.1$
ゆれの周期	約 $1.58\,\mathrm{s}$	約 $0.63\,\mathrm{ms}$

減衰比 ζ が同じ 0.1 なので、ゆれ方の「形」はまったく同じです。ちがうのは、時間の物さしだけです。

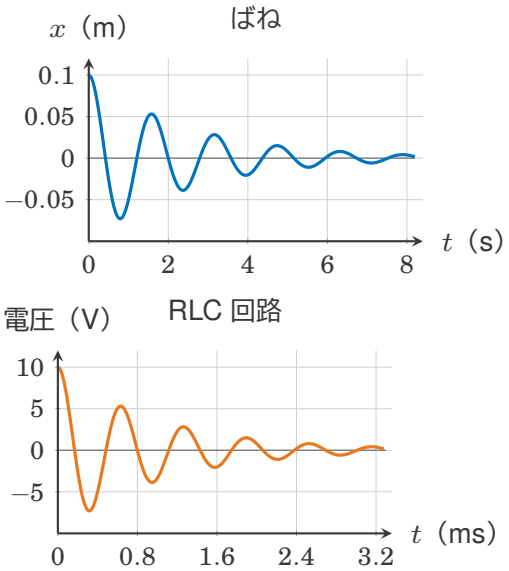


図 3　上：ばね（0.1 m 引いてはなす）。下：RLC 回路のコンデンサーの電圧（10 V にためてつなぐ）。横軸の目もりは 2500 倍ちがうが、曲線の形はぴったり同じ。

だから、1 つの答えを作れば、全部に使えます。車のサスペンションを設計する人が「ζ をいくつにするか」と考えることと、電気の回路を設計する人が「抵抗をいくつにするか」と考えることは、数学としては同じ問題です。電気の回路は、部品をかえるのが簡単で、はかるのも速いので、むかしは機械の動きを電気の回路で調べました（コラム）。

5 エネルギーで見ると

運動方程式から、エネルギーのきまりを導いてみます。ばね $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kx$ の両辺に、速度 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ をかけます。

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

両辺に v をかけ、右辺は $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ と書いた

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

合成関数の微分（5-6）を逆に使った

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

右辺を左へ移した

2 行めは、$\dfrac{1}{2}mv^2$ を時間で微分すると $\dfrac{1}{2}m \times 2v \times \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ になること（v^2 を微分すると $2v$、そこに v の微分をかける）を、右から左へ読んだものです。$\dfrac{1}{2}kx^2$ も同じです。

微分して 0 なので、$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$（運動のエネルギー＋ばねのエネルギー）は一定です。5-12 で求めたばねの仕事 $\dfrac{1}{2}kx^2$ が、ここで出てきました。運動の法則の中に、エネルギーが保たれるきまりがふくまれていたのです。

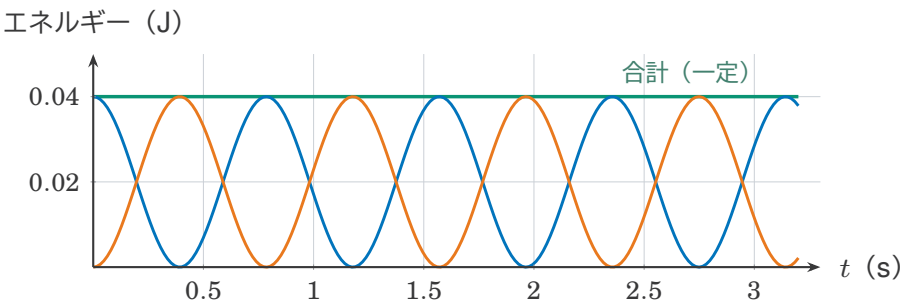


図 4　6-6 のばね（0.5 kg、8 N/m、0.1 m 引いてはなす）。ばねのエネルギー $\frac{1}{2}kx^2$（青）と運動のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$（オレンジ）が入れかわり、合計はいつも 0.04 J。

ダンパーがあると、同じ計算で $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2\right) = -cv^2$ になります。cv^2 はいつも 0 以上なので、エネルギーはへり続けます。へった分は、ダンパーの中で熱になります（6-7 ⑥）。電気でも、$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \dfrac{q}{C} = 0$ に i をかけると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{q^2}{2C}\right)=-Ri^2$$

となります。$\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2$ はコンデンサーのエネルギー（5-12）、$\frac{1}{2}Li^2$ はコイルのエネルギー、Ri^2 は抵抗で 1 秒に熱になるエネルギーです。相似の表どおり、ばねとまったく同じ形です。

6 はじめの状態はいくつ要る？

微分方程式だけでは、答えは 1 つに決まりません。はじめの状態が必要です（6-1）。いくつ必要かは、式の形で決まります。

式の形	必要な数	例
1 回微分の式	1 つ	お湯のはじめの温度 $T(0)=80\,℃$
2 回微分の式	2 つ	ばねのはじめの位置と速度 $x(0)$、$v(0)$
1 回微分の式が 2 つの連立	2 つ	2 つの水そうのはじめの水位 $h_1(0)$、$h_2(0)$
2 回微分の式が 2 つの連立	4 つ	2 つの台車の位置と速度 （6-14）

表 6　はじめの状態の数は、積分するたびに出てくる定数の数と同じ（5-13）。

時間でなく場所で変わる式では、はじめの状態のかわりに、両はしの状態（境界条件、6-3）で答えを決めることもあります。どちらの場合も、「ルール（微分方程式）」と「条件」の 2 つがそろって、はじめて答えがただ 1 つに決まります。この章の題の「微分方程式＋はじめの状態」は、このことです。

7 解き方の地図

この巻で学んだ解き方を、1 枚の地図にします。式を見たら、上から順に問いに答えていきます。

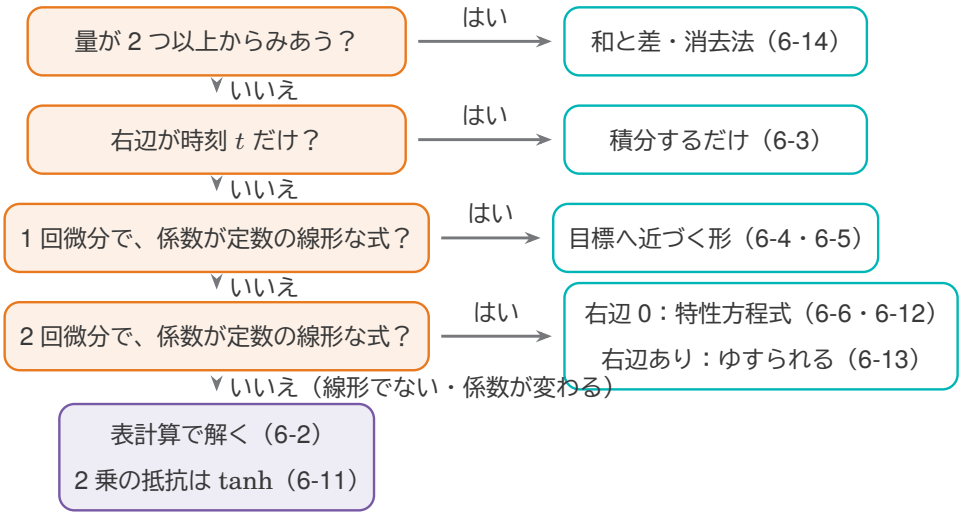


図 5　解き方の地図。どの道に進んでも、表計算（6-2）なら必ず数で解ける。式で解いたら、表計算の結果と重ねて確かめる。

「線形」は、答えどうしをたしても答えになる式でした（5-18）。線形でも、$\dot{y} = -ty$ のように係数が時刻で変わる式は、6-4 や 6-12 の形にはなりません。v^2 や xy のように、量どうしのかけ算が入ると線形でなくなり、式で解けることはまれです。そのときは、表計算の出番です。天気予報もロケットの軌道も、この道で計算されています（6-0）。

8 この先へ：第 6 巻は乗りかえ駅

第 6 巻の考えは、この先の巻と物理シリーズで、こう使われます。

第 6 巻の考え	この先で	章
連立の式を表にまとめる	係数の表（行列）で、たくさんの量を一度に扱う。モードは固有ベクトル	7-8・7-10・9-10
場所でも変わる量	棒に広がる熱、弦を伝わる波。時間と場所の両方の微分が入る式（偏微分方程式）	8-13
e^{st} と置く・s の場所	微分を s のかけ算に変える翻訳機（ラプラス変換）で、制御を設計する	9-5・9-9
相似の表	力学・熱・波動・電磁気の式を、同じ道具で解く	物理シリーズ

たいせつ

- **物理の書き方**　**法則（微分方程式）＋はじめの状態 → 未来がただ 1 つに決まる**
- **同じ形のわけ**　**ためるもの・慣性・失うもの・押すもの。きまりが比例で、合計でつなぐ**
- **相似**　**力⇔ 電圧、速度⇔ 電流、$m \leftrightarrow L$、$c \leftrightarrow R$、$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$、$x \leftrightarrow q$**
- **エネルギー**　**運動方程式に v をかけると出てくる。失う部品で熱になる**
- **解き方**　**形を見て章を選ぶ。どれでも表計算なら解ける**

この章で出てきたことば

相似　ちがう分野のしくみが、同じ形の式で書けること。

キルヒホッフの電圧の法則　回路を 1 周すると、電圧の上がり下がりの合計は 0 になるというきまり。

法則　実験と観察で確かめられた、物理の出発点になるきまり（4-1）。

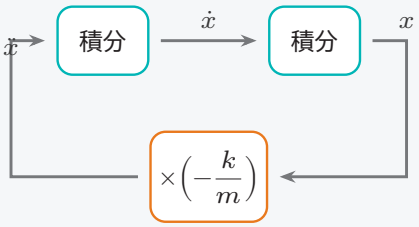
記号カード　　初めて出た章 6-15

$\leftrightarrow$

読み方　たいおうする
意味　相似の表で、2 つの量が同じ役わりをすること。$m \leftrightarrow L$ のように書く
英語　corresponds to

コラム　アナログコンピュータ：微分方程式を電気で解く機械

相似を使えば、機械の微分方程式を、同じ形の電気の回路を作って「はかる」ことで解けます。1931 年、アメリカのブッシュは、歯車と回る円板で積分する「微分解析機」を作りました。1950〜60 年代には、電子回路で積分するアナログコンピュータが、飛行機の設計などに使われました。右の図のように、積分する部品を 2 つつなぎ、出てきた x を $-\dfrac{k}{m}$ 倍して入口にもどすと、回路の中で $\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$ がそのまま「動き」ます。今は、6-2 と同じ方法でコンピュータが計算しています。



例題でたしかめよう

例題 1　法則から式を立てる：ばね・質量・ダンパー

質量 0.5 kg の台車が、ばね定数 8 N/m のばねと、減衰係数 0.4 N s/m のダンパーにつながっています。台車を 0.1 m 引いて、静かにはなしました。運動の法則から微分方程式を立て、はじめの状態を書きましょう。また、どの章の方法で解けますか。

考え方　②の手順。主役は位置 x と速度 v。力は、ばね $-kx$ とダンパー $-cv$。2 回微分の式なので、はじめの状態は 2 つ。

式　ばねの力：$-8x$、ダンパーの力：$-0.4v$（速度と反対向き）

運動の法則：$0.5\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -8x - 0.4v$、$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

はじめの状態：引いた位置 $x(0) = 0.1$、静かにはなしたので $v(0) = 0$

2 回微分で係数が定数の線形な式、右辺 0 → 特性方程式（6-12）。表計算なら 6-7

答え　$0.5\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 8x = 0$、$x(0) = 0.1$、$v(0) = 0$。6-12（6-7 の表計算）

じぶんでとこう 1

質量 2 kg の台車が、ばね定数 50 N/m のばねと減衰係数 4 N s/m のダンパーにつながっています。止まっている台車を、たたいて右向きに 0.3 m/s の速さを与えました。微分方程式とはじめの状態を書きましょう。

例題 2　法則から式を立てる：RC 回路

電池（10 V）、抵抗（20 kΩ）、空のコンデンサー（100 μF）をつなぎ、時刻 0 でスイッチを入れます。コンデンサーの電圧 V の微分方程式と、はじめの状態、時定数、最後の電圧を求めましょう。

考え方　②の「電池の電圧＝部品の電圧の合計」。抵抗の電圧は Ri、コンデンサーは V。電流 $i = C\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$（$q = CV$ を微分）。

式　電圧の合計：$10 = Ri + V$ より $i = \dfrac{10 - V}{R}$

電流は電気のたまる速さ：$C\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10 - V}{R}$

$RC = 20 \times 10^3\,\Omega \times 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$ なので $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10 - V}{2}$

はじめは空なので $V(0) = 0$。最後は変わらなくなる（$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$）ので $V = 10$

答え　$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{10 - V}{2}$、$V(0) = 0$、$\tau = 2\,\mathrm{s}$、最後は 10 V

じぶんでとこう 2

電池（5 V）、抵抗（10 kΩ）、空のコンデンサー（47 μF）で、例題 2 と同じことを求めましょう。

例題 3　法則から式を立てる：冷めるお湯

熱容量 $C_{\mathrm{th}} = 1000\,\mathrm{J/K}$ のお湯（はじめ 80 ℃）が、熱抵抗 $R_{\mathrm{th}} = 1.2\,\mathrm{K/W}$ で 20 ℃の部屋へ熱を逃がします。温度 T の微分方程式（t は秒）と時定数を求め、t を分にした式に直しましょう。

考え方　②の「たまる熱＝入る熱－出る熱」。入る熱は 0、出る熱は $\dfrac{T-20}{R_{\mathrm{th}}}$。

式　$1000\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{T-20}{1.2}$ より $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{T-20}{1200}$（1/s）

時定数 $\tau = C_{\mathrm{th}}R_{\mathrm{th}} = 1000 \times 1.2 = 1200\,\mathrm{s}$

分に直す：1 分は 60 秒なので、1 分あたりの変わる速さは 60 倍

$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{60}{1200}(T-20) = -0.05(T-20)$（1/分）

答え　$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{T-20}{1200}$（秒）、$\tau = 1200\,\mathrm{s} = 20$ 分、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05(T-20)$（分）、$T(0) = 80$

6-1 から使ってきた冷めるお湯の「0.05」は、熱容量と熱抵抗から、こうして出てきます（$1200\,\mathrm{s} \div 60\,\mathrm{s/min} = 20$ 分）。

じぶんでとこう 3

熱容量 1500 J/K のみそ汁が、熱抵抗 0.5 K/W で 25 ℃の部屋へ熱を逃がします。温度 T の微分方程式（秒）と時定数を求め、分の式に直しましょう。

例題 4　相似の表で、答えを使い回す

RLC 回路（$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$R = 20\,\Omega$）と、ばね・質量・ダンパー（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$c = 0.4\,\mathrm{N\,s/m}$）があります。それぞれの ω_n と ζ を求め、ゆれ方の形が同じかを答えましょう。

考え方　③の 2 回微分の表。ばねの式の k を $\frac{1}{C}$、m を L、c を R にかえる。

式　ばね：$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\dfrac{8}{0.5}} = 4$、$\zeta = \dfrac{0.4}{2\sqrt{0.5 \times 8}} = \dfrac{0.4}{4} = 0.1$

回路：$LC = 0.01 \times 0.000001 = 10^{-8}$ なので $\omega_\mathrm{n} = \dfrac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10^4$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 10 \times \sqrt{\frac{0.000001}{0.01}} = 10 \times 0.01 = 0.1$$

ζ が同じなので、ゆれ方の形は同じ。時間の物さしが $10^4 \div 4 = 2500$ 倍ちがう

答え　ばね $\omega_\mathrm{n} = 4\,\mathrm{rad/s}$、回路 $\omega_\mathrm{n} = 10\,000\,\mathrm{rad/s}$、どちらも $\zeta = 0.1$。形は同じ

じぶんでとこう 4

ばね・質量・ダンパー（$m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 200\,\mathrm{N/m}$、$c = 4\,\mathrm{N\,s/m}$）と、RLC 回路（$L = 1\,\mathrm{mH}$、$C = 10\,\mu\mathrm{F}$、$R = 2\,\Omega$）の ω_n と ζ を求め、ゆれ方の形が同じかを答えましょう。

例題 5　時定数をくらべる

冷めるお湯（$\tau = 20$ 分、はじめ 80 ℃、部屋 20 ℃）と、RC の充電（$\tau = 2\,\mathrm{s}$、$E = 10\,\mathrm{V}$、はじめ 0 V）があります。それぞれ「ほぼ終わる」（目標までの差が 5% になる）のは何時間後・何秒後ですか。そのときの温度と電圧も求めましょう（$e^{-3} = 0.0498$）。

考え方　目標との差は $e^{-t/\tau}$ 倍になる。$e^{-3} \approx 0.05$ なので、3τ で差が 5%（6-4）。

式　お湯：$3\tau = 3 \times 20 = 60$ 分。差は $60 \times 0.0498 \approx 2.99$ ℃ なので

$$T \approx 20 + 2.99 = 23.0$$

RC：$3\tau = 3 \times 2 = 6\,\mathrm{s}$。差は $10 \times 0.0498 = 0.498\,\mathrm{V}$ なので

$$V = 10 - 0.498 \approx 9.50$$

答え　お湯は 60 分（1 時間）後に約 23.0 ℃、RC は 6 秒後に約 9.50 V

同じ「3τ でほぼ終わり」が、お湯では 1 時間、電気では 6 秒です。式が同じ形なので、時定数さえわかれば、どちらも同じ考えで見積もれます。

じぶんでとこう 5

RL 回路（$L = 0.5\,\mathrm{H}$、$R = 10\,\Omega$、$E = 10\,\mathrm{V}$、はじめ電流 0）と、冷めるみそ汁（$\tau = 15$ 分、はじめ 70 ℃、部屋 25 ℃）が「ほぼ終わる」時刻と、そのときの電流・温度を求めましょう（$e^{-3} = 0.0498$）。

例題 6　式の形から、解き方を選ぶ

次の式は、⑦の地図のどの道で解けますか。章と、必要なはじめの状態の数を答えましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1(T - 25)$

(3) $2\ddot{x} + 3\dot{x} + 50x = 0$　　(4) $\ddot{x} + 9x = 2\cos t$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.003v^2$

考え方　地図の問いに上から答える。必要な数は⑥の表（1 回微分は 1 つ、2 回微分は 2 つ）。

式　(1) 右辺が t だけ → 6-3。1 回微分なので 1 つ

(2) 1 回微分・係数が定数の線形 → 6-4。1 つ

(3) 2 回微分・係数が定数の線形・右辺 0 → 6-12。2 つ

(4) 2 回微分・係数が定数の線形・右辺あり → 6-13。2 つ

(5) v^2 があり線形でない → 6-2（6-11 の tanh）。1 つ

答え　(1) 6-3、1 つ。(2) 6-4、1 つ。(3) 6-12、2 つ。(4) 6-13、2 つ。(5) 6-2・6-11、1 つ

じぶんでとこう 6

次の式は、どの章の方法で解けますか。必要なはじめの状態の数も答えましょう。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 5$

(2) $0.5\ddot{x} = -8x$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -0.2N$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1(h_1 - h_2)$、$\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.1(h_1 - h_2)$

例題 7　エネルギーで速さ・電流を求める

(1) 6-6 のばね（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$）を $0.1\,\mathrm{m}$ 引いてはなしました。エネルギーの合計と、いちばん速いときの速さ、$x = 0.05\,\mathrm{m}$ のときの速さを求めましょう。

(2) $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを $10\,\mathrm{V}$ にため、$L = 10\,\mathrm{mH}$ のコイルにつなぎました。いちばん大きい電流を求めましょう。

考え方　⑤の「エネルギーの合計は一定」。速さがいちばん大きいのは $x = 0$（ばねのエネルギーが 0）のとき。電気も相似で同じ。

式　(1) 合計：$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 0.1^2 = 0.04$（はじめは $v = 0$）

$x = 0$：$\dfrac{1}{2} \times 0.5 \times v^2 = 0.04$、$v^2 = 0.16$、$v = 0.4$

$x = 0.05$：$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 0.05^2 = 0.01$ なので $\dfrac{1}{2} \times 0.5 \times v^2 = 0.03$、$v = \sqrt{0.12} \approx 0.346$

(2) はじめ：$\dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2} \times 0.000001 \times 10^2 = 0.00005$（J）

$q = 0$ のとき全部コイルに：$\dfrac{1}{2} \times 0.01 \times i^2 = 0.00005$、$i^2 = 0.01$、$i = 0.1$

答え　(1) 0.04 J、0.4 m/s、約 0.35 m/s。(2) 0.1 A

じぶんでとこう 7

(1) $m = 0.2\,\mathrm{kg}$、$k = 20\,\mathrm{N/m}$ のばねを $0.05\,\mathrm{m}$ 引いてはなしました。エネルギーの合計と、いちばん速いときの速さを求めましょう。

(2) $C = 4\,\mu\mathrm{F}$ を $5\,\mathrm{V}$ にため、$L = 25\,\mathrm{mH}$ につなぎました。いちばん大きい電流を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① 相似の組を逆にする

✕ 力 $\leftrightarrow$ 電流

○ 力 $\leftrightarrow$ 電圧、速度 $\leftrightarrow$ 電流

ばねの式と RLC の式をならべて、同じ場所にある量を組にします。F と E が右辺にならびます。

⚠ まちがえやすいところ

② ばね定数とコンデンサー

✕ $k \leftrightarrow C$

○ $k \leftrightarrow \dfrac{1}{C}$（$\dfrac{1}{k} \leftrightarrow C$）

ばねの力 kx とコンデンサーの電圧 $\dfrac{1}{C}q$ をくらべます。

⚠ まちがえやすいところ

③ 熱もゆれると思う

✕ お湯の温度も、部屋の温度のまわりでゆれる

○ 熱には慣性がないので、ゆれずに近づく

相似の表の「慣性」の行が、熱では「ない」からです。

⚠ まちがえやすいところ

④ はじめの状態が足りない

✕ ばね：$x(0) = 0.1$ だけ

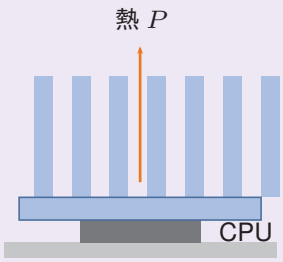
○ $x(0) = 0.1$、$v(0) = 0$

2 回微分の式には、はじめの位置と速度の 2 つが要ります。「静かにはなす」は $v(0) = 0$ のことです。

物理・工学ではこう使う

パソコンの CPU の熱設計

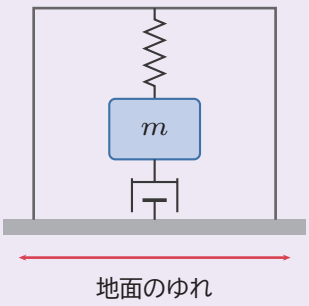
パソコンの CPU（計算をする半導体のチップ）は、動くと熱を出します。設計する人は、熱の列を電気の回路のように考えます。発熱 100 W、チップから空気までの熱抵抗が 0.3 K/W なら、最後の温度は空気より $100 \times 0.3 = 30$ K 高くなります（6-4 の $T_a + PR_{th}$。数はだいたいの例）。放熱器の熱容量が大きいほど時定数が長く、温度はゆっくり上がります。



物理・工学ではこう使う

地震計：ばね・質量・ダンパーで地面のゆれをはかる

むかしの地震計は、ばねでつるしたおもりと、ダンパーでできていました。地面が速くゆれると、おもりは慣性でほとんど動かず、地面だけが動きます。地面とおもりのずれを記録すれば、地面のゆれがわかります。おもりが自分でゆれ続けないように、ダンパーで ζ を 0.7 くらいにします（6-12 ⑦）。



章末問題

6-15 のまとめ

基本 ★★

1 質量 1 kg の台車が、ばね定数 25 N/m のばねと減衰係数 2 N s/m のダンパーにつながっています。0.2 m 引いて静かにはなしました。微分方程式とはじめの状態を書きましょう（例題 1）。

2 電池（9 V）、抵抗（100 kΩ）、空のコンデンサー（10 μF）をつなぎます。コンデンサーの電圧の微分方程式、はじめの状態、時定数、最後の電圧を求めましょう（例題 2）。

3 熱容量 900 J/K の飲み物が、熱抵抗 2 K/W で 22 ℃の部屋へ熱を逃がします。温度の微分方程式（秒）と時定数を求め、分の式に直しましょう（例題 3）。

4 RLC 回路（$L = 0.1\,\mathrm{H}$、$C = 10\,\mu\mathrm{F}$、$R = 40\,\Omega$）の ω_n と ζ を求めましょう。また、相似の表で、この回路と同じ形のばね・質量・ダンパーでは、L、R、$\frac{1}{C}$ が何に対応しますか（例題 4）。

5 RC の充電（$R = 5\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$、$E = 6\,\mathrm{V}$、はじめ 0 V）が「ほぼ終わる」（差が 5%）時刻と、そのときの電圧を求めましょう（例題 5）（$e^{-3} = 0.0498$）。

6 次の式は、どの章の方法で解けますか。必要なはじめの状態の数も答えましょう（例題 6）。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 1$

(2) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 0.5v$

(4) $\ddot{x} + 4x = 3\cos t$

チャレンジ ★★★

7 （1）$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 100\,\mathrm{N/m}$ のばねを $0.03\,\mathrm{m}$ 引いてはなしました。エネルギーの合計と、いちばん速いときの速さを求めましょう。
（2）$C = 2\,\mu\mathrm{F}$ を $10\,\mathrm{V}$ にため、$L = 50\,\mathrm{mH}$ につなぎました。いちばん大きい電流を求めましょう（例題 7）。

8 熱容量 $1050\,\mathrm{J/K}$ のお湯（$250\,\mathrm{mL}$）が、熱抵抗 $1.1\,\mathrm{K/W}$ で部屋へ熱を逃がします。時定数は何分ですか。また、「ほぼ冷めきる」（差が 5% になる）のは約何分後ですか（例題 3・例題 5）。

9 ばね・質量・ダンパー（$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 400\,\mathrm{N/m}$、$c = 8\,\mathrm{N\,s/m}$）と、RLC 回路（$L = 2\,\mathrm{mH}$、$C = 5\,\mu\mathrm{F}$、$R = 8\,\Omega$）の ω_n と ζ を求め、ゆれ方の形が同じかを答えましょう（例題 4）。

10 RC の充電（$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 1000\,\mu\mathrm{F}$、$E = 12\,\mathrm{V}$、はじめ $0\,\mathrm{V}$）と、冷めるお湯（$\tau = 25$ 分、はじめ 80 ℃、部屋 20 ℃）が「ほぼ終わる」時刻と、そのときの電圧・温度を求めましょう（例題 5）（$e^{-3} = 0.0498$）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 法則から、微分方程式とはじめの状態を書ける。 → 538 ページ
- ☐ 相似の表で、ばね・電気・熱の量を対応させられる。 → 540 ページ
- ☐ 式の形から、解き方（章）を選べる。 → 546 ページ

デルタ

第 6 巻、おつかれさま！　ルールとはじめの状態があれば、未来は計算できる。第 7 巻では、たくさんの量を表のまま計算しよう。

こたえ

「じぶんでとこう」は じ 1 、章末問題は 1 のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

6-1

じ 1 （1）$-0.1\times 20=-2$。1 分あたり 2 ℃下がる。（2）$-0.1\times(-10)=1$。1 分あたり 1 ℃上がる。

じ 2 $\frac{dT}{dt}=-0.08\,(T-18)$。68 ℃のとき $-0.08\times 50=-4$ で、1 分あたり 4 ℃下がる。

じ 3 $RC=50\,000\times 0.00002=1$（秒）。$\frac{dV}{dt}=-V$。6 V のとき、1 秒あたり 6 V 下がる。

じ 4 （1）$2\frac{d^2x}{dt^2}=-50x$ より $\frac{d^2x}{dt^2}=-25x$。（2）$-25\times 0.04=-1$。左向きに 1 m/s^2。（3）2 階。

じ 5 左辺 $10\times(-0.5)e^{-0.5t}=-5e^{-0.5t}$。右辺 $-0.5\times 10e^{-0.5t}=-5e^{-0.5t}$ で等しい。$V(0)=10e^0=10$。

じ 6 （イ）。（ア）は左辺 -1.5、右辺 $-1.5+0.075t$ で $t\neq 0$ で合わない。（ウ）は左辺 $-2.5e^{-0.05t}$、右辺 $-2.5e^{-0.05t}+1$ で合わない。

じ 7 $\frac{dx}{dt}=0.2\cos 4t$、$\frac{d^2x}{dt^2}=-0.8\sin 4t$ $=-16\times 0.05\sin 4t=-16x$。$x(0)=0$、$\frac{dx}{dt}(0)=0.2\cos 0=0.2$。

じ 8 （1）2、1、0、-1、-2。（2）$T(0)=50$ はへって 30 に近づく。$T(0)=10$ はふえて 30 に近づく。

じ 9 （1）1 階・線形。（2）2 階・線形でない（$\sin\theta$）。（3）2 階・線形。

1 （1）$-0.08\times 50=-4$。1 分あたり 4 ℃下がる。（2）$-0.08\times(-10)=0.8$。1 分あたり 0.8 ℃上がる。

2 $\frac{dT}{dt}=-0.06\,(T-15)$。65 ℃のとき $-0.06\times 50=-3$ で、1 分あたり 3 ℃下がる。

3 $RC=100\,000\times 0.00001=1$（秒）。$\frac{dV}{dt}=-V$。8 V のとき、1 秒あたり 8 V 下がる。

4 （1）$0.2\frac{d^2x}{dt^2}=-20x$ より $\frac{d^2x}{dt^2}=-100x$。（2）$-100\times 0.03=-3$。左向きに 3 m/s^2。（3）2 階。

5 （1）1 階・線形。（2）2 階・線形。（3）1 階・線形でない（y^3）。

6 左辺 $3\times(-0.5)e^{-0.5t}=-1.5e^{-0.5t}$。右辺 $-0.5\times 3e^{-0.5t}=-1.5e^{-0.5t}$ で等しい。$y(0)=3e^0=3$。

7 （1）0.8、0.4、0、-0.4、-0.8。（2）$y(0)=9$ はへって 5 に近づく。$y(0)=1$ はふえて 5 に近づく。

8 （イ）。左辺 $-6e^{-3t}$、右辺 $-3\times 2e^{-3t}=-6e^{-3t}$ で等しく、$y(0)=2$。（ア）は右辺 $-6+18t$ で $t\neq 0$ で合わない。（ウ）は左辺 $6e^{3t}$、右辺 $-6e^{3t}$ で合わない。

9 $\frac{dx}{dt}=-0.4\sin 10t$、$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 10t$ $=-100\times 0.04\cos 10t=-100x$。

$x(0) = 0.04\cos 0 = 0.04$、
$\frac{dx}{dt}(0) = -0.4\sin 0 = 0$。

6-2

じ 1　0 分の速さ $-0.1 \times 65 = -6.5$。0.5 分後 $90 - 3.25 = 86.75$。速さ $-0.1 \times 61.75 = -6.175$。1 分後 $86.75 - 3.0875 \approx 83.66$ ℃。

じ 2　(1) $60 + (-4) \times 2 = 52$。
(2) $60 \to 56 \to 52.4$。ほんとう $20 + 40 \times 0.8187 \approx 52.75$。ずれは (1) 0.75、(2) 0.35 で、ほぼ半分。

じ 3　C2 `=-0.02*(B2-15)`、B3 `=B2+C2*$D$2`、A3 `=A2+$D$2`。

じ 4　$RC = 10\,000 \times 0.0001 = 1$ s。ルールは $\frac{dV}{dt} = 6 - V$。0.25 秒後 $0 + 6 \times 0.25 = 1.5$。0.5 秒後 $1.5 + 4.5 \times 0.25 = 2.625$ V。

じ 5　$a = -25x$。1 歩め $a = -5$、$v = -0.5$、$x = 0.2 - 0.05 = 0.15$。2 歩め $a = -3.75$、$v = -0.875$、$x = 0.15 - 0.0875 = 0.0625$ m。速度 −0.875 m/s。

じ 6　$\omega\Delta t = 0.1$。$\sqrt{1 + 0.01} = \sqrt{1.01} \approx 1.005$ 倍。1 周で約 1.37 倍。

じ 7　15 分後 $60 + (-4) \times 15 = 0$ ℃。30 分後 $0 + (-0.1 \times (-20)) \times 15 = 30$ ℃。倍率 $1 - 0.1 \times 15 = -0.5$。

じ 8　V は $0 \to 2.5 \to 4.375 \to 5.78125$。表示は 5.78125。

1　$70 \to 68 \to 66.08 \to 64.2368$。約 64.24 ℃。

2　(1) $75 + (-6) \times 2 = 63$。
(2) $75 \to 69 \to 63.6$。ほんとう $15 + 60 \times 0.8187 \approx 64.12$。ずれは (1) 1.12、(2) 0.52 で、ほぼ半分。

3　C2 `=-0.3*(B2-5)`、B3 `=B2+C2*$D$2`、A3 `=A2+$D$2`。

4　$RC = 10\,000 \times 0.0002 = 2$ s。ルールは $\frac{dV}{dt} = \frac{5 - V}{2}$。0.5 秒後 1.25、1 秒後 $1.25 + 1.875 \times 0.5 = 2.1875$。約 2.19 V。

5　$a = -16x$。1 歩め $a = -0.8$、$v = -0.08$、$x = 0.05 - 0.008 = 0.042$。2 歩め $a = -0.672$、$v = -0.1472$、$x = 0.042 - 0.01472 = 0.02728$ m。速度 −0.1472 m/s。

6　1 回め $40 + (-2) \times 0.5 = 39$。2 回め $39 + (-1.9) \times 0.5 = 38.05$。表示は 38.05。

7　60 分後 $80 + (-3) \times 60 = -100$ ℃。120 分後 $-100 + 6 \times 60 = 260$ ℃。差の倍率は $1 - 0.05 \times 60 = -2$ で、差が毎回 −2 倍になり、ふらふらしながら大きくなって計算がこわれる。

8　$\omega\Delta t = 0.2$。$\sqrt{1 + 0.04} = \sqrt{1.04} \approx 1.0198$ 倍。1 周で約 1.84 倍。

9　5 秒後 $0 + 5 \times 5 = 25$ V（電池の 10 V をこえた）。10 秒後 $25 + (-7.5) \times 5 = -12.5$ V。差は $10 \to -15 \to 22.5$ で、毎回 $1 - \frac{5}{2} = -1.5$ 倍。Δt が大きすぎる。

6-3

じ 1　(1) と (3)。(2) は右辺に N、(4) は右辺に T がある。

じ 2 $v = 9.8t$、$x = 4.9t^2$。$4.9t^2 = 78.4$ より $t^2 = 16$、$t = 4\,\mathrm{s}$。速さ $9.8 \times 4 = 39.2\,\mathrm{m/s}$。

じ 3 $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1000}{2100} \approx 0.476$。$T = 20 + 0.476\,t$。$80 \times \dfrac{2100}{1000} = 168\,\mathrm{s}$（約 2.8 分）。

じ 4 $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{0.001}{0.0002} = 5$。$V = 5t$。$5t = 3$ より 0.6 s。

じ 5 $V = 10t - 0.25t^2 + 30$。$t = 10$ で $100 - 25 + 30 = 105\,\mathrm{L}$。

じ 6 $\dfrac{1}{a} = -3$。$q = -1.8\,e^{-t/3} + C$、$C = 1.8$。$q = 1.8\,(1 - e^{-t/3})$。3 秒後 $1.8 \times 0.632 \approx 1.14\,\mathrm{mC}$。

じ 7 $p = 101\,300 - 9800z$。（1）$z = -5$ で $101\,300 + 49\,000 = 150\,300\,\mathrm{Pa}$。

（2）$-9800z = 101\,300$ より $z \approx -10.3$。深さ約 10.3 m。

じ 8 $C_2 = 22$、$0.3\,C_1 + 22 = -2$ より $C_1 = -80$。$T = 22 - 80x$。（1）14 ℃。

（2）$22 - 80x = 6$ より $x = 0.2\,\mathrm{m}$。

じ 9 $y = 0.002x^2 + C_1x + C_2$、$C_2 = 0$、$80 + 200\,C_1 = 0$ より $C_1 = -0.4$。$y = 0.002x\,(x - 200)$。まん中 $-20\,\mathrm{m}$、$x = 50$ で $-15\,\mathrm{m}$（塔の上より 15 m 下）。

1 （1）と（3）。

2 $v = 9.8t$、$x = 4.9t^2$。$4.9t^2 = 19.6$ より $t = 2\,\mathrm{s}$。速さ $9.8 \times 2 = 19.6\,\mathrm{m/s}$。

3 $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1400}{8400} = \dfrac{1}{6}$。$T = 15 + \dfrac{t}{6}$。$70 \times 6 = 420\,\mathrm{s}$（7 分）。

4 $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{0.0002}{0.00005} = 4$。$V = 4t$。$4t = 6$ より 1.5 s。

5 $V = 8t - 0.1t^2 + 20$。$t = 20$ で $160 - 40 + 20 = 140\,\mathrm{L}$。

6 $a = -1$、$\dfrac{1}{a} = -1$。$q = -2e^{-t} + C$、$C = 2$。$q = 2\,(1 - e^{-t})$。1 秒後 $2 \times 0.632 \approx 1.26\,\mathrm{mC}$。

7 $p = 101\,300 - 10\,094z$。$10\,094 \times (-z) = 101\,300$ より、深さ約 10.0 m（$z \approx -10.04$）。

8 $C_2 = 18$、$0.25\,C_1 + 18 = -2$ より $C_1 = -80$。$T = 18 - 80x$。$18 - 80x = 0$ より $x = 0.225\,\mathrm{m}$（部屋の側から 22.5 cm）。

9 $y = 0.0025x^2 + C_1x$、$36 + 120\,C_1 = 0$ より $C_1 = -0.3$。$y = 0.0025x\,(x - 120)$。まん中 $x = 60$ で $y = -9$。たるみ 9 m。

6-4

じ 1 $\tau = \dfrac{1}{0.04} = 25$ 分。差 60 ℃→ 30 ℃で $25 \ln 2 \approx 17.3$ 分後。55 ℃→ 40 ℃（差 30 ℃→ 15 ℃）も約 17.3 分。

じ 2 $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int (-0.5)\,dt$ より $\ln y = -0.5t + C$。$y = Ae^{-0.5t}$。$y(0) = 8$ より $A = 8$。$y = 8e^{-0.5t}$。

じ 3 $T = 24 - 20e^{-t/20}$。$20e^{-t/20} = 5$ より $e^{-t/20} = \dfrac{1}{4}$、$t = 20 \ln 4 \approx 27.7$ 分後。

じ 4 $0 = 12 - 3y$ より $y_\infty = 4$。$12 - 3y = \dfrac{4 - y}{1/3}$ なので $\tau = \dfrac{1}{3}$。$y = 4(1 - e^{-3t})$。

じ 5 $T_\infty = 25 + 50 \times 0.8 = 65$ ℃。$\tau = 100 \times 0.8 = 80\,\mathrm{s}$。$160\,\mathrm{s} = 2\tau$ で $T = 65 - 40e^{-2} \approx 65 - 5.4 = 59.6$ ℃。

じ 6 $RC = 10000 \times 0.00047 = 4.7\,\mathrm{s}$。4.7 秒後に $12 \times 0.368 \approx 4.4\,\mathrm{V}$。半分は $4.7 \ln 2 \approx 3.3$ 秒後。

じ 7　(1) $1000 \times 0.001 = 1\,\mathrm{s}$。
(2) $\dfrac{5}{1000} = 5\,\mathrm{mA}$。
(3) $5 \times (1 - 0.050) \approx 4.75\,\mathrm{V}$。

じ 8　(1) $10000 \times 0.0001 = 1\,\mathrm{s}$（半分）。
(2) $10 \times (1 - 0.135) \approx 8.65\,\mathrm{V}$。
(3) 10 V のまま。

じ 9　$\dfrac{6}{20} = 0.3\,\mathrm{A}$。
$\tau = \dfrac{0.1}{20} = 0.005\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{ms}$。
$0.3 \times (1 - 0.368) \approx 0.19\,\mathrm{A}$。

じ 10　$e^{-30/\tau} = \dfrac{1}{4}$ より $\tau = \dfrac{30}{\ln 4} \approx 21.6$ 分。

じ 11　(1) $e^{-2} \approx 0.135$（約 14 %）。
(2) $2e^{-2} \approx 0.271$（約 27 %）。
(3) $\lambda t = 2 \times 0.5 = 1$ で $e^{-1} \approx 0.368$（約 37 %）。

1　$\tau = 10$ 分。(1) 差 60 ℃→ 30 ℃で $10 \ln 2 \approx 6.9$ 分後。
(2) $25 + 60 \times 0.368 \approx 47.1$ ℃。

2　$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int (-0.4)\,\mathrm{d}t$ より
$\ln y = -0.4t + C$。$y = Ae^{-0.4t}$、
$A = 10$。$y = 10e^{-0.4t}$。

3　$T = 26 - 20e^{-t/15}$。$20e^{-t/15} = 10$ より $t = 15 \ln 2 \approx 10.4$ 分後。

4　$RC = 50000 \times 0.00002 = 1\,\mathrm{s}$。2 秒後 $9 \times 0.135 \approx 1.2\,\mathrm{V}$。

5　(1) $2000 \times 0.0005 = 1\,\mathrm{s}$。
(2) $\dfrac{6}{2000} = 3\,\mathrm{mA}$。
(3) $6 \times (1 - 0.050) = 5.7\,\mathrm{V}$。

6　0.2 A。$\tau = 0.01\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{ms}$。
$0.2 \times 0.632 \approx 0.13\,\mathrm{A}$。

7　(1) 25 ℃。(2) 25 000 s ＝約 6.9 時間。(3) $25 - 10 \times 0.368 \approx 21.3$ ℃。

8　$e^{-20/\tau} = \dfrac{1}{4}$ より $\tau = \dfrac{20}{\ln 4} \approx 14.4$ 分。

9　(1) $e^{-1.5} \approx 0.223$（約 22 %）。
(2) $1.5 \times 0.223 \approx 0.335$（約 33 %）。

10　$0 = 8 - 0.5y$ より $y_\infty = 16$。
$\tau = \dfrac{1}{0.5} = 2$。$y = 16(1 - e^{-t/2})$。

6-5

じ 1　$v_\mathrm{f} = \dfrac{9.8}{3240} \approx 0.0030\,\mathrm{m/s}$。
$\tau = \dfrac{1}{3240} \approx 0.00031\,\mathrm{s}$。1 m に約 330 秒（$1 \div 0.003025 \approx 331$）。

じ 2　$v_\mathrm{t} = \sqrt{\dfrac{80 \times 9.8}{30}} = \sqrt{26.1} \approx 5.1\,\mathrm{m/s}$。

じ 3　$\sqrt{9} = 3$ 倍、$\sqrt{16} = 4$ 倍。

じ 4　0.2 秒後 $0 + 9.8 \times 0.2 = 1.96\,\mathrm{m/s}$。加速度 $9.8 - 0.2 \times 1.96^2 \approx 9.032$、0.4 秒後 $1.96 + 9.032 \times 0.2 \approx 3.77\,\mathrm{m/s}$。
終端速度 $\sqrt{\dfrac{9.8}{0.2}} = \sqrt{49} = 7\,\mathrm{m/s}$。

じ 5　$v = 0.00302\,(1 - e^{-3240t})$。$3\tau$（約 0.00093 秒）で $0.00302 \times 0.95 \approx 0.0029\,\mathrm{m/s}$。

じ 6　(1) $50 \times \dfrac{11.3}{9.8} \approx 57.7\,\mathrm{kg}$。
(2) $50 \times \dfrac{8.3}{9.8} \approx 42.3\,\mathrm{kg}$。

じ 7　$\dfrac{46}{50} = 0.92 = \dfrac{9.8 + a}{9.8}$ より
$a = 9.8 \times 0.92 - 9.8 \approx -0.78$。下向きに約 $0.78\,\mathrm{m/s^2}$。

じ 8　(1) 0.4 A。
(2) $\dfrac{0.3}{60} = 0.005\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{ms}$。
(3) $0.4 \times 0.95 = 0.38\,\mathrm{A}$。

じ 9　$v = \sqrt{\dfrac{20}{0.25}} = \sqrt{80} \approx 8.9\,\mathrm{m/s}$。
$8.94 \times 3.6 \approx 32$。時速約 32 km。

1　$v_\mathrm{f} = \dfrac{9.8}{980} = 0.01\,\mathrm{m/s}$。
$\tau = \dfrac{1}{980} \approx 0.0010\,\mathrm{s}$。

2　$\sqrt{\dfrac{0.0027 \times 9.8}{0.00033}} = \sqrt{80.2} \approx 9.0\,\mathrm{m/s}$。

3　$\sqrt{25} = 5$ 倍。

4 1 秒後 9.8 m/s。加速度 $9.8-0.004\times96.04\approx9.416$、2 秒後 $9.8+9.416\approx19.2$ m/s。

5 (1) $70\times\dfrac{10.3}{9.8}\approx73.6$ kg。
(2) $70\times\dfrac{9.3}{9.8}\approx66.4$ kg。

6 (1) 0.2 A。
(2) $\dfrac{0.05}{25}=0.002$ s $=2$ ms。
(3) $0.2\times0.95=0.19$ A。

7 $\dfrac{84}{80}=1.05=\dfrac{9.8+a}{9.8}$ より $a\approx0.49$。上向きに約 0.49 m/s^2。

8 $v=0.01\,(1-e^{-980t})$。3τ で $0.01\times0.95=0.0095$ m/s。

9 $v=\sqrt{\dfrac{700}{0.35}}=\sqrt{2000}\approx44.7$ m/s。
$44.7\times3.6\approx161$。時速約 161 km。

10 $v_t=\sqrt{\dfrac{100\times9.8}{0.25}}$
$=\sqrt{3920}\approx62.6$ m/s。
$62.6\times3.6\approx225$。時速約 225 km。

11 $v_t=\sqrt{\dfrac{70\times9.8}{25}}$
$=\sqrt{27.44}\approx5.2$ m/s。

12 $\dfrac{57}{60}=0.95=\dfrac{9.8+a}{9.8}$ より
$a\approx-0.49$。下向きに約 0.49 m/s^2。

6-6

じ 1 $\omega_n=\sqrt{25}=5$ rad/s、周期 $\dfrac{6.28}{5}\approx1.26$ s、振動数 0.80 Hz。質量 $\frac{1}{4}$ 倍で周期 $\frac{1}{2}$ 倍の約 0.63 s

じ 2 $m=\dfrac{2000\times1.07^2}{39.48}$
$=\dfrac{2289.8}{39.48}\approx58.0$。人は $58.0-8=50$ kg

じ 3 のび $\dfrac{0.4\times9.8}{25}=0.1568$ m。周期 $2\pi\sqrt{0.016}\approx0.79$ s。$\dfrac{0.1568}{9.8}=0.016$ なので同じ

じ 4 $\omega_n=4$。点 $(0.05\sqrt{3},\ -0.05)$。
$X=\sqrt{0.0075+0.0025}=0.1$ m、
$\phi=-\dfrac{\pi}{6}$。$x=0.1\cos\left(4t-\dfrac{\pi}{6}\right)$。
$t=\dfrac{\pi}{24}\approx0.13$ s 後

じ 5 合計 $\frac{1}{2}\times50\times0.04=1$ J。いちばん速い所で $v^2=1$、1 m/s。$x=0.12$ では、ばね 0.36 J、運動 0.64 J、$v^2=0.64$ で 0.8 m/s

じ 6 (1) $L=\dfrac{9.8\times1.5^2}{39.48}\approx0.56$ m。
(2) $\dfrac{0.56}{3.71}\approx0.151$、
$T=6.283\times0.389\approx2.4$ s

じ 7 $LC=10^{-3}\times10^{-7}=10^{-10}$、$\omega_n=10^5$ rad/s。周期 0.0000628 s $=62.8$ μs、振動数約 15 900 Hz。L が 4 倍で周期 2 倍の 126 μs

じ 8 $\dfrac{1}{2}\times0.000008\times5^2=0.0001$ J。
$\dfrac{1}{2}\times0.02\times i^2=0.0001$ より
$i^2=0.01$、0.1 A

1 $\omega_n=\sqrt{25}=5$ rad/s、周期約 1.26 s、振動数約 0.80 Hz

2 のび $\dfrac{0.5\times9.8}{49}=0.1$ m。周期 $2\pi\times0.101\approx0.63$ s

3 $\omega_n=4$。点 $(0.05,\ -0.05)$。振幅 $0.05\sqrt{2}\approx0.071$ m、$\phi=-\dfrac{\pi}{4}$

4 合計 $\frac{1}{2}\times100\times0.05^2=0.125$ J。いちばん速い所で 0.5 m/s。$x=0.03$ では運動エネルギー 0.08 J で 0.4 m/s

5 (1) $2\pi\sqrt{0.25}=\pi\approx3.14$ s。
(2) $\dfrac{9.8\times1^2}{39.48}\approx0.25$ m

6 $LC=0.1\times0.00001=10^{-6}$、$\omega_n=1000$ rad/s。周期 6.28 ms、振動数約 159 Hz

7 台約 2.03 kg、全体約 8.11 kg、荷物約 6.08 kg（周期 2 倍で質量 4 倍）

8 点 $(0.1,\ -0.1\sqrt{3})$。$X = 0.2$、$\phi = -\dfrac{\pi}{3}$。$x = 0.2\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{3}\right)$。$t = \dfrac{\pi}{12} \approx 0.26\,\mathrm{s}$ 後

9 $2\pi\sqrt{\dfrac{0.061}{9.8}}$
$= 6.283 \times 0.0789 \approx 0.50\,\mathrm{s}$

10 エネルギー 0.0004 J。$i^2 = 0.016$ より約 0.13 A。周期
$6.28 \times 0.000316 \approx 1.99\,\mathrm{ms}$

6-7

じ 1 ばね $-8 \times 0.05 = -0.4$、ダンパー $-0.4 \times 0.2 = -0.08$。合計 -0.48。$\ddot{x} = \dfrac{-0.48}{0.5} = -0.96\,\mathrm{m/s^2}$（左向きに 0.96）

じ 2 1 歩め $a = -1.6$、$v = -0.08$、$x = 0.096$。2 歩め
$a = \dfrac{-0.768 + 0.32}{0.5} = -0.896$、
$v = -0.1248$、$x = 0.08976$

じ 3 $\delta = \ln\dfrac{20}{16} = \ln 1.25 = 0.223$。
$n = \dfrac{2.303}{0.223} \approx 10.3$ なので、11 周期あと（$0.8^{11} \approx 0.086$）

じ 4 $c_c = 2\sqrt{400} = 40$。$\zeta = 0.25$（ゆれる）、1（ちょうど）、1.5（ゆっくり）

じ 5 $c_c = 2\sqrt{16000000} = 8000$。
$c = 0.25 \times 8000 = 2000\,\mathrm{N\,s/m}$。
$\omega_n = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{rad/s}$、$\alpha = 2.5\,\mathrm{/s}$

じ 6 $t = \dfrac{2.303}{0.4} \approx 5.8\,\mathrm{s}$ 後。$\dfrac{1}{100}$ は $\dfrac{4.605}{0.4} \approx 11.5\,\mathrm{s}$ 後

じ 7 $\delta = \ln\dfrac{1}{0.8} = \ln 1.25 = 0.223$。
$\zeta \approx \dfrac{0.223}{6.28} \approx 0.036$

じ 8 $\dfrac{L}{C} = \dfrac{0.001}{0.00001} = 100$。
$R_c = 2 \times 10 = 20\,\Omega$。$\zeta = \dfrac{5}{20} = 0.25$ で、ゆれながら止まる

じ 9 はじめ $\frac{1}{2} \times 50 \times 0.04 = 1\,\mathrm{J}$、あと $\frac{1}{2} \times 50 \times 0.01 = 0.25\,\mathrm{J}$。熱に変わったのは 0.75 J で 75 %

1 ばね -5、ダンパー $-4 \times (-0.5) = +2$。合計 -3。
$\ddot{x} = -1.5\,\mathrm{m/s^2}$

2 1 歩め $a = -1.6$、$v = -0.08$、$x = 0.096$。2 歩め
$a = \dfrac{-0.768 + 0.16}{0.5} = -1.216$、
$v = -0.1408$、$x = 0.08896$

3 $\delta = 0.223$。$\dfrac{2.303}{0.223} \approx 10.3$ なので 11 周期あと

4 $c_c = 2\sqrt{100} = 20$。$\zeta = 0.25$（ゆれる）、1（ちょうど）、1.5（ゆっくり）

5 $\dfrac{L}{C} = \dfrac{0.004}{0.000001} = 4000$、
$R_c = 2\sqrt{4000} \approx 126\,\Omega$。
$\zeta = \dfrac{40}{126} \approx 0.32$

6 はじめ 0.1 J、あと $\frac{1}{2} \times 20 \times 0.0036 = 0.036\,\mathrm{J}$。
0.064 J で 64 %

7 $c_c = 2\sqrt{6250000} = 5000$、
$c = 1500\,\mathrm{N\,s/m}$。$\omega_n = 10$、$\alpha = 3\,\mathrm{/s}$

8 $\delta = 0.0513$、$\zeta \approx \dfrac{0.0513}{6.28} \approx 0.008$。
$\dfrac{0.693}{0.0513} \approx 13.5$ なので 14 周期あと

9 $R_c = 200\,\Omega$ なので
$R = 0.5 \times 200 = 100\,\Omega$。$300\,\Omega$ では $\zeta = 1.5$ で、ゆれずにゆっくり放電する

10 $\dfrac{2.303}{1.5} \approx 1.5\,\mathrm{s}$ 後、$\dfrac{4.605}{1.5} \approx 3.1\,\mathrm{s}$ 後

11 $\zeta = \dfrac{1}{4} = 0.25$。$\alpha = \dfrac{1}{2 \times 0.5} = 1\,\mathrm{/s}$。
$\dfrac{2.303}{1} \approx 2.3\,\mathrm{s}$ 後

6-8

じ 1　(1) $5=4+1$ で j。(2) $7=4+3$ で $-j$。(3) $12=4\times3$ で 1。
(4) $22=4\times5+2$ で -1。

じ 2　(1) $1-2j$。(2) $3-8j$。
(3) $(6-15j)+(-2+6j)=4-9j$。

じ 3　(1) $2+2j+3j+3j^2=-1+5j$。
(2) $9-6j+j^2=8-6j$。
(3) $4j-3j^2=3+4j$。

じ 4　(1) $\bar{z}=4+3j$、$z\bar{z}=16+9=25$。
(2) $\bar{z}=-1-2j$、$z\bar{z}=1+4=5$。

じ 5　(1) $\dfrac{10(3+j)}{9+1}=3+j$。
(2) $\dfrac{(1+3j)(1-j)}{1+1}=\dfrac{4+2j}{2}=2+j$。
(3) $\dfrac{3\times(-j)}{j\times(-j)}=-3j$。

じ 6　(1) $x=\pm4j$。(2) $x=\pm\sqrt{7}\,j$。
(3) $\sqrt{2}\,j\times\sqrt{8}\,j=\sqrt{16}\,j^2=-4$。

じ 7　$D=16-52=-36$。
$s=\dfrac{4\pm6j}{2}=2\pm3j$。和 4、積 $4+9=13$ で、合っている。

じ 8　(1) $D=1>0$ で実数の解 2 つ。
$s=-2$、-3。(2) $D=0$ で実数の解 1 つ。$s=-3$。(3) $D=-4<0$ で虚数の解 2 つ。$s=\dfrac{-2\pm2j}{2}=-1\pm j$。

じ 9　$x(6-x)=13$ より $x^2-6x+13=0$。
$D=36-52=-16$、
$x=\dfrac{6\pm4j}{2}=3\pm2j$。2 つの数は $3+2j$ と $3-2j$。和 6、積 $9+4=13$。

1　(1) -1。(2) j。(3) $-j$。(4) 1。

2　(1) $3+3j$。(2) $7+j$。
(3) $(10+4j)+(-6+3j)=4+7j$。

3　(1) $2-j+6j-3j^2=5+5j$。
(2) $4+4j+j^2=3+4j$。
(3) $j-4j^2=4+j$。

4　$\bar{z}=3+2j$、$z\bar{z}=9+4=13$。

5　(1) $\dfrac{5(2-j)}{4+1}=2-j$。
(2) $\dfrac{(4+2j)(1-j)}{2}=\dfrac{6-2j}{2}=3-j$。
(3) $-4j$。

6　(1) $x=\pm5j$。(2) $x=\pm\sqrt{3}\,j$。

7　(1) $D=49-48=1>0$。実数の解 2 つ。$s=-3$、-4。
(2) $D=4-40=-36<0$。虚数の解 2 つ。$s=-1\pm3j$。

8　$D=36-40=-4$。
$s=\dfrac{-6\pm2j}{2}=-3\pm j$。和 -6、積 $9+1=10$ で、合っている。

9　$\sqrt{3}\,j\times\sqrt{12}\,j=\sqrt{36}\,j^2=-6$。
$\sqrt{(-3)\times(-12)}=\sqrt{36}=6$ で、ちがう値になる。

10　$x(4-x)=5$ より $x^2-4x+5=0$。
$D=16-20=-4$、
$x=\dfrac{4\pm2j}{2}=2\pm j$。2 つの数は $2+j$ と $2-j$。和 4、積 $4+1=5$。

6-9

じ 1　(1) 13、右下で $\tan^{-1}\left(-\dfrac{12}{5}\right)\approx-67.4°$。(2) 2、左上で $-30°+180°=150°$。(3) $2\sqrt{2}$、左下で $45°-180°=-135°$。(4) 3、$90°$。

じ 2　$z_1+z_2=9+14j$、
$z_2-z_1=5+12j$、距離
$\sqrt{25+144}=13$。

じ 3　(1) $3\sqrt{3}+3j$。(2) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,j$。
(3) $2(\cos120°+j\sin120°)$。
(4) $5\{\cos(-90°)+j\sin(-90°)\}$。

じ 4　$zw=8(\cos90°+j\sin90°)=8j$。
$\dfrac{z}{w}=2(\cos50°+j\sin50°)$。

じ 5　展開：$\sqrt{3}+j+3j+\sqrt{3}\,j^2=4j$。極形式：$2\times 2=4$、$60°+30°=90°$ で $4(\cos 90°+j\sin 90°)=4j$。同じ。

じ 6　(1) $(\sqrt{2})^6=8$、$45°\times 6=270°$ は $270°-360°=-90°$ の向きなので $-8j$。(2) $2^3=8$、$90°$ で $8j$。(3) $2^3=8$、$180°$ で -8。

じ 7　(1) $j(3-j)=1+3j$ で $(1,\ 3)$。(2) $(2-2j)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)$ $=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)j$ で、約 $(2.73,\ 0.73)$。

じ 8　$L_1+L_2u_2=40+30(0.866+0.5j)$ $=65.98+15j$。$u_1=0.5+0.866j$ をかけて $(32.99-12.99)+(57.14+7.5)j$ $=20.0+64.6j$。約 $(20,\ 64.6)$。

1　(1) $3\sqrt{2}$、$-45°+180°=135°$。(2) 2、$-60°$。(3) 4、$180°$。

2　(1) $-2+2\sqrt{3}\,j$。(2) $\sqrt{2}\{\cos(-45°)+j\sin(-45°)\}$。

3　$z_1+z_2=4+12j$、$z_2-z_1=6+8j$、距離 $\sqrt{36+64}=10$。

4　$zw=6(\cos 90°+j\sin 90°)=6j$。$\dfrac{z}{w}=\dfrac{3}{2}\{\cos(-10°)+j\sin(-10°)\}$。

5　展開：$1+j+\sqrt{3}\,j+\sqrt{3}\,j^2$ $=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})j$。極形式：$2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$、$60°+45°=105°$ で $2\sqrt{2}(\cos 105°+j\sin 105°)$。

6　(1) $(\sqrt{2})^{10}=32$、$45°\times 10=450°$、$450°-360°=90°$ なので $32j$。(2) $2^3=8$、$120°\times 3=360°$ で 8。

7　$j(5+j)=5j+j^2=-1+5j$ で $(-1,\ 5)$。

8　$r=\sqrt{2}$、左上で $\tan^{-1}(-1)=-45°$、$-45°+180°=135°$。$\sqrt{2}(\cos 135°+j\sin 135°)$。

9　(1) $j(-2+4j)=-4-2j$ で $(-4,\ -2)$。(2) $(-2+4j)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-6+2j)$ で $(-3\sqrt{2},\ \sqrt{2})$、約 $(-4.24,\ 1.41)$。

10　$u_1=j$、$u_2=-j$。$j(40+30\times(-j))$ $=j(40-30j)=30+40j$。$(30,\ 40)$。

11　$z^2=4(\cos 60°+j\sin 60°)$ $=2+2\sqrt{3}\,j$。$z^3=8(\cos 90°+j\sin 90°)=8j$。$z^6$ $=64(\cos 180°+j\sin 180°)=-64$。

12　$|z|=2$、$60°$、$|w|=\sqrt{2}$、$45°$ なので $\sqrt{2}(\cos 15°+j\sin 15°)$。$a+bj$ の形は $\dfrac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)j}{2}$、約 $1.366+0.366j$。絶対値は $\sqrt{1.866+0.134}=\sqrt{2}$ で同じ。

13　絶対値 $\dfrac{4}{2}=2$、偏角 $100°-10°=90°$ で $2(\cos 90°+j\sin 90°)=2j$。

6-10

じ 1　(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}j$。(2) $120°$ なので $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$。(3) $e^{-j\pi}=-1$ なので -2。

じ 2　(1) $r=2$。右下で $\theta=-30°$。$2e^{-j\pi/6}$。(2) $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$。左上で $\theta=135°$。$2\sqrt{2}\,e^{j3\pi/4}$。

じ 3　(1) $8e^{j\pi/3}=4+4\sqrt{3}\,j$。(2) $2e^{j\pi/3}=1+\sqrt{3}\,j$。

じ 4　$1-j=\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}$。$(\sqrt{2})^4e^{-j\pi}=4\times(-1)=-4$。

じ 5 $e^{\pm j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$。たして 2 でわると $\frac{\sqrt{2}}{2}$。ひくと $\sqrt{2}\,j$、$2j$ でわると $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

じ 6 $100 + 100e^{j2\pi/3} = 100 - 50 + 86.6j$ $= 50 + 86.6j$。大きさ $\sqrt{2500 + 7500} = 100$、角 60°。$100\sin(\omega t + 60°)$〔V〕。

じ 7 フェーザの和 $4 + 3j$。大きさ 5、角 $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 36.9°$。$5\sin(\omega t + 36.9°)$。

じ 8 微分 $5je^{j5t}$（5 倍、90° 進む）。2 回微分 $-25e^{j5t}$（25 倍、180°）。積分 $\frac{e^{j5t}}{5j} = -\frac{j}{5}e^{j5t}$（$\frac{1}{5}$ 倍、90° おくれる）。

じ 9 $\omega = 2 \times 3.14 \times 60 \approx 377$〔rad/s〕。$377 \times 20 \times 10^{-6} \times 100 \approx 0.754$。振幅 約 0.75 A、電流は電圧より 90° 進む。

じ 10 $\omega = 2 \times 3.14 \times 60 \approx 377$〔rad/s〕。$j\omega L = 377 \times 0.2j \approx 75.4j$〔Ω〕。$\frac{100}{75.4j} \approx -1.33j$。振幅 約 1.3 A、電流は電圧より 90° おくれる。

じ 11 $e^{-0.5t}\cos 3t$。$t = 0$ で 1。$t = \frac{\pi}{3}$ で $e^{-\pi/6}\cos\pi = -0.592$。

じ 12 $(\cos a + j\sin a)(\cos b - j\sin b)$ を展開すると、実部は $\cos a\cos b + \sin a\sin b$、虚部は $\sin a\cos b - \cos a\sin b$。右は $\cos(a-b) + j\sin(a-b)$。よって $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$、$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$。

1 （1）j。（2）150° なので $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$。（3）$2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 1 - \sqrt{3}\,j$。

2 （1）$\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$。（2）$r = 2$、左上で 150°。$2e^{j5\pi/6}$。

3 （1）$2e^{j\pi/2} = 2j$。（2）$4e^{j2\pi/3} = -2 + 2\sqrt{3}\,j$。

4 $1 + \sqrt{3}\,j = 2e^{j\pi/3}$。$2^3 e^{j\pi} = 8 \times (-1) = -8$。

5 $e^{j\pi/2} = j$、$e^{-j\pi/2} = -j$。$\frac{j + (-j)}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$。$\frac{j - (-j)}{2j} = \frac{2j}{2j} = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$。

6 $\omega = 314$〔rad/s〕。$314 \times 20 \times 10^{-6} \times 100 \approx 0.628$。振幅 約 0.63 A、電流は電圧より 90° 進む。

7 微分 $3je^{j3t}$（3 倍、90° 進む）。2 回微分 $-9e^{j3t}$（9 倍、180°）。積分 $-\frac{j}{3}e^{j3t}$（$\frac{1}{3}$ 倍、90° おくれる）。

8 $j\omega L = 314 \times 0.05j = 15.7j$〔Ω〕。$\frac{100}{15.7j} \approx -6.37j$。振幅 約 6.4 A、電流は電圧より 90° おくれる。

9 $e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$、$e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$。実部 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$、虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$。

10 $e^{-0.5t}\cos 2t$。$t = 0$ で 1、$t = \frac{\pi}{4}$ で 0、$t = \frac{\pi}{2}$ で $0.456 \times (-1) = -0.456$。

11 $100 + 100e^{-j\pi/3} = 100 + 50 - 86.6j$ $= 150 - 86.6j$。大きさ $\sqrt{30000} \approx 173$、右下の点で角 −30°。$173\sin(\omega t - 30°)$〔V〕。

12 フェーザの和 $100 + 50j$。大きさ $\sqrt{10000 + 2500}$ $= \sqrt{12500} \approx 111.8$、角 $\tan^{-1}\frac{50}{100} = 26.6°$。$111.8\sin(\omega t + 26.6°)$。

13 左を展開すると、実部は $\cos a\cos b - \sin a\sin b$、虚部は $\sin a\cos b + \cos a\sin b$。右は $\cos(a+b) + j\sin(a+b)$。実部・虚部

を等しいとおく。$a=b=\theta$ とすると、

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$、

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

6-11

じ 1 $\cosh 2=\dfrac{7.389+0.135}{2}=3.762$、

$\sinh 2=\dfrac{7.389-0.135}{2}=3.627$、

$\tanh 2=\dfrac{3.627}{3.762}\approx 0.964$。

じ 2 $\cosh^2 x=1+\dfrac{144}{25}=\dfrac{169}{25}$ より

$\cosh x=\dfrac{13}{5}$。$\tanh x=\dfrac{12}{13}$。

じ 3 （1）$2\sinh 2x$。（2）$9\sinh 3x$。

（3）$4\times 0.5(1-\tanh^2 0.5t)$

$=2(1-\tanh^2 0.5t)$。

じ 4 $y'=6(1-\tanh^2 3t)$

$=6-6\tanh^2 3t$。右辺は

$6-1.5\times 4\tanh^2 3t=6-6\tanh^2 3t$

で同じ。$y(0)=2\tanh 0=0$。

じ 5 （1）$C=1$、$D=\dfrac{6}{3}=2$。

$y=\cosh 3t+2\sinh 3t$。

（2）$C=5+1=6$、$D=5-1=4$。

$y=6\cosh 3t+4\sinh 3t$。

じ 6 （1）$u=\dfrac{9.8\times 5}{54.9}=0.892$。

$54.9\times 0.713\approx 39.1\,\mathrm{m/s}$。

（2）$u=1.83$。

$t=\dfrac{1.83\times 54.9}{9.8}\approx 10.3$ 秒後。

じ 7 $\dfrac{x}{a}=0.5$。たるみ

$100\times 0.128=12.8\,\mathrm{m}$。長さ

$2\times 100\times 0.521=104.2\,\mathrm{m}$。

じ 8 $a=\dfrac{3200}{8}=400\,\mathrm{m}$。$x=40$ で

$\dfrac{40^2}{2\times 400}=\dfrac{1600}{800}=2.0\,\mathrm{m}$。

1 $\cosh 1.5=\dfrac{4.705}{2}=2.3525$、

$\sinh 1.5=\dfrac{4.259}{2}=2.1295$、

$\tanh 1.5=\dfrac{2.1295}{2.3525}\approx 0.905$。

2 $\cosh^2 x=1+\dfrac{25}{144}=\dfrac{169}{144}$ より

$\cosh x=\dfrac{13}{12}$。$\tanh x=\dfrac{5}{13}$。

3 （1）$4\sinh 4x$。（2）$25\sinh 5x$。

（3）$6(1-\tanh^2 2t)$。

4 $y'=6(1-\tanh^2 2t)$

$=6-6\tanh^2 2t$。右辺は

$6-\dfrac{2}{3}\times 9\tanh^2 2t=6-6\tanh^2 2t$。

$y(0)=0$。

5 $C=3$、$D=\dfrac{4}{4}=1$。

$y=3\cosh 4t+\sinh 4t$。

6 $u=\dfrac{9.8\times 2}{54.9}\approx 0.357$。

$54.9\times 0.343\approx 18.8\,\mathrm{m/s}$。

7 $\dfrac{x}{a}=1$。たるみ $20\times 0.543\approx 10.9\,\mathrm{m}$。

長さ $2\times 20\times 1.175=47.0\,\mathrm{m}$。

8 $\cosh 0.5=\dfrac{2.256}{2}=1.128$、

$\sinh 0.5=\dfrac{1.042}{2}=0.521$、

$\tanh 0.5=\dfrac{0.521}{1.128}\approx 0.462$。

9 $A=1$、$B=-3$。$C=A+B=-2$、

$D=A-B=4$。

$y=-2\cosh t+4\sinh t$。

10 $v_t=\sqrt{\dfrac{70\times 9.8}{0.25}}$

$=\sqrt{2744}\approx 52.4\,\mathrm{m/s}$。

$u=\dfrac{9.8\times 4}{52.4}\approx 0.748$。

$52.4\times 0.634\approx 33.2\,\mathrm{m/s}$。

11 $a=\dfrac{7200}{12}=600\,\mathrm{m}$。$x=30$ で

$\dfrac{30^2}{2\times 600}=\dfrac{900}{1200}=0.75\,\mathrm{m}$。

12 $\frac{x}{a}=\frac{20}{40}=0.5$。たるみ
$40\times0.128\approx5.1\,\mathrm{m}$。長さ
$2\times40\times0.521\approx41.7\,\mathrm{m}$。

6-12

じ 1 $s^2+4s+3=0$ で $s=-1$、-3。
$x=Ae^{-t}+Be^{-3t}$。$A+B=2$、
$-A-3B=0$ より $A=3$、$B=-1$。
$x=3e^{-t}-e^{-3t}$

じ 2 $s=-2\pm3j$。
$x=e^{-2t}(A\cos3t+B\sin3t)$。
$A=1$。$-2A+3B=0$ より $B=\frac{2}{3}$。
$x=e^{-2t}(\cos3t+\frac{2}{3}\sin3t)$

じ 3 $(s+1)^2=0$ で $s=-1$（重解）。
$x=(A+Bt)e^{-t}$。$A=2$、$B-A=0$
より $B=2$。$x=(2+2t)e^{-t}$

じ 4 $\omega_\mathrm{n}=10\,\mathrm{rad/s}$。$2\sqrt{mk}=8000$、
$\zeta=0.5$。$\alpha=5\,/\mathrm{s}$、$\omega_\mathrm{d}=8.66\,\mathrm{rad/s}$。
周期 約 $0.726\,\mathrm{s}$。$e^{-5\times0.726}\approx0.027$ 倍

じ 5 $c=2\sqrt{16}=8\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$。
$s^2+8s+16=0$ で $s=-4$。
$x=(A+Bt)e^{-4t}$、$A=0.2$、
$B=4A=0.8$。$x=(0.2+0.8t)e^{-4t}$

じ 6 $\frac{L}{C}=40\,000$、境めは $400\,\Omega$。$\zeta=0.1$。
$\omega_\mathrm{n}=50\,000$、$\omega_\mathrm{d}\approx49\,750\,\mathrm{rad/s}$。振
動数 約 $7920\,\mathrm{Hz}$

じ 7 $0.001s^2+200s+10^7=0$、
$s^2+2\times10^5s+10^{10}=0$、$s=-10^5$
（重解）。$A=10^{-6}$、$B=10^5A=0.1$。
$q=10^{-6}(1+10^5t)e^{-10^5t}$。
$t=5\times10^{-5}$ で $6e^{-5}\approx0.040$ 倍

1 （1）$s^2+7s+12=0$、$D=1>0$ で
ゆっくりもどる。
（2）$2s^2+4s+10=0$、
$D=16-80<0$ でゆれながら止まる。
（3）$s^2+8s+16=0$、$D=0$ でちょ
うど

2 $s=-2$、-4。$A+B=1$、
$-2A-4B=0$ より $A=2$、$B=-1$。
$x=2e^{-2t}-e^{-4t}$

3 $s=-3\pm4j$。
$x=e^{-3t}(A\cos4t+B\sin4t)$、
$A=1$、$-3A+4B=0$ より $B=\frac{3}{4}$。
$x=e^{-3t}(\cos4t+\frac{3}{4}\sin4t)$

4 $s=-5$（重解）。$x=(A+Bt)e^{-5t}$、
$A=1$、$B=5$。$x=(1+5t)e^{-5t}$

5 $\omega_\mathrm{n}=\sqrt{100}=10\,\mathrm{rad/s}$。
$2\sqrt{mk}=2\times20=40$、
$\zeta=8\div40=0.2$。
$\omega_\mathrm{d}=10\times0.980=9.80\,\mathrm{rad/s}$

6 $\frac{L}{C}=\frac{0.02}{5\times10^{-7}}=40\,000$。
$R=2\times200=400\,\Omega$

7 $\omega_\mathrm{n}=10\,\mathrm{rad/s}$。
$2\sqrt{mk}=2\times2000=4000$、$\zeta=0.3$。
$\alpha=3\,/\mathrm{s}$、$\omega_\mathrm{d}=9.54\,\mathrm{rad/s}$、周期 約
$0.659\,\mathrm{s}$。$e^{-3\times0.659}\approx0.139$ 倍

8 $c=2\sqrt{4}=4\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$。$s^2+4s+4=0$、
$s=-2$。$x=(1+2t)e^{-2t}$。$t=1$ で
$3\times0.135\approx0.41$

9 $\zeta=\frac{100}{2}\times\frac{1}{100}=0.5$。$\omega_\mathrm{n}=10^4$、
$\omega_\mathrm{d}=8660\,\mathrm{rad/s}$。振動数
$8660\div6.283\approx1378\,\mathrm{Hz}$

10 $\omega_\mathrm{n}=4\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta=\frac{0.4}{4}=0.1$。
$\alpha=0.4\,/\mathrm{s}$、
$\omega_\mathrm{d}=4\times0.995=3.98\,\mathrm{rad/s}$。周期
$6.283\div3.98\approx1.58\,\mathrm{s}$。約 0.532 倍

11 $s=-1\pm4j$。
$x=e^{-t}(A\cos4t+B\sin4t)$、$A=1$、

$-A+4B=0$ より $B=\frac{1}{4}$。

$x=e^{-t}(\cos 4t+\frac{1}{4}\sin 4t)$

12 $s=-2$、-6。$A+B=2$、

$-2A-6B=0$ より $A=3$、$B=-1$。

$x=3e^{-2t}-e^{-6t}$

13 $\zeta=\frac{50}{2}\times\frac{1}{100}=0.25$。

$\omega_{\mathrm{d}}=10^4\times 0.968=9680\,\mathrm{rad/s}$

6-13

じ 1 $x_{\mathrm{p}}=P\cos t$：$15P=15$、$P=1$。

$x=\cos t+A\cos 4t+B\sin 4t$。

$A=-1$、$B=0$。$x=\cos t-\cos 4t$

じ 2 $\cos t$：$P+3Q=10$。$\sin t$：

$-3P+Q=0$。$P=1$、$Q=3$。

$x_{\mathrm{p}}=\cos t+3\sin t$、振幅 $\sqrt{10}\approx 3.16$

じ 3 $s=-1$、-2。

$x=\cos t+3\sin t+Ae^{-t}+Be^{-2t}$。

$A+B=-1$、$3-A-2B=0$ より

$A=-5$、$B=4$。

$x=\cos t+3\sin t-5e^{-t}+4e^{-2t}$

じ 4 $(3+4j)X=25$、

$X=\frac{25(3-4j)}{25}=3-4j$。

$x_{\mathrm{p}}=3\cos 2t+4\sin 2t$。振幅 5、おくれ約 53.1°

じ 5 $G=(64-\omega^2)^2+16\omega^2$、

$G'=4\omega(\omega^2-56)$。

$\omega=\sqrt{56}\approx 7.48\,\mathrm{rad/s}$。

$G=8^2+16\times 56=960$、振幅

$\frac{8}{\sqrt{960}}\approx 0.258\,\mathrm{m}$

じ 6 $\dot{x}=\sin 3t+3t\cos 3t$、

$\ddot{x}=6\cos 3t-9t\sin 3t$。

$\ddot{x}+9x=6\cos 3t$。大きさは約 5

じ 7 (1) $\sqrt{LC}=\sqrt{4\times 10^{-10}}=2\times 10^{-5}$、

$f=\frac{1}{2\pi\times 2\times 10^{-5}}\approx 7958\,\mathrm{Hz}$。電流 0.2 A。

(2) $C=\frac{1}{(2\pi\times 8\times 10^5)^2\times 2.5\times 10^{-4}}\approx 158\,\mathrm{pF}$

1 $x_{\mathrm{p}}=P\cos t$：$24P=24$、$P=1$。

$x=\cos t+A\cos 5t+B\sin 5t$、

$A=-1$、$B=0$。$x=\cos t-\cos 5t$

2 $\cos t$：$4P+4Q=8$。$\sin t$：

$-4P+4Q=0$。$P=Q=1$。

$x_{\mathrm{p}}=\cos t+\sin t$、振幅 $\sqrt{2}\approx 1.41$

3 $x_{\mathrm{p}}=2\cos t+4\sin t$。

$x=x_{\mathrm{p}}+Ae^{-t}+Be^{-3t}$。

$A+B=-2$、$4-A-3B=0$ より

$A=-5$、$B=3$。

$x=2\cos t+4\sin t-5e^{-t}+3e^{-3t}$

4 $(6+8j)X=20$、

$X=\frac{20(6-8j)}{100}=1.2-1.6j$。

$x_{\mathrm{p}}=1.2\cos 2t+1.6\sin 2t$。振幅 2、おくれ約 53.1°

5 (1) $\sqrt{LC}=10^{-5}$、

$f=\frac{10^5}{6.283}\approx 15\,900\,\mathrm{Hz}$。電流 0.2 A。

(2) $C=\frac{1}{(2\pi\times 6\times 10^5)^2\times 2\times 10^{-4}}\approx 352\,\mathrm{pF}$

6 $(4+2j)X=10$、

$X=\frac{10(4-2j)}{20}=2-j$。

$x_{\mathrm{p}}=2\cos t+\sin t$。振幅 $\sqrt{5}\approx 2.24$、おくれ約 26.6°

7 $f=\frac{1}{2\pi\times 6.32\times 10^{-5}}\approx 2520\,\mathrm{Hz}$。電流 $\frac{4}{8}=0.5\,\mathrm{A}$

8 $\zeta=\frac{0.8}{2\times 2}=0.2$。

$G=(8-0.5\omega^2)^2+0.64\omega^2$、

$G'=\omega(\omega^2-16+1.28)$

$=\omega(\omega^2-14.72)$。$\omega\approx 3.84\,\mathrm{rad/s}$。

$G\approx 9.83$、振幅 $\frac{0.8}{\sqrt{9.83}}\approx 0.255\,\mathrm{m}$

9 $\dot{x}=\sin 4t+4t\cos 4t$、

$\ddot{x}=8\cos 4t-16t\sin 4t$。

$\ddot{x}+16x=8\cos 4t$。大きさは約 5

10 (1) $G=(25-\omega^2)^2+4\omega^2$、

$G'=4\omega(\omega^2-23)$。

$\omega=\sqrt{23}\approx 4.80\,\mathrm{rad/s}$、

$G = 4 + 92 = 96$、振幅
$\frac{5}{\sqrt{96}} \approx 0.510\,\mathrm{m}$。(2) $\omega_n = 5$、
$G = 0 + 4 \times 25 = 100$、振幅
$\frac{5}{10} = 0.5\,\mathrm{m}$

11 $(12 + 6j)X = 15$、
$X = \frac{15(12-6j)}{180} = 1 - 0.5j$。
$x_p = \cos t + 0.5 \sin t$。振幅
$\sqrt{1.25} \approx 1.12$、おくれ約 26.6°

12 $\cos t$：$P + 2Q = 5$。$\sin t$：
$-2P + Q = 0$。$P = 1$、$Q = 2$。
$x_p = \cos t + 2 \sin t$、振幅 $\sqrt{5} \approx 2.24$

13 $x_p = P\cos t$：$3P = 3$、$P = 1$。
$x = \cos t + A \cos 2t + B \sin 2t$、
$A = -1$、$B = 0$。$x = \cos t - \cos 2t$

6-14

じ 1 1 分後：差 20、変わる量
$0.1 \times 20 \times 1 = 2$ で、$h_1 = 23\,\mathrm{cm}$、
$h_2 = 7\,\mathrm{cm}$。2 分後：差 16、変わる量
1.6 で、$h_1 = 21.4\,\mathrm{cm}$、$h_2 = 8.6\,\mathrm{cm}$。

じ 2 $\dot{x} = v$、$\dot{v} = -9x - 0.2v$。1 行め：
$a = -1.8$、$v = -0.18$、$x = 0.182$。2 行め：
$a = -9 \times 0.182 - 0.2 \times (-0.18)$
$= -1.602$、$v = -0.3402$、
$x = 0.14798$。

じ 3 $S = 40$。$\frac{dD}{dt} = -0.1D$、
$D = 40e^{-0.1t}$。$h_1 = 20 + 20e^{-0.1t}$、
$h_2 = 20 - 20e^{-0.1t}$。$e^{-0.1t} = \frac{1}{2}$ より
$t = 6.93$ で、約 6.9 分後。

じ 4 $T_\infty = \frac{420 \times 90 + 1260 \times 10}{1680}$
$= 30\,℃$。$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{4}{1260} = \frac{1}{315}$ で
$\tau = 315\,\mathrm{s}$。$D = 80e^{-t/315}$、
$T_1 = 30 + 60e^{-t/315}$、
$T_2 = 30 - 20e^{-t/315}$。

じ 5 電気の量 $200 \times 9 = 1800$（μC）、最後は $300V = 1800$ で 6 V。
$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{3}{200\,\mu\mathrm{F}}$ で
$\tau = 15 \times 10^3\,\Omega \times \frac{200\,\mu\mathrm{F}}{3} = 1\,\mathrm{s}$。
$D = 9e^{-t}$、$V_2 = 6 - 6e^{-t}$、
$V_1 = 6 + 3e^{-t}$。

じ 6 (1) $\omega_1 = \sqrt{16} = 4\,\mathrm{rad/s}$、
$\omega_2 = \sqrt{36} = 6\,\mathrm{rad/s}$。
(2) $u = 0.06 \cos 4t$、
$w = -0.06 \cos 6t$。
$x_1 = 0.03 \cos 4t - 0.03 \cos 6t$、
$x_2 = 0.03 \cos 4t + 0.03 \cos 6t$。

じ 7 $h_1 = 2\dot{h}_2 + h_2$ を上の式に入れて
$4\ddot{h}_2 + 4\dot{h}_2 + h_2 = 0$、$(2s + 1)^2 = 0$、
$s = -\frac{1}{2}$。$h_2 = (A + Bt)e^{-t/2}$、
$A = 0$、$B = \dot{h}_2(0) = 15$。
$h_2 = 15te^{-t/2}$。2 分後に
$30 \times 0.368 \approx 11.0\,\mathrm{cm}$。

じ 8 $G = \dot{B} + \frac{B}{2}$ を入れて
$\ddot{B} + \frac{3}{2}\dot{B} + \frac{1}{2}B = 0$、
$2s^2 + 3s + 1 = 0$、$s = -\frac{1}{2}, -1$。
$B = Ae^{-t/2} + Ce^{-t}$、$A + C = 0$、
$\dot{B}(0) = 200$ より $\frac{A}{2} = 200$、$A = 400$。
$B = 400(e^{-t/2} - e^{-t})$。$e^{-t/2} = \frac{1}{2}$ で、
$t = 2\ln 2 \approx 1.4$ 時間後に 100 mg。

1 0.5 分後：差 40、変わる量
$0.3 \times 40 \times 0.5 = 6$ で $h_1 = 44\,\mathrm{cm}$、
$h_2 = 16\,\mathrm{cm}$。1 分後：差 28、変わる量
4.2 で $h_1 = 39.8\,\mathrm{cm}$、$h_2 = 20.2\,\mathrm{cm}$。

2 $\dot{x} = v$、$\dot{v} = -25x - 0.5v$。$a = -2.5$、
$v = -0.25$、
$x = 0.1 + (-0.25) \times 0.1 = 0.075$。

3 $S=16$、$D=8e^{-0.2t}$。

$h_1=8+4e^{-0.2t}$、$h_2=8-4e^{-0.2t}$。

$e^{-0.2t}=\dfrac{1}{2}$ より $t=5\ln 2\approx 3.5$ 分後。

4 $T_\infty=\dfrac{840\times 60+1680\times 15}{2520}$

$=30$ ℃。$\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}=\dfrac{3}{1680}$ で

$\tau=0.5\times 560=280$ s。

$T_1=30+30e^{-t/280}$、

$T_2=30-15e^{-t/280}$。

5 (1) $\omega_1=\sqrt{100}=10$ rad/s、ω_2

$=\sqrt{100\div 0.5}=\sqrt{200}\approx 14.1$ rad/s。

(2) $u=0.04\cos 10t$、

$w=0.04\cos 14.1t$。

$x_1=0.02\cos 10t+0.02\cos 14.1t$、

$x_2=0.02\cos 10t-0.02\cos 14.1t$。

6 $h_1=5\dot{h}_2+h_2$ を入れて

$25\ddot{h}_2+10\dot{h}_2+h_2=0$、

$(5s+1)^2=0$。$h_2=(A+Bt)e^{-t/5}$、

$A=0$、$B=10$。$h_2=10te^{-t/5}$。5 分

後に $50\times 0.368\approx 18.4$ cm。

7 電気の量 600 μC、最後は $150V=600$

で 4 V。$\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}=\dfrac{3}{100\,\mu\text{F}}$ で

$\tau=30\times 10^3\,\Omega\times\dfrac{100\,\mu\text{F}}{3}=1$ s。

$D=6e^{-t}$、$V_2=4-4e^{-t}$、

$V_1=4+2e^{-t}$。

8 $N_1=3(\dot{N}_2+N_2)$ を入れて

$3\ddot{N}_2+4\dot{N}_2+N_2=0$、

$(3s+1)(s+1)=0$。

$N_2=Ae^{-t/3}+Be^{-t}$、$A+B=0$、

$-\dfrac{A}{3}-B=300$ より $A=450$。

$N_2=450(e^{-t/3}-e^{-t})$。3 時間後

$450\times(0.368-0.050)\approx 143$。

9 $\dfrac{dh_1}{dt}=0.1(h_2-h_1)$、

$\dfrac{dh_2}{dt}=-0.2(h_2-h_1)$。体積

$200h_1+100h_2=3000$ が一定で、最

後は 10 cm。差 $D=h_2-h_1$ は

$\dfrac{dD}{dt}=-0.3D$、$D=30e^{-0.3t}$。

$h_1=10-10e^{-0.3t}$、

$h_2=10+20e^{-0.3t}$。

6-15

じ 1 $2\dfrac{dv}{dt}=-50x-4v$、$v=\dfrac{dx}{dt}$

$(2\ddot{x}+4\dot{x}+50x=0)$。$x(0)=0$、

$v(0)=0.3$。

じ 2 $RC=10\times 10^3\,\Omega\times 47\times 10^{-6}$ F

$=0.47$ s。$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{5-V}{0.47}$、$V(0)=0$、

$\tau=0.47$ s、最後は 5 V。

じ 3 $1500\dfrac{dT}{dt}=-\dfrac{T-25}{0.5}$ より

$\dfrac{dT}{dt}=-\dfrac{T-25}{750}$ (秒)。

$\tau=750$ s $=12.5$ 分。分の式は

$\dfrac{dT}{dt}=-0.08(T-25)$。

じ 4 ばね：$\omega_n=\sqrt{200\div 2}=10$ rad/s、

$\zeta=\dfrac{4}{2\sqrt{400}}=0.1$。回路：$LC=10^{-8}$

で $\omega_n=10\,000$ rad/s、

$\zeta=\dfrac{2}{2}\sqrt{\dfrac{0.00001}{0.001}}=0.1$。形は同じ（時

間の物さしが 1000 倍ちがう）。

じ 5 RL：$\tau=\dfrac{L}{R}=0.05$ s、最後の電流

$\dfrac{E}{R}=1$ A。$3\tau=0.15$ s で

$1-0.0498\approx 0.95$ A。みそ汁：

$3\tau=45$ 分で

$25+45\times 0.0498\approx 27.2$ ℃。

じ 6 (1) 6-3、1 つ。(2) 6-6 (6-12)、2

つ。(3) 6-4、1 つ。(4) 6-14、2 つ。

じ 7 (1) $\dfrac{1}{2}\times 20\times 0.05^2=0.025$ J。

$\dfrac{1}{2}\times 0.2\times v^2=0.025$ より

$v=0.5$ m/s。

(2) $\dfrac{1}{2}\times 0.000004\times 25=0.00005$ J。

$\frac{1}{2}\times 0.025\times i^2=0.00005$ より
$i^2=0.004$、$i\approx 0.063\,\mathrm{A}$。

1 $1\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-25x-2v$、$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
$(\ddot{x}+2\dot{x}+25x=0)$。$x(0)=0.2$、
$v(0)=0$。

2 $RC=100\times 10^3\,\Omega\times 10\times 10^{-6}\,\mathrm{F}$
$=1\,\mathrm{s}$。$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=9-V$、$V(0)=0$、
$\tau=1\,\mathrm{s}$、最後は $9\,\mathrm{V}$。

3 $900\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\frac{T-22}{2}$ より
$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\frac{T-22}{1800}$（秒）。
$\tau=1800\,\mathrm{s}=30$ 分。分の式は $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$
$=-\frac{1}{30}(T-22)\approx -0.033(T-22)$。

4 $LC=10^{-6}$ で $\omega_\mathrm{n}=1000\,\mathrm{rad/s}$。$\zeta$
$=\frac{40}{2}\sqrt{\frac{0.00001}{0.1}}=20\times 0.01=0.2$。
$L\leftrightarrow m$（質量）、$R\leftrightarrow c$（ダンパー）、
$\frac{1}{C}\leftrightarrow k$（ばね定数）。

5 $\tau=5\times 10^3\,\Omega\times 100\times 10^{-6}\,\mathrm{F}=0.5\,\mathrm{s}$。
$3\tau=1.5\,\mathrm{s}$。
$V=6-6\times 0.0498\approx 5.70\,\mathrm{V}$。

6 （1）6-3、1 つ。（2）6-12、2 つ。
（3）6-4・6-5、1 つ。（4）6-13、2 つ。

7 （1）$\frac{1}{2}\times 100\times 0.03^2=0.045\,\mathrm{J}$。
$\frac{1}{2}\times 1\times v^2=0.045$ より $v=0.3\,\mathrm{m/s}$。
（2）$\frac{1}{2}\times 0.000002\times 100=0.0001\,\mathrm{J}$。
$\frac{1}{2}\times 0.05\times i^2=0.0001$ より
$i^2=0.004$、$i\approx 0.063\,\mathrm{A}$。

8 $\tau=1050\times 1.1=1155\,\mathrm{s}$。
$1155\,\mathrm{s}\div 60\,\mathrm{s/min}\approx 19$ 分。$3\tau\approx 58$
分後。

9 ばね：$\omega_\mathrm{n}=\sqrt{400}=20\,\mathrm{rad/s}$、
$\zeta=\frac{8}{2\times 20}=0.2$。回路：$LC=10^{-8}$
で $\omega_\mathrm{n}=10\,000\,\mathrm{rad/s}$、
$\zeta=\frac{8}{2}\sqrt{\frac{0.000005}{0.002}}=4\times 0.05=0.2$。
形は同じ（時間の物さしが 500 倍ちがう）。

10 RC：
$\tau=1\times 10^3\,\Omega\times 1000\times 10^{-6}\,\mathrm{F}=1\,\mathrm{s}$、
$3\tau=3\,\mathrm{s}$ で
$12-12\times 0.0498\approx 11.4\,\mathrm{V}$。お湯：
$3\tau=75$ 分で
$20+60\times 0.0498\approx 23.0\,℃$。

記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

記号	読み方	意味	章
Δ	デルタ	変化量。「あと − まえ」。この巻の Δt は、オイラー法の 1 歩の短い時間	2-3
D	ディー	判別式 $b^2 - 4ac$。この巻では、特性方程式の解が 2 つ・重解・複素数のどれかを見分ける	3-10
θ	シータ	角の大きさ。微分・積分や $e^{j\theta}$ ではラジアン	4-2
$\tan^{-1}$	アークタンジェント	tan がその数になる角。右半分（-90° ～90°）の角しか答えない	4-6
ω	オメガ	角速度。この巻では、ゆれの角振動数（rad/s）	4-8
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	ディーワイ・ディーエックス	y を x で微分したもの。$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ は「T の変わる速さ」	5-3
$\dot{x}$、$\ddot{x}$	エックス・ドット、エックス・ツードット	時間で 1 回微分（速度）・2 回微分（加速度）。$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	5-5
$\approx$	ニアリーイコール	ほぼ等しい（近似）	5-8
$\displaystyle\int_a^b$	インテグラル	a から b まで、細かく分けてたす（定積分）	5-10
e	イー（ネイピア数）	2.718…。$(e^x)' = e^x$	5-14
$\ln x$	エル・エヌ・エックス	自然対数。e を何乗すると x になるか	5-14
ϕ	ファイ	初期位相。この巻では、位相のおくれ（6-13）にも使う	5-15
$n!$	エヌのかいじょう	1 から n までの整数をすべてかけた数。$0! = 1$	5-17
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$	ディーワイ・ディーティーイコール エフ・オブ・ワイ	y の変わる速さが、今の y で決まるルール（1 階の微分方程式）	6-1

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
y_n	ワイ・エヌ	n 歩めの y の値（時刻 $n\,\Delta t$ の値）。y_{n+1} はその次の値	6-2
C_{th}	シー・ティーエイチ	熱容量。温度を 1 K（1 ℃）上げるのに要る熱〔J/K〕。th は thermal（熱の）	6-3
$y(0)$ $y(L)$	ワイ・ゼロ、ワイ・エル	$x=0$ と $x=L$ の所での y の値。両はしの値の書き方	6-3
τ	タウ	時定数。$e^{-t/\tau}$ の形でへる・近づく速さの目安。単位は s	6-4
y_∞	ワイ・インフィニティ	時間がたって変わらなくなった最後の値（目標の値）	6-4
v_{f}、v_{t}	ブイ・エフ、ブイ・ティー	終端速度。v_{f} は速さに比例する抵抗、v_{t} は速さの 2 乗に比例する抵抗のとき	6-5
b、c	ビー、シー	抵抗の係数（$f=bv$、$f=cv^2$）。6-7 のダンパーの c とは別の量	6-5
ω_{n}	オメガ・エヌ	固有角振動数。ばねは $\sqrt{k/m}$、振り子は $\sqrt{g/L}$、LC 回路は $1/\sqrt{LC}$。n は立てた字	6-6
L・C	エル・シー	コイルのインダクタンス〔H〕と、コンデンサーの静電容量〔F〕	6-4
ζ	ゼータ	減衰比。$\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$。1 より小さいとゆれ、1 でちょうど、1 より大きいとゆっくりもどる	6-7
c	シー	ダンパーの減衰係数〔N·s/m〕。6-5 の 2 乗の抵抗の係数 c〔N·s^2/m^2〕とは別の量	6-7
j	ジェイ	虚数単位。2 乗すると -1。数学の本・高校では i と書く	6-8
$\bar{z}$	ゼット・バー	z と共役な複素数。$z=a+bj$ なら $\bar{z}=a-bj$	6-8
$\lvert z\rvert$	ぜったいち・ゼット	複素数 z の点と原点との距離。$\lvert a+bj\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	6-9

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
$\arg z$	アーギュメント・ゼット	偏角。z の向きの角。この本では $-180° < \theta \leqq 180°$	6-9
$e^{j\theta}$	イー・ジェイ・シータ（e の $j\theta$ 乗）	単位円の上の角 θ の点。$\cos\theta + j\sin\theta$	6-10
$j\omega$	ジェイ・オメガ	$e^{j\omega t}$ を微分すると前に出る数。かけると ω 倍し 90° 進める	6-10
$\cosh x$	ハイパボリック・コサイン	$\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$。$\sinh x$（ハイパボリック・サイン）は $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	6-11
$\tanh x$	ハイパボリック・タンジェント（タンジェント・エイチ）	$\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$。-1 と 1 のあいだ	6-11
s	エス	特性方程式の文字。$x = e^{st}$ と置くと、微分が「s をかける」になる	6-12
ω_{d}	オメガ・ディー	減衰があるときのゆれの角振動数。$\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^{2}}$	6-12
X	エックス（大文字）	複素振幅。$\lvert X\rvert$ が振幅、偏角が位相（おくれは負の角）	6-13
Q	キュー	Q 値。共振の山の鋭さ。ζ が小さいとき $Q \approx \frac{1}{2\zeta}$。流量の Q とは別	6-13
x_1, x_2	エックス・いち、エックス・に	下つきの数で、どの物の量かを区別する。6-2 の y_n（n 歩め）とはちがう	6-14
ω_1, ω_2	オメガ・いち、オメガ・に	1 次モード・2 次モードの角振動数（rad/s）。6-6 の ω_{n} の n は番号ではない	6-14
$\leftrightarrow$	たいおうする	相似の表で、2 つの量が同じ役わりをすること。$m \leftrightarrow L$ のように書く	6-15

ギリシャ文字の読み方

この巻では、時定数 τ、減衰比 ζ、固有角振動数 ω_n など、ギリシャ文字がたくさん出てきます。大文字・小文字・読み方と、この巻での意味です（かっこの中は章）。

大	小	読み方	この巻での意味	大	小	読み方	この巻での意味
A	α	アルファ	へる速さ $\zeta\omega_n$（6-7）、方程式の解（6-8）	N	ν	ニュー	振動数
B	β	ベータ	方程式の解（6-8）	Ξ	ξ	クシー	（変数）
Γ	γ	ガンマ	（係数）	O	o	オミクロン	—
Δ	δ	デルタ	Δt は短い時間（6-2）。δ は対数減衰率（6-7）	Π	π	パイ	円周率
E	ε	イプシロン	小さな数（6-12）	P	ρ	ロー	密度（6-3）
Z	ζ	ゼータ	減衰比（6-7）	Σ	σ	シグマ	$e^{(\sigma+j\omega)t}$ の σ（6-10）
H	η	イータ	粘度（6-5）	T	τ	タウ	時定数（6-4）
Θ	θ	シータ	振り子のふれ（6-6）、偏角（6-9）	Υ	υ	ウプシロン	—
I	ι	イオタ	—	Φ	ϕ	ファイ	初期位相（6-6）、位相のおくれ（6-13）
K	κ	カッパ	弦や柱の形の数（6-6）	X	χ	カイ	—
Λ	λ	ラムダ	1 秒あたりの平均の回数（6-4）	Ψ	ψ	プサイ	（角）
M	μ	ミュー	マイクロ（μF）	Ω	ω	オメガ	角振動数（6-6）。Ω は抵抗の単位

大文字が英語のアルファベットと同じ形の文字（A、B、E など）は、記号としてはほとんど使いません。ϕ は φ と書くこともあります（4-15 の球座標の角は φ）。数学の本では、特性方程式の文字に λ を使うことがあります（この巻は s。6-12）。

記号を書くときのちゅうい

手で書くと、ほかの字や記号とまぎれやすいものと、読みまちがえやすい書き方です。

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{T}{t}$	「T の変わる速さ」。d で約分しない（6-1）
$\dot{x}$、$\ddot{x}$	x、$\bar{x}$	点は文字の真上に。2 回微分は点 2 つ（6-6）
y_n　x_1	—	y_n は n 歩め（6-2）、x_1 は 1 番めの物（6-14）
ω_{n}	ω_n	n は名前（natural）の頭文字で、立てた字（6-6）
$e^{-t/\tau}$	$e^{-\tau t}$	τ でわる。$\tau = 2\,\mathrm{s}$ なら $e^{-t/2}$（6-4）
c	c	6-5 は 2 乗の抵抗の係数〔$\mathrm{N{\cdot}s^2/m^2}$〕、6-7 からはダンパーの減衰係数〔$\mathrm{N{\cdot}s/m}$〕（6-7）
ζ	2、z	上の横線から左下へ流し、下で右へはねる（6-7）
j	i	虚数単位。i は電流に使うので j。高校では i（6-8）
$3+4j$	—	虚部は 4（$4j$ ではない）。j^2 はすぐ -1 に（6-8）
$\bar{z}$	$-z$	上の横線は共役。$a+bj$ なら $a-bj$（6-8）
$\lvert z\rvert$	—	$\sqrt{a^2+b^2}$。$\sqrt{\ }$ の中に j を入れない（6-9）
$\arg z$	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$	$-180^\circ < \theta \leqq 180^\circ$。点の区画を見る（6-9）
$e^{j\theta}$	e^{j60}	肩の θ はラジアン。60° なら $e^{j\pi/3}$（6-10）
$\cosh x$	$\cos x$	$(\cosh x)' = \sinh x$（− はつかない）。$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$（和ではなく差）（6-11）
$\mathrm{Re}[\,]$	—	実部をとる。答えに j を残さない（6-12・6-13）
$\leftrightarrow$	$=$	「同じ役わり」の意味。等しいのではない（6-15）

よく使う定数・単位・公式

1 この巻で使う単位

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係	章
時間	s、min、h	60 s/min、3600 s/h。1 ms は $\frac{1}{1000}$ s	6-3
温度	℃、K（ケルビン）	温度差は 1 K = 1 ℃ と同じ大きさ	6-3
電圧・電流	V（ボルト）、A（アンペア）	1 mA = 0.001 A	6-1
電荷	C（クーロン）	1 C = 1 A s（電流×時間）	6-2
抵抗	Ω（オーム）	1 Ω = 1 V/A、1 kΩ = 1000 Ω	6-2
静電容量	F（ファラド）	1 F = 1 C/V、1 μF = 0.000001 F	6-2 6-4
インダクタンス	H（ヘンリー）	1 H = 1 V s/A、1 mH = 0.001 H	6-4
時定数	s	Ω × F = s（RC）、$\frac{\mathrm{H}}{\Omega}$ = s（$\frac{L}{R}$）	6-2 6-4
熱容量	J/K	温度を 1 K 上げるのに要る熱	6-3 6-4
熱抵抗	K/W	1 W の熱を流すのに要る温度差	6-4
電力・熱流	W（ワット）	1 W = 1 J/s	6-4
圧力	Pa（パスカル）	1 Pa = 1 N/m^2、1 hPa = 100 Pa	6-3
ばね定数	N/m	1 m のばすのに要る力	6-6
抵抗の係数	N·s/m（b）、N·s^2/m^2（c）	力 bv、cv^2 が N になる	6-5

つぎのページへつづく

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係	章
減衰係数	N·s/m	ダンパーの力 $c\dot{x}$ が N になる	6-7
角振動数	rad/s	$\omega = 2\pi f$	6-6
振動数	Hz（ヘルツ）	1 秒に何回。$f = \dfrac{1}{T}$、1 kHz = 1000 Hz	6-6 6-13

2 よく使う数

名前	値	章
ネイピア数 e	2.71828…	5-14
e^{-1}	0.368（時定数 τ で残る差 36.8 %）	6-4
$\ln 2$	0.693（半減期 $= \tau \ln 2$）	6-4
円周率 π、2π	3.14159…、6.28318…	6-6
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0.707	6-12 6-13
重力加速度 g	9.8 m/s^2	6-5
水の比熱	1 g あたり約 4.2 J/K	6-4
水の密度	1000 kg/m^3	6-3
大気の圧力（海面）	101 300 Pa（1013 hPa）	6-3

この巻でくり返し使う場面と数

同じ場面は、どの章でも同じ数で計算しています。

場面	数	章
冷めるお湯	部屋 20 ℃、はじめ 80 ℃、$\dfrac{dT}{dt} = -0.05\,(T - 20)$（$t$ は分）。$T = 20 + 60e^{-0.05t}$、$\tau = 20$ 分。10 分後 56.39 ℃（オイラー法 $\Delta t = 1$ 分では 55.92 ℃）。50 ℃まで約 13.9 分	6-1 6-2 6-4

つぎのページへつづく

場面	数	章
RC 回路	$E = 10\,\mathrm{V}$、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$、$RC = 2\,\mathrm{s}$。充電 $V = 10\,(1 - e^{-t/2})$	6-2 6-4
ばね	$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$、$\omega_\mathrm{n} = 4\,\mathrm{rad/s}$、周期 約 1.57 s。臨界 $c_\mathrm{c} = 4\,\mathrm{N\,s/m}$。$c = 0.4\,\mathrm{N\,s/m}$ で $\zeta = 0.1$、$\omega_\mathrm{d} = 3.980\,\mathrm{rad/s}$、対数減衰率 0.631	6-6 6-7 6-12 6-13
RLC 回路	$L = 10\,\mathrm{mH}$、$C = 1\,\mu\mathrm{F}$、$\omega_\mathrm{n} = 10\,000\,\mathrm{rad/s}$（約 1592 Hz）。臨界 $R_\mathrm{c} = 200\,\Omega$。$R = 20\,\Omega$ で $\zeta = 0.1$	6-6 6-7 6-12 6-13
スカイダイバー	$m = 80\,\mathrm{kg}$、$c = 0.26\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$、終端速度 $v_\mathrm{t} \approx 54.9\,\mathrm{m/s}$	6-5 6-11
3-10 の 2 つの式	$s^2 + 3s + 2 = 0$ の解は $s = -1$、-2（ゆれずにもどる）。$s^2 + 2s + 5 = 0$ の解は $s = -1 \pm 2j$（ゆれながらもどる）	6-8 6-12
2 つの水そう	$\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -0.1\,(h_1 - h_2)$、$\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0.1\,(h_1 - h_2)$。$h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$	6-14
2 つの台車	$m = 1\,\mathrm{kg}$、$k = 100\,\mathrm{N/m}$、$K = 10\,\mathrm{N/m}$。$\omega_1 = 10$、$\omega_2 \approx 10.95\,\mathrm{rad/s}$（うなり）	6-14

③ 1 回微分の式の公式

公式・きまり	式	章
微分方程式と解	変わる速さが入った方程式。解は関数。代入して、左辺＝右辺を確かめる。初期条件は階数の数だけ要る	6-1
オイラー法	$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\,\Delta t$（次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt）。Δt を半分にすると、ずれもほぼ半分	6-2

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
速度を先に進めるオイラー法	① a を今の x から出す　② 新しい $v = v + a\,\Delta t$　③ 新しい x = x+（新しい v）$\times\Delta t$	6-2
積分するだけで解ける形	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)$ なら $y = \displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t + C$。$\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$ なら $T = C_1x + C_2$	6-3
水の深さと圧力	$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$（$z$ は上向き）。水では $p = 101\,300 - 9800z$〔Pa〕	6-3
変数分離	$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u}{\tau} \to \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int\left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{d}t \to u = Ae^{-t/\tau}$	6-4
目標へ近づく形	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y_\infty - y}{\tau} \to y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\,e^{-t/\tau}$	6-4
半減期	差が半分になる時間 $t_\mathrm{h} = \tau\ln 2 \approx 0.693\,\tau$	6-4
熱の式	$C_\mathrm{th}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P - \dfrac{T - T_\mathrm{a}}{R_\mathrm{th}}$。時定数 $\tau = C_\mathrm{th}R_\mathrm{th}$	6-4
コンデンサー	放電 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V}{RC}$、充電 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E - V}{RC}$。時定数 $\tau = RC$	6-1 6-2 6-4
コイル（RL）	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E - Ri$。最後の電流 $\dfrac{E}{R}$、時定数 $\tau = \dfrac{L}{R}$	6-4 6-5
落ちる物	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - f$（下向きが +）。$f = bv$ なら $v = v_\mathrm{f}(1 - e^{-t/\tau})$、$v_\mathrm{f} = \dfrac{mg}{b}$、$\tau = \dfrac{m}{b}$	6-5
2 乗の抵抗	$f = cv^2$ なら $v_\mathrm{t} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$、$v = v_\mathrm{t}\tanh\dfrac{gt}{v_\mathrm{t}}$	6-5 6-11
体重計	$N = m\,(g + a)$（上向きが +）	6-5

時定数と、残りの差（6-4）

たった時間	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
残りの差 $e^{-t/\tau}$	36.8％	13.5％	5.0％	1.8％	0.7％
目標までに進んだ割合	63.2％	86.5％	95.0％	98.2％	99.3％

目標にぴったり着くまでには、数学の上では限りなく長い時間がかかります。工学では「5τ たてば、ほぼ終わり」とみなします。

4 2 回微分の式（ゆれ）の公式

公式・きまり	式	章
ばね	$m\ddot{x} = -kx$、$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$、周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	6-6
振り子	$\ddot{\theta} \approx -\dfrac{g}{L}\theta$、$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$（ふれが小さいとき）	6-6
LC 回路	$L\ddot{q} = -\dfrac{1}{C}q$、$\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$、$T = 2\pi\sqrt{LC}$	6-6
振幅と初期位相	$x = X\cos(\omega_n t + \phi)$、$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$。$\phi$ は点の向きを見て決める	6-6
つるしたばね	ゆれの中心は、つり合う位置（自然の長さより $\dfrac{mg}{k}$ だけ下）	6-6
エネルギー	$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ は一定。$v_{max} = X\omega_n$	6-6 6-15
減衰振動の式	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$（ダンパーの力は $-c\dot{x}$）	6-7
減衰比	$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$、臨界 $c_c = 2\sqrt{mk}$。 $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$	6-7 6-12
山のへり方	つつみ $e^{-\alpha t}$、$\alpha = \dfrac{c}{2m} = \zeta\omega_n$。対数減衰率 $\delta = \ln\dfrac{\text{前の山}}{\text{あとの山}} \approx 2\pi\zeta$	6-7
RLC 回路	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = 0$、$\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$、臨界 $R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	6-7 6-12

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
特性方程式	$x=e^{st}$ と置くと、微分は「s をかける」。$ms^2+cs+k=0$	6-12
解の形	$s=-\zeta\omega_{\mathrm{n}}\pm\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{\zeta^2-1}$。$\zeta<1$ なら $s=-\alpha\pm j\omega_{\mathrm{d}}$、$\omega_{\mathrm{d}}=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$	6-12
A、B の決め方	はじめの位置と速度。速度は積の微分で：$x=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ なら $\dot{x}(0)=-A+2B$	6-12
1 階の式も	$RC\dot{V}+V=0$ に $V=e^{st}$ を入れると $RCs+1=0$、$s=-\dfrac{1}{RC}=-\dfrac{1}{\tau}$	6-12
強制振動	$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$。答え＝ゆすりに合うゆれ x_{p} ＋自分のゆれ x_{h}（やがて消える）	6-13
置き方	右辺が $\cos\omega t$ なら $x_{\mathrm{p}}=P\cos\omega t+Q\sin\omega t$。$A$、$B$ は x_{h} を足してから、はじめの状態で決める	6-13
複素振幅	$x=\mathrm{Re}[Xe^{j\omega t}]$、$X=\dfrac{F_0}{k-m\omega^2+jc\omega}$、振幅 $\lvert X\rvert=\dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$	6-13
共振	振幅の山は $\omega=\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-2\zeta^2}$。位相のおくれ $\tan\phi=\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}$（$\omega=\omega_{\mathrm{n}}$ で 90°）	6-13
Q 値	$Q=\dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\text{半値幅}}$、$\zeta$ が小さいとき $Q\approx\dfrac{1}{2\zeta}$	6-13
ダンパーなしの共振	$\ddot{x}+4x=\cos 2t$ の答えの 1 つは $x=\dfrac{1}{4}t\sin 2t$（ゆれがふえ続ける）	6-13
RLC の共振	共振周波数 $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	6-13
2 階を 1 階 2 つに	$\dot{x}=v$、$\dot{v}=-\dfrac{k}{m}x$ のように、位置と速度の 2 つの式にする	6-14
振動モード	同じ m の台車 2 つ・3 本のばね：いっしょ $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$、反対 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k+2K}{m}}$。どんな動きもモードのたし算	6-14

特性方程式 $ms^2+cs+k=0$ の 3 つの場合（6-12）

判別式	ζ と c	解と、答えの形	動き方
$D>0$	$\zeta>1$ $c>2\sqrt{mk}$	負の解が 2 つ $Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$	ゆっくりもどる （過減衰）
$D=0$	$\zeta=1$ $c=2\sqrt{mk}$	負の重解 $(A+Bt)\,e^{st}$	ちょうど （臨界減衰）
$D<0$	$\zeta<1$ $c<2\sqrt{mk}$	$s=-\alpha\pm j\omega_{\mathrm{d}}$ $e^{-\alpha t}(A\cos\omega_{\mathrm{d}}t+B\sin\omega_{\mathrm{d}}t)$	ゆれながら止まる （減衰振動）

電気の本では、過制動・臨界制動・不足制動ともいいます。行きすぎずにいちばん早く落ち着くのは $\zeta=1$、少し行きすぎてよければ $\zeta=0.7$ くらいがもっと早い（6-12）。

5 複素数の公式

偏角の求め方（6-9。$-180^\circ<\theta\leqq 180^\circ$）

点のある所	偏角の求め方	例
右半分（$a>0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ のまま	$1+j$：45°
左上（$a<0$、$b\geqq 0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ に 180° をたす	$-1+\sqrt{3}\,j$：120°
左下（$a<0$、$b<0$）	$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ から 180° をひく	$-1-j$：-135°
虚軸の上（$a=0$）	$b>0$ なら 90°、$b<0$ なら -90°	$-2j$：-90°

公式・きまり	式	章
虚数単位	$j^2=-1$、$j^3=-j$、$j^4=1$。$\times j$ は左回りに 90° 回すこと	6-8
複素数	$a+bj$（a は実部 $\mathrm{Re}\,z$、b は虚部 $\mathrm{Im}\,z$）。平面の点 $(a,\ b)$	6-8 6-9

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
たし算・ひき算	実部どうし、虚部どうし。 $(3+4j)+(1-2j)=4+2j$（矢印をつなぐ）	6-8 6-9
かけ算	展開して $j^2=-1$。 $(a+bj)(c+dj)=(ac-bd)+(ad+bc)j$	6-8
共役	$\bar{z}=a-bj$。$(a+bj)(a-bj)=a^2+b^2$	6-8
わり算	分母と分子に、分母と共役な数をかける。 $\dfrac{5}{1+2j}=\dfrac{5(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}=1-2j$。$\dfrac{1}{j}=-j$	6-8
負の数の平方根	$a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,j$。$x^2=-4$ の解は $x=\pm 2j$	6-8
虚数の解	$D<0$ なら、解は共役な組 $\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}\,j}{2a}$	6-8
絶対値	$\lvert a+bj\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$、$\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$	6-9
極形式	$z=r(\cos\theta+j\sin\theta)=re^{j\theta}$（$r=\lvert z\rvert$、$\theta=\arg z$）	6-9 6-10
かけ算・わり算	$\lvert zw\rvert=\lvert z\rvert\,\lvert w\rvert$、$\arg(zw)=\arg z+\arg w$。わり算は、大きさはわり算、角はひき算	6-9
ド・モアブルの定理	$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$。 $(re^{j\theta})^n=r^n e^{jn\theta}$	6-9 6-10
点を回す	点 $(x,\ y)$ を θ 回すと $(x\cos\theta-y\sin\theta,\ \ x\sin\theta+y\cos\theta)$	6-9
オイラーの公式	$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$（単位円の上の角 θ の点）。 $\lvert e^{j\theta}\rvert=1$	6-10
特別な角	$e^{j\pi/2}=j$、$e^{j\pi}=-1$（$e^{j\pi}+1=0$）、$e^{j2\pi}=1$	6-10
肩のたし算	$e^{ja}e^{jb}=e^{j(a+b)}$	6-10
cos と sin	$\cos\theta=\dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$、$\sin\theta=\dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$	6-10
微分	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}=j\omega\,e^{j\omega t}$（$\omega$ 倍して 90° 進める）	6-10

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
フェーザ	$V_0 \sin(\omega t + \phi)$ の矢印は $V_0 e^{j\phi}$。同じ ω の波のたし算は、矢印のたし算	6-10
らせん	$e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$。実部は $e^{\sigma t}\cos\omega t$（$\sigma < 0$ なら、ゆれながら小さくなる）	6-10

6 双曲線関数の公式

公式・きまり	式	章
定義	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$、$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$、$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$	6-11
2 乗の差	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$（点 $(\cosh t,\ \sinh t)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上）	6-11
微分	$(\cosh x)' = \sinh x$、$(\sinh x)' = \cosh x$、$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	6-11
tanh のはんい	いつも -1 と 1 のあいだ。くり返さない	6-11
$y'' = a^2 y$ の答え	$y = C\cosh at + D\sinh at$（$C = y(0)$、$D = \dfrac{y'(0)}{a}$）	6-11
懸垂線	$y = a\left(\cosh\dfrac{x}{a} - 1\right)$。たるみが小さいと、放物線 $\dfrac{x^2}{2a}$ に近い	6-11

7 相似の表：ばね・電気・熱

ちがう分野でも、式が同じ形になります（6-15。物理シリーズ『力学』の表 2 と同じ組）。

役わり	力学	電気	熱	水（管とタンク）
流れるもの	速度 v	電流 i	熱流 P	流量 Q
押すもの	力 F	電圧 E	温度差 ΔT	水位の差
ためるもの	やわらかさ $\dfrac{1}{k}$	静電容量 C	熱容量 C_{th}	タンク
慣性	質量 m	インダクタンス L	（ない）	管の中の水
失うもの	ダンパー c	抵抗 R	熱抵抗 R_{th}	管の流れにくさ

	ばね・質量・ダンパー	RLC 回路
式	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+cv+kx=F$	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\dfrac{q}{C}=E$
固有角振動数 ω_{n}	$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
臨界の値	$c_{\mathrm{c}}=2\sqrt{mk}$	$R_{\mathrm{c}}=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
減衰比 ζ	$\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$	$\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
エネルギー	$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2$	$\dfrac{1}{2}Li^2+\dfrac{q^2}{2C}$

力 $\leftrightarrow$ 電圧、速度 $\leftrightarrow$ 電流、$m \leftrightarrow L$、$c \leftrightarrow R$、$k \leftrightarrow \dfrac{1}{C}$、$x \leftrightarrow q$。熱には慣性がないので、熱の式は 1 回微分の式になり、ゆれない（6-15）。

8 電卓・表計算・Python の使い方

すること	書き方（例）	意味・答え	章
オイラー法（表計算）	C2 `=-0.05*(B2-20)` B3 `=B2+C2*$D$2` A3 `=A2+$D$2`	C 列が変わる速さ、D2 が Δt	6-2

つぎのページへつづく

すること	書き方（例）	意味・答え	章
速度を先に（表計算）	D2 =-16*B2 C3 =C2+D2*$E$2 B3 =B2+C3*$E$2	列は t・x・v・a、E2 が Δt	6-2 6-6
オイラー法（Python）	`T = T + (-0.05 * (T - 20)) * dt`	オイラー法の 1 行	6-2
速度を先に（Python）	`v = v + a * dt` `x = x + v * dt`	この順番で書く	6-2
e の何乗	=EXP(A2)	1 なら 2.71828…	6-1
自然対数	電卓の ln キー、=LN(A2)	2 なら 0.693	5-14 6-4
双曲線関数	=COSH(A2) =SINH(A2) =TANH(A2) 電卓は hyp を押してから cos など	1 なら 1.543、1.175、0.762	6-11
複素数を作る	=COMPLEX(3,4,"j")	3+4j	6-8
四則（表計算）	=IMSUM("3+4j","1-2j") =IMPRODUCT("3+4j","1-2j") =IMDIV("5","1+2j")	4+2j 11-2j 1-2j	6-8
実部・虚部	=IMREAL("3+4j") =IMAGINARY("3+4j")	3、4	6-8
複素数（Python）	`z = 3+4j` `z.real z.imag z.conjugate()`	3.0、4.0、(3-4j)	6-8
平方根（Python）	`cmath.sqrt(-4)`	2j	6-8
絶対値（表計算）	=SQRT(B2^2+C2^2)	B が実部、C が虚部	6-9
偏角	=DEGREES(ATAN2(B2,C2)) =IMARGUMENT("-1-1j") `cmath.phase(-1-1j)`	度で −135 ラジアンで −2.356 ラジアンで −2.356	6-9

つぎのページへつづく

すること	書き方（例）	意味・答え	章
$e^{j\theta}$（Python）	`cmath.exp(1j*math.pi/3)`	`(0.5+0.866j)`（$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$）	6-10

- Δt は 1 つのセルに入れ、`$D$2` のように `$` をつけて、コピーしてもずれないようにします（6-2）。
- ばねの表で、位置を古い速度 `C2` で進めると（ふつうのオイラー法）、ゆれがふくらみます。新しい速度 `C3` を使います（6-2）。
- Python では、j そのものは `1j` と書きます。`j` だけだと文字の名前になります（6-8）。
- `ATAN2` は横（実部）を先に入れます（6-9）。答えの角はラジアンなので、度にするには `DEGREES` をかぶせます。
- `cmath.exp(1j*math.pi)` が `(-1+1.22e-16j)` になるのは、コンピュータの丸めのずれです。ほんとうは -1 です（6-10）。

プログラムのひな形（6-2）

左は冷めるお湯（$\Delta t = 0.1$ 分で 10 分後。4 行めがオイラー法の 1 行。式の答えは 56.39 ℃）。右はばね（速度を先に進めるオイラー法。$\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$ で 5 秒後の位置 `0.03665…` を表示。式の答えは $0.1\cos(4\times 5)\approx 0.0408$）。右の `v =` と `x =` の行を入れかえると、ふつうのオイラー法になり、ゆれがふくらみます。

Python

```
T = 80.0
dt = 0.1
for i in range(100):
    T = T + (-0.05*(T-20))*dt
print(T)
```

実行結果

```
56.34622618944369
```

Python

```
x = 0.1
v = 0.0
dt = 0.02
for i in range(1, 251):
    a = -16 * x
    v = v + a * dt
    x = x + v * dt
print(x)
```

できるようになったことチェック表

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、次の巻に進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
6-1	微分方程式を、ことばと単位で読み、式に書ける。	32	☐	☐
	傾きの場から、解のようすを予想できる。	39	☐	☐
	代入して、解かどうか確かめられる。	44	☐	☐
6-2	「次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt」で、表計算で解ける。	69	☐	☐
	Δt を小さくすると正確になることを確かめられる。	75	☐	☐
	ばねの式を、位置と速度の 2 つの列で、正しい順に解ける。	82	☐	☐
6-3	右辺を見て、積分するだけで解ける形を見分け、解ける。	104	☐	☐
	深さや場所が変数のルールも、積分して解ける。	110	☐	☐
	両はしの条件（境界条件）から、積分定数を決められる。	112	☐	☐
6-4	変数分離で、自分に比例してへる式を解ける。	138	☐	☐
	時定数・半減期を使って、かかる時間を求められる。	143	☐	☐
	RC・RL の回路の式を立てて、時定数を求められる。	148	☐	☐
6-5	落ちる物の式を立て、終端速度を求められる。	181	☐	☐
	表計算で、落ちる物の速さを計算できる。	183	☐	☐
	速さに比例する抵抗の式を解ける（RL 回路も）。	185	☐	☐
6-6	ばねの運動方程式を立て、$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{k/m}$ と周期を求められる。	208	☐	☐
	はじめの位置と速度から、振幅と初期位相を決められる。	215	☐	☐
	振り子・LC 回路の周期を、ばねと同じ形の式から求められる。	226	☐	☐
6-7	ばね・質量・ダンパーの式を、力の図から立てられる。	249	☐	☐
	となりの山の比から、対数減衰率を求められる。	253	☐	☐
	減衰比 ζ を計算して、止まり方を答えられる（RLC 回路でも）。	256	☐	☐
6-8	j をかけると 90° 回ることから、$j^2 = -1$ を説明できる。	284	☐	☐
	複素数のたし算・ひき算・かけ算・わり算ができる。	289	☐	☐
	判別式がマイナスの 2 次方程式を解いて、虚数の解を求められる。	293	☐	☐
6-9	複素数を平面の点で表し、絶対値と偏角を求められる。	318	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1回め	2回め
	かけ算が「大きさはかけ算、角はたし算」になることを説明できる。	320	☐	☐
	かけ算で、点を回したり、うでの先の位置を求めたりできる。	326	☐	☐
6-10	$e^{j\theta}$ が単位円の上の角 θ の点になるわけを、小さな回転のくり返しと微分で説明できる。	347	☐	☐
	$e^{j\theta}$ を $a+bj$ に直し、$re^{j\theta}$ のかけ算・わり算・べきを計算できる。	357	☐	☐
	フェーザのたし算で交流を合成し、微分が $j\omega$ をかけることだと説明できる。	360	☐	☐
6-11	$\cosh x$・$\sinh x$・$\tanh x$ を e^x と e^{-x} で表し、値とグラフの形を説明できる。	391	☐	☐
	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と、微分のきまりを使える。	394	☐	☐
	$y'' = a^2 y$ の答えを cosh・sinh で書き、落下や電線の形に使える。	395	☐	☐
6-12	式に e^{st} を入れて、特性方程式を作れる。	425	☐	☐
	解が 2 つ・複素数・重解のとき、答えを組み立てられる。	430	☐	☐
	ζ で動き方を見分け、車や RLC 回路の数を求められる。	436	☐	☐
6-13	ゆすり続けたときのゆれを、表計算と共振曲線で説明できる。	463	☐	☐
	ゆすりに合うゆれを、係数を比べる方法と複素数で求められる。	466	☐	☐
	いちばん大きくゆれる ω を微分で求め、RLC 回路の共振周波数を求められる。	471	☐	☐
6-14	からみあう 2 つの量を、表計算で同時に進めて計算できる。	499	☐	☐
	和と差（重みつきの和と差）に分けて、2 つの式を解ける。	503	☐	☐
	振動モードや消去法で、連立微分方程式の答えを求められる。	507	☐	☐
6-15	法則から、微分方程式とはじめの状態を書ける。	538	☐	☐
	相似の表で、ばね・電気・熱の量を対応させられる。	540	☐	☐
	式の形から、解き方（章）を選べる。	546	☐	☐

つぎの巻へ

未来を計算する道具がそろいました。第 7 巻「まとめて計算する」では、たくさんの数を表（行列）のまま計算します。6-14 で並べた係数の表が、その入口です。第 7 巻の章をのぞいてみましょう。

7-1 数の表で計算する：行列

買い物の合計を、表のかけ算で一度に求める

使う道具 2 つの式の係数を、表の形に並べたこと（6-14）。

7-6 回転行列：くるっと回す

30° 回して 45° 回すと、75° 回したのと同じ

使う道具 複素数のかけ算は回転（6-9）。

7-8 固有値と固有ベクトル：向きの変わらない方向

変換しても、向きが変わらない矢印がある

使う道具 特性方程式（6-12）と、振動モード（6-14）。

7-9 対角化：まっすぐな方向に分けて考える

こみいった変換も、のびるだけの変換に分けられる

使う道具 和と差に分けると、連立の式がほどけること（6-14）。

7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で

何回もかけるとどうなるかは、固有値が教えてくれる

使う道具 オイラー法（6-2）と、連立の表計算（6-14）。

7-11 行列の使いみち

ロボット、電気回路、画像…行列はどこで働いている？

使う道具 ばね・電気・熱の相似の表（6-15）。

デルタ

第 6 巻の道具は、第 7 巻・第 9 巻・物理シリーズでずっと使うよ。自信のない章を見なおしてから、第 7 巻へ進もう！

この巻の道具は、この先でこう使う

第 6 巻の章と、その道具を使う第 7 巻から先の章です（章のはじめの「道しるべ」の「この章の先に」から集めました）。

この巻の章	この道具を使う章
6-2 表計算で解こう：オイラー法	7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で
6-3 積分するだけで解ける形	8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式
6-4 自分に比例してへる：冷めるお湯	9-5 微分をかけ算に変える翻訳機：ラプラス変換 9-9 極と安定性：s の値でふるまいがわかる
6-6 ばねと振り子	7-8 固有値と固有ベクトル：向きの変わらない方向
6-9 複素平面：かけ算は回転と拡大	7-6 回転行列：くるっと回す
6-10 オイラーの公式	9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数 9-3 複素数で書くフーリエ級数
6-12 減衰振動を式で解く：特性方程式	9-7 ラプラス変換で微分方程式を解く 9-9 極と安定性：s の値でふるまいがわかる
6-13 ゆらし続けると：強制振動と共振	9-8 伝達関数：入れると出てくるを s で表す 9-12 フーリエとラプラスの使いみち
6-14 微分方程式がいくつも：連立微分方程式	7-8 固有値と固有ベクトル：向きの変わらない方向 7-9 対角化：まっすぐな方向に分けて考える 7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で 9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 9-11 行列の指数関数と固有値
6-15 まとめ：物理は「微分方程式＋はじめの状態」で書ける	7-0 表のままで計算できたら？ 8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式 9-5 微分をかけ算に変える翻訳機：ラプラス変換 9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式

さくいん

数字はページです。その語がはじめて出てくるページや、くわしく説明しているページをのせています。

あ

RLC 回路 260
運動エネルギー 221
運動方程式 210
オイラーの公式 350
オイラーの等式 356
オイラー法 71

か

過減衰 436
傾きの場 40
カテナリー 402
過渡応答 20
刻み幅（Δt） 74
Q 値 475
境界条件 113
境界値問題 113
共振 464
共振曲線 464
強制振動 461
共役な複素数 290
極形式 320
虚数単位 285
虚部 287
キルヒホッフの電圧の法則 539
減衰振動 257, 445
懸垂線 402
減衰比 ζ 257
コイル 153
固有角振動数 ω_n 211
固有値問題 231
コンデンサー 35, 149

さ

三相交流 362
指数分布 157
実部 287
重解 445
終端速度 181
消去法 511
初期条件 42
振動モード 509
数値計算 71
積分するだけで解ける形 104
絶対値（複素数の） 317
双曲線 393
双曲線関数 391
相似（式の形） 540
速度を先に進めるオイラー法 87

た

対数減衰率 δ 255
ダンパー 248
次の瞬間を決めるルール 10
抵抗の係数 180
電気振動（LC 回路） 227
天気予報 13

特性方程式 426
ド・モアブルの定理 325

な
ニュートンの冷却の法則 34
熱容量 C_{th} 107
熱容量 145

は
ハイパボリック・タンジェント（tanh） 392
微分方程式 18, 32
フーリエの法則 112
フェーザ 360
複素数 287
複素平面 315
偏角 318
変数分離 140
ポアソン分布 157

ら
臨界減衰 436
連立微分方程式 496

メモ

メモ

物理を理解するための数学　第６巻

未来を計算する

編者　「物理を理解するための数学」編集委員会

委員長　小学校長（まとめ役）

委員　数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・
半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、
特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭

デザイン　ユニバーサルデザイン担当委員

挿絵　イラスト担当委員

版　第 1 版（第 14 回編集委員会）　2026 年 10 月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

第 6 巻　未来を計算する　微分方程式と複素数

この巻で学ぶこと

第 1 部　微分方程式の入口　（6-1〜6-7）

第 2 部　複素数と双曲線関数　（6-8〜6-11）

第 3 部　式で解く　（6-12〜6-15）

全 9 巻のならび

1 かぞえる・はかる

2 数と量のことば

3 関数とデータ きまりを見つける

4 形と向き 図形・三角関数・ベクトル

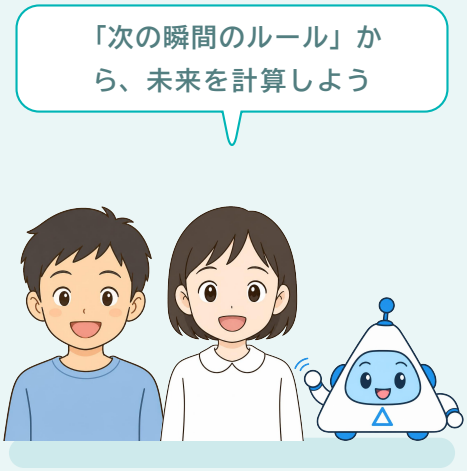
5 変化をつかむ 微分と積分

6 未来を計算する 微分方程式と複素数

7 まとめて計算する 行列

8 空間に広がる量 ベクトル解析

9 波と変化を読みとく フーリエ解析とラプラス変換



物理を理解するための数学　第 6 巻

「物理を理解するための数学」編集委員会編

ISBN・バーコード
（入稿時に配置）