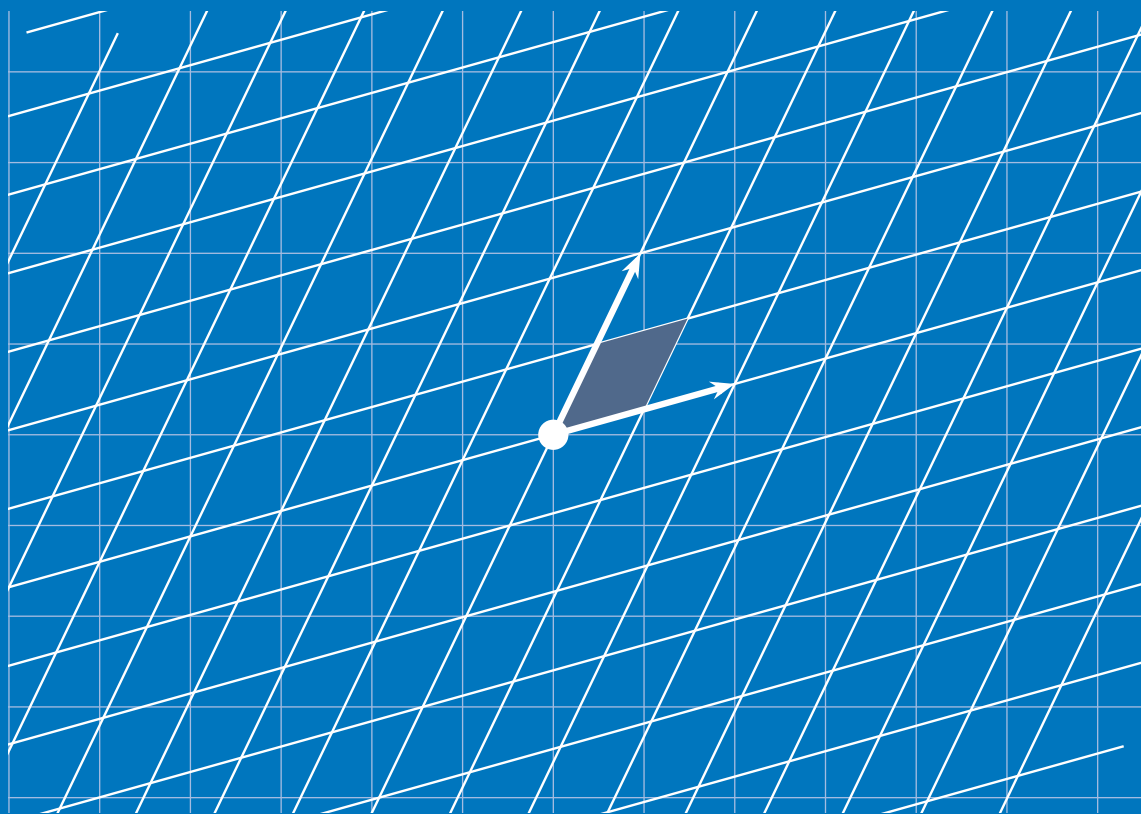


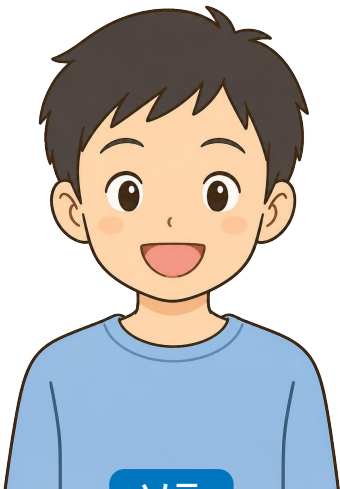
まとめて計算する

行列

たくさんの数を、表のまま計算しよう

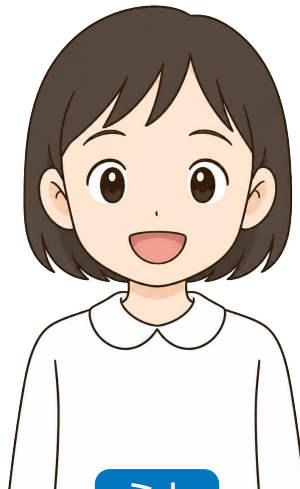


いっしょに学ばなかも



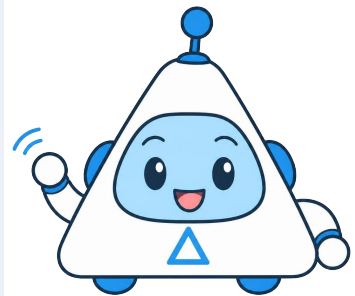
ソラ

「なぜ？」と聞くのが
大好き。
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。
手を動かして考える。



デルタ

計算と記録がとくいな
ロボット。名前は
「変化」を表す
記号 Δ から。

こまったら、3 人のことばをヒントにしよう。

物理を理解するための数学

第7巻

まとめて計算する

行列

たくさんの数を、表のまま計算しよう



7本の路線が、この本を通っています

「物理を理解するための数学」編集委員会編

序章 表のままで計算できたら？

△ ★★☆☆☆ p.8

九九の表は、行列の入口

第1部 行列の計算

p.22

7-1 数の表で計算する：行列

△ ★★☆☆☆ p.24

買い物の合計を、表のかけ算で一度に求める

7-2 行列×ベクトル：形を変える機械

△ ★★☆☆☆ p.64

4つの数で、絵をのぼしたり回したりできる

7-3 行列×行列：変換をつなぐ

△ ★★☆☆☆ p.102

「回してのぼす」と「のぼして回す」はちがう

7-4 行列式：面積が何倍になるか

△ ★★☆☆☆ p.138

0になると、平らにつぶれて元にもどせない

7-5 逆行列で連立方程式を解く

△ ★★☆☆☆ p.186

式が100個あっても、コンピュータの手順は同じ

第2部 回転と座標の変換

p.236

7-6 回転行列：くると回す

✓ ★★☆☆☆ p.238

30°回して45°回すと、75°回したのと同じ

7-7 3次元の回転と座標の変換

🚀 ★★☆☆☆ p.274

ドローンの向きを、3つの回転で表す

第3部 固有値と行列の使いみち

p.310

7-8 固有値と固有ベクトル：向きが変わらない方向

△ ★★☆☆☆ p.312

変換しても、向きが変わらない矢印がある

7-9 対角化：まっすぐな方向に分けて考える

△ ★★☆☆☆ p.354

こみいった変換も、のびるだけの変換に分けられる

7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で

 ★★★★★ p.386

何回もかけるとどうなるかは、固有値が教えてくれる

7-11 行列の使いみち 【読みもの】

 ★★★★★ p.430

ロボット、電気回路、画像…行列はどこで働いている？

こたえ p.450 記号カード p.464 よく使う定数・単位・公式 p.470

できるようになったことチェック表 p.485 つぎの巻へ p.487 さくいん p.489

この本の路線図

この本の章は、7本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるか確かめよう。



① 変化 ひき算→傾き→微分

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



② たし合わせ かけ算→面積→積分

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



③ 倍々 累乗→指数→ e

この巻の駅：(この巻には駅がありません)



④ 回転と波 角→ $\sin$ →複素数

この巻の駅：7-6



⑤ 表 九九の表→行列

この巻の駅：7-1、7-2、7-3、7-4、7-5、7-8、7-9、7-10、7-11



⑥ 矢印 向き→ベクトル→場

この巻の駅：7-7

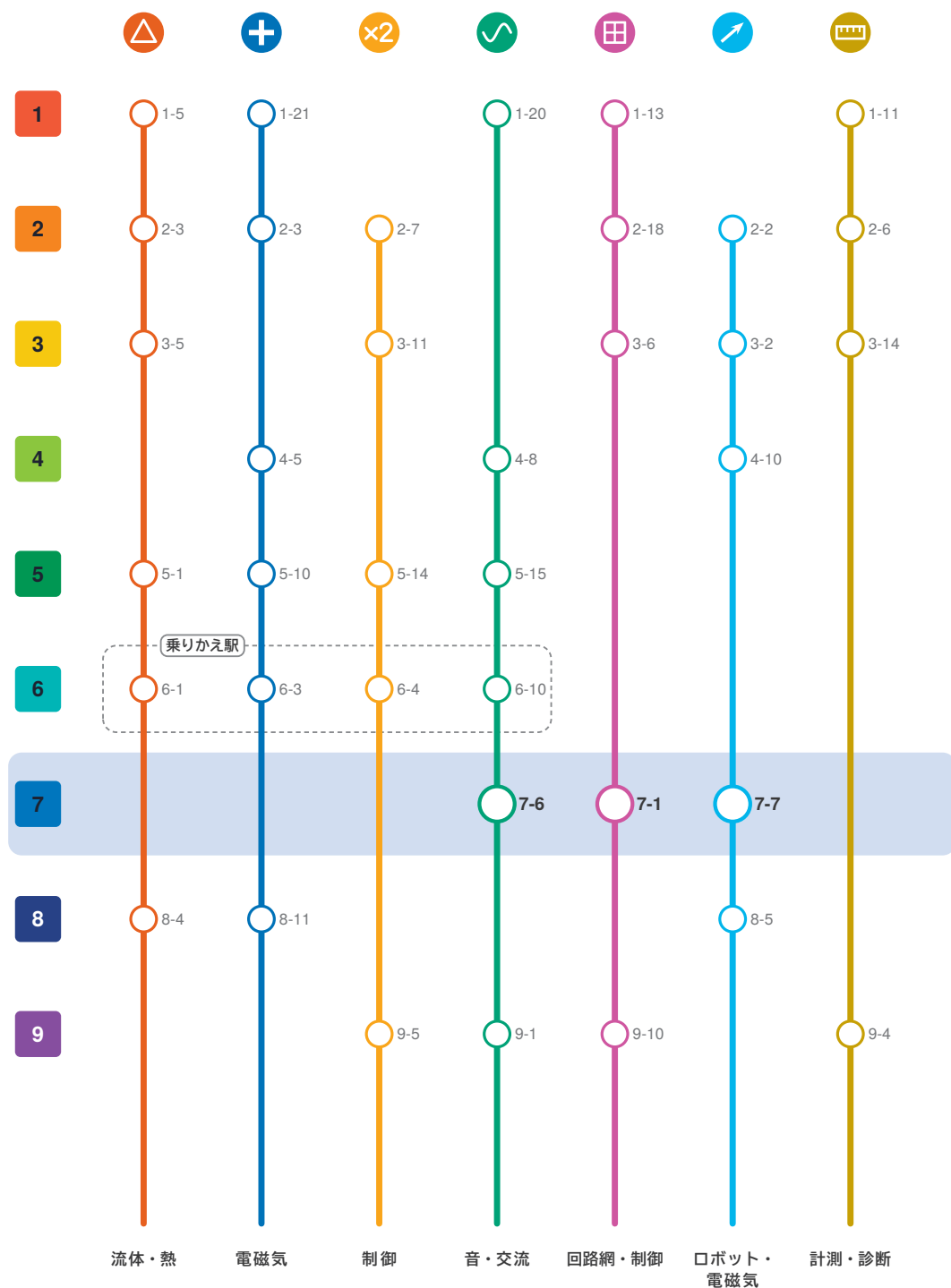


⑦ はかる 目もり→誤差→統計

この巻の駅：(この巻には駅がありません)

全9巻の路線図

下へ行くほど先の巻。色の帯がこの巻です。



終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第6巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

① 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

② 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

📍 道しるべ この章の前に **1-14** **2-2** この章の先に **3-5** **5-9**

前に読んでおくとよい章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

③ ★は「どこまで登るか」のしるし



章と小見出しには★がついています。★の数は、内容の高さ。山登りにたとえば、★1つは「はじめの一步」、★5つは「頂上」です。

白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登る」というしるし。自分の読める★まで読んで、先へ進んでもだいじょうぶ。

④ ノートを1冊用意しよう

「じぶんでとう」と章末問題は、ノートに解きます。本には書きこまないの、何度でもやり直せます。

問題の番号を書き、図をかいてから式を書こう。答えには単位をつけます。

例	じぶんでとう 1
	$6 \text{ m/s} \times 15 \text{ s} = 90 \text{ m}$
	答え 90 m

⑤ この本の3つのやくそく

- ① 数には、いつも単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
- ② 式を書く前に、表や図をかいて考えよう。
- ③ くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。

問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

第7巻 まとめて計算する

★★★

序章

表のままで 計算できたら？

ゲームの画面の中で、キャラクターがくるっと回ったり、大きくなったり、ななめにかたむいたりします。車のゲームなら、ハンドルを切ると、道や建物の見え方がなめらかに変わっていきます。

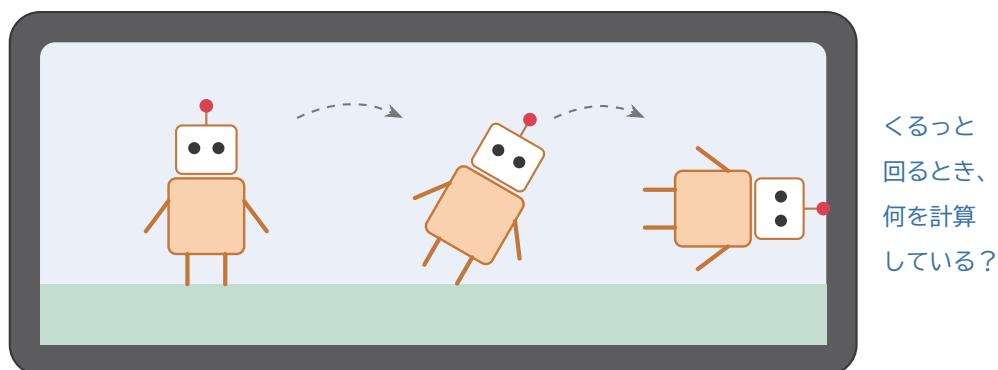


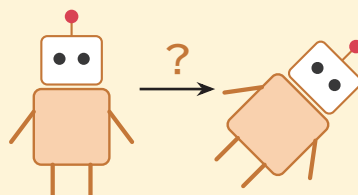
図1 ゲームの画面。キャラクターが右回りに少しずつ回っていく。

画面の絵は、たくさんの点の位置でできています。キャラクターが回ると、その点の位置がすべて、いっせいに変わります。しかも、画面は1秒に60回もかきかえられます。コンピュータは、どうやってそんなにたくさんの位置を、すばやく計算しているのでしょうか。

？ はてな？

ゲームの画面で、キャラクターがくるっと回るとき、コンピュータは何を計算しているのかな？

ロボットの腕や、空を飛ぶドローンの向きも、同じ方法で計算できるのかな？



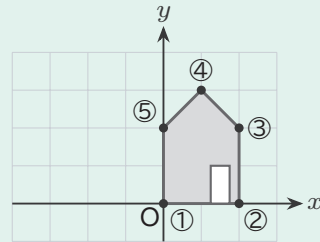
答えのかぎは、この巻の主役「行列」です。行列は、数をたてと横に並べた表です。序章では、まず方眼の上の絵を回してみ、**「表のまま計算する」**とはどういうことかを見ます。そのあとで、これまでの巻の「表」をふり返り、この巻の地図を作ります。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-13** 九九の表で、よこのならびを行、たてのならびを列という。「たて・よこの表でけいさんをまとめることを『行列』という。第7巻でまなぶ」。
- 4-8** 点 (x, y) を原点のまわりに左回りに 90° 回すと、 $(-y, x)$ になる。
- 3-6** 連立方程式の係数を表に並べて、表の行どうしをひいて解いた（係数の表は「行列の種」）。
- 6-14** ばねでつながった2つの台車の式の係数を、表の形に並べた。

🏠 やってみよう 方眼の家の絵を、 90° 回そう

方眼に、家の絵をかきます。5つの頂点①～⑤の座標は、表1のとおりです（戸は右によせてかく）。この家を、原点Oのまわりに左回りに 90° 回します。



- 1** 4-8のきまり「 (x, y) は $(-y, x)$ になる」を使って、5つの頂点の新しい座標を表に書こう。
- 2** 新しい座標の点を方眼にかいて、順に結ぼう。家は回ったかな？

頂点	①	②	③	④	⑤
もとの座標	(0, 0)	(2, 0)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 2)
回した座標	?	?	?	?	?

表1 家の5つの頂点の座標。回した座標(?)をうめる

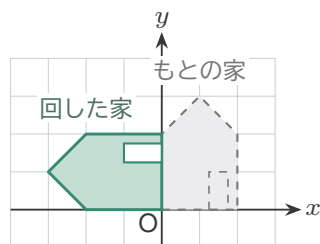
①で、頂点②は $(2, 0)$ なので、 $x = 2$ 、 $y = 0$ です。 $(-y, x)$ に入れると、新しい座標は $(0, 2)$ です。同じようにすると、次の表になります。

頂点	①	②	③	④	⑤
もとの座標	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(0, 2)$
回した座標	$(0, 0)$	$(0, 2)$	$(-2, 2)$	$(-3, 1)$	$(-2, 0)$

表2 家の5つの頂点を、左回りに 90° 回した座標

②で結ぶと、家は左に 90° たおれた形になります（緑の家）。戸も、ちゃんと家といっしょに回っています。

絵全体を回すのに、計算したのは5つの頂点だけです。5つの頂点に同じ計算をするだけで、絵全体が回ったのです。ゲームのキャラクターの絵は、何千もの点でできています。それでも、することは同じです。



4つの数で、絵を変える

1 回すルールを、4つの数の表にする

やってみようで使ったルールを、もう一度くわしく書きます。新しい x はもとの $-y$ 、新しい y はもとの x でした。これを、もとの x と y を両方使う形で書きなおします。

$$\text{新しい } x = 0 \times x + (-1) \times y, \quad \text{新しい } y = 1 \times x + 0 \times y$$

「 x に何をかけて、 y に何をかけて、たすか」を決める 4 つの数 0 、 -1 、 1 、 0 が出てきました。この 4 つの数を、式の並び方のまま、表にします。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 行め $(0, -1)$ が「新しい x の作り方」、2 行め $(1, 0)$ が「新しい y の作り方」です。この 4 つの数の表を、どの頂点にも同じように使えば、絵全体が 90° 回ります。このように、数をたてと横に並べた表を**行列**といいます (7-1)。

② 4 つの数を変えると、絵の変わり方が変わる

4 つの数を変えてみます。どの表も、「新しい $x = 1$ 行めの 2 つの数を x 、 y にかけてたす」「新しい $y = 2$ 行めの 2 つの数を x 、 y にかけてたす」というルールで使います。

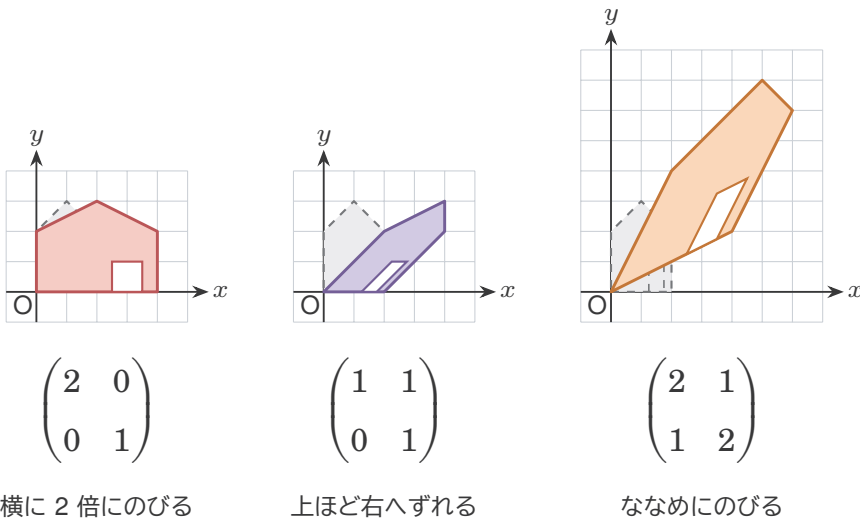


図 2 4 つの数を変えると、同じ家の絵が、ちがう形に変わる。灰色の点線が、もとの家。

図 2 の左の表では、新しい x が $2x + 0y = 2x$ 、新しい y が $0x + 1y = y$ です。横だけが 2 倍になります。まん中の表では、新しい x が $x + y$ で、上の点ほど右へずれます。右の表（主役の行列）は、家をななめ右上へ大きくのばしました。新しい x が $2x + y$ 、新しい y が $x + 2y$ です。

図2の右の行列は、**この巻の主演**です。この巻では、この同じ行列を、章ごとにちがう目で見えていきます(⑧)。

③ コンピュータがしていること

② はてな? の答え

ゲームのコンピュータは、キャラクターの絵の点の1つ1つに、同じ「4つの数の表」を使って、新しい位置を計算しています。回す角が 90° でないときは、4つの数が0や1ではなく、 $\cos$ と $\sin$ の値(4-8)になります。たとえば 30° 回すなら、

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

です。この表を**回転行列**といい、7-6で作ります。画面が1秒に60回かきかわるたびに、少しずつ角を変えた回転行列で、何千、何万という点を計算しなおしているのです。

3次元のゲームでは、点の座標が (x, y, z) の3つになり、 3×3 や 4×4 の表を使います(7-7)。ロボットの腕の関節や、ドローンの向きも、同じように行列で計算します。行列は、「たくさんの数を、同じルールで、いっせいに変える」ための道具なのです。

せいかくに言うと

4つの数の表を点にかけるときの「1行めを使って新しい x 、2行めを使って新しい y 」という計算は、7-1で「行列×ベクトル」として、ていねいに決めます。また、4つの数の表で表せるのは、次の3つがそろった変え方だけです。**まっすぐな線は、まっすぐな線のまま**(曲がらない)。**平行な線は、平行なまま**(等しい間かくで並んだ方眼の線は、変えたあとも等しい間かくで並ぶ)。**原点は動かない**。のぼす・回す・ずらす(かたむける)・裏返すは、どれもこの仲間です。7-2で、このきまりを「線形」の2つの式として確かめます。絵を曲げる変え方や、絵をそのまま横へ動かす「平行移動」は、4つの数だけではできません。平行移動は、7-7で、数を1つふやす工夫をして行列で表します。

九九の表から始まった「表」の道

4 九九の表をもう一度

第1巻 1-13 で、九九の表を作りました。 3×4 の答えは、左の3から横へ、上の4からたてへ進んで出会うマスにありました。横のならびを行、たてのならびを列とよびました。

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

オレンジが3の行、青が4の列

出会うマスが $3 \times 4 = 12$

1-13 では、この表から4つのきまりを見つけました。そのうちの2つは、この巻でそのまま使います。

・ **ななめのきまり**： 1×1 、 2×2 、…は、左上から右下へのななめに並ぶ（緑）。この巻では、このななめの数を「対角成分」とよびます（7-1）。

・ **入れかえても同じ**： 3×4 と 4×3 は同じ12。ななめをはさんで向かい合う数が等しい。この巻では「対称な行列」とよびます（7-1）。

1-13 の終わりでは、時間わりの「水曜日の2時間め」が行と列の出会う所であること、テレビやゲームの画面が小さな点のたて・横の表であること、ロボットの腕の動きもコンピュータが数の表で計算していることを見ました。そして、デルタが「たて・よこの表でけいさんをまとめることを『行列』というよ。第7巻でまなぶ」と約束しました。この巻で、その約束をはたします。

5 表の路線をふり返る

この本の章は、7本の路線の駅になっています。「表」の路線（）は、九九の表から始まって、この巻の7-1に着きます。

田 表の路線



図3 表の路線。九九の表から、表計算、連立方程式の係数の表を通して、7-1の行列に着く。この先は、第9巻の制御（状態方程式）へ続く。

章	駅	そこでしたこと
1-13	九九の表	行と列。ななめのきまり。入れかえても同じ
1-17	表とグラフ	数を表に整理して、グラフにする
2-18	表計算	セルに式を入れて、同じ計算をくり返す
3-6	連立方程式	係数だけを表に並べて、行どうしをひいて解く
6-14	連立微分方程式	2つの式の係数を表に並べる。和と差でほどける
7-1	行列	表のまま、たし算・かけ算をする

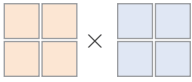
表3 表の路線の駅と、そこでしたこと

3-6では、「表の行どうしをひいたり、行に数をかけたりするのは、加減法そのもの。コンピュータはこのやり方で、文字が何千もある連立方程式を解いている。この数の表を、大学の数学では行列とよび、7-1で学ぶ」と書きました。6-14では、係数の表から「ほどける組み合わせ」を見つける方法が、第7巻の固有ベクトル（7-8）と対角化（7-9）だと予告しました。どちらも、この巻で回収します。

原子 行列が働く場面

6 この巻で出会う4つの場面

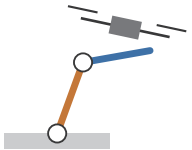
行列は、たくさんの数を「表のまま」まとめて計算する道具です。この巻では、次の4つの場面に何回も出会います。

7-1 買い物の合計

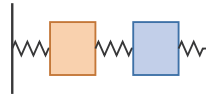
個数の表×値段の表
で、何人分・何店分の
合計を一度に出す。

7-2 絵をのばす・回す

方眼の絵の点に行列
をかけて、形を変え
る (7-2・7-6)。

7-7 ロボットとドローン

関節の角や機体の向
き (3 次元の回転)
を、行列のかけ算で
計算する。

7-8 つながったゆれ

ばねでつながった台
車や建物のゆれ方
(振動モード) を、行
列から見つける。

図 4 この巻で行列が働く 4 つの場面

どの場面でも、数が 2 つ、3 つ、…と組になっていて、それを同じルールでいっせいに計算します。1 つずつの式で書くと何行にもなる計算が、行列を使うと、 $A\vec{x}$ のような短い式で書けます。そして、表計算や Python で、何百、何千という数の計算を一度にできます。

この巻の地図

7 3 つの部

第 7 巻は、3 つの部に分かれています。7-1～7-6 は高校の数学で学ぶことがある内容、7-7～7-10 は大学（工学部）で学ぶ内容です。大学の内容の章は、「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」の 3 段に分けてあり、「ここまでで十分」の旗の所まで読めば、その章のゴールです（第 6 巻と同じ）。

第1部 行列の計算

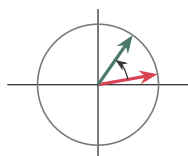
7-1~7-5

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ・数の表（行列）のたし算・かけ算（7-1）。
- ・行列を「形を変える機械」として見る。かけ算は変換をつなぐこと（7-2・7-3）。
- ・面積の倍率（行列式）と、元にもどす行列（逆行列）。連立方程式を解く（7-4・7-5）。

第2部 回転と座標の変換

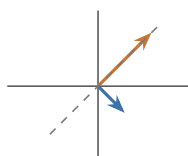
7-6~7-7



- ・回転行列で、点や絵をくるっと回す（7-6）。
- ・3次元の回転。ドローンの向き（ロール・ピッチ・ヨー）と、ロボットの腕の位置（同次変換行列）（7-7）。

第3部 固有値と行列の使いみち

7-8~7-11



- ・行列をかけても向きが変わらない矢印（固有ベクトル）（7-8）。
- ・その矢印を物差しにすると、計算がほどける（7-9）。
- ・何回もかける（7-10）。工学での使いみち（7-11）。

図5 第7巻の3つの部と、それぞれで学ぶこと

8 主役の行列の、6つの顔

この巻には、主役の行列がいます。②で家の絵をななめにのばした行列です。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

この巻では、同じこの行列を、章ごとにちがう目で見えていきます。同じ人でも、学校・家・部活で見せる顔がちがうように、1つの行列にも、いくつもの顔があるので。

章	見る目	主役の行列 A の顔
7-2	形を変える機械	方眼の家を、ななめ右上へのぼす
7-4	面積が何倍になるか	方眼の正方形 1 つが、面積 3 の平行四辺形になる
7-5	元にもどす機械	のびた家を、元の家にもどす行列がある
7-8	向きが変わらない矢印	ななめ 45° の矢印は 3 倍にのびるだけ、その直角の向きの矢印は 1 倍（そのまま）
7-9	のびるだけに分ける	ななめの物差しで見ると「3 倍と 1 倍にのぼすだけ」
7-10	何回もかける	何回もかけると、点はななめ 45° の向きにそろっていく

表 4 主役の行列の 6 つの顔（くわしくは、それぞれの章で）

いまは、表の中のことばの意味がわからなくてもだいじょうぶです。章を読み進めて、この表にもどってくると、1 つの行列が少しずつ立体的に見えてくるはずです。

表計算と Python

⑨ 手で計算して、コンピュータで確かめる

行列の計算は、1 つ 1 つはかけ算とたし算だけです。手で計算できます。でも、行列が大きくなると、計算の数がとても多くなります。そこで、この巻では、手で小さな例を計算したら、表計算（2-18）と Python（2-19）で同じ答えになるか確かめる、という進め方をします。

表計算：行列のかけ算は MMULT と **Python**：numpy という道具を使い、かけ算は @ で書きます (7-1)。

D2 =MMULT(A2:B3,C2:C3)

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
               [1, 2]])
print(A @ np.array([1, 0]))
```

実行結果

[2 1]

🔍 コラム 「行列」という名前

英語では、行列を **matrix** (メイトリクス) といいます。もとは「何かを生み出すもと」「型」という意味のことばです。数学のことばとして使ったのは、イギリスの数学者シルベスターで、1850 年のことです。数の表から、いろいろな行列式 (7-4) を生み出す「もと」という意味でした。そのあと、同じイギリスのケイリーが、1858 年の論文で、行列どうしのたし算やかけ算のきまりをまとめました。日本語の「行列」は、「行」と「列」でできた表、という意味の訳語です。

ただし、数を表に並べて計算する考えは、もっとずっと古くからありました。2000 年ほど前の中国の本『九章算術』には、連立方程式の係数を表に並べて解く方法が書かれています (7-1 のコラム)。

📖 この巻で出会う新しい記号

第7巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくてもだいじょうぶです。どの記号も、使う前に、数の例と図でていねいに説明します (記号カードは巻末にも並べてあります)。

記号	読み方	ひとことと言うと	章
A, a_{ij}	エー、エー・アイ・ジェイ	行列と、その i 行め j 列めの成分	7-1
A^T	エー・トランスポーズ	行と列を入れかえた行列（転置）	7-1
$A\vec{x}$	エー・エックス	行列×ベクトル。形を変える機械	7-2
AB, I	エー・ビー、アイ	行列の積、単位行列	7-3
$\det A$	デターミナント・エー	面積が何倍になるか（行列式）	7-4
A^{-1}	エー・インバース	元にもどす行列（逆行列）	7-5
$R(\theta)$	アール・シータ	θ だけ回す行列（回転行列）	7-6
R_x, R_y, R_z	アール・エックスなど	3次元の軸のまわりの回転	7-7
$\lambda, \vec{v}$	ラムダ、ブイ	固有値と固有ベクトル	7-8
$P^{-1}AP = D$	（対角化）	ななめの物差しで見ると、のびるだけ	7-9
A^n	エーのエヌ乗	行列を n 回かける	7-10

表5 この巻で出会う記号（くわしくはそれぞれの章で）

この巻では、行列は細い字の大文字（ A, R, J, K など）で、ベクトルは第4巻と同じく矢印付きの文字（ $\vec{x}$ ）で書きます。ベクトルの成分は、この巻ではたてに並べます（7-1）。大学の本では、行列やベクトルを太字で書くことが多いので、7-11で見くらべます。

この巻が通る路線と乗りかえ駅

第7巻を通る路線は3本です。いちばん長く通るのは「表」の路線（田）で、7-6は「回転と波」、7-7は「矢印」の路線の駅です。

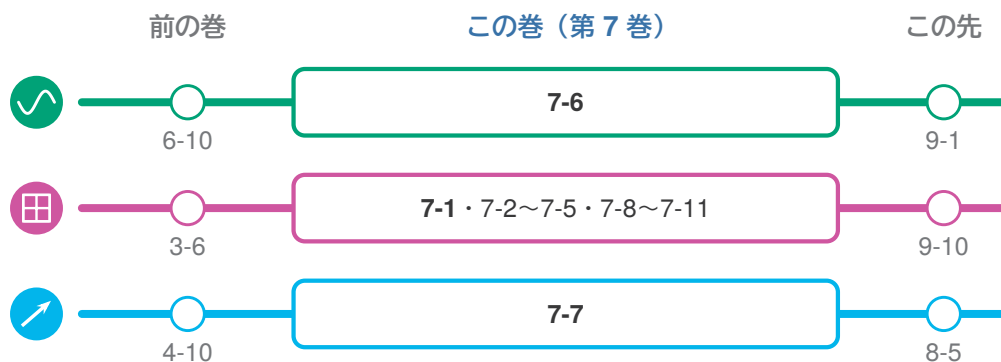


図6 第7巻を通る3本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字は大きな駅）。

	路線	大きな駅のつながり
	回転と波	三角関数（4-8）→ オイラーの公式（6-10）→ 回転行列 （7-6）
	表	表計算（2-18）→ 連立方程式（3-6）→ 行列 （7-1）
	矢印	座標（3-2）→ ベクトル（4-10）→ 3次元の回転 （7-7）

表6 3本の路線の、この巻の大きな駅

回転と波の路線では、6-9で「複素数のかけ算は回転」と学びました。7-6では、同じ回転を、複素数ではなく4つの数の表（回転行列）で表します。矢印の路線では、第4巻の2次元・3次元のベクトルが、7-7で3次元の回転に出会い、第8巻のベクトル場（8-5）へ続きます。

この巻の読み方



ソラ

第7巻は、大学の線形代数の内容なんだね。記号が多くて、むずかしそう。



ミナ

でも、使う計算は、かけ算とたし算だけなんだって。九九の表と同じように、行と列を指でなぞればいいみたい。



デルタ

そのとおり。1回読んで分からなくても、だいじょうぶ。小さな数の表で手を動かして、表計算や Python で確かめれば、かならずわかるよ。

① 成分で書いてから記号に

記号 $A\vec{x}$ だけで考えず、まず成分で1つずつ書きます。

- ・ 2×2 の行列 $\times$ ベクトルなら、
 $ax + by$ と $cx + dy$ を書く。
- ・ 記号の式のあとには、 2×2 の数で1回確かめる。

② 図と数の2通りで

初めての考えは、方眼の図と数の表の2通りで見せます。

- ・ 家の絵が、どう変わるかを見る。
- ・ 同じことを、数の計算で確かめる。

③ 表計算と Python

手で計算した答えを、コンピュータで確かめます。

- ・ 表計算は MMULT など、Python は numpy の @。
- ・ 型は 7-1 で決めて、全部の章で同じに使う。

④ ★5の章は3段

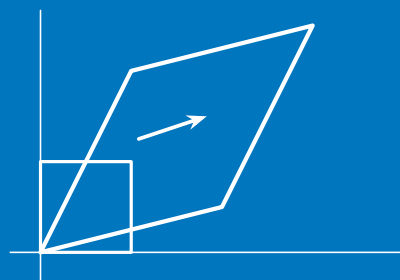
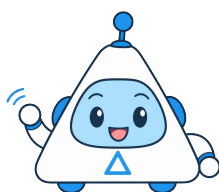
大学の内容の章は、3つの段に分けてあります。

- ・ 「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」。
- ・ 「ここまでで十分」の旗まで読めば、その章のゴール。

行列の計算



- ? たくさんの式を、表のまま一度に計算できる？
- ? 4つの数で、絵をのばしたり回したりできる？
- ? 100個の連立方程式は、どうやって解く？



表の形に並べた数を、そのまま1つの「数」のように計算する道具が行列だよ。行列をかけると、点や絵が動き、たくさんの連立方程式が一度に解けるよ。

この部で学ぶこと

7-1 数の表で計算する：行列

 ★★★★★ P.24

買い物の合計を、表のかけ算で一度に求める

7-2 行列×ベクトル：形を変える機械

 ★★★★★ P.64

4 つの数で、絵をのぼしたり回したりできる

7-3 行列×行列：変換をつなぐ

 ★★★★★ P.102

「回してのぼす」と「のぼして回す」はちがう

7-4 行列式：面積が何倍になるか

 ★★★★★ P.138

0 になると、平らにつぶれて元にもどせない

7-5 逆行列で連立方程式を解く

 ★★★★★ P.186

式が 100 個あっても、コンピュータの手順は同じ

この部を読むと…

行列のたし算・かけ算、行列式、逆行列を、図と数の表の 2 通りで計算できるようになります。
表計算と Python でも確かめます。

第1部 行列の計算



7-1

数の表で計算する：
行列

📖 道しるべ この章の前に **1-13** **2-18** **3-6** **4-11** **4-12** **6-14**
 この章の先に **7-2** **7-3** **7-5** **7-6**

🚩 この章でできるようになること

- **★★★** 数の表を行列として読み、成分 a_{ij} を言える。和・差・実数倍を計算できる。
- **★★★** 行列×ベクトル・行列×行列を、行と列をなぞって「かけて、たす」で計算できる。
- **★★★** 連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書き、表計算や Python で行列の計算を確かめられる。

❓ はてな？

ソラさんは、りんご2個とみかん3個、ミナさんは、りんご2個とみかん1個を買います。くだもの屋とスーパーでは、値段がちがいます。

2人がそれぞれの店で買うと、合計はいくらかな？ 4つの合計を、「表のかけ算」1回で出せないかな？

	個数 (個)			値段 (円)	
	りんご	みかん		くだもの屋	スーパー
ソラ	2	3	りんご	120	100
ミナ	2	1	みかん	60	80

この章では、数を表の形に並べたまま計算する道具「**行列**」を学びます。行列は、第7巻のすべての章で使う、いちばん大切な道具です。使う計算は、かけ算とたし算だけです。そのかわり、新しいことばと書き方がたくさん出てきます。1つずつ、買い物の数で確かめながら進みましょう。ことばや書き方を1回で覚えられなくても大丈夫です。わからなくなったら、何度でもこの章にもどってきてください。

🔪 やってみよう 4つの合計を表にしよう

用意するもの

電卓、紙とえんぴつ

- ① ソラさんがくだもの屋で買うと、合計は何円かな？ りんごは1個120円、みかんは1個60円です。
- ② スーパーでは、りんごが1個100円、みかんが1個80円です。4つの合計を出して、次の表をうめよう。
- ③ 1つのマスを出すのに、個数の表と値段の表の、どこの数を使ったかな？ 指でなぞってみよう。

合計 (円)	くだもの屋	スーパー
ソラさん	?	?
ミナさん	?	?

①は、りんご2個で $2 \times 120 = 240$ 円、みかん3個で $3 \times 60 = 180$ 円です。合わせて $240 + 180 = 420$ で、420円です。同じように計算すると、4つの合計は次の表になります。

合計 (円)	くだもの屋	スーパー
ソラさん	$2 \times 120 + 3 \times 60 = 420$	$2 \times 100 + 3 \times 80 = 440$
ミナさん	$2 \times 120 + 1 \times 60 = 300$	$2 \times 100 + 1 \times 80 = 280$

表1 4つの合計。かけ算を8回、たし算を4回した。

③の答えは、表の「ソラさん・スーパー」のマスで見るとわかります。使った数は、個数の表のソラさんの**よこのならび**「2、3」と、値段の表のスーパーの**たてのならび**「100、80」です。この2組を、1番めどうし（ 2×100 ）、2番めどうし（ 3×80 ）かけて、たしました。

どのマスも同じです。合計の表の1つのマスは、個数の表の1つの「よこのならび」と、値段の表の1つの「たてのならび」で決まります。1-13の九九の表で、 3×4 の答えが「3の行」と「4の列」の会合うマスにあったのと、よくにしています。この章では、この計算を「表と表のかけ算」として決めていきます。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 1-13** 九九の表で、よこのならびを行、たてのならびを列という。 3×4 の答えは、3の行と4の列が会合うマス。
- 2-18** 表計算のセルの番地 B3 は「B列の3行め」。式をコピーすると、式の中の番地もずれる。
- 3-6** くだもの屋の連立方程式 $2x + 3y = 420$ 、 $2x + y = 300$ を、係数の表だけで加減法で解いた（ $x = 120$ 、 $y = 60$ ）。
- 4-11** 数の組はベクトルと考えられる。和・差・実数倍は、成分ごとに計算する。
- 4-12** 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ 。成分がいくつでも「同じ番号の成分どうしの積の和」。
- 6-14** ばねでつながった2つの台車の式の係数を、表の形に並べた。

🔧 数学の道具

1 数の表を「行列」とよぶ

やってみようの個数の表から、「ソラ」「りんご」などのことばをとって、数だけを残します。数の並び方はそのままにして、まわりを大きなかっこでくくります。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

このように、数を長方形の形に並べて、かっこでくくったものを**行列**（ぎょうれつ）といいます。かっことは、「この数たちは、ひとまとまりの1つのもの」という目じるしです。

行と列

1-13の九九の表と同じように、よこのならびを**行**（ぎょう）、たてのならびを**列**（れつ）といいます。行は上から1行め、2行め、…と数えます。列は左から1列め、2列め、…と数えます。

くだものをもう1つふやして、ソラさんとミナさんがバナナも買うことにします。ソラさんはバナナ1本、ミナさんはバナナ4本です。個数の行列は、行が2つ、列が3つになります。

	りんご	みかん	バナナ
ソラ	2	3	1
ミナ	2	1	4

1 行め（よこのならび） 2 列め（たてのならび） 1 行め 2 列めの成分

図1 行（オレンジ）・列（青）・成分（緑）。上と左の灰色の字は、もとの表のことば（行列には書かない）。

行と列は、どちらがよこで、どちらがたてか、まぎれやすいことばです。漢字の形で覚える方法があります。「行」の字の右がわの上には、**よこ**の線が2本あります。「列」の字の右がわ（りっとう）には、**たて**の線が2本あります。

行列の大きさ

行が2つ、列が3つの行列を、**2行3列の行列**、または**2×3行列**（に・かける・さんぎょうれつ）といいます。いつも**行の数**を先に言います。はじめの個数の行列は、2×2行列です。行の数と列の数が同じ行列を、**正方向列**といいます。「正方」は正方形の正方です。1-13の九九の表は、9×9の正方向列と考えられます。

成分と a_{ij}

行列の中の1つ1つの数を、**成分**（せいぶん）といいます。 2×3 行列には、成分が $2 \times 3 = 6$ 個あります。図1の緑の成分3は、1行めと2列めが出会う所にあるので、「1行め2列めの成分」です。

行列には、大文字の名前をつけます。たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

です。行列 A の成分は、小文字の a に、行の番号と列の番号を下につけて書きます。1行め2列めの成分は a_{12} で、「エー・いち・に」と読みます。この A では、 $a_{12} = 3$ です。



図2 2×3 行列の成分の名前。 a_{23} は「2行め3列め」。下つきの数は、行の番号が先。

一般に、 i 行め j 列めの成分を a_{ij} と書き、 (i, j) **成分**といいます。下つきの数は、**行が先、列があと**です。ことばの「行列」と同じ順番だと覚えましょう。 a_{21} は2行め1列めの成分で、上の A では2です。 a_{12} とはちがう場所なので、気をつけましょう。

時間わりで考えると、順番を覚えやすくなります。時間わりの絵のように、行を曜日、列を時間めにした時間わりでは、「水曜日の2時間め」は3行め2列めのマスです。ふだんの話し方でも、曜日（行）を先に、時間め（列）をあとに言います。 a_{32} と同じ順番です。 a_{21} なら2行め1列め、つまり「火曜日の1時間め」です。

	時間め			
	1	2	3	4
月				
火				
水		a_{32}		

水曜日の2時間め

せいかくに言うと

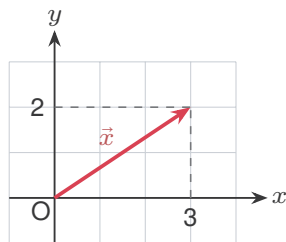
表計算のセルの番地 B3 は、「B 列の 3 行め」でした (2-18)。列の文字が先です。行列の成分 a_{32} は「3 行め 2 列め」で、行の番号が先です。順番が反対なので、表計算で行列をあつかうときは、とくに気をつけましょう。また、成分が 10 個以上の大きな行列では、 a_{112} のように番号の間をあけたり、 $a_{1,12}$ とコンマを入れたりします。

② たてに並べた数の組：列ベクトル

4-11 では、数の組 (3, 2) を、横に 3、たてに 2 進む矢印 (ベクトル) と考えました。この巻では、ベクトルの成分を**たてに並べて**書きます。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これは、4-11 の $\vec{x} = (3, 2)$ と**同じベクトル**です。上が x 成分、下が y 成分です。書き方がちがうだけで、矢印は同じです。



4-11 の書き方 $\vec{x} = (3, 2)$

この巻の書き方 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

図 3 同じ矢印を、2 通りに書く。たてに書いても、横に書いても、同じベクトル。

たてに 1 列だけの行列 ($n \times 1$ 行列) を、**列ベクトル**といいます。横に 1 行だけの行列 ($1 \times n$ 行列) を、**行ベクトル**といいます。ベクトルは、行列のなかまなのです。だから、ベクトルの 1 つ 1 つの数も、行列と同じく「成分」とよびます (4-11 の成分と同じことば)。

なぜ、わざわざたてに書くのでしょうか。理由は④の**行列とベクトルのかけ算**でわかります。行列の右に、たてに並べた値段をくっつけて計算するからです。この巻では、計算に使うベクトルは、いつもたてに書きます。ただし、文の中では場所をとるので、(3, 2) と横に書くこともあります。どちらも同じものです。

3 和・差・実数倍は、成分ごとに

ソラさんとミナさんは、土曜日と日曜日に、くだもの屋でりんごとみかんを買いました。2日間に買った個数を、行列で表します（行はソラ・ミナ、列はりんご・みかん）。

$$\text{土曜} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{日曜} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2日間で、それぞれ何個買ったでしょう。ソラさんのみかんなら、土曜の3個と日曜の2個で $3 + 2 = 5$ 個です。同じ場所の成分どうしをたせばよいのです。

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & \boxed{3+2} \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

土曜 日曜 2日間

図4 行列の和。同じ場所の成分どうしをたす（緑は、ソラさんのみかん）。

差も同じです。日曜のほうが土曜より何個多いかは、成分ごとにひいて求めます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 \\ 3-2 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

マイナスは「日曜のほうが少ない」ことを表します。ミナさんのりんご（2行め1列め）だけが、日曜のほうが1個多かったことがわかります。

実数倍

次は値段です。くだもの屋とスーパーの値段を、行列にします（行はりんご・みかん、列はくだもの屋・スーパー）。両方の店が、すべての値段を1割（10%）上げることになりました。1割上げると、値段は1.1倍です。だから、すべての成分を1.1倍します。

$$1.1 \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \times 120 & 1.1 \times 100 \\ 1.1 \times 60 & 1.1 \times 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 & 110 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

行列に数をかけることを、行列の**実数倍**といいます。すべての成分に、同じ数をかけます。

たいせつ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

和・差・実数倍は、成分ごとに計算する（4-11 のベクトルと同じ）。

この決め方は、4-11 でベクトルの和・差・実数倍を「成分ごと」に決めたのと同じです。 $-A$ は $(-1)A$ のことで、 $A - B$ は $A + (-1)B$ と同じです。

大きさのちがう行列は、たしたりひいたりできません。 2×2 行列と 2×3 行列をたそうとすると、 2×3 行列の 3 列めには、たす相手がいないからです。「バナナを買った表」と「バナナのない表」はたせない、と考えるとわかりやすいでしょう。

4 行列×ベクトル：1 行ずつ「かけて、たす」

いよいよ、行列のかけ算です。まず、くだもの屋の値段だけを考えます。値段を列ベクトルにします。上がりんご、下がみかんの値段です。

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}$$

やってみようで、くだもの屋の合計は、ソラさんが $2 \times 120 + 3 \times 60 = 420$ 、ミナさんが $2 \times 120 + 1 \times 60 = 300$ でした。これを、次のように書くことにします。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 120 + 3 \times 60 \\ 2 \times 120 + 1 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix}$$

左の行列の **1 つの行**と、右のベクトルの**列**を使って、答えの 1 つの成分を作ります。図 5 のように、行と列を色でなぞって確かめましょう。

$$\begin{array}{cc}
 \text{① 1 行めと列} & \text{② 2 行めと列} \\
 \left(\begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \boxed{120} \\ \boxed{60} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \boxed{420} \\ 300 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \boxed{120} \\ \boxed{60} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 420 \\ \boxed{300} \end{array} \right) \\
 2 \times 120 + 3 \times 60 = 420 & 2 \times 120 + 1 \times 60 = 300
 \end{array}$$

図5 行（オレンジ）を左から右へ、列（青）を上から下へ、同時になぞる。1 番めどうし、2 番めどうしをかけて、たすと、答えの成分（緑）になる。

手を動かすときは、指を2本使います。左手の指で行列の行を左から右へ、右手の指でベクトルの列を上から下へ、同時になぞります。指が同じときに止まった2つの数をかけて、たしていきます。1-13の「ゆびを2本つかって、行と列をたどろう」と同じ動きです。

このように計算することを、行列 A とベクトル $\vec{x}$ の積（かけ算）と決めて、 $A\vec{x}$ と書きます。行列が左、ベクトルが右です。文字で書くと、次のようになります。

たいせつ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

答えの i 番めの成分は、行列の i 行めと、ベクトルの列の「同じ番号どうしの積の和」。

1 行の計算は、内積

答えの1つの成分の計算 $2 \times 120 + 3 \times 60$ は、「同じ番号の成分どうしの積の和」です。これは、4-12の**内積**と同じ計算です。行 $(2, 3)$ と列 $(120, 60)$ を2つのベクトルと見ると、その内積が420です。つまり、

答えの i 番めの成分 = 行列の i 行めとベクトルの内積

です。物理の本では、この言い方がよく出てきます（物理 力-7 は「行と列の内積」と書いている）。

行がいくつあっても、1 行ずつ

3 人めのお客さんが、りんご 5 個とみかん 5 個のセットをかうとします。個数の行列は 3 行になります。計算は、行が 1 つふえるだけです。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 120 + 3 \times 60 \\ 2 \times 120 + 1 \times 60 \\ 5 \times 120 + 5 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \\ 900 \end{pmatrix}$$

1000 人分の表でも、することは同じです。行列×ベクトルの書き方なら、1000 人分の計算を 1 行で書けます。これが、表のまま計算することのよさです。

かけられるのは、数の個数がそろうとき

バナナまで入った 2×3 行列に、りんごとみかんの値段だけの $\vec{p}$ をかけることはできません。行列の 1 行には数が 3 個あるのに、ベクトルの成分は 2 個しかないからです。バナナの個数にかける値段がありません。

行列の列の数 = ベクトルの成分の数 のときだけ、かけられる

答えのベクトルの成分の数は、行列の行の数（かう人の数）と同じになります。



ミナ

1 行ずつ、行と列を指でなぞればいいだね。「かけて、たす」をくり返すだけ！

5 連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書く

3-6 で、くだもの屋の値段を求める問題を解きました。りんご 1 個を x 円、みかん 1 個を y 円として、次の連立方程式を作りました。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 420 \\ 2x + y = 300 \end{cases}$$

左辺をよく見ましょう。④の買い物の計算で、値段 120 と 60 のかわりに x と y を入れたものです。だから、行列とベクトルで次のように書けます。

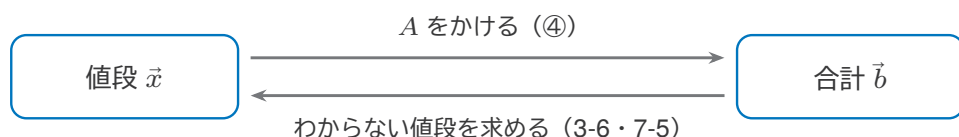
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix}$$

左辺を④のとおりに計算すると、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

2つのベクトルが等しいのは、上の成分どうし、下の成分どうしが等しいときです。だから、この1行は、もとの2つの式とまったく同じことを言っています。

④では、値段から合計を求めました。3-6 では、合計から値段を求めました。同じ式を、反対の向きに使ったのです。



左の行列 A を**係数行列**、わからない数を並べたベクトルを $\vec{x}$ 、右辺の数を並べたベクトルを $\vec{b}$ とすると、連立方程式は

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

とたった1つの式で書けます。数の方程式 $2x = 6$ とそっくりの形です。 $2x = 6$ は両辺を2でわって解きました。行列の「わり算」にあたるもの（逆行列）は、7-5 で学びます。

連立方程式を行列で書く手順

- ① わからない数の順番を決めて、たてに並べる。これが $\vec{x}$ になる。
- ② 1つ1つの式を、「左辺に文字の項を①の順に、右辺に数だけ」の形に整える。ない文字の係数は0と考える。
- ③ 式ごとに係数を1行に並べて行列 A を作る。右辺の数をたてに並べて $\vec{b}$ を作る。

例：3-6 の回路

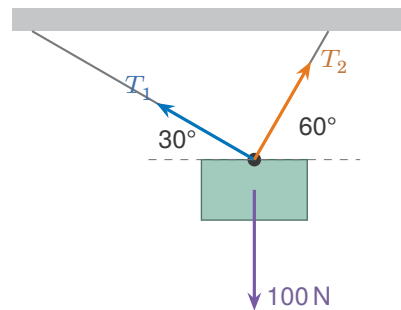
3-6 の回路では、2 つの電流 I_1, I_2 [A] について、 $4I_1 + 2I_2 = 9$ 、 $2I_1 + 4I_2 = 6$ という式を作りました（9V と 6V の電源、 2Ω の抵抗 3 つ。輪ごとに、電源の電圧＝抵抗の電圧の和）。①わからない数を I_1, I_2 の順に並べます。②式はもう整っています。③係数を並べると、

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

です。3-6 で求めた答え $I_1 = 2\text{A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{A}$ を入れて確かめます。1 行め $4 \times 2 + 2 \times 0.5 = 9$ 、2 行め $2 \times 2 + 4 \times 0.5 = 6$ で、右辺と同じになります。

例：4-11 の看板

4-11 では、重さ 100 N の看板を、水平から 30° と 60° の 2 本のひもでつるしました。ひもの力を T_1, T_2 [N] とします。ひもの結び目で、横の成分の和と、たての成分の和がどちらも 0 になる、というつり合いの式は、次の 2 つでした。



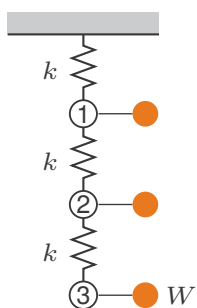
$$-T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \quad T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - 100 = 0$$

②の手順で、2 つめの式の -100 を右辺へ移して「 $= 100$ 」にします。③係数を並べると、

$$\begin{pmatrix} -\cos 30^\circ & \cos 60^\circ \\ \sin 30^\circ & \sin 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

です。行列の成分は、ひもの向きで決まる数です。1 列めは左のひも、2 列めは右のひもの「1N あたりの横と上の成分」になっています。この行列は、7-4 と 7-5 でもう一度使います。

例：3つのばね（物理 力-16）



天井から、ばね定数 k [N/m] のばね 3 本をたてにつなぎ、3 つの節点①②③に、重さ W [N] の球を 1 つずつつるします。節点が出る量を u_1 、 u_2 、 u_3 [m] とします。物理 力-16 は、節点ごとのつり合いを、次の 3 つの式にしています（下向きを正）。

$$\text{節点①：} -ku_1 + k(u_2 - u_1) + W = 0$$

$$\text{節点②：} -k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_2) + W = 0$$

$$\text{節点③：} -k(u_3 - u_2) + W = 0$$

手順②で、それぞれを「 u_1 、 u_2 、 u_3 の順の項＝数」の形に整えます。①の式で、1 行ずつ見せます。

$$-ku_1 + k(u_2 - u_1) + W = 0 \quad \text{①の式}$$

$$-ku_1 + ku_2 - ku_1 + W = 0 \quad \text{かっこをはずす}$$

$$-2ku_1 + ku_2 + W = 0 \quad \text{\(u_1\) の項をまとめる}$$

$$-2ku_1 + ku_2 = -W \quad \text{\(W\) を右辺へ移す}$$

$$2ku_1 - ku_2 + 0u_3 = W \quad \begin{array}{l} \text{両辺に } -1 \text{ をかけ、ない } u_3 \text{ を } 0 \text{ で} \\ \text{書く} \end{array}$$

②と③も同じように整えると、次の 2 つの式になります。

$$-ku_1 + 2ku_2 - ku_3 = W, \quad 0u_1 - ku_2 + ku_3 = W$$

手順③で係数を並べます。

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ W \\ W \end{pmatrix}$$

物理の本では、この行列を**剛性行列**（変形しにくさの行列）とよび、 $K\vec{u} = \vec{F}$ と書きます。ばねの式 $F = kx$ の k が行列 K に、 x がベクトル $\vec{u}$ になったのです。ばねが 100 本あっても、同じ手順で書けます。この連立方程式を解く方法は、7-5 で学びます。

例：6-14 の台車

6-14 では、ばねでつながった 2 つの台車の式 ($m = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $K = 10 \text{ N/m}$) を、

$$\ddot{x}_1 = -110x_1 + 10x_2, \quad \ddot{x}_2 = 10x_1 - 110x_2$$

と書き、係数を表に並べました。行列とベクトルで書くと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 & 10 \\ 10 & -110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

6-14 の係数の表は、この行列でした。7-8 では、この行列から 2 つの振動モードを見つけます。

6 行列×行列：右の行列の列ごとに④をする

②はてな?にもどります。値段をくだもの屋とスーパーの 2 列にした行列 P を作ります。

$$P = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix}$$

1 列めがくだもの屋、2 列めがスーパーです。くだもの屋の合計は、個数の行列に P の 1 列めをかけて求めました (④)。スーパーの合計は、 P の 2 列めをかけます。

$$\text{くだもの屋} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\text{スーパー} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 280 \end{pmatrix}$$

スーパーの計算の1行めと2行めは、それぞれ次のとおりです。

$$2 \times 100 + 3 \times 80 = 440, \quad 2 \times 100 + 1 \times 80 = 280$$

2つの答えの列を、もとの順に横に並べたものを、個数の行列と P の積と決めます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & 440 \\ 300 & 280 \end{pmatrix}$$

答えは、表1の4つの合計と同じ並びになりました。

❓ はてな? の答え

個数の行列と値段の行列の積が、4つの合計の行列になります。8回のかけ算と4回のたし算は、「行列×行列」の1回の計算として書けるのです。

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & \boxed{100} \\ 60 & \boxed{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & \boxed{440} \\ 300 & 280 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (1, 2) \text{ 成分} \\ = 1 \text{ 行めと } 2 \text{ 列めの内積} \\ (\text{ソラさん} \cdot \text{スーパー}) \end{array}$$

$$2 \times 100 + 3 \times 80 = 440$$

図6 積の(1, 2)成分。左の行列の1行め（オレンジ）と、右の行列の2列め（青）をなぞる。

たいせつ

積 AB の (i, j) 成分 = A の i 行めと B の j 列めの内積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

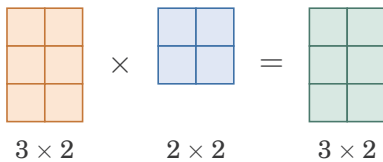
文字の式は覚えなくてかまいません。(1, 2)成分なら「1行めと2列め」と、指でなぞればいつでも作れます。図6で、ほかの3つの成分も、なぞって確かめましょう。

かけられる大きさ・答えの大きさ

3人めのお客さん（りんご5個・みかん5個）も入れると、個数の行列は 3×2 になります。値段の行列 P は 2×2 です。積は、3人それぞれの2つの店での合計なので、 3×2 行列になります。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & 440 \\ 300 & 280 \\ 900 & 900 \end{pmatrix}$$

左の行列の1行の数の個数（くだものの種類）と、右の行列の1列の数の個数（くだものの種類）が同じでないと、なぞったときに相手のいない数が出ます。



$$(m \times n)(n \times p) \rightarrow m \times p$$

内側の2つ (n) が同じなら、かけられる。

外側の2つ (m と p) が、答えの大きさ。

図7 行列の大きさ。左の行列の列の数と、右の行列の行の数が同じときだけ、かけられる。

大きさを $m \times n$ と $n \times p$ のように並べて書くと、内側の2つの数が同じときだけかけられます。答えの大きさは、外側の2つの数で $m \times p$ です。④の行列×ベクトルも、ベクトルを $n \times 1$ 行列と見ると、 $(m \times n)(n \times 1)$ で答えは $m \times 1$ (列ベクトル) です。同じきまりです。

かける順番を入れかえると？

数のかけ算では、 $3 \times 5 = 5 \times 3$ でした。行列ではどうでしょう。値段の行列 P を左に、個数の行列を右において計算すると、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 & 460 \\ 280 & 260 \end{pmatrix}$$

大きさは合うので、計算はできます。でも、答えは合計の行列とちがいます。(1, 1)成分の440は「りんごの値段の行(120、100)」と「ソラさんの列(2、2)」の内積で、買い物の意味がありません。行列のかけ算は、**順番を入れかえると、答えが変わることがある**のです。このことは、7-3でくわしく調べます。

せいかくに言うと

積の決め方は、ここでは「買い物の合計」の意味から決めました。でも、行列のかけ算は、たまたま買い物に合うように決めたものではありません。7-3で、「2つの変換をつなぐ」と、ちょうどこの決め方になることを確かめます。また、成分を記号で書くと、 $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B の積 AB の (i, j) 成分は

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

です。 $\sum$ 中の k が 1 から n まで動くことが、「行と列を同時になぞる」ことにあたります。

7 転置：たてとよこを入れかえる

個数の行列は、行が人、列がくだものでした。これを、行がくだもの、列が人の表に書きかえてみます。ソラさんの行 (2, 3) は、ソラさんの列になります。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

数はそのまま、「人ごとの表」が「くだものごとの表」になりました。行列 A の行と列を入れかえた行列を、 A の**転置**（てんち）といい、 A^T と書きます。

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad 1} \\ 2 \quad 1 \quad 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行と列を入れかえる}} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 \\ \boxed{3} & 1 \\ \boxed{1} & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A \text{ の } 1 \text{ 行めが} \\ A^T \text{ の } 1 \text{ 列めになる} \end{array}$$

$A \ (2 \times 3) \qquad\qquad\qquad A^T \ (3 \times 2)$

図8 転置。 A の 1 行め (2, 3, 1) が、 A^T の 1 列めになる。2 × 3 行列の転置は 3 × 2 行列。

A^T の (i, j) 成分は、 A の (j, i) 成分です。T は、英語の **transpose**（入れかえる）の頭文字で、少し形のちがう立てた字で書きます。T 乗の意味ではありません。列ベクトルを転置すると、行ベクトルになります。

対角成分と対称な行列

正方行列の左上から右下へのななめの線の上にある成分 a_{11} 、 a_{22} 、 $\dots$ を、**対角成分**といいます。1-13 の九九の表の「ななめのきまり」(1×1 、 2×2 、 $\dots$) の場所です。転置は、このななめの線を折り目にして、行列を裏返すことです。だから、対角成分は転置しても動きません。

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

九九の表の 4×4 の部分です。緑のななめのマスが対角成分です。3 行め 4 列めの 12 と、4 行め 3 列めの 12 (オレンジのわく) は、緑のななめを折り目にして向かい合っています。 $3 \times 4 = 4 \times 3$ なので、どこでも、向かい合う成分は同じです。だから、九九の表は転置しても変わりません (1-13 の「入れかえても同じ」)。

転置しても変わらない行列 ($A^T = A$) を、**対称な行列** (対称行列) といいます。 $a_{ij} = a_{ji}$ がすべての i, j で成り立つ正方行列です。⑤の回路の行列、ばねの剛性行列、台車の行列は、どれも対称な行列です。

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -110 & 10 \\ 10 & -110 \end{pmatrix}$$

回路の行列の (1, 2) 成分の 2 は、「右の輪の電流 I_2 が、まん中の抵抗を通して、左の輪の式に効く強さ」です。(2, 1) 成分の 2 は、その反対向きです。まん中の抵抗は両方の輪に同じように入っているのです、2 つは等しくなります。物理や工学に出てくる行列は、このように「おたがいさま」で対称になることがよくあります。対称な行列は、7-6・7-8・7-9 で大切な役をします。

コラム 九章算術の「方程」：2000 年前の行列

中国の数学の本『九章算術』（きゅうしょうさんじゅつ）は、紀元 1 世紀ごろまでにまとめられたと考えられています。その第 8 章「方程」には、連立方程式の問題が並んでいます。最初の問題は、3 種類の稲の束の数と、とれる米の量から、1 束あたりの米の量を求めるものです。今の書き方では、左下の式です。

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

3 つめ	2 つめ	1 つめ	
1	2	3	上の稲
2	3	2	中の稲
3	1	1	下の稲
26	34	39	米の量

←
右から順に並べる

係数は、算木（計算に使う小さな棒）で計算板の上に並べました。1 つの式を**たての 1 列**にして、右から順に並べます（コラムの図）。そして、列に数をかけたり、列どうしをひいたりして、答えを出しました。3-6 ⑥ の「表の行どうしをひく」加減法と同じで、7-5 の掃き出し法と同じ考えです。答えは、1 束あたり $9\frac{1}{4}$ 、 $4\frac{1}{4}$ 、 $2\frac{3}{4}$ 斗（斗は量の単位）です。この並べ方は、この章の係数行列を転置して、さらに左右の順も逆にしたものです。2000 年前の中国でも、係数だけを表に並べて計算していたのです。

もっと知りたい ★★★

内積は、行ベクトル×列ベクトル

4-12 の内積は、 $\vec{a}$ を転置した行ベクトルと、列ベクトル $\vec{b}$ の積です。

$$\vec{a}^T \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

大きさは $(1 \times 2)(2 \times 1) \rightarrow 1 \times 1$ で、答えは数 1 つです。専門書では、内積を $\vec{a}^T \vec{b}$ と書くことがよくあります。

8 単位行列 I と零行列 O

数の 1 は、かけても相手を変えない数です ($1 \times 5 = 5$)。行列で、同じ働きをするものをさがします。次の行列 I を、ベクトルにかけてみましょう。④のとおりに計算します。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times x + 0 \times y \\ 0 \times x + 1 \times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ベクトルは変わりません。行列にかけても、 $IA = A$ 、 $AI = A$ です。買い物で言うと、 I は「ソラさんはりんご 1 個だけ、ミナさんはみかん 1 個だけ」の個数の行列です。 I と値段の行列 P の積は、値段の行列そのものになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix}$$

対角成分がすべて 1 で、ほかの成分がすべて 0 の正方行列を、**単位行列**といい、 I と書きます。3 × 3 の単位行列は、ななめに 1 が 3 つ並びます。 I は英語の identity (同じもの) の頭文字です。高校の古い教科書や、多くの大学の本では E と書きます。この本では、 E を電池の電圧などに使うので、 I と書きます。

すべての成分が 0 の行列を**零行列** (れいぎょうれつ) といい、 O と書きます。数の 0 と同じで、たしても相手を変えません ($A + O = A$)。かけると、答えはすべて 0 になります ($AO = O$)。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})$ に対し、積 AB を、その (i, k) 成分が $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ で与えられる $m \times l$ 行列と定義する。一般に $AB \neq BA$ である。 A の転置行列を ${}^tA$ と書く。単位行列を E で表す。

訳 $A = (a_{ij})$ は「成分が a_{ij} の行列 A 」。この章の p を l 、 j を k と書いているだけで、⑥の決め方と同じ。「一般に」は「いつもとは限らない」の意味。 ${}^tA$ は、この巻の A^T (転置の t を左上に書く本もある)。 E は、この巻の単位行列 I 。

9 表計算と Python で確かめる

行列が大きくなると、手で計算するのは大変です。表計算（2-18）と Python（2-19）には、行列のかけ算をする道具があります。第7巻では、どちらも何回も使います。ここで使い方の型を決めておきます。

表計算：MMULT

行列は **A2 から**（1行めは見出し）、ベクトルは**そのすぐ右の列**、答えは**さらにその右の列**に置きます。

	D2	=MMULT(A2:B3,C2:C3)			
		A	B	C	D
1		個数の行列		値段	合計
2		2	3	120	420
3		2	1	60	300

表2 行列×ベクトル。行列は A2:B3、ベクトルは C2:C3、答えは D2:D3。

- 1 A2:B3 に個数の行列、C2:C3 に値段のベクトルを入れる。「A2:B3」は、A2 を左上、B3 を右下とする長方形のセルの集まり（範囲）のこと。
- 2 答えの左上のセル D2 に =MMULT(A2:B3,C2:C3) と入れる。MMULT は、matrix（行列）の multiply（かけ算）。かっこの中は、**左の行列の範囲、右の行列（ベクトル）の範囲**の順。
- 3 Enter キーで確定する。新しい Excel（Microsoft 365）や Google スプレッドシートでは、答えが D3 にも自動で広がる。広がらないソフト（古い Excel や LibreOffice）では、先に答えのマス全部 D2:D3 をえらんでから式を入れ、Ctrl + Shift + Enter で確定する。

行列×行列も同じです。値段の行列を C2:D3 に入れ、答えのマス E2 に =MMULT(A2:B3,C2:D3) と入れると、E2:F3 に合計の行列が出ます。左の行列の列の数と、右の行列の行の数が合わない、と、#VALUE! と出ます（⑥の「かけら

れる大きさ)。範囲に空いたセルや文字が入っていても、#VALUE! になります。
転置は =TRANSPOSE(A2:B3) です。

🔍 もっと知りたい ★★★

MMULT の中身を、ふつうの式で作ってみる

表 2 の D2 に、MMULT を使わずに $=A2*C2+B2*C3$ と入れても、420 が
出ます。A2、B2 は行列の 1 行め、C2、C3 はベクトルの列です。行と列
を「なぞって、かけて、たす」計算を、そのまま式にしたものです。

	A	B	C	D
1	個数の行列		値段	合計
2	2	3	120	420
3	2	1	60	300

表 3 D2 の $=A2*C2+B2*C3$ は、1 行め（オレンジ）と列（青）の内積。

D3 には $=A3*C2+B3*C3$ と入れます。D2 の式を下へコピーすると、
 $=A3*C3+B3*C4$ となってしまう、値段の列がずれて、まちがった答え
になります（2-18 の番地のずれ）。ずらしたくない値段の番地に \$ をつ
けて $=A2*\$C\$2+B2*\$C\3 とすれば、コピーしても正しく計算できます。
行列が大きくなると、このような式を全部のマスに書くのは大変です。
MMULT は、この計算をまとめてしてくれる関数なのです。

Python : numpy

Python では、**numpy**（ナムパイ）という道具を使います。行列やベクトル
の計算をまとめてする道具で、大学や会社でもよく使われています。

Python

```

import numpy as np          # numpy を np という短い名前で使う
N = np.array([[2, 3],      # 個数の行列：1行ずつ [ ] でくる
              [2, 1]])     # 値段のベクトル
p = np.array([120, 60])    # 値段の行列
P = np.array([[120, 100],  # 行列×ベクトル
              [60, 80]])   # 行列×行列
print(N @ p)               # 転置
print(N @ P)
print(N.T)

```

実行結果

```

[420 300]
[[420 440]
 [300 280]]
[[2 2]
 [3 1]]

```

- ① `np.array([[2, 3], [2, 1]])` は、行列を「行のリスト」で書く。外側の `[]` の中に、1行めの `[2, 3]` と2行めの `[2, 1]` が入っている。プログラムでは、行ごとに改行してたてに並べると、行列の形が見やすい。
- ② ベクトルは `np.array([120, 60])` と横に書く。表示も `[420 300]` と横1行になる。でも中身は、数学のたて書きの列ベクトルと同じ。
- ③ 行列のかけ算は `@` (アット)。行列は `[[420 440]` と `[300 280]]` のように、1行ずつ表示される。
- ④ `N.T` は転置。単位行列は `np.eye(2)` (2×2) で作れる。

ここで、とても大切な注意があります。`N * P` と `*` を使うと、行列のかけ算ではなく、**同じ場所の成分どうしのかけ算**になります。表計算で `=A2*C2` と入れて、となりにコピーしたときも同じです (まちがえやすいところ④)。

Python

```
print(N * P)
```

成分どうしのかけ算（行列の積ではない）

実行結果

```
[[240 300]
 [120 80]]
```

$2 \times 120 = 240$ 、 $3 \times 100 = 300$ 、…と、同じ場所どうしをかけただけです。合計の行列（420、440、…）とはちがいます。行列の積は、かならず④、表計算では MMULT を使います。

たいせつ

行列	$m \times n$ 行列は m 行 n 列。 a_{ij} は i 行め j 列めの成分
和・実数倍	成分ごとに計算する（同じ大きさどうし）
積	AB の (i, j) 成分 = A の i 行めと B の j 列めの内積
大きさ	$(m \times n)(n \times p) \rightarrow m \times p$ $AB \neq BA$ のことがある
連立方程式	$A\vec{x} = \vec{b}$ (A は係数行列)
転置	A^T 行と列を入れかえる。 $A^T = A$ なら対称
$I \cdot O$	単位行列（対角成分が 1）・零行列（すべて 0）

📖 この章で出てきたことば

行列 数を長方形の形に並べて、かっこでくくったもの。よこのならびが行、たてのならびが列。

成分 行列の中の 1 つ 1 つの数。 i 行め j 列めの成分を (i, j) 成分という。

正方行列 行の数と列の数が同じ行列。

列ベクトル・行ベクトル たてに 1 列だけの行列と、横に 1 行だけの行列。

係数行列 連立方程式の係数を、式ごとに 1 行に並べた行列。

転置 行と列を入れかえること。 A^T と書く。

対角成分・対称な行列 左上から右下へのななめの成分。転置しても変わらない行列が対称な行列。

単位行列・零行列 対角成分が 1 でほかが 0 の正方行列 I 。すべての成分が 0 の行列 O 。

記号カード

初めて出た章 7-1

 a_{ij}

読み方 エー・アイ・ジェイ
意味 行列 A の i 行め j 列めの成分。下つきは行が先、列があと
英語 entry

記号カード

初めて出た章 7-1

 A^T

読み方 エー・トランスポーズ
意味 A の転置。行と列を入れかえた行列。 T 乗ではない
英語 transpose

例題でたしかめよう

例題 1 成分を読む

右の行列 B について答えましょう。

- (1) B は何行何列の行列ですか。
- (2) b_{12} 、 b_{21} 、 b_{23} を答えましょう。
- (3) 成分 -1 は、何行め何列めにありますか。

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

記号でも答えましょう。

考え方 よこのならびが行、たてのならびが列。 b_{ij} は「 i 行め j 列め」で、行の番号が先。

式 (1) 行は上から 2 つ、列は左から 3 つある。

(2) b_{12} は 1 行め 2 列め、 b_{21} は 2 行め 1 列め、 b_{23} は 2 行め 3 列め。

(3) -1 は上の行 (1 行め) の、左から 3 番め (3 列め)。

答え (1) 2 行 3 列 (2×3 行列) (2) $b_{12} = 0$ 、 $b_{21} = 7$ 、 $b_{23} = 5$

(3) 1 行め 3 列め。 $b_{13} = -1$

じぶんでとこう 1

右の行列 C について答えましょう。

(1) C は何行何列の行列ですか。

(2) c_{12} 、 c_{31} 、 c_{22} を答えましょう。

(3) 成分 9 は、何行め何列めにありますか。記号でも答えましょう。

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

例題 2 和・差・実数倍

右の行列 P 、 Q について、次の行列を求めましょう。

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $P + Q$ (2) $P - Q$

(3) $3P$ (4) $2P - Q$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

考え方 同じ場所の成分どうしを、左上・右上・左下・右下の順に計算する。(4) は、先に $2P$ を作ってから Q をひく。

式 (1) $3 + 1 = 4$ 、 $1 + 4 = 5$ 、 $0 + 5 = 5$ 、 $2 + (-1) = 1$

(2) $3 - 1 = 2$ 、 $1 - 4 = -3$ 、 $0 - 5 = -5$ 、 $2 - (-1) = 3$

(3) $3 \times 3 = 9$ 、 $3 \times 1 = 3$ 、 $3 \times 0 = 0$ 、 $3 \times 2 = 6$

(4) $2P$ の成分は 6、2、0、4。そこから Q をひく：

$$6 - 1 = 5, 2 - 4 = -2, 0 - 5 = -5, 4 - (-1) = 5$$

答え

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

じぶんでこう2

右の行列 P 、 Q について、次の行列を求めましょう。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $P + Q$ (2) $P - Q$

(3) $2Q$ (4) $3P - Q$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

例題3 行列×ベクトル

次の積を求めましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

考え方 答えの1番めは1行めとベクトル、2番めは2行めとベクトルを、なぞって「かけて、たす」。負の数はかっこをつけてかける。

式 (1) 1行め： $3 \times 5 + 1 \times 2 = 15 + 2 = 17$

2行め： $2 \times 5 + 4 \times 2 = 10 + 8 = 18$

(2) 1行め： $1 \times 4 + (-2) \times (-1) = 4 + 2 = 6$

2行め： $3 \times 4 + 0 \times (-1) = 12 + 0 = 12$

答え

$$(1) \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

じぶんでとこう 3

次の積を求めましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例題 4 行の多い行列・ 3×3 の行列

(1) 3 人が、りんごとみかんを右の個数だけ買います（行は 1 人め・2 人め・3 人め、列はりんご・みかん）。りんご 1 個 120 円、みかん 1 個 60 円の時、3 人の合計を行列×ベクトルで求

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

めましょう。

(2) 3-6 の連立方程式 $x + y + z = 9$ 、 $x - y = 1$ 、 $y - z = 1$ の答え $x = 4$ 、 $y = 3$ 、 $z = 2$ を並べたベクトルを、係数行列にかけて確かめましょう。

考え方 行が 3 つなら、答えの成分も 3 つ。(2) は、ない文字の係数を 0 にして係数行列を作る。

式 (1) $2 \times 120 + 3 \times 60 = 420$ 、 $2 \times 120 + 1 \times 60 = 300$ 、 $5 \times 120 + 5 \times 60 = 900$

(2) 係数行列の 2 行めは $(1, -1, 0)$ 、3 行めは $(0, 1, -1)$ 。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3 + 2 \\ 4 - 3 + 0 \\ 0 + 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

答え (1) 420 円、300 円、900 円 (2) 右辺の 9、1、1 になった

じぶんでとこう 4

(1) 3人が、りんごとみかんを、1人めから順に(1個、4個)、(3個、2個)、(0個、6個)買います。りんご1個100円、みかん1個50円のと
き、3人の合計を行列×ベクトルで求めましょう。

(2) 連立方程式 $2x + y = 4$ 、 $y + 3z = 11$ 、 $x + z = 4$ の答えは $x = 1$ 、 $y = 2$ 、 $z = 3$ です。係数行列を作り、答えを並べたベクトルをかけて確かめましょう。

例題5 連立方程式を行列で書く

次の連立方程式を、 $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きましょう。わからない数は、 x 、 y 、 z の順に並べます。

(1) $3x + 2y = 12$ 、 $y = 4x - 5$

(2) $x + 2z = 7$ 、 $3y - z = 1$ 、 $x + y + z = 6$

考え方 手順①②③。(1)の2つめの式は、文字を左辺に x 、 y の順に集める。(2)は、ない文字の係数を0にする。

式 (1) $y = 4x - 5$ の $4x$ を左辺へ移す： $-4x + y = -5$

(2) $x + 0y + 2z = 7$ 、 $0x + 3y - z = 1$ 、 $x + y + z = 6$

答え

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

確かめ：(1)の答え $x = 2$ 、 $y = 3$ を入れると、 $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$ 、 $-4 \times 2 + 1 \times 3 = -5$ 。(2)の答え $x = 3$ 、 $y = 1$ 、 $z = 2$ を入れると、 $3 + 0 + 2 = 5$ 、 $0 + 3 - 2 = 1$ 、 $3 + 1 + 2 = 6$ 。

じぶんでこう5

次の連立方程式を、 $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きましょう (x, y, z の順)。

(1) $5x - y = 7, 2y = x + 4$

(2) $2x + z = 5, y + 3z = 11, x - y = -1$

例題6 行列×行列と、かけられる大きさ

(1) 次の積を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) 2×3 行列と 3×2 行列の積、 3×2 行列と 3×2 行列の積は、かけられますか。かけられるなら、答えの大きさを答えましょう。

考え方 (1) (i, j) 成分は、左の i 行めと右の j 列めをなぞる。(2) 大きさを並べて、内側の2つの数をくらべる。

式 (1) $(1, 1) : 1 \times 5 + 2 \times 7 = 19$ $(1, 2) : 1 \times 6 + 2 \times 8 = 22$

$(2, 1) : 3 \times 5 + 4 \times 7 = 43$ $(2, 2) : 3 \times 6 + 4 \times 8 = 50$

(2) $(2 \times 3)(3 \times 2)$ は内側が3と3で同じ。 $(3 \times 2)(3 \times 2)$ は内側が2と3でちがう。

答え (1) $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

(2) 2×3 と 3×2 はかけられて、答えは 2×2 。 3×2 と 3×2 はかけられない。

じぶんでとこう6

(1) 次の積を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 3×2 行列と 2×4 行列の積、 2×3 行列と 2×3 行列の積は、かけられますか。かけられるなら、答えの大きさを答えましょう。

例題7 積の成分の意味を読む

個数の行列 N (行はソラ・ミナ、列はりんご・みかん) と、値段の行列 P (行はりんご・みかん、列はくだもの屋・スーパー) があります。

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix}$$

積 NP の $(2, 1)$ 成分は、何を表していますか。また、その値を求めましょう。

考え方 $(2, 1)$ 成分は、 N の2行めと P の1列めの内積。 N の2行めは「ミナさん」、 P の1列めは「くだもの屋」。

式 N の2行め $(2, 1)$ は、ミナさんのりんごとみかんの個数。

P の1列め $(120, 60)$ は、くだもの屋のりんごとみかんの値段。

$$\text{内積} : 2 \times 120 + 1 \times 60 = 240 + 60 = 300$$

答え ミナさんがくだもの屋で買うときの合計。300 円

じぶんでこう7

朝食・昼食に食べた量の行列 M (行は朝食・昼食、列はごはん・卵、100 g 単位) と、100 g あたりの栄養の行列 F (行はごはん・卵、列はエネルギー [kcal]・たんぱく質 [g]) があります。積 MF の (2, 1) 成分と (1, 2) 成分は、それぞれ何を表していますか。値も求めましょう。

$$M = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 156 & 2.5 \\ 142 & 12.2 \end{pmatrix}$$

例題 8 転置と対称な行列

- (1) 例題 1 の行列 B の転置 B^T を求めましょう。
- (2) 下のア～ウのうち、対称な行列はどれですか。
- (3) 下の行列 G が対称な行列になるのは、 a がいくつのときですか。

$$\text{ア} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{イ} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ウ} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 (1) B の 1 行めを B^T の 1 列めにする。(2) (3) 対角成分をはさんで向かい合う成分 (a_{12} と a_{21} など) が、すべて等しいか見る。

式 (1) 1 列め (4, 0, -1)、2 列め (7, 3, 5)。2 × 3 の転置は 3 × 2。

(2) ア : $a_{12} = a_{21} = 5$ 。イ : $a_{12} = 5$ 、 $a_{21} = -5$ でちがう。

ウ : $a_{12} = a_{21} = 0$ 、 $a_{13} = a_{31} = 2$ 、 $a_{23} = a_{32} = 4$ 。

(3) $g_{12} = a$ 、 $g_{21} = -2$ なので、 $a = -2$ のとき等しくなる。

答え (1) $B^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) アとウ (3) $a = -2$

じぶんでとこう 8

- (1) じぶんでとこう 1 の行列 C の転置 C^T を求めましょう。
- (2) 下のア～ウのうち、対称な行列はどれですか。
- (3) 下の行列 H が対称な行列になるのは、 b がいくつのときですか。

$$\text{ア} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{イ} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ウ} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

例題 9 表計算と Python

(1) 右のプログラムを実行すると、何が表示されますか。

(2) 表計算で、A2:B3 に行列 A 、C2:D3 に行列 B を入れました。積 AB を E2:F3 に出すには、E2 に何と入れますか。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
B = np.array([[1, 0],
              [3, 1]])

print(A @ B)
print(A * B)
```

考え方 $@$ は行列の積、 $*$ は同じ場所の成分どうしの積。MMULT は（左の範囲, 右の範囲）の順。

式 (1) $A @ B : (1, 1) 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$ 、 $(1, 2) 2 \times 0 + 1 \times 1 = 1$ 、
 $(2, 1) 1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$ 、 $(2, 2) 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$
 $A * B : 2 \times 1 = 2$ 、 $1 \times 0 = 0$ 、 $1 \times 3 = 3$ 、 $2 \times 1 = 2$

答え (1) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ （それぞれ 2 行で表示）
 (2) =MMULT(A2:B3,C2:D3)

じぶんでこう9

- (1) 例題9のプログラムで、Aを $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 、Bを $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ にかえると、何が表示されますか。
- (2) 表計算で、A2:C4に 3×3 行列、D2:D4にベクトルを入れました。積をE2:E4に出すには、E2に何と入れますか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① a_{ij} の順番

✗ a_{12} は「2行め1列め」

○ a_{12} は「1行め2列め」。行の番号が先

表計算の番地B3（列が先）と反対です。「行列」ということばの順（行→列）で覚えましょう。

⚠ まちがえやすいところ

② かけられない大きさ

✗ 2×3 行列 $\times$ 2×2 行列を計算する

○ 内側の3と2がちがうので、かけられない

なぞると、行の3番めの数に、相手がなくなります。

⚠ まちがえやすいところ

③ 値段を横に書く

✗ 個数の行列の右に、値段を行ベクトルでおく

○ 値段は列ベクトル（たて）でおく

$(2 \times 2)(1 \times 2)$ は、内側の2と1がちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

④ 行列の積を、成分どうしのかけ算にする

$$\times \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 120 & 80 \end{pmatrix}$$

$$\bigcirc \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & 440 \\ 300 & 280 \end{pmatrix} \quad (\text{行と列をなぞる})$$

×は、同じ場所の数をかけただけです。ソラさんの合計に、みかんの値段が入っていません。表計算で=A2*C2をコピーしたときや、Pythonの*も、この×になります。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 大きさのちがう行列をたす

× 2×2 行列と 2×3 行列を
たして、3列めはそのまま
書く

○ 大きさがちがう行列は、た
せない

3列めには、たす相手がありません。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ ベクトルを左に書く

× 合計を $\vec{p}N$ と書く

○ $N\vec{p}$ (行列が左、ベクトル
が右)

$\vec{p}$ は 2×1 行列なので、
 $(2 \times 1)(2 \times 2)$ はかけられま
せん。

物理・工学ではこう使う

写真は、数の行列

カメラの中には、光を電気に変える小さなセンサー（画素）が、たてと横に何百万個も並んでいます。1つの画素は、光の強さを0（まっ黒）から255（まっ白）までの数にします。だから、白黒の写真は数の行列です（1-13の「画面は点の表」）。写真全体を明るくするのは行列の実数倍、2まいの写真を重ねるのは行列の和です（255をこえた所は255にする）。

40	40	200	40	40
40	200	200	200	40
200	200	200	200	200
40	200	120	200	40
40	200	120	200	40

物理・工学ではこう使う

栄養の計算：行列×行列

100gあたりの栄養は、ごはんが

156kcal・たんぱく質2.5g、卵（生）が142kcal・12.2gです（日本食品標準成分表 八訂）。朝食と昼食で食べた量（100g単位）の行列と、栄養の行列の積が、食事ごとの栄養の行列になります。

学校給食の献立も、こうした計算で、栄養がたりるように決めています。

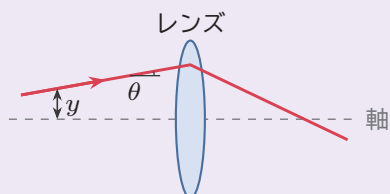
$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 156 & 2.5 \\ 142 & 12.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 305 & 9.85 \\ 454 & 17.2 \end{pmatrix}$$

行は朝食・昼食。左の列はごはん・卵、右の列はkcal・g。

物理・工学ではこう使う

カメラのレンズと光の道すじ

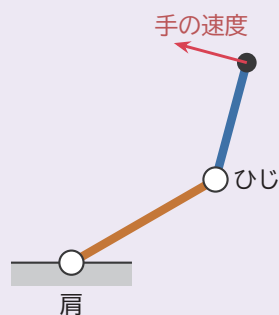
レンズを通る光の道すじは、「軸からの高さ y 」と「軸とのかたむき θ 」の2つの数の組で表せます。光がまっすぐ進む区間も、レンズを通るところも、それぞれ1つの 2×2 行列をこの組にかけて計算できます。何まいものレンズを組み合わせたカメラのレンズは、行列を次々にかけて計算します (7-3・物理 波-12)。



物理・工学ではこう使う

ロボットの腕も、行列で計算する

1-13 では「ロボットのうでのうごきも、コンピュータがかずの表でけいさんしている」と書きました。2つの関節をもつロボットの腕 (4-7) では、肩とひじの関節が回る速さを2つ並べたベクトルに、ある 2×2 行列をかけると、手の動く速度 (横とたての2つの数) が出ます。この行列はヤコビ行列とよばれ、7-2 で実際に計算します。関節が6つある産業用ロボットでは、 6×6 の行列になります。





章末問題

7-1 のまとめ

基本



1 次の行列 D について答えましょう (例題 1)。

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 何行何列の行列ですか。

(2) d_{21} 、 d_{12} 、 d_{31} を答えましょう。

2 次の P 、 Q について、 $P+Q$ 、 $P-Q$ 、 $2P-3Q$ を求めましょう。 $2P-3Q$ は、先に $2P$ と $3Q$ を作ってからひきます (例題 2)。

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3 次の積を求めましょう (例題 3)。

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4 3 人が、りんごとみかんを (3 個、1 個)、(0 個、5 個)、(2 個、2 個) 買います。りんご 1 個 150 円、みかん 1 個 40 円のと看、3 人の合計を行列×ベクトルで求めましょう (例題 4)。

5 次の連立方程式を、 $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きましょう (x 、 y (、 z) の順) (例題 5)。

$$(1) 2x - 3y = 1, x = 4y - 2$$

$$(2) x - z = 2, 2y + z = 7, x + y = 5$$

6 (1) 次の積を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 4×2 行列と 2×3 行列の積は、かけられますか。かけられるなら、答えの大きさを答えましょう(📖 例題 6)。

7 次の行列 E の転置を求めましょう。また、行列 F が対称な行列になるのは、 a がいくつのときですか(📖 例題 8)。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 7 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

チャレンジ ★★★★★

8 朝食にごはん 200 g と卵 50 g、夕食にごはん 150 g と卵 100 g を食べました。100 g あたりの栄養は、ごはんが 156 kcal・たんぱく質 2.5 g、卵が 142 kcal・12.2 g です。食べた量を 100 g 単位にして (200 g は 2、50 g は 0.5) 行列を作り、栄養の行列との積で、朝食と夕食のエネルギーとたんぱく質を求めましょう(📖 例題 6・📖 例題 7)。

9 文房具店で、ノートが 1 さつ x 円、ペンが 1 本 y 円、消しゴムが 1 個 z 円です。ノート 2 さつとペン 1 本で 380 円、ペン 2 本と消しゴム 1 個で 280 円、ノート 1 さつと消しゴム 2 個で 300 円でした。

(1) 連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きましょう(📖 例題 5)。

(2) $x = 140$ 、 $y = 100$ 、 $z = 80$ が答えであることを、 A にかけて確かめましょう(📖 例題 4)。

10

右のプログラムを実行すると、何が表示されますか。また、 $A @ B$ と $B @ A$ は同じですか(📖 例題 9)。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 2],
              [0, 1]])
B = np.array([[3, 0],
              [1, 2]])

print(A @ B)
print(B @ A)
print(A.T)
```

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 数の表を行列として読み、成分 a_{ij} を言える。和・差・実数倍を計算できる。→ 26 ページ
- ☐ 行列×ベクトル・行列×行列を、行と列をなぞって計算できる。→ 31 ページ
- ☐ 連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書き、表計算や Python で確かめられる。→ 33 ページ



ソラ

表のまま計算すると、1000 人分の買い物も 1 行で書けるね。次は、この行列が「形を変える機械」になるよ。

第1部 行列の計算



7-2

行列×ベクトル： 形を変える機械

📖 道しるべ この章の前に [4-8](#) [4-10](#) [4-11](#) [4-12](#) [4-15](#) [5-18](#) [7-1](#)
 この章の先に [7-3](#) [7-4](#) [7-6](#) [7-7](#) [7-8](#) [7-11](#) [8-3](#)

📌 この章でできるようになること

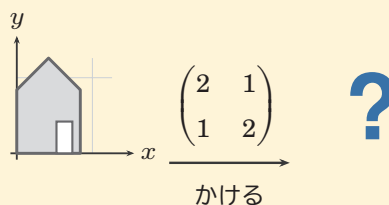
- ★★★★ 行列×ベクトルを、行と列を指でなぞりながら、成分で1つずつ計算できる。
- ★★★★★ 方眼の絵に行列をかけたときの形の変わり方を、列（物差しの矢印の行き先）から読みとれる。行き先から行列を作れる。
- ★★★★★ ロボットの腕のヤコビ行列や、部材の応力の行列を、「入ると出てくる機械」として計算できる。

? はてな？

方眼に、家の絵をかきました。家の5つのかどの点に、同じ4つの数の表をかけて、出てきた点を同じ順に結びます。

家は、どんな形になるでしょう。大きくなる？ かたむく？ 回る？

それとも、家ではなくなってしまおう？



7-1 では、行列×ベクトルの計算を「個数の表×値段の組＝合計の組」として学びました。この章では、同じ計算を、まったくちがう目で見ます。

行列は、ベクトルを入れると、別のベクトルが出てくる機械です。点を入れれば点が出てくるので、絵のすべての点を入れると、形が変わった絵が出てきます。4つの数を変えるだけで、絵をのぼしたり、裏返したり、かたむけたり、回したりできます。この見方ができると、ロボットの腕の速さや、建物の柱の中の力まで、同じ1つの計算で扱えるようになります。

この章は★★★★です。はじめて読んで分からない所があっても大丈夫です。方眼紙と電卓で手を動かせば、かならず見えてきます。

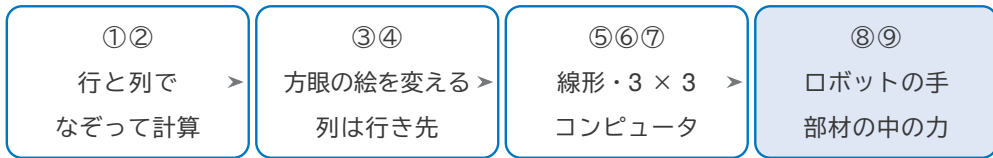


図1 この章の道のり。計算のしかた → 形の変わり方 → 性質と道具 → 工学の機械。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 7-1** 行列×ベクトル：答えの1つめは「行列の1行め」と「ベクトル」の、同じ番めの数どうしをかけてたしたもの。答えの2つめは2行めで同じことをする。個数の表×値段の組＝合計の組。
- 4-11** ベクトルは成分で $(a_x, a_y) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ 。 $\vec{e}_x = (1, 0)$ 、 $\vec{e}_y = (0, 1)$ は長さ1の物差しの矢印（4-13の基本ベクトル）。平行でない2本の矢印 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ があれば、どんなベクトルも $s\vec{a} + t\vec{b}$ （ななめの物差し）。
- 4-12** 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ （同じ向きの成分どうしをかけて、たす）。
- 4-8** 左回りに 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。
- 4-15** 角速度 ω で回る点の速度は、位置の矢印を左回りに 90° 回した向きで、大きさは $r\omega$ 。
- 5-18** 線形：答えどうしをたしても、答えを何倍しても、また答えになる性質。

Ⅷ やってみよう 方眼の家を、行列で変身させよう

用意するもの

方眼紙（5mm 方眼）、色えんぴつ、電卓（または表計算ソフト）

- 1 方眼紙のまん中あたりに x 軸と y 軸をかく。5 つのかど $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(0, 2)$ をこの順に結んで、家をかく。右によせて戸（かど $(1.25, 0)$ 、 $(1.75, 0)$ 、 $(1.75, 1)$ 、 $(1.25, 1)$ ）をかいておく。
- 2 次の行列を、5 つのかどの 1 つ 1 つにかける（計算のしかたは 7-1 と同じ）。

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{たとえば } (2, 2) \text{ は}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 0 \times 2 \\ 0 \times 2 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 3 出てきた 5 つの点を、もとと同じ順に結ぶ。戸のかども同じように計算してかく。
- 4 ほかの 4 つの行列でもやってみる（表 1）。家はどう変わったかな？
ことばで言ってみよう。

もとのかど	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(2, 0)$	$(4, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(4, 2)$
$(2, 2)$	$(4, 2)$	$(2, -2)$	$(4, 2)$	$(-2, 2)$	$(6, 6)$
$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(1, -3)$	$(4, 3)$	$(-3, 1)$	$(5, 7)$
$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(0, -2)$	$(2, 2)$	$(-2, 0)$	$(2, 4)$

表 1 ソラさんが計算した、かどの行き先

数学の道具

① ベクトルをたてに書く：入れると出てくる機械

たて書きと横書きは、同じもの

4-11 では、ベクトルを $(3, 2)$ のように横に書きました。7-1 では、値段の組を行列の右に、たてに並べました。この巻では、計算するときには、ベクトルをたてに書きます。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これは、4-11 の $\vec{x} = (3, 2)$ とまったく同じものです。原点から点 $(3, 2)$ へ向かう矢印（位置ベクトル、4-10）と考えても同じです。変わったのは並べる向きだけで、2つの数と、その順番（ x 成分が上、 y 成分が下）は変わりません。文の中では、これからも $(3, 2)$ と横に書くことがあります。

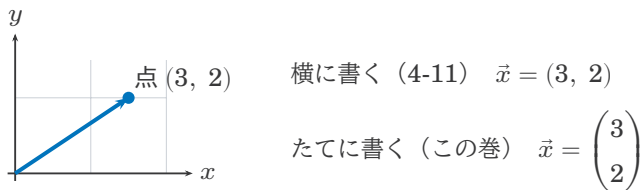


図2 同じベクトルの、2つの書き方。上が x 成分、下が y 成分。

なぜ、たてに書くのでしょうか。行列の行は横に並び、ベクトルの成分をたてに並べると、「行を横になぞる指」と「ベクトルをたてになぞる指」が、同じ数ずつ進んで、1つずつ出会うからです（②でくわしく見ます）。たてに書いたベクトルを、7-1 のことばで**列ベクトル**といいます。

行列は「入れると出てくる機械」

コピー機の「拡大」を思い出してください。どんな絵を入れても、同じきまりで（たても横も 1.41 倍に）大きくした絵が出てきます。行列×ベクトルも、これと同じ「機械」です。ベクトル $\vec{x}$ を入れると、行列 A のきまりで計算した新しいベクトル $A\vec{x}$ が出てきます。

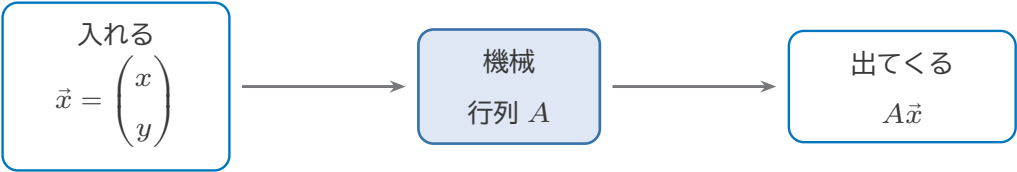


図 3 行列 A は、ベクトルを入れると、ベクトルが出てくる機械。同じ機械に、ちがうベクトルを入れれば、ちがうベクトルが出てくる。

工学の本には、この機械がたくさん出てきます。入れるものと出てくるものは、点とはかぎりません。

場面	入れるもの	機械	出てくるもの
方眼の絵 (③)	絵の点の位置	行列 A	動いたあとの点の位置
ロボットの腕 (⑧)	2 つの関節の回る 速さ	行列 J	手の速度
建物の柱やはり (⑨)	切り口の向き	行列 σ	切り口にはたらく力
ばねの網 (物理 の本)	各点のずれ	行列 K	各点にはたらく力

表 2 「入れると出てくる機械」の例。行列 σ だけ太字なのは、物理の本の書き方に合わせたため (⑨)。

2 行と列を、指でなぞる

7-1 の計算を、文字でもう一度書きます。行列の 4 つの数を a 、 b 、 c 、 d 、ベクトルを (x, y) とします。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

左手の指で行列の**行を横に**、右手の指でベクトルを**たてになぞ**ります。2本の指が同時に1つめの数にいたるとき「 a と x をかける」、同時に2つめにいたるとき「 b と y をかける」。最後に、かけたものをたします。1行めでなぞると答えの1つめ、2行めでなぞると答えの2つめです。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

1 行めでなぞる：答えの 1 つめ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

2 行めでなぞる：答えの 2 つめ

図 4 行（オレンジ）と列（青）が出会う所が、答えの成分（緑）。上：1行めとベクトルで $ax + by$ 。下：2行めとベクトルで $cx + dy$ 。ベクトルは2回とも同じものを使う。

この巻でくり返し使う「主役の行列」

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に、ベクトル $(1, 2)$ を入れてみます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

行列を左、ベクトルを右に置く

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix}$$

1行めでなぞって上、2行めでなぞって下

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

かけて、たした

点 (1, 2) を入れると、点 (4, 5) が出てきました。この (4, 5) は、④でもう一度、別の方法で求めます。

1行ずつの計算は、内積

1行めの計算 $2 \times 1 + 1 \times 2$ は、行の数を横に並べたベクトル (2, 1) と、入れたベクトル (1, 2) の**内積** (4-12) です。同じ番めの数どうしをかけてたすのが内積だからです。行列×ベクトルは、「行ごとに内積をとって、たてに並べる」計算です。

答えの1つめ = (1行め) $\cdot \vec{x}$ 答えの2つめ = (2行め) $\cdot \vec{x}$

かけられる形と、出てくる形

なぞる2本の指が、最後に同時に終わるためには、**行列の横の数の個数(列の数)**と、**ベクトルの数の個数が同じ**でなければなりません。 2×2 の行列には、2つの数のベクトルを入れます。答えは、行列の行の数だけ出てくるので、2つの数のベクトルです。また、行列はいつも**左**、ベクトルは**右**に置きます。左右を入れかえると、指が出会わず、かけられません(まちがえやすいところ②)。

③ 方眼の絵を変える

やってみようの5つの行列で、家の絵がどう変わったかを、図5の方眼にかきました。点線はもとの家です。

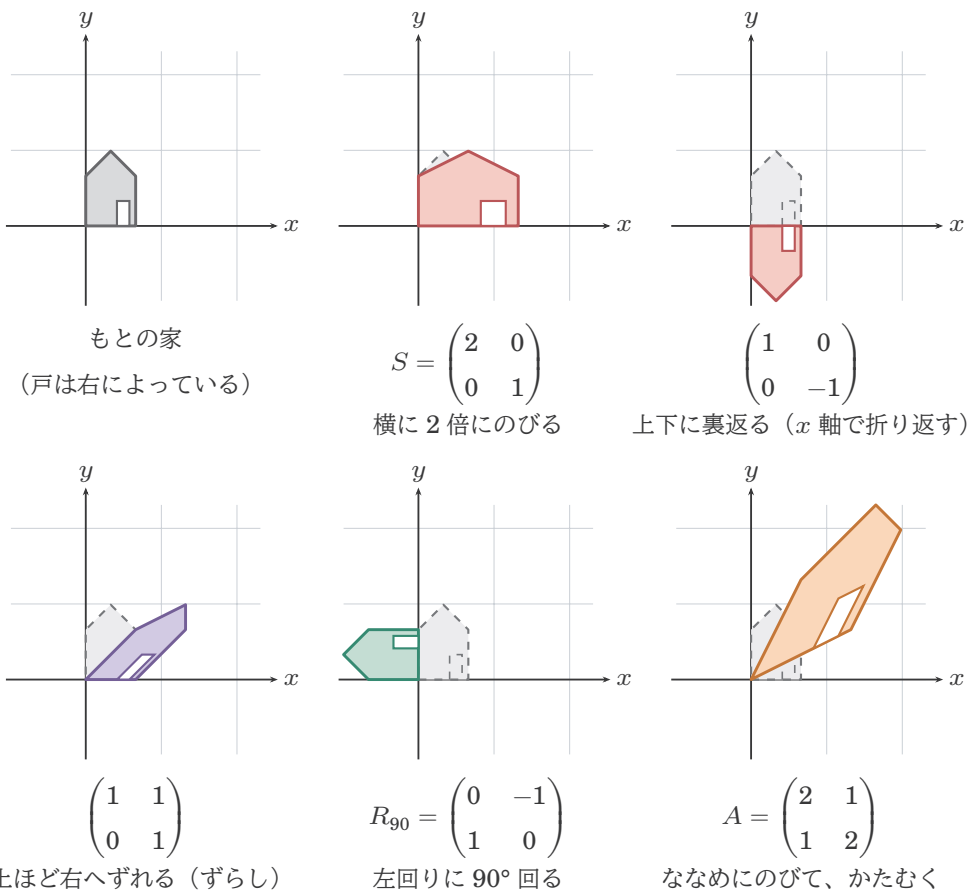


図 5 5つの行列で変わった家。どの絵でも、原点 $(0, 0)$ は動かない。まっすぐなかべは、まっすぐなまま。

まず1つずつ、なぜそうなるかを、成分で確かめます。どの行列も、 (x, y) を入れたときに出てくる点を書けば、わけがわかります。

- ① **横に 2 倍** S に (x, y) を入れると $(2x + 0y, 0x + 1y) = (2x, y)$ 。横の位置だけが 2 倍になり、高さはそのままです。
- ② **上下に裏返る** $(x, -y)$ になります。高さの符号だけが変わるので、 x 軸を折り目にして折り返した形です。屋根が下を向きました。
- ③ **ずらし** $(x + y, y)$ になります。高さ y の分だけ、右へずれます。高い所ほど大きくずれるので、トランプの山を横から押したように、家がかたむきます。床 ($y = 0$) は動きません。

4 左回りに 90° $(0x - 1y, 1x + 0y) = (-y, x)$ 。4-8 で作った「 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 」と同じです。この行列を R_{90} と書くことにします (7-6 で、どんな角でも回す行列を作ります)。

5 主役の行列 A $(2x + y, x + 2y)$ 。 x も y もまざるので、成分の式だけでは形が想像しにくいですね。これは、④の見方ですっきりわかります。

たいせつ

行列×ベクトルは、点を別の点に動かす。絵のすべての点に同じ行列をかけると、絵の形が変わる。このような点の動かし方を変換（へんかん）という。

4 列は「物差しの矢印」の行き先

主役の行列 A の変わり方を、別の見方で調べます。4-11 で、どんなベクトルも、長さ1の物差しの矢印 $\vec{e}_x = (1, 0)$ と $\vec{e}_y = (0, 1)$ を使って $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ と書けました。そこで、まず物差しの矢印2本だけを機械に入れてみます。

$$A\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0 をかけた所が消えて、1 列めだけが残る

$$A\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 列めだけが残る

出てきたのは、行列の **1 列め** $(2, 1)$ と **2 列め** $(1, 2)$ そのものです。 $\vec{e}_x$ の「1」が1列めだけを拾い、「0」が2列めを消したからです。文字で書いても同じです。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 列め}) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 列め})$$

たいせつ

行列の **1 列め**は、物差しの矢印 $\vec{e}_x$ の行き先。**2 列め**は、 $\vec{e}_y$ の行き先。

物差しが変われば、方眼ごと変わる

では、点 $(1, 2)$ はどこへ行くでしょう。 $(1, 2) = 1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ は「 $\vec{e}_x$ を 1 本、 $\vec{e}_y$ を 2 本つないだ所」です。機械を通ったあとは、物差しが $(2, 1)$ と $(1, 2)$ に変わります。だから、行き先は「新しい物差し $(2, 1)$ を 1 本、 $(1, 2)$ を 2 本つないだ所」です。

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

②で、行と列をなぞって求めた $(4, 5)$ と同じになりました。

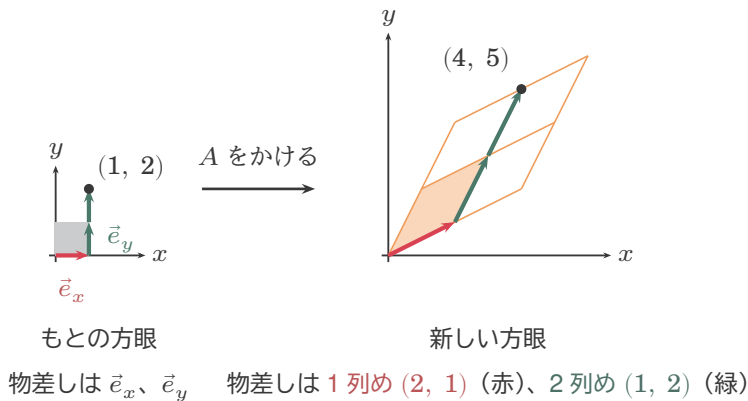


図 6 左: $(1, 2)$ は「 $\vec{e}_x$ を 1 本、 $\vec{e}_y$ を 2 本」。右: A をかけると、物差しが $(2, 1)$ と $(1, 2)$ に変わり、方眼の正方形（灰色）はすべて、この 2 本がつくる平行四辺形（オレンジ）になる。図 5 の家は、この新しい方眼の上に、同じようにかかれていた。

これが、**？はてな？** の答えです。主役の行列 A は、方眼の正方形 1 つ 1 つを、 $(2, 1)$ と $(1, 2)$ の 2 本がつくる平行四辺形に変えます。家は、もとの方眼のどのマスにどうにかかれていたかを保ったまま、ななめの方眼の上にかき直されます。だから、ななめにのびて、かたむいた家になりました。戸は右によったままで、家の形は「ゆがんだ家」として残ります。

同じことを、どんな点 (x, y) でも確かめます。 $(x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ の行き先は、新しい物差しを x 本と y 本です。

$$x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

②の「行でなぞる」計算と、ぴったり同じ式になりました。行列×ベクトルには、次の2つの見方があり、どちらも同じ答えになります。

見方	何をしているか
行で見る (②)	行ごとに、ベクトルとの内積をとる。数を計算するときに便利。
列で見る (④)	1列めを x 本、2列めを y 本つなぐ。形の変わり方を想像するときに便利。

表3 行列×ベクトルの2つの見方

🔍 もっと知りたい ★★★★★

2つの見方を、1つの式で

$(x, y) = (1, 2)$ を主役の行列に入れたとき、「行で見る」と「列で見る」が同じになるのは、たまたまではありません。行で見たときの1つめの答え $2 \times 1 + 1 \times 2$ の、「 2×1 」は1列めを1本とった分の x 成分、「 1×2 」は2列めを2本とった分の x 成分です。同じ4つのかけ算を、横に（行ごとに）まとめてたすか、たてに（列ごとに）まとめてたすかのちがいだけなのです。

$$\begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

左辺を横に読むと「行で見る」、右辺は同じ4つの数を列ごとにまとめた「列で見る」です。

行き先から、行列を作る

列で見ると、逆向きの問いにも答えられます。「 $\vec{e}_x$ をここへ、 $\vec{e}_y$ をここへ動かす行列は？」と聞かれたら、行き先をそのまま**たてに** 1 列め・2 列めに書けばよいのです。たとえば、左回りに 90° 回すと、 $\vec{e}_x = (1, 0)$ は $(0, 1)$ へ、 $\vec{e}_y = (0, 1)$ は $(-1, 0)$ へ行きます (4-8)。だから

$$R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 列めが } (0, 1), 2 \text{ 列めが } (-1, 0))$$

③の R_{90} と同じ行列ができました。行き先を**行**に並べてしまうのは、よくあるまちがいです (まちがえやすいところ③)。

4-11 のななめの物差しは、行列×ベクトル

4-11 のもっと知りたいで、 $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ をななめの物差しにして、 $(5, 5) = 2\vec{a} + 1\vec{b}$ と表しました。この $s\vec{a} + t\vec{b}$ は、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を列に並べた行列に、 (s, t) を入れたものです。

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{たとえば} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4-11 では、 $(5, 5)$ から $s = 2$ 、 $t = 1$ を連立方程式で求めました。これは、出てきたものから入れたものを求める問いで、7-5 の逆行列で解きます。また 7-9 では、行列にいちばんぴったりのななめの物差しを見つけます。

5 まっすぐはまっすぐ、原点は動かない

図 5 の 5 つの家を、もう一度見てください。どの絵にも、共通することが 3 つあります。

- (A) まっすぐなかべは、まっすぐなまま (曲がらない)。
- (B) 平行なかべは、平行なまま (図 6 の方眼の線も、平行なまま)。
- (C) 原点 $(0, 0)$ は、動かない。

(C) は、 $(0, 0)$ を入れると、どの行が相手でも「0 をかけてたす」ので、 $(0, 0)$ しか出てこないからです。(A) と (B) は、次の 2 つのきまりから出てきます。

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} \quad A(k\vec{v}) = kA\vec{v} \quad (k \text{ は数})$$

1 つめは「たしてから機械に入れても、別々に入れてから出てきたものをたしても同じ」、2 つめは「何倍かしてから入れても、入れてから何倍かしても同じ」という意味です。主役の行列で、 $\vec{u} = (1, 0)$ 、 $\vec{v} = (1, 1)$ として確かめます。

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{先にたした } (1, 0) + (1, 1) = (2, 1) \\ \text{を入れた} \end{array}$$

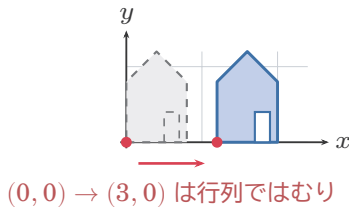
$$A\vec{u} + A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{別々に入れてから、出てきたものをた} \\ \text{した} \end{array}$$

同じになりました。成分で見ると、 $ax + by$ のどの項も「数×成分」の形で、2 乗やかけ算どうしがありません。④の「新しい物差しを x 本と y 本」が、そのままこのきまりを表しています。

このきまりは、5-18 の線形と同じ考えです（答えどうしをたしても答え、何倍しても答え）。行列をかける変換は、線形な変換です。まっすぐな線は、1 つの点から同じ向きの矢印を t 倍して並べた点の集まり（4-11 の $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$ ）なので、行き先も $A\vec{p}_0 + tA\vec{v}$ という「点から同じ向きの矢印を t 倍して並べたもの」、つまり、まっすぐな線になります。向きの矢印が同じ 2 本の平行な線は、行き先でも向きの矢印が同じ $A\vec{v}$ なので、平行なままです。

平行移動は、行列のかけ算ではできない

家を、形も向きも変えずに、そのまま右へ 3 だけ動かす（平行移動する）ことはできるでしょうか。③の「ずらし」は床を止めたままかたむける変換で、平行移動とは別のものです。右へ 3 動かすと、家の左下のかど $(0, 0)$ は $(3, 0)$ へ行かなければなりません。ところが、行列は原点を動かしません ((C))。だから、どんな 2×2 の行列をかけても、平行移動はできないのです。



平行移動は、原点も動かしてしまう。
 行列のかけ算だけではできない。
 → 7-7 で、数を 1 つふやす工夫をする

図 7 右へ 3 の平行移動。③の「ずらし」とは別のも（ずらしでは、床の点は動かない）。

ロボットの腕は、「回して、腕の長さだけ進む」をくり返します。この「進む」は平行移動です。7-7 では、点 (x, y) に 1 を加えた $(x, y, 1)$ を使って、平行移動も行列のかけ算にしてしまう方法（同次座標）を学びます。

せいかくに言うと

「 $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ と $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$ をみたす機械」を、大学の本では**線形写像**（せんけいしゃぞう）または**線形変換**、昔の高校の教科書では**一次変換**（いちじへんかん）とよびます。平面の線形写像は、かならず 2×2 の行列をかける形で書けます。 $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ の行き先さえ決まれば、ほかの点の行き先は④の「新しい物差しを x 本と y 本」で全部決まってしまう、その 2 つの行き先を列に並べたものが行列だからです。

6 3つの数のベクトル： 3×3 と 2×3 の行列

空間の点 (x, y, z) のように、数が 3 つのベクトルには、 3×3 の行列をかけます。なぞり方は同じで、1 行に 3 つの数をかけてたします。3-6 のもっと知りたいの連立方程式 $x + y + z = 9$ 、 $x - y = 1$ 、 $y - z = 1$ は、文字のない所に 0 を書くと、次のように書けます（ $x - y$ は $1x - 1y + 0z$ ）。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

答え $(x, y, z) = (4, 3, 2)$ を入れて、確かめます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1 \times 4 + (-1) \times 3 + 0 \times 2 = 1$$

図8 3×3 でも、なぞり方は同じ。2行め（オレンジ）と列（青）で、答えの2つめ（緑）。
1行めは $4 + 3 + 2 = 9$ 、3行めは $3 - 2 = 1$ 。どの行も右辺 $(9, 1, 1)$ と合うので、
 $(4, 3, 2)$ は答え。

列の見方も同じです。1列め・2列め・3列めは、空間の物差しの矢印（4-13の基本ベクトル $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ と同じもの）

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

の行き先です。たとえば

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

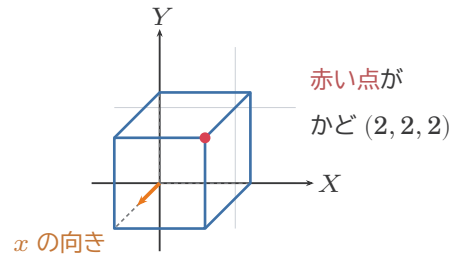
は、 x の向きに2倍、 z の向きに3倍のばす変換で、1辺1の立方体を、 $x \cdot y \cdot z$ の向きの長さが $2 \cdot 1 \cdot 3$ の箱に変えます。

3つ入れて2つ出てくる： 2×3 の行列

行列は、たてと横の数がちがってもかまいません。立体の絵を紙（平面）にかくときは、空間の点 (x, y, z) を入れると、紙の上の点 (X, Y) が出てくる機械を使います。たとえば、 x が1ふえるごとに、紙の上で左へ0.5、下へ0.5ずらしてかく見取り図（斜投影という、図面でよく使うかき方の1つ）は、次の計算です。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1 列め $(-0.5, -0.5)$ は、 x の物差し $\vec{e}_x$ が、紙の上では左へ 0.5 ・下へ 0.5 の矢印（ななめ左下）としてかけられることを表します。2 列め $(1, 0)$ は y が右向き、3 列め $(0, 1)$ は z が上向きです（④の「列は物差しの行き先」）。1 辺 2 の立方体のかど $(2, 2, 2)$ は、 $X = -1 + 2 = 1$ 、 $Y = -1 + 2 = 1$ で、紙の $(1, 1)$ にかかれます。



行列の横の数（3）は入れる数の個数、たての数（2）は出てくる数の個数です。②で見た「行列の横の数の個数と、入れるベクトルの数の個数が同じ」きまりは、ここでも守られています。

7 表計算と Python で、たくさんの点をまとめて

絵の点は何百もあるときは、コンピュータに計算させます。Python (2-19) では、行列もベクトルも `np.array` で作り（行列は 1 行ずつ `[ ]` で書く）、`@` でかけます（行列×ベクトル）。

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
ie = [(0, 0), (2, 0), (2, 2),
      (1, 3), (0, 2)] # 家のかど
for p in ie:
    print(A @ np.array(p))
```

Python

実行結果

```
[0 0]
[4 2]
[6 6]
[5 7]
[2 4]
```

表計算と同じ行き先が出ました。Python は、ベクトルを横に書いて表示しますが、中身は同じです（①）。`A * np.array(p)` と書くと、`@` とはまったく別の計算になるので注意しましょう（まちがえやすいところ⑤）。

表計算では、7-1 と同じおき方で、行列を A2 から入れ、そのすぐ右に、点を
たてに 1 列に 1 つずつ並べます (①のたて書き)。

			C5	=MMULT(\$A\$2:\$B\$3,C2:C3)			
	A	B	C	D	E	F	G
1	行列 A		家のかど (1 列に 1 つ)				
2	2	1	0	2	2	1	0
3	1	2	0	0	2	3	2
4			行き先				
5			0	4	6	5	2
6			0	2	6	7	4

表 4 A2:B3 に主役の行列、C~G 列の 2・3 行めに家のかど (上が x 、下が y)、5・6 行め
に行き先。

- ① C5 に =MMULT(\$A\$2:\$B\$3,C2:C3) を入れ、7-1 と同じように確定する
(C5:C6 に 1 つめのかどの行き先が出る)。
- ② C5:C6 を、G 列まで右へコピーする。

行列の範囲には \$ をつけて、コピーしても動かないようにします (2-18 の絶対
参照)。かどの範囲 C2:C3 には \$ をつけないので、1 列右へコピーすると D2:D3
(次のかど) に変わります。家のかどの数を書きかえると、行き先もすぐに計算
し直されるので、いろいろな絵で試してみましょう。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

5つの点を、1度にかける（7-3の予告）

5つのかどを、たてに書いたベクトルとして横に5本並べると、2行5列の表ができます。この表に、左から A をかけてみます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

答えの表（右辺の2行5列の表）の1列めは $(0, 0)$ の行き先、2列めは $(2, 0)$ の行き先…と、列ごとに行列×ベクトルをただけです。表計算なら、C5:G6をえらんで=MMULT(A2:B3,C2:G3)の1つの式で、この表が1度に出てきます。Pythonなら、5つのかどを2行5列のnp.arrayにまとめて $A @$ をつけるだけです。このように「行列×（ベクトルを並べた表）」が、次の7-3で学ぶ行列×行列です。

8 ロボットの手の速さ：ヤコビ行列

4-7の2本のうでのロボットを思い出しましょう。肩の関節が角 θ_1 、ひじの関節が角 θ_2 だけ回っています（ θ_2 は、1本めのうでの向きから測った角）。ここでは物理の本と同じ、 $L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ とします。ひじと手の位置は、4-7の順運動学の式から

$$\text{ひじ } E (L_1 \cos 30^\circ, L_1 \sin 30^\circ) = (0.260, 0.150)$$

$$\text{手 } P (0.260 + L_2 \cos 75^\circ, 0.150 + L_2 \sin 75^\circ) = (0.325, 0.391)$$

です（単位は m。2本めのうでは、横から $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ の向き）。

5-6で、「関節のモーターの回る速さから、腕の先が動く速さを求めるのに、第7巻を使う」と予告しました。肩のモーターが $\dot{\theta}_1 = 0.50 \text{ rad/s}$ 、ひじのモーターが $\dot{\theta}_2 = 1.0 \text{ rad/s}$ で回るとき、手の速度はどうなるでしょう。（ $\dot{\theta}$ は θ の時間微分、つまり角の変わる速さ＝角速度です。5-5。）

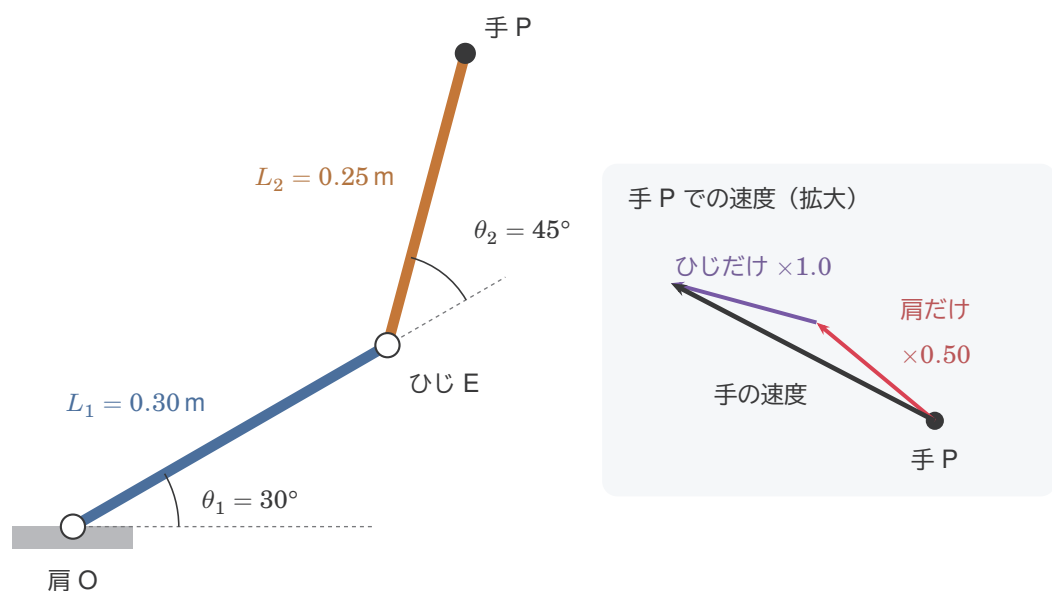


図9 左：2本のうでのロボット（物理 力-7 と同じ数）。右：手の速度（黒）は、肩だけを回したときの速度（赤）と、ひじだけを回したときの速度（紫）のたし算。

1 度に 2 つの関節を考えると、むずかしく感じます。そこで、④の「物差しの矢印の行き先」の考えを使い、1 つずつ回してみます。

手順1 肩だけを 1 rad/s で回す

ひじを固めたまま、肩だけを回すと、腕全体が 1 本の棒のように、肩 O のまわりを回ります。手 P は、O を中心とする円の上を、角速度 1 rad/s で動きます。4-15 で、回る点の速度は「位置の矢印を左回りに 90° 回した向きで、大きさ $r\omega$ 」でした。 $\omega = 1$ なので、手の位置の矢印 $\overrightarrow{OP} = (0.325, 0.391)$ を 90° 回したものの、 $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ で

手順1 の速度 $(-0.391, 0.325)$ [m/s]

手順2 ひじだけを 1 rad/s で回す

肩を止めて、ひじだけを回すと、2 本めのうでだけが、ひじ E のまわりを回ります。手 P は、E を中心とする円の上を動きます。ひじから手への矢印 $\overrightarrow{EP} = (0.325 - 0.260, 0.391 - 0.150) = (0.065, 0.241)$ を 90° 回して

手順2 の速度 $(-0.241, 0.065)$ [m/s]

手順3 2つを同時に回す

肩を $\dot{\theta}_1$ [rad/s]、ひじを $\dot{\theta}_2$ [rad/s] で同時に回すと、手の速度は、手順1 の速度を $\dot{\theta}_1$ 倍したものと、手順2 の速度を $\dot{\theta}_2$ 倍したもののたし算です（図9の右）。回る速さが2倍なら、手の速度も2倍。2つの動きは、それぞれの速度をたし合わせればよいのです。これは、④の「1列めを x 本、2列めを y 本」と同じ形です。手順1の速度を1列め、手順2の速度を2列めに並べた行列を J とすると、

$$\dot{\vec{p}} = J \dot{\vec{\theta}}$$

$$J = \begin{pmatrix} -0.391 & -0.241 \\ 0.325 & 0.065 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{\theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{p}}$ は手の位置 $\vec{p}$ の時間微分、つまり手の速度です。 $\dot{\theta}_1 = 0.50$ 、 $\dot{\theta}_2 = 1.0$ を入れます。

$$\begin{pmatrix} -0.391 & -0.241 \\ 0.325 & 0.065 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.50 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad J \text{ に、関節の角速度を入れる}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.391 \times 0.50 + (-0.241) \times 1.0 \\ 0.325 \times 0.50 + 0.065 \times 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{行でなぞる}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1955 - 0.241 \\ 0.1625 + 0.065 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4365 \\ 0.2275 \end{pmatrix} \quad \text{かけて、たした}$$

手は、左上へ、速度約 $(-0.44, 0.23)$ (m/s) で動きます。速さは三平方の定理 (4-4) で $\sqrt{0.4365^2 + 0.2275^2} \approx 0.49$ m/s です。(J を丸めずに計算すると $(-0.437, 0.227)$ になります。小さなちがいは丸めのためです。)

この行列 J を、**ヤコビ行列** (Jacobian) といいます。関節の角速度を入れると、手の速度が出てくる機械です。 J の数は、腕の形 (θ_1, θ_2) が変わると変わるので、ロボットのコンピュータは、動きながら J を何度も計算し直します。ここでは、4-15 の円運動の速度を使って J を作りました。5-6 で予告した「合成関数の微分」を使う作り方は、8-3 で学びます。「ヤコビ」という名前の由来は、7-4 のコラムで紹介します。

せいかくに言うと

手順3で「速度をたし合わせればよい」としたのは、2つの関節の角の小さな変化による手の小さな動きが、たし算で合わさるからです。角がほんの少しずつしか変わらない短い時間では、手の位置の変化は角の変化に比例し (5-18 の線形の考え)、2つの変化はたし算になります。このことを、微分を使ってきちんと確かめるのが8-3です。

9 建物の部材の中の力：応力の行列

橋のはりや建物の柱の中には、力がはたらいています。部材を頭の中で切ってみると、切り口の両側は、たがいに押したり引いたりしあっています。切り口 1 m^2 あたりにはたらく力を**応力**といいます (物理 力-9)。おもしろいのは、同じ点でも、**切る向きによって、切り口にはたらく力の大きさも向きもちがう**ことです。

物理の本では、切り口の向きを、切り口に直角な長さ 1 の矢印 $\vec{n}$ で表します。

すると、その切り口にはたらく力 (1 m² あたり) $\vec{t}$ は、

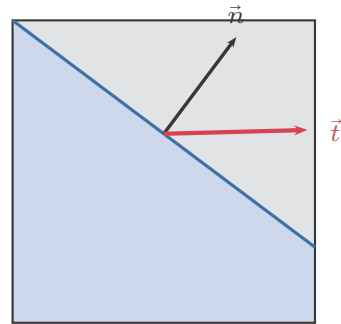
$$\vec{t} = \sigma \vec{n}$$

と、行列×ベクトルで求められます。行列 σ (シグマ) は、「切り口の向き $\vec{n}$ を入れると、その切り口の力 $\vec{t}$ が出てくる機械」です。物理の本では、成分の σ_x と区別するために、この行列だけ太字で書きます。

たとえば、ある点の応力の行列が

$$\sigma = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

のとき (MPa は N/mm²。1 mm² あたりの力の大きさ (N))、 x の向きに直角な切り口 ($\vec{n} = \vec{e}_x$) の力は、④のとおり 1 列めの (80, 30)、 y の向きに直角な切り口の力は 2 列めの (30, -20) です。物理の本で「1 列めは x の面の力」と読むのは、④の「列は物差しの行き先」そのものです。ななめの切り口の力は、例題 7 で計算します。



部材の中の小さな四角を
ななめに切った切り口

たいせつ

計算

行ごとに、ベクトルとの内積をとって、たてに並べる

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

列の意味

1 列めは $\vec{e}_x$ の行き先、2 列めは $\vec{e}_y$ の行き先

線形

$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ 、 $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$ 。原点は動かない

機械

ヤコビ行列 $\dot{\vec{p}} = J\dot{\vec{\theta}}$ 、応力 $\vec{t} = \sigma \vec{n}$

この章で出てきたことば

列ベクトル 数をたてに並べたベクトル。中身は、横に書いたベクトルと同じ。

変換 点を、きまりにしたがって別の点に動かすこと。行列をかける変換は、線形な変換。

線形写像・一次変換 たし算と何倍を保つ機械（大学の本・昔の高校の本の名前）。平面では 2×2 の行列をかけることと同じ。

ヤコビ行列 ロボットの関節の角速度を入れると、手の速度が出てくる行列。列は「その関節だけを 1 rad/s で回したときの手の速度」。

応力 部材の切り口 1 m^2 あたりにはたらく力。切り口の向きを入れると力が出てくる行列で表す。

記号カード

初めて出た章 7-2

$$A\vec{x}$$

読み方 エー・エックス

意味 行列 A に、ベクトル $\vec{x}$ を右からかけたもの。 $\vec{x}$ を入ると出てくるベクトル

英語 matrix-vector product

記号カード

初めて出た章 7-2

$$\dot{\theta}$$

読み方 シータ・ドット

意味 関節の角速度を並べたベクトル。点は時間微分(5-5)。 $J\dot{\theta}$ は手の速度

英語 joint velocity

専門書をのぞいてみよう 線形代数の本の書き方

写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が線形であるとは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ と実数 c に対して $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ 、 $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つことをいう。線形写像 f に対して $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ をみたす 2 次正方行列 A がただ 1 つ存在し、 A の第 j 列は標準基底 $\mathbf{e}_j$ の像 $f(\mathbf{e}_j)$ である。

訳 「写像」は機械、「 $\mathbb{R}^2$ 」は 2 つの数の組（平面の点）全部、「任意の」は「どんな～でも」。太字の $\mathbf{x}$ は、この本の $\vec{x}$ 。「 2 次正方行列」は 2×2 の行列、「標準基底」は物差しの矢印 $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)、「像」は行き先。つまり⑤のきまりと、④の「列は物差しの行き先」を書いている。

🔍 コラム ゲームの画面の点を、まとめて動かす

3次元のゲームでは、キャラクターや建物の形を、たくさんの小さな三角形を組み合わせて作ります。キャラクター1人で、かどの点が何千から何万もあります。キャラクターが体の向きを変えるたびに、コンピュータは、そのすべての点に、同じ行列をかけ直します。画面は1秒に60回ほどかきかえられるので、1秒に何百万回もの行列×ベクトルを計算していることになります。

この計算を速くするために、ゲーム機やパソコンには、行列×ベクトルのようなかけ算とたし算を、同時にたくさん行う専用の部品（GPU、画像処理装置）が入っています。ゲームの画面を作る部品が、いまでは人工知能の計算にも使われているのは、人工知能の計算の多くも、行列のかけ算だからです。

🔍 コラム 「ずらし」と、地震でゆれる建物

③の「ずらし」の行列（1行め $(1, k)$ 、2行め $(0, 1)$ ）は、工学では**せん断**（せんだん）とよばれる変形を表します。消しゴムを机に置いて、上の面だけを横に押すと、底は動かず、上ほど横にずれて、四角がひし形のようにかたむきます。これがせん断です。

地震で地面が横にゆれると、建物の各階も、床が横にずれて、かべや柱がかたむきます。このかたむきの大きさ（ k にあたる、横のずれ÷階の高さ）を、建築では層間変形角といいます。日本の建物の設計では、中くらいの地震のときに、これをおよそ $\frac{1}{200}$ （高さ3mの階で横に約1.5cm）以内におさえることが決められています。かべやガラス、配管がこわれなくするためです。小さな k でも、建物にとっては大切な数なのです。

例題でたしかめよう

例題1 行列×ベクトルを成分で

次の計算をしましょう。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

考え方 1行めで上の数、2行めで下の数。負の数はかっこをつけてかける。

式 1行め： $3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$

2行め： $2 \times 2 + 4 \times 5 = 4 + 20 = 24$

答え $(1, 24)$

例題2 3×3 の行列×ベクトル

右の計算をして、 $(x, y, z) = (4, 3, 2)$ が、

3-6 の連立方程式 $x + y + z = 9$ 、

$x - y = 1$ 、 $y - z = 1$ の答えであることを

確かめましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

考え方 1行に3つずつかけてたし、右辺 $(9, 1, 1)$ とくらべる。

式 1行め： $1 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 = 9$

2行め： $1 \times 4 + (-1) \times 3 + 0 \times 2 = 1$

3行め： $0 \times 4 + 1 \times 3 + (-1) \times 2 = 1$

答え $(9, 1, 1)$ で、右辺と同じ。 $(4, 3, 2)$ は答え。

じぶんでとこう 1

次の計算をしましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

じぶんでとこう 2

次の計算をしましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例題 3 家の変わり方を、ことばで言う

方眼の家（かど $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(0, 2)$ ）に、右の行列をかけます。

5 つのかどの行き先を求め、家がどう変わる

かを、ことばで言いましょう。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

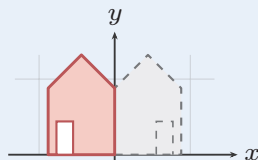
考え方 (x, y) を入れて、何が出てくるかを成分で見る。列 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y$ の行き先) でも確かめる。

式 (x, y) を入れると $(-1 \times x + 0 \times y, 0 \times x + 1 \times y) = (-x, y)$

行き先： $(0, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(-2, 2)$ 、 $(-1, 3)$ 、 $(0, 2)$

列で： $\vec{e}_x$ は $(-1, 0)$ （左向き）へ、 $\vec{e}_y$ は $(0, 1)$ のまま

答え 横の位置の符号だけが変わる。 y 軸を折り目にした左右の裏返し（戸が左によった家になる）



点線がもとの家。

y 軸で左右に折り返した。

じぶんでとこう3

同じ家に、右の行列をかけます。5つのかどの行き先を求め、家がどう変わるかを、ことばで言いましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例題4 行き先から行列を作る

$\vec{e}_x$ を $(3, 1)$ へ、 $\vec{e}_y$ を $(-1, 2)$ へ動かす行列 M を作りましょう。また、 M で点 $(2, 1)$ はどこへ行きますか。行と列の2通りで求めましょう。

考え方 ④のとおり、行き先を**たてに**、1列め・2列めを書く。

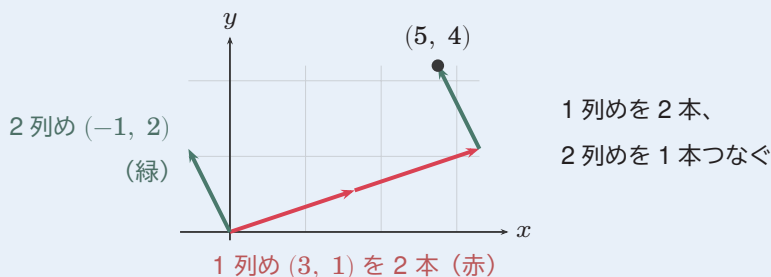
式 1列めに $(3, 1)$ 、2列めに $(-1, 2)$ をたてに書く

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行で： $3 \times 2 + (-1) \times 1 = 5$ 、 $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$

$$\text{列で：} 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

答え $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 、点 $(5, 4)$



じぶんでこう4

$\vec{e}_x$ を $(1, 2)$ へ、 $\vec{e}_y$ を $(4, -1)$ へ動かす行列を作りましょう。また、その行列で点 $(3, 2)$ はどこへ行きますか。行と列の2通りで求めましょう。

例題5 線形のきまりを使う

ある 2×2 の行列 A について、 $A\vec{u} = (3, 1)$ 、 $A\vec{v} = (-1, 2)$ であることがわかっています。 $A(2\vec{u} + 3\vec{v})$ を求めましょう。

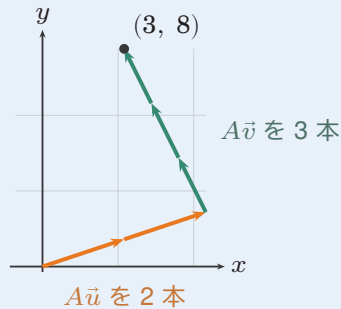
考え方 ⑤のきまり $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ 、 $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$ を使う。 A の成分がわからなくても求められる。

式 $A(2\vec{u} + 3\vec{v}) = A(2\vec{u}) + A(3\vec{v})$ (たし算のきまり)

$$= 2A\vec{u} + 3A\vec{v} \quad (\text{何倍のきまり})$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

答え $(3, 8)$



A の成分を知らなくても、
出てきた矢印をつなぐだけで
答えが求められる

じぶんでこう5

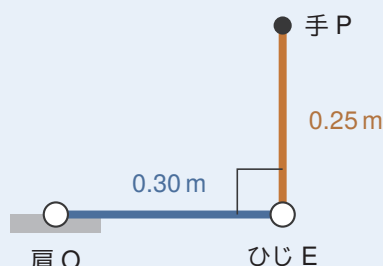
ある 2×2 の行列 A について、 $A\vec{u} = (1, 4)$ 、 $A\vec{v} = (2, -1)$ です。 $A(3\vec{u} - \vec{v})$ を求めましょう。

例題6 ロボットの手の速度

2本のうでのロボットで、 $L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 0^\circ$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$ です（腕の絵）。

(1) ヤコビ行列 J を、⑧の手順1・2の方法で作しましょう。

(2) $\dot{\theta}_1 = 0.4 \text{ rad/s}$ 、 $\dot{\theta}_2 = 0.8 \text{ rad/s}$ のときの手の速度と速さを求めましょう。



考え方 1列め=手の位置 $\overrightarrow{OP}$ を 90° 回したものの。2列め=ひじから手への $\overrightarrow{EP}$ を 90° 回したものの。 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。

式 (1) ひじ $E = (0.30, 0)$ 。2本めのうでは $0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$ の向き（真上）なので、手 $P = (0.30, 0.25)$

1列め： $\overrightarrow{OP} = (0.30, 0.25)$ を 90° 回して $(-0.25, 0.30)$

2列め： $\overrightarrow{EP} = (0, 0.25)$ を 90° 回して $(-0.25, 0)$

$$J = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.30 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.30 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 - 0.2 \\ 0.12 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.30 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$\text{速さ} : \sqrt{0.30^2 + 0.12^2} = \sqrt{0.1044} \approx 0.32$$

答え (1) 式の段の J (2) 速度 $(-0.30, 0.12) \text{ (m/s)}$ 、速さ約 0.32 m/s

メモ： J のある行が全部0だと、その行の成分（たとえば1行めなら手の速度の x 成分）は、関節をどう回してもいつも0です。手はその向きには動きません（章末問題9）。

じぶんでとこう 6

同じロボット ($L_1 = 0.30 \text{ m}$, $L_2 = 0.25 \text{ m}$) で、 $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = -90^\circ$ です (ひじから右へ曲がって、2 本めのうでは真横を向く)。

(1) ヤコビ行列 J を作りましょう。

(2) $\dot{\theta}_1 = 0.5 \text{ rad/s}$ 、 $\dot{\theta}_2 = -1.0 \text{ rad/s}$ のときの手の速度を求めましょう。

例題 7 ななめの切り口の力

応力の行列が右のような点で、向き

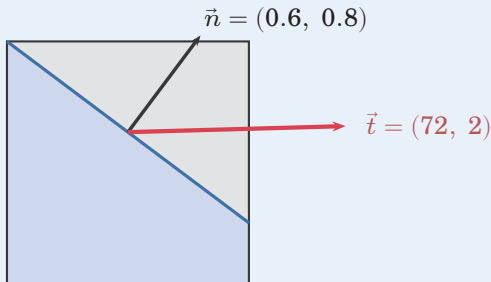
$\vec{n} = (0.6, 0.8)$ の切り口にはたらく力 $\vec{t}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} [\text{MPa}]$ を求めましょう。

考え方 ⑨の $\vec{t} = \sigma \vec{n}$ 。 $\vec{n}$ は長さ 1 ($0.6^2 + 0.8^2 = 1$) になっている。

式 1 行め: $80 \times 0.6 + 30 \times 0.8 = 48 + 24 = 72$

2 行め: $30 \times 0.6 + (-20) \times 0.8 = 18 - 16 = 2$

答え $\vec{t} = (72, 2)$ (MPa)。ほとんど x の向きの力。



切り口はななめでも、
力はほぼ真横

じぶんでとこう 7

同じ点で、向き $\vec{n} = (0.8, 0.6)$ の切り口にはたらく力 $\vec{t}$ を求めましょう。

例題8 立体の点を、紙にかく

⑥の見取り図の行列（右）で、空間の点

$(2, 4, 3)$ は、紙のどこにかかれますか。ま

た、入れる数と出てくる数は、それぞれいく

つですか。

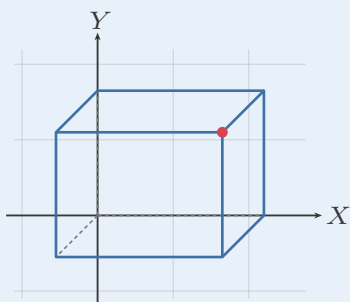
$$\begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 2×3 の行列には3つの数を入れ、2つの数が出てくる。1行に3つずつかけてたす。

式 $X = -0.5 \times 2 + 1 \times 4 + 0 \times 3 = -1 + 4 = 3$

$$Y = -0.5 \times 2 + 0 \times 4 + 1 \times 3 = -1 + 3 = 2$$

答え 紙の $(3, 2)$ 。入れる数は3つ、出てくる数は2つ。



奥行き2・横4・高さ3の箱。

赤い点のかど $(2, 4, 3)$ が、

紙の $(3, 2)$ 。

じぶんでこう8

同じ見取り図の行列（右）で、空間の点

$(4, 2, 1)$ は、紙のどこにかかれますか。

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① 列でなぞってしまう

$$\times \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 6 \\ 2 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\circ \quad \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

×は、行列を**たて**に読んでベクトルとかけています。行列は**横**（行）、ベクトルは**たて**になぞります。

⚠ まちがえやすいところ

② ベクトルを左に置く

$$\times \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{と書いて計算する}$$

$$\circ \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{（行列が左、ベクトルが右）}$$

たてのベクトルを左に置くと、左の「行」は1つの数しかなく、右の行列の列（2つの数）と指が出会いません。機械（行列）に、右から入れると覚えましょう。

⚠ まちがえやすいところ

③ 行き先を行に並べる

$$\times \quad \vec{e}_x \rightarrow (3, 1), \\ \vec{e}_y \rightarrow (-1, 2) \text{の行列を} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{とする}$$

$$\circ \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{（行き先は**たて**に、列として書く）}$$

×の行列に $\vec{e}_x = (1, 0)$ を入れると $(3, -1)$ が出てきて、ほしい $(3, 1)$ になりません。 $\vec{e}_x$ を入れると拾われるのは1列めです。

⚠ まちがえやすいところ

④ 平行移動を行列で作る

- ✗ 「右へ3動かす行列」を探す
- 原点が動く変換は、 2×2 の行列ではできない
行列は $(0, 0)$ を動かさせません
(⑤の(C))。平行移動は7-7の方法で。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ Python で * を使う

- ✗ $A * p$
- $A @ p$
- * は、行列の各行に、ベクトルを成分ごとにかけるだけで、行列×ベクトルになりません（たしてくれない）。

⚠ まちがえやすいところ

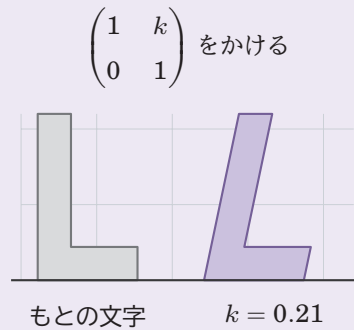
⑥ 大きさの合わないものをかける

- ✗ $\begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を計算しようとする
- 2×3 の行列には、3つの数のベクトルを入れる $((2, 4, 3))$ など
1行に3つの数があるのに、ベクトルの数が2つしかないので、3つめの数とかけるものはありません。行列の横の数の個数と、ベクトルの数の個数を、かける前にくらべましょう (②)。表計算のMMULTでは#VALUE!、Pythonではエラーになります。

物理・工学ではこう使う

ななめの文字：ずらしの行列

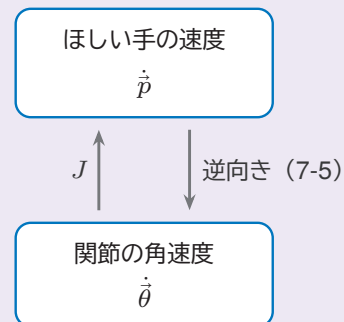
文書を作るソフトで、まっすぐな文字をななめにするとき、文字の形の点 1 つ 1 つに、ずらしの行列（図の上）をかける方法があります。高さ y の点が ky だけ右へずれ、上ほど右へかたむきます。12° かたむけるなら $k = \tan 12^\circ \approx 0.21$ です（4-6）。下の線（ $y = 0$ ）は動かないので、ななめの文字も同じ行に並びます。



物理・工学ではこう使う

ロボットを、手の速度で動かす

工場のロボットを動かす人は、「手をまっすぐ右へ 0.1 m/s で」のように、手の速度で指示したいものです。ところが、モーターに伝えられるのは、関節の回る速度だけです。そこでコンピュータは、ヤコビ行列 J の機械を逆向きに使い、ほしい手の速度から、関節の角速度を求めます。出てきたものから入れたものを求めるこの計算は、7-5 の逆行列で学びます。ロボットの全体の計算は 7-11 で読みます。



物理・工学ではこう使う

影：高さをなくす行列

真上から光が当たると、空中の点

(x, y, z) の影は、地面の $(x, y, 0)$

にできます。これは、図の上の行列を

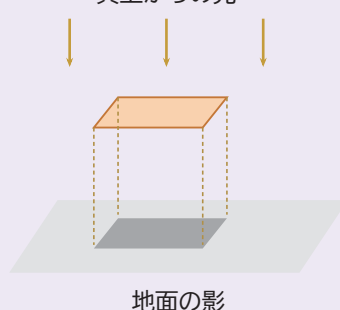
かけることと同じです。3列めが

$(0, 0, 0)$ 、つまり高さの物差し $\vec{e}_z$ の行き先が0なので、立体は平らにつぶれ、影から元の高さはわかりません。

行列が「つぶす」かどうかを1つの数で見分ける方法は、7-4（行列式）で学びます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

真上からの光



物理・工学ではこう使う

ばねの網：ずれを入ると、力が出てくる

かべにばね定数 100 N/m のばね 2

本を直列につなぎ、つなぎ目を点 1、

はしを点 2 とします。点 1・点 2 を

u_1, u_2 [m] だけ右へずらしておく

力 F_1, F_2 [N] は、ばねの力（のび

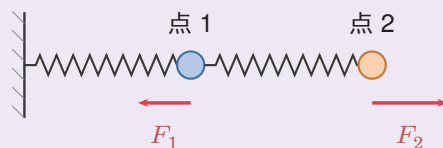
×ばね定数）をたして

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

です。 $u_1 = 0.01$ 、 $u_2 = 0.03$ なら

$F_1 = -1$ 、 $F_2 = 2$ （点 1 は左へ

1 N、点 2 は右へ 2 N）。



行列 K は「ずれを入ると力が出てくる機械」。橋や建物の計算（物理 力-16）では何万行にもなる。



章末問題

7-2 のまとめ

基本



1 次の計算をしましょう( 例題 1)。

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

2 方眼の家 (かど $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(0, 2)$) に、次の行列をかけます。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 つかの道の行き先を求め、家はどう変わるかを、ことばで言いましょう( 例題 3)。

3 $\vec{e}_x$ を $(2, -1)$ へ、 $\vec{e}_y$ を $(1, 3)$ へ動かす行列を作りましょう。また、その行列で点 $(1, 2)$ はどこへ行きますか( 例題 4)。

4 ある 2×2 の行列 A について、 $A\vec{u} = (2, 0)$ 、 $A\vec{v} = (1, 3)$ です。 $A(\vec{u} + 2\vec{v})$ と $A(4\vec{u} - 3\vec{v})$ を求めましょう( 例題 5)。

5 次の計算をしましょう( 例題 2)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6 ⑧のロボット (J は 1 行め -0.391 、 -0.241 、2 行め 0.325 、 0.065) で、 $\dot{\theta}_1 = 1.0 \text{ rad/s}$ 、 $\dot{\theta}_2 = -0.5 \text{ rad/s}$ のとき、手の速度を求めましょう (例題 6)。

7 ⑥の見取り図の行列 (下) で、空間の点 $(2, 2, 4)$ と $(0, 3, 1)$ は、それぞれ紙のどこにかかれますか (例題 8)。

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

チャレンジ ★★★★★

8 ⑨の応力の行列 σ (1 行め 80 、 30 、2 行め 30 、 -20 、単位 MPa) で、向き $\vec{n} = (0.6, -0.8)$ の切り口にはたらく力 $\vec{f}$ を求めましょう (例題 7)。

9 ⑧のロボット ($L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$) の腕を、まっすぐ横にのばしました ($\theta_1 = 0^\circ$ 、 $\theta_2 = 0^\circ$) (例題 6)。

(1) ヤコビ行列 J を作りましょう。

(2) $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 1 \text{ rad/s}$ のときの手の速度を求めましょう。

(3) この姿勢のまま、関節をどんな速さで回しても、手を x の向き (腕ののびる向き) には動かさせません。その理由を、 J の 1 行めから説明しましょう。

10 物理・工学ではこう使うの「ななめの文字」と同じずらしの行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を、文字「L」のかど $(0, 0)$ 、 $(0, 5)$ 、 $(1, 5)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(3, 0)$ にかけてます。6 つのかどの行き先を求め、文字がどう変わるかを、ことばで言いましょう (例題 3)。

11 方眼の家（かど $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(0, 2)$ ）に、次の行列をかけます。5つのかどの行き先を求め、家はどう変わるかを、ことばで言ひましよう。ヒント：直線 $y = x$ を考えてみよう（ **例題 3**）。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 行列×ベクトルを、行と列をなぞって計算できる。 → 69 ページ
- ☐ 列（物差しの矢印の行き先）から、絵の変わり方を読みとり、行き先から行列を作れる。 → 72 ページ
- ☐ ヤコビ行列や応力の行列を、「入れると出てくる機械」として計算できる。 → 81 ページ



ミナ

4つの数で、絵も、ロボットの手も動かせるんだね。次の 7-3 では、機械を 2 つつないでみよう。

第1部 行列の計算



7-3

行列×行列： 変換をつなぐ

📌 道しるべ この章の前に 4-8 4-12 6-10 6-13 7-1 7-2
 この章の先に 7-4 7-5 7-6 7-7 7-9 7-10 7-11 8-4

📌 この章でできるようになること

- ★★★★ 2×2 や 3×3 の行列×行列を、行と列の内積で計算できる。
- ★★★★★ 2つの変換をつなぐと行列の積になること、かける順番で結果が変わることを、方眼の絵と数で説明できる。
- ★★★★★ 電気の「箱」をつないだ回路（四端子定数）を、行列の積で計算できる。

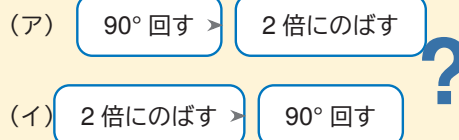
? はてな？

方眼の家に、2つのことをします。

(ア) 左回りに 90° 回してから、横に2倍にのぼす。

(イ) 横に2倍にのぼしてから、左回りに 90° 回す。

することは同じ2つで、順番がちがうだけです。できあがる家は、同じになるでしょうか。



7-2で、行列は「ベクトルを入れると、別のベクトルが出てくる機械」だと学びました。工学では、機械を1つだけ使うことはあまりありません。ロボットの腕は、肩・ひじ・手首の関節の回転をつないで動きます。電気の回路は、部品の

入った箱をつないで作ります。カメラのレンズも、何枚ものレンズをつないでいます。

この章では、機械を2つつなぐと何が起きるかを調べます。答えを先に言うと、**2つの機械は、1つの機械（1つの行列）にまとめられます**。そのまとめ方が、行列×行列です。7-1で買い物の表から決めた「行×列」のきまりが、なぜあの形なのかも、この章でわかります。かける順番の話は、はじめはふしぎに感じるかもしれませんが、1回でわからなくても大丈夫です。方眼の絵で、何度でも確かめましょう。

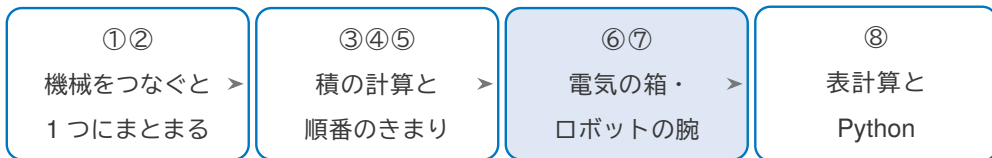


図1 この章の道のり。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 7-2** 行列×ベクトル $A\vec{x}$ ：行ごとにベクトルとの内積をとる。行列の1列めは $\vec{e}_x$ の行き先、2列めは $\vec{e}_y$ の行き先。 S （1行め 2、0、2行め 0、1）は横に2倍、 R_{90} （1行め 0、-1、2行め 1、0）は左回りに 90° 。
- 7-1** 行列×行列（お店が2つ）：右の行列の列ごとに、行列×ベクトルをする。左の行列の列の数と、右の行列の行の数が同じでないとかけられない。
- 4-12** 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ （同じ向きの成分どうしをかけて、たす）。
- 3-6** 合わさった電流は、たし算。オームの法則：抵抗 R [Ω] に電流 I [A] が流れると、電圧は RI [V]。
- 6-10** インピーダンス：コイルは「電圧 = $j\omega L \times$ 電流」、コンデンサーは「電流 = $j\omega C \times$ 電圧」（ $j^2 = -1$ 、6-8）。

Ⅷ やってみよう 紙の家で、順番を入れかえてみよう

用意するもの

方眼紙 (5 mm 方眼)、色えんぴつ、電卓

- ① 7-2 の家 (かど $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(0, 2)$) の5つのかどに、まず R_{90} をかける。出てきた点に、つぎに S をかける (はてな? の (ア))。
- ② こんどは、まず S 、つぎに R_{90} をかける ((イ))。
- ③ 2 つの家を、方眼紙に色を変えてかく。同じ家になったかな?

もとのかど	(ア) まず R_{90}	つぎに S	(イ) まず S	つぎに R_{90}
$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(4, 0)$	$(0, 4)$
$(2, 2)$	$(-2, 2)$	$(-4, 2)$	$(4, 2)$	$(-2, 4)$
$(1, 3)$	$(-3, 1)$	$(-6, 1)$	$(2, 3)$	$(-3, 2)$
$(0, 2)$	$(-2, 0)$	$(-4, 0)$	$(0, 2)$	$(-2, 0)$

表1 ミナさんが計算した、かどの行き先

数学の道具

① 2 つの機械をつなぐ

やってみようの (ア) を、機械の図にかきます。点 $\vec{x}$ を、まず機械 R_{90} に入れ、出てきた $R_{90}\vec{x}$ を、そのまま機械 S に入れます。

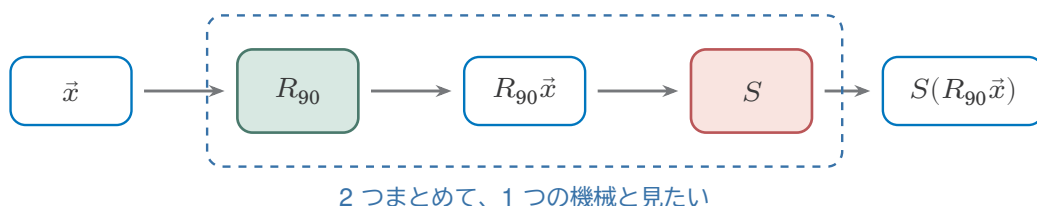


図2 機械を2つつなぐ。先に通るのは R_{90} 、あとに通るのは S 。

どんな点 (x, y) でも、1 つずつ計算できます。

$$R_{90} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{まず } 90^\circ \text{ 回す (4-8} \\ \text{の } (-y, x)) \end{array}$$

$$S \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{出てきたものを、横} \\ \text{に 2 倍} \end{array}$$

入れた (x, y) から、 $(-2y, x)$ が出てきました。これは、 $-2y = 0x - 2y$ 、 $x = 1x + 0y$ なので、次の行列を1回かけたのと同じです。

$$\begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

つまり、2つの機械 R_{90} と S をつないだものは、上の1つの機械（行列）にまとめられます。やってみようの表で確かめます。かど $(2, 2)$ を入れると、 $(0 \times 2 - 2 \times 2, 1 \times 2 + 0 \times 2) = (-4, 2)$ 。表の(ア)の答え $(-4, 2)$ と同じです。

まとめた機械を、積とよぶ

このまとめた機械を、2つの行列の積（せき）といい、 SR_{90} と書きます。

$$S(R_{90}\vec{x}) = (SR_{90})\vec{x} \quad SR_{90} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、とても大切な注意があります。先に通る機械 R_{90} が**右**、あとに通る機械 S が**左**です。 $S(R_{90}\vec{x})$ のかっこを見ると、 $\vec{x}$ にいちばん近い（右にある） R_{90} が先にかかっています。行列の積は、**右から順に読む**のです。

たいせつ

2つの変換をつなぐと、1つの行列(積)にまとめられる。 $AB\vec{x} = A(B\vec{x})$
では、右の B が先、左の A があと。

② 積の決め方には、わけがある

①でしたことを、どんな2つの行列でもやってみます。先にかける行列を B 、あとにかける行列を A として、成分を文字で書きます。

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

点 (x, y) を、まず B に、つぎに A に入れます。式の変形は1行に1つずつです。

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{まず } B \text{ に入れる} \\ (7-2) \end{array}$$

$$A \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(px + qy) + b(rx + sy) \\ c(px + qy) + d(rx + sy) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{出てきたものを } A \\ \text{に入れる} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} (ap + br)x + (aq + bs)y \\ (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{かっこを開き、} x \text{ の} \\ \text{項と } y \text{ の項にまと} \\ \text{めた} \end{array}$$

最後の形は、 x と y に4つの数をかけてたした形、つまり、行列×ベクトルです。その4つの数を表に並べたものが、まとめた機械 AB です。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

よく見てください。左上の $ap + br$ は、 A の 1 行め (a, b) と、 B の 1 列め (p, r) の内積 (4-12) です。右上の $aq + bs$ は、 A の 1 行めと B の 2 列め (q, s) の内積。下の行も同じです。これは、7-1 で買い物の表 (お店が 2 つ) から決めた「右の行列の列ごとに、行列×ベクトルをする」きまりと、ぴったり同じです。

7-1 では「合計を計算するのに便利だから」という理由で、行列の積をこう決めました。ここで、もう 1 つの理由がわかりました。**機械を 2 つつないだものを、1 つの機械として表すと、自然にこの形になるのです。**行列の積が「成分どうしのかけ算」ではなく、この少し複雑な形をしているのは、そのためです。

列で見ると：積の 1 列めは、 B の 1 列めの行き先

7-2 の「列は物差しの行き先」でも確かめられます。 AB の 1 列めは、 $\vec{e}_x$ を AB に入れたときに出てくるものです。 $\vec{e}_x$ は、まず B で B の 1 列め (p, r) へ行き、つぎに A で $A(p, r)$ へ行きます。だから

$$AB \text{ の 1 列め} = A \times (B \text{ の 1 列め}) \quad AB \text{ の 2 列め} = A \times (B \text{ の 2 列め})$$

①の SR_{90} で確かめると、 R_{90} の 1 列め $(0, 1)$ に S をかけて $(0, 1)$ 、2 列め $(-1, 0)$ に S をかけて $(-2, 0)$ 。積 SR_{90} の 1 列め $(0, 1) \cdot 2 \text{ 列め } (-2, 0)$ と同じです。「右の行列の列ごとに、左の行列をかける」という 7-1 のきまりは、この意味だったのです。

🔍 もっと知りたい ★★★

形でなくても、つなげる：お菓子の材料

お菓子屋さんで、クッキー 1 箱に小麦粉 200 g と卵 1 個、ケーキ 1 個に小麦粉 150 g と卵 3 個を使います。A さんはクッキー 2 箱とケーキ 1 個、B さんはクッキー 1 箱とケーキ 2 個を注文しました。「注文→作る数」と「作る数→材料」の 2 つの表を、つなぎます。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{作る数} \rightarrow \text{材料}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{注文} \rightarrow \text{作る数}} = \begin{pmatrix} 550 & 500 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

積の 1 列めは、A さんの注文に必要な小麦粉 550 g と卵 5 個、2 列めは B さんの分 (500 g と 7 個) です。ここでも、先に使う表 (注文→作る数) が右です。順番を入れかえた積は、「材料」を「作る数」の表に入れることになり、意味がありません。

🔍 コラム 行列のかけ算は、変換をつなぐことから

行列の計算のきまりを 1 つの理論としてまとめたのは、イギリスの数学者ケイリーで、1858 年の論文でした (名前の由来は 7-0 のコラム)。

ケイリーが行列のかけ算を考えたのも、この章の①と同じ「2 つの変換をつなぐと、どうなるか」という問いからでした。ケイリーは、この論文で、かける順番を入れかえると答えが変わる ($AB \neq BA$) ことも書いています。この「ふしぎなかけ算」は当時の数学者にはおどろきでしたが、いまでは、ロボット・ゲームの画面・電気回路の計算に欠かせない道具になっています。

3 積の成分は、行と列の内積

②のきまりを、計算の手順にします。物理の本では「積の成分は、1 つめの行列の行と、2 つめの行列の列の内積」と言います。積の i 行め j 列めの成分は、左の行列の i 行めと、右の行列の j 列めを、指でなぞってかけてたしたものです。主役の行列 A と、ずらしの行列 H で計算します。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$$

1 行めと 2 列め → 1 行め 2 列めの成分

図 3 AH の 1 行め 2 列めの成分は、 A の 1 行め（オレンジ）と H の 2 列め（青）の内積。行と列が出会う所（緑）に書く。

4 つの成分を、1 つずつ書きます。

積の成分	A の行	H の列	内積
1 行め 1 列め	1 行め (2, 1)	1 列め (1, 0)	$2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$
1 行め 2 列め	1 行め (2, 1)	2 列め (1, 1)	$2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$
2 行め 1 列め	2 行め (1, 2)	1 列め (1, 0)	$1 \times 1 + 2 \times 0 = 1$
2 行め 2 列め	2 行め (1, 2)	2 列め (1, 1)	$1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$

表 2 AH の 4 つの成分。 AH は 1 行めが 2、3、2 行めが 1、3。

かけられる大きさと、できる大きさ

指でなぞる行と列は、同じ数ずつ進んで同時に終わらなければなりません。だから、**左の行列の列の数（横の数）と、右の行列の行の数（たての数）が同じときだけ、かけられます（7-1）**。できる行列は、左の行列の行の数だけ行があり、右の行列の列の数だけ列があります。

$$(m \text{ 行 } n \text{ 列}) \times (n \text{ 行 } p \text{ 列}) = (m \text{ 行 } p \text{ 列})$$

内側の n がそろそろかけられ、外側の m と p が残ります。たとえば、2行3列 $\times$ 3行2列は、内側の3がそろそろのでかけられて、2行2列の行列ができます。2行3列 $\times$ 2行3列は、内側が3と2でそろわないので、かけられません。7-2の行列 $\times$ ベクトルも、(2行2列) $\times$ (2行1列) = (2行1列) の、この形の1つです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

積の転置は、順番が逆になる

7-1の転置(たてと横の入れかえ、 A^T)と積を組み合わせると、次のきまりがあります。

$$(AB)^T = B^T A^T$$

③の A と H で確かめます。 AH は1行めが2、3、2行めが1、3なので、 $(AH)^T$ は1行めが2、1、2行めが3、3。いっぽう

$$H^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

で、同じです。 AB の i 行 j 列めは「 A の i 行めと B の j 列めの内積」でした。転置すると行と列が入れかわるので、 B^T の行 (= B の列) と A^T の列 (= A の行) の内積になり、順番が逆になるのです。このきまりは、7-5の最小二乗法や7-6の回転で使います。

④ 順番を変えると、結果が変わる

はてな? の(イ)は、まず S 、つぎに R_{90} でした。右から読むので、まとめた行列は $R_{90}S$ です。③の手順で計算します。

$$R_{90}S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

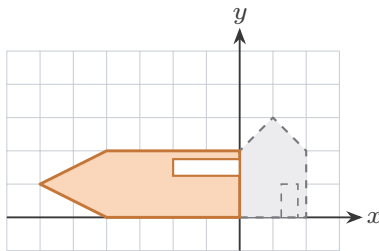
先に S (右)、あとで R_{90} (左)

$$= \begin{pmatrix} 0 \times 2 + (-1) \times 0 & 0 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix}$$

行と列の内積

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

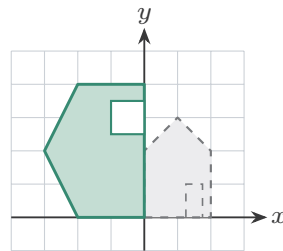
①の SR_{90} (1行めが 0、-2、2行めが 1、0) とは、ちがう行列になりました。 $\vec{e}_x = (1, 0)$ を入れてみると、 SR_{90} では 1 列めの $(0, 1)$ へ、 $R_{90}S$ では 1 列めの $(0, 2)$ へ行きます。



(ア) まず回して、のぼす

$$SR_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

横に長い、ねた家



(イ) まずのぼして、回す

$$R_{90}S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

たてに長い、ねた家

図 4 同じ 2 つの変換でも、順番を変えると、ちがう家になる (点線はもとの家)。(ア) は横に、(イ) はたてに長い。

これが、**？はてな？** の答えです。(ア) では、先に回したので、もとの家の「たて」が横向きになり、その横向きのものを 2 倍にのぼしました。だから、ねた家が**横に**長くなります。(イ) では、先にもとの家の「横」を 2 倍にしてから回したので、長くなった部分がたてを向き、ねた家が**たてに**長くなります。

たいせつ

行列の積では、ふつう $AB \neq BA$ 。かける順番を勝手に入れかえてはいけない。

数のかけ算では、 $2 \times 3 = 3 \times 2$ のように、順番を入れかえても同じでした（交換法則）。行列の積では、これがふつうは成り立ちません。くつ下をはいてからくつをはくのと、くつをはいてからくつ下をはくのが、ちがう結果になるのと同じです。

順番を変えても同じになる、特別な場合

いつもちがうわけではありません。次のような場合は、 $AB = BA$ になります。

- **ななめ以外が0の行列どうし**（横と、たての、のぼし方だけを決める行列）：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

横に2倍してから3倍しても、3倍してから2倍しても、横は6倍です。

- **平面の回転どうし**： 30° 回してから 45° 回しても、 45° 回してから 30° 回しても、 75° 回したのと同じ（7-6 で確かめます）。
- **同じ行列どうし**： AA は、入れかえても AA です。

せいかくに言うと

「ふつう $AB \neq BA$ 」とは、「 $AB = BA$ がいつも成り立つとはかぎらない」という意味です。上のように成り立つ組もありますが、成り立たない組が1つでもあるので、きまりとしては使えません。また、 A が2行3列、 B が3行2列のように大きさがちがうと、 AB は2行2列、 BA は3行3列で、大きさからしてちがいます。 A が2行3列、 B が3行3列なら、 AB はかけられても、 BA はかけられません（内側が3と2）。

5 区切りは自由、何もしない機械

3 つつないでも、どこで区切ってもよい

機械を 3 つ、 C 、 B 、 A の順につなぎます（右から読むので ABC ）。前の 2 つ C と B を先にまとめて (BC) にしても、後ろの 2 つ B と A を先にまとめて (AB) にしても、点が機械を通る順番は同じ $C \rightarrow B \rightarrow A$ です。だから、

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立ちます（結合法則）。 S 、 R_{90} 、 H で確かめます。③と同じ手順で計算すると、 $R_{90}H$ は 1 行めが 0、 -1 、2 行めが 1、1 です。①の SR_{90} と合わせて

$$(SR_{90})H = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(R_{90}H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

同じになりました。順番（左右の並び）さえ変えなければ、かつこの位置は自由です。だから、かっこをはずして ABC と書いてかまいません。

何もしない機械：単位行列 I

ななめが 1 で、ほかが 0 の行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、7-1 で名前だけ出てきた**単位行列**（たんいぎょうれつ）です。1 列め $(1, 0)$ は $\vec{e}_x$ の行き先、2 列め $(0, 1)$ は $\vec{e}_y$ の行き先なので、物差しをまったく動かさない、「何もしない機械」です。何もしない機械を前や後ろにつないでも、変わりません。

$$AI = IA = A$$

数のかけ算で、1をかけても変わらない ($5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$) のと同じ役目です。 3×3 の単位行列は、ななめに1が3つ並んだ行列です。

同じ機械を何回もつなぐ： A^2 、 A^3

同じ行列を2回つないだ AA を A^2 、3回つないだ AAA を A^3 と書きます。主役の行列で計算します。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

A^2 は、成分をそれぞれ2乗したもの（1行め4、1、2行め1、4）では**ありません**（まちがえやすいところ⑤）。何回もかけると数がどんどん大きくなりますが、どの向きにどれだけ大きくなるのかは、7-8の固有値と7-10で調べます。また、 R_{90} を2回つなぐと

$$R_{90}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

で、 180° 回す（どの点も $(-x, -y)$ へ行く）行列になります。 90° を2回で 180° 。6-8の $j^2 = -1$ （ j をかけると 90° 回る）とそっくりです。

⑥ 電気の箱をつなぐ：四端子定数

電気の回路では、部品の入った「箱」を何個もつなぐことがよくあります。音をよくする回路、雑音を取りのぞく回路（フィルター）、遠くまで電気を送る送電線。どれも「入口が2本、出口が2本の線」の箱を、くさりのようにつないだものと考えられます。この箱を、行列で表してみましょう。

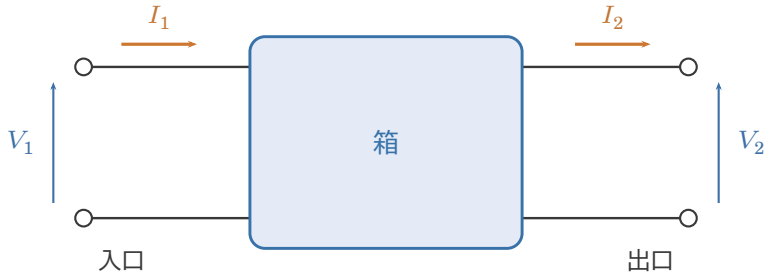
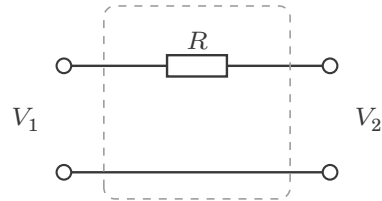


図5 入口の電圧 V_1 [V]・電流 I_1 [A] と、出口の電圧 V_2 ・電流 I_2 。 I_2 は、出口から次の箱へ出ていく電流。

箱の入口の電圧と電流の組 (V_1, I_1) と、出口の組 (V_2, I_2) を考えます。電気の本では、**出口の組を入れたら、入口の組が出てくる機械**として箱を表すことに決めています。出口に「ほしい電圧と電流」を決めると、入口に何を用意すればよいかかわかる、という向きです。

箱 1：直列の抵抗

上の線のとちゅうに、抵抗 R [Ω] を1つ入れた箱です。電流は抵抗を通りぬけるだけなので、入口と出口で同じです： $I_1 = I_2$ 。電圧は、抵抗の電圧 RI_2 (オームの法則) の分だけ、入口が高くなります： $V_1 = V_2 + RI_2$ 。

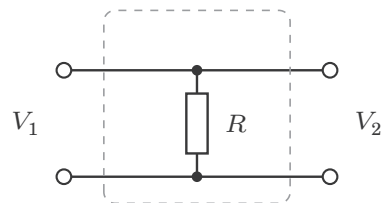


$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 + RI_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

($V_2 + RI_2 = 1V_2 + RI_2$ 、 $I_2 = 0V_2 + 1I_2$ と見て、4つの数を並べた。)

箱 2：並列の抵抗

上の線と下の線のあいだに、抵抗 R を橋のようにわたした箱です。電圧は、入口と出口で同じです： $V_1 = V_2$ 。入口から入った電流は、抵抗を通る V_2/R と、出口へ行く I_2 に分れます。合わさった電流はたし算 (3-6) なので： $I_1 = \frac{1}{R}V_2 + I_2$ 。



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{1}{R}V_2 + I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

箱をつなぐと、行列のかけ算

箱1 ($R = 2\Omega$) のあとに、箱2 ($R = 2\Omega$) をつなぎます。箱1の出口の組を (V_2, I_2) 、箱2の出口の組を (V_3, I_3) とします。箱1の出口は、箱2の入口そのものです。

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad \text{箱2 (並列 } 2\Omega, \frac{1}{2} = 0.5)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{箱1 (直列 } 2\Omega)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad \text{上の式を入れた (①と同じ「機械をつなぐ」)}$$

2つの箱は、1つの行列にまとめられます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0.5 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0.5 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

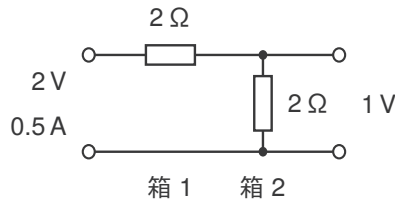
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

行列の並び (箱1が左、箱2が右) が、回路の図の箱の並び (入口側が左) と同じになりました。①の「右が先」とも合っています。出口から計算を始めるので、出口に近い箱2が先にかかるのです。

確かめ：出口を開いたとき

出口に何もつながらない（電流が出ていかない、 $I_3 = 0$ ）で、出口の電圧が $V_3 = 1\text{V}$ になるようにするには、入口に何が必要でしょう。行列に $(1, 0)$ を入れると、1 列めの $(2, 0.5)$ が出てきます。入口は $2\text{V} \cdot 0.5\text{A}$ です。

回路で確かめます（次の回路の図）。出口に電流が出ていかないので、電流は 2 つの抵抗を順に流れ、合わせて 4Ω です。 2V なら $2 \div 4 = 0.5\text{A}$ 、並列の抵抗の電圧は $2 \times 0.5 = 1\text{V}$ 。行列の答えと合っています。



つなぐ順番を変えると

箱 2 を先（入口側）に、箱 1 をあとにつなぐと、行列の順番も入れかわります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

出口を開いて $V_3 = 1\text{V}$ なら、入口は 1 列めの $1\text{V} \cdot 0.5\text{A}$ です。こんどは並列の抵抗が入口にじかにつながっているの、そこに $1 \div 2 = 0.5\text{A}$ 流れるだけで、直列の抵抗には電流が流れず、電圧は下がりません。同じ 2 つの部品でも、つなぐ順番で回路のはたらきが変わります。④の $AB \neq BA$ が、回路でも起きているのです。

四端子定数

このように、入口が 2 本・出口が 2 本の線の箱を表す 2×2 の行列の 4 つの数を、電気の本では**四端子定数**（よんたんしていすう）または F 行列とよび、 A, B, C, D の文字で書きます。この巻では、行列の名前の A とまぎれないように、数で書きます。左上と右下は「電圧÷電圧」「電流÷電流」で単位がな

く、右上は抵抗と同じ Ω 、左下は「電流÷電圧」で $1/\Omega$ (S、ジーメンズ) の単位をもちます。

箱1・箱2のどちらも、また、つないだ行列(1行め2、2、2行め0.5、1)も、「左上×右下－右上×左下」が $2 \times 1 - 2 \times 0.5 = 1$ になっています。これがなぜかは、7-4(行列式)で学びます。また7-11では、長い送電線を「小さな箱を何個もつないだもの」と見て、同じ考えで調べます。

せいかくに言うと

この本では、出口の電流 I_2 を「出口から次の箱へ出ていく向き」にとりました(図5)。こうすると、箱1の出口の電流が、そのまま箱2の入口の電流になるので、箱をつなぐことが行列のかけ算だけで表せます。本によっては、 I_2 を「出口から箱へ入る向き」としているものがあります。その場合は I_2 の符号が逆になり、右上と右下の数の符号(+と-)が入れかわります。専門書を読むときは、まず電流の向きの決め方を確かめましょう。

コイルとコンデンサーの箱

6-10で、交流ではコイルが「電圧 = $j\omega L \times$ 電流」、コンデンサーが「電流 = $j\omega C \times$ 電圧」になることを学びました。抵抗の R のかわりに、コイルでは $j\omega L$ を、並列の抵抗の $\frac{1}{R}$ のかわりに、コンデンサーでは $j\omega C$ を使えば、同じ形の箱になります。成分が複素数になるだけで、行列のかけ算のしかたは同じです。コイルの箱(入口側)とコンデンサーの箱(出口側)をつなぐと、

$$\begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

です($j^2 = -1$ なので $j\omega L \times j\omega C = -\omega^2 LC$)。例題9で、雑音を取りのぞく回路(6-13のローパスフィルター)の仲間を計算します。

専門書をのぞいてみよう 電気回路の本の書き方

二端子対回路の入力側の電圧・電流 V_1 、 I_1 と出力側の電圧・電流 V_2 、 I_2 の関係を

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき、 A 、 B 、 C 、 D を四端子定数（F パラメータ）という。二つの二端子対回路を縦続接続した回路の F 行列は、各回路の F 行列の積で与えられる。

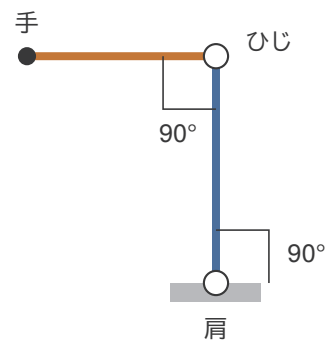
訳 「二端子対回路」は入口 2 本・出口 2 本の線の箱、「入力側」は入口、「出力側」は出口。「縦続接続」は、箱を前の出口と次の入口でくさりのようにつなぐこと。つまり⑥の「箱をつなぐと、行列のかけ算」を書いている。ここの A や D は数の名前で、行列の名前ではない。

7 ロボットの腕：肩とひじの回転をつなぐ

2 本のうでのロボット（7-2 ⑧）で、肩を 90° 、ひじを 90° 回すと、手はどちらを向くでしょう。2 本めのうでの向きは、まず肩の回転で 90° 回り、さらにひじの回転で 90° 回ります。回転を 2 つつなぐの、行列の積です。

$$R_{90}R_{90} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 本めのうでは、もとの向き（ x の向き）から 180° 回って、左を向きます。いっぱんの角 θ_1 、 θ_2 でも、回転をつなぐと、行列の積 $R(\theta_1)R(\theta_2)$ になります。この積が $R(\theta_1 + \theta_2)$ になること（ 30° と 45° で 75° ）を、7-6 で確かめ、手の位置を求めます。



8 表計算と Python で、 3×3 の積

3×3 の積は、成分が9つ、それぞれ3つのかけ算のたし算で、手で計算すると大変です。表計算では、7-1 と同じ MMULT を使います。左の行列を A2:C4、右の行列を D2:F4 に入れ、答えは下の A6:C8 に出します。

	A6	=MMULT(A2:C4,D2:F4)				
	A	B	C	D	E	F
1	左の行列 P			右の行列 Q		
2	1	2	0	2	0	1
3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	1	0	3	1
5	積 PQ					
6	4	2	1			
7	1	4	1			
8	2	3	2			

表3 3×3 の積。A6 に式を入れて、7-1 と同じように確定すると、A6:C8 の9マスに答えが出る。

たとえば A6 の4 は、 P の1行め (1, 2, 0) と Q の1列め (2, 1, 0) の内積 $1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 0 = 4$ です。

Python では @ を使います。

```
import numpy as np
P = np.array([[1, 2, 0],
              [0, 1, 1],
              [1, 0, 1]])
Q = np.array([[2, 0, 1],
              [1, 1, 0],
              [0, 3, 1]])

print(P @ Q)    # 行列×行列
print(P * Q)    # 成分ごと (別物)
```

Python

実行結果

```
[[4 2 1]
 [1 4 1]
 [2 3 2]]
[[2 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 1]]
```

$P * Q$ は、同じ場所の成分どうしをかけただけ（左上は $1 \times 2 = 2$ ）で、行列の積ではありません。表計算で $=A2*D2$ をコピーしたときも、同じまちがいになります（まちがえやすいところ③）。

たいせつ

積の意味

2つの変換をつないで、1つにまとめたもの

$$AB\vec{x} = A(B\vec{x}). \text{ 右の } B \text{ が先}$$

積の計算

i 行 j 列めの成分 = 左の i 行めと、右の j 列めの内積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

大きさ

$$(m \text{ 行 } n \text{ 列}) \times (n \text{ 行 } p \text{ 列}) = (m \text{ 行 } p \text{ 列})$$

きまり

ふつう $AB \neq BA$ 。 $(AB)C = A(BC)$ 。 $AI = IA = A$

箱をつなぐ

四端子定数の行列を、入口側から順に左からかける

📖 この章で出てきたことば

積（行列の） 2つの行列を、行と列の内積でかけたもの。2つの変換をつないだ1つの変換を表す。

結合法則 $(AB)C = A(BC)$ 。順番を変えなければ、どこから先にまとめてもよい。

単位行列 ななめが1、ほかの成分が0の行列。何もしない変換。数の1と同じ役目。

四端子定数 入口2本・出口2本の線の箱で、出口の電圧・電流から入口の電圧・電流を求める 2×2 の行列の4つの数。F行列ともいう。

📇 記号カード

初めて出た章 7-3

AB

読み方 エー・ビー

意味 行列の積。 B の変換のあとに A の変換をする（右が先）。ふつう $AB \neq BA$

英語 matrix product

📇 記号カード

初めて出た章 7-3

I

読み方 アイ

意味 単位行列。何もしない変換。 $AI = IA = A$ 。 E と書く本も多い

英語 identity matrix

例題でたしかめよう

例題1 2×2 の積を、行と列で

次の積を計算しましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

考え方 i 行め j 列めの成分は、左の i 行めと、右の j 列めの内積。負の数はかっこをつけてかける。

式 1 行め 1 列め： $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$

1 行め 2 列め： $1 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

2 行め 1 列め： $3 \times 2 + (-1) \times 1 = 5$

2 行め 2 列め： $3 \times 0 + (-1) \times 4 = -4$

答え $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

じぶんでところ1

次の積を計算しましょう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

例題2 AB と BA をくらべる

次の2つの行列で、 AB と BA を計算してくらべましょう。

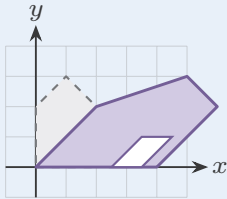
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 どちらも、左の行と右の列の内積。順番を変えると、左と右が入れかわる。

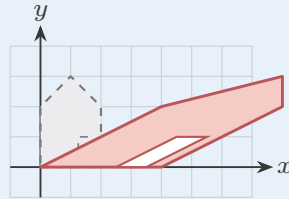
式 AB : 1行め $(1 \times 2 + 1 \times 0, 1 \times 0 + 1 \times 1) = (2, 1)$ 、2行め $(0, 1)$

BA : 1行め $(2 \times 1 + 0 \times 0, 2 \times 1 + 0 \times 1) = (2, 2)$ 、2行め $(0, 1)$

答え $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。右上がちがひ、 $AB \neq BA$ 。



AB : 横に2倍してから、ずらす



BA : ずらしてから、横に2倍

じぶんでこう2

次の2つの行列で、 AB と BA を計算してくらべましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例題3 2つの変換をつないだ行列を作る

はじめに横に2倍にのぼし(S)、つぎに左回りに 90° 回す(R_{90})変換を、1つの行列で表しましょう。また、その行列で点 $(1, 1)$ がどこへ行くかを求め、1つずつ変換した結果とくらべましょう。

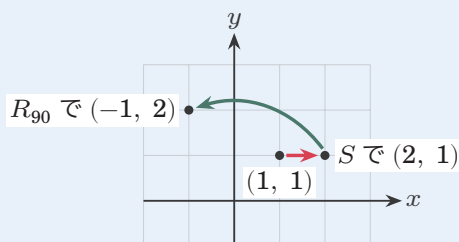
考え方 先にする S が右、あとにする R_{90} が左。積は $R_{90}S$ 。

式 $R_{90}S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (④と同じ)

行列で： $(0 \times 1 + (-1) \times 1, 2 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 2)$

1つずつ： S で $(2, 1)$ 、つぎに R_{90} で $(-1, 2)$

答え $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 、点 $(-1, 2)$ (どちらの方法でも同じ)



じぶんでこう3

はじめにずらし(左)をし、つぎに上下の裏返し(右)をする変換を、1つの行列で表しましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また、点 $(1, 2)$ がどこへ行くかを、2通りで求めましょう。

例題 4 同じ行列を何回もかける

主役の行列 A (下) の A^2 と A^3 を求めましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

考え方 $A^2 = AA$ 、 $A^3 = A^2A$ 。成分を 2 乗するのではない。

式 A^2 : 1 行め $(2 \times 2 + 1 \times 1, 2 \times 1 + 1 \times 2) = (5, 4)$

2 行め $(1 \times 2 + 2 \times 1, 1 \times 1 + 2 \times 2) = (4, 5)$

$A^3 = A^2A$: 1 行め $(5 \times 2 + 4 \times 1, 5 \times 1 + 4 \times 2) = (14, 13)$

2 行め $(4 \times 2 + 5 \times 1, 4 \times 1 + 5 \times 2) = (13, 14)$

答え $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 、 $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$

じぶんでこう 4

ずらしの行列 H (下) の H^2 と H^3 を求め、何回ずらしたのと同じかを言
いましょう。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題5 3つの積を、2通りの区切りで

次の3つの行列で、 $(AB)C$ と $A(BC)$ をそれぞれ計算し、同じになることを確かめましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

考え方 ⑤の結合法則。かっこの中を先に計算する。左右の並び（ A 、 B 、 C の順）は変えない。

式 AB ：1行め $(1 \times 0 + 2 \times 1, 1 \times 1 + 2 \times 0) = (2, 1)$ 、2行め $(1, 0)$

$(AB)C$ ：1行め $(2 \times 2 + 1 \times 0, 2 \times 0 + 1 \times 3) = (4, 3)$ 、2行め $(2, 0)$

BC ：1行め $(0 \times 2 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 3) = (0, 3)$ 、2行め $(2, 0)$

$A(BC)$ ：1行め $(1 \times 0 + 2 \times 2, 1 \times 3 + 2 \times 0) = (4, 3)$ 、2行め $(2, 0)$

答え どちらも $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ で、同じ。

じぶんでこう5

次の3つの行列で、 $(AB)C$ と $A(BC)$ をそれぞれ計算し、同じになることを確かめましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例題6 3×3 の積

⑧の P と Q の積 PQ の、2 行め 3 列めの成分と、3 行め 2 列めの成分を、手で計算して確かめましょう。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 2 行め 3 列め = P の 2 行めと Q の 3 列めの内積。3 つずつかけてたす。

式 2 行め 3 列め : $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$
 3 行め 2 列め : $(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 3) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 3 = 3$

答え 1 と 3 (⑧の表計算の B8 の 3、C7 の 1 と同じ)

じぶんでとこう 6

次の積 PQ の 9 つの成分をすべて求めましょう (表計算か Python でも確かめよう)。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題7 抵抗の箱を2つつなぐ

直列の抵抗 2Ω の箱（入口側）と、並列の抵抗 2Ω の箱（出口側）をつなぎます。

(1) つないだ回路の行列を求めましょう。

(2) 出口を開いて ($I_3 = 0$)、出口の電圧を 1V するには、入口の電圧と電流はいくらですか。

(3) 2つの箱をつなぐ順番を入れかえた回路の行列を求めましょう。

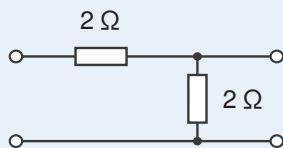
考え方 ⑥の箱の行列。直列 R は1行め $1, R$ 、2行め $0, 1$ 。並列 R は1行め $1, 0$ 、2行め $\frac{1}{R}, 1$ 。入口側の箱を左に並べてかける。

式 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 \\ 0+0.5 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

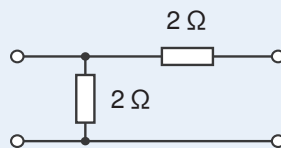
(2)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 列め})$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0.5+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

答え (1)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$
 (2) $2\text{V}, 0.5\text{A}$ (3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$



(1) 直列が入口側



(3) 並列が入口側

じぶんでとこう 7

直列の抵抗 1Ω の箱（入口側）と、並列の抵抗 4Ω の箱（出口側）をつなぎます。

- (1) つないだ回路の行列を求めましょう。
- (2) 出口を開いて、出口の電圧を 4V にするには、入口の電圧と電流はいくらですか。
- (3) つなぐ順番を入れかえた回路の行列を求めましょう。

例題 8 箱を 3 つつなぐ

直列 1Ω 、並列 2Ω 、直列 1Ω の 3 つの箱を、この順に入口側からつないだ回路（T の字の形）の行列を求め、左上×右下－右上×左下を計算しましょう。

考え方 3 つの行列を入口側から左に並べてかける。⑤の結合法則で、左の 2 つを先にまとめてよい。

式 左の 2 つ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0.5 & 0+1 \\ 0+0.5 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

3 つめをかける：

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5+0 & 1.5+1 \\ 0.5+0 & 0.5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$1.5 \times 1.5 - 2.5 \times 0.5 = 2.25 - 1.25 = 1$$

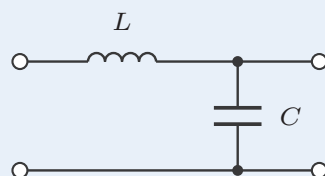
答え $\begin{pmatrix} 1.5 & 2.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ 、1（7-4 で、なぜ 1 になるかを学ぶ）

例題9 コイルとコンデンサーの箱

上の線にコイル ($L = 10 \text{ mH}$)、出口側の2本の線のあいだにコンデンサー

($C = 1 \mu\text{F}$) を入れた箱があります (回路の絵。6-13 と同じ部品)。角周波数

$\omega = 20\,000 \text{ rad/s}$ の交流で考えます。



(1) コイルの箱とコンデンサーの箱の行列を作り、つないだ行列を求めましょう。

(2) 出口を開いたとき ($I_2 = 0$)、出口の電圧の大きさは、入口の電圧の何倍ですか。

考え方 ⑥の直列の箱の R を $j\omega L$ に、並列の箱の $\frac{1}{R}$ を $j\omega C$ にかえる (6-10)。 $j^2 = -1$ 。

式 (1) $j\omega L = j \times 20\,000 \text{ rad/s} \times 0.01 \text{ H} = j200 \quad [\Omega]$

$$j\omega C = j \times 20\,000 \text{ rad/s} \times 1 \times 10^{-6} \text{ F} = j0.02 \quad [\text{S}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & j200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j0.02 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + j200 \times j0.02 & j200 \\ j0.02 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{左上: } j200 \times j0.02 = 4j^2 = -4 \text{ なので } 1 - 4 = -3$$

$$(2) I_2 = 0 \text{ なので、1 行めから } V_1 = -3V_2, \text{ つまり } V_2 = -\frac{1}{3}V_1$$

答え (1) $\begin{pmatrix} -3 & j200 \\ j0.02 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{3}$ 倍 (－は、山と谷が逆になること)

くらべてみよう

同じ箱で、ゆっくりした交流 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ なら、 $j\omega L = j10$ 、 $j\omega C = j0.001$ で、左上は $1 + j10 \times j0.001 = 1 - 0.01 = 0.99$ 。出口の電圧は入口の約 1.01 倍で、ほぼそのまま通ります。速い交流は小さくなり、ゆっくりした交流はそのまま通る。この箱は、6-13 の「雑音を取りのぞく回路 (ローパスフィルター)」の仲間です。

じぶんでところ 8

直列の抵抗 2Ω 、並列の抵抗 4Ω 、直列の抵抗 2Ω の 3 つの箱を、この順に入口側からつないだ回路の行列を求め、左上×右下－右上×左下を計算しましょう。

じぶんでところ 9

例題 9 と同じ箱 ($L = 10\text{ mH}$ 、 $C = 1\mu\text{F}$) で、 $\omega = 30\,000\text{ rad/s}$ のときの行列を求め、出口を開いたとき、出口の電圧の大きさが入口の何倍になるかを求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① $AB = BA$ と思う

✕ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を、 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と同じとして計算する

○ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で、ちがう (例題 2)

行列のかけ算は、変換をつなぐ順番を表すので、入れかえると別の変換になります。

⚠ まちがえやすいところ

② 先にする変換を左に書く

✕ 「先に S 、あとで R_{90} 」を SR_{90} と書く

○ $R_{90}S$ (先にする S が右)

$R_{90}S\vec{x} = R_{90}(S\vec{x})$ で、ベクトルにいちばん近い右の行列が先にかかります。日本語の文の順と逆になるので注意しましょう。

⚠ まちがえやすいところ

③ 成分どうしをかける

✕
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 & 2 \times 6 \\ 3 \times 7 & 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$$

○
$$\begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

×は、表計算の $=A2*D2$ 、Python の $P * Q$ と同じまちがいです。行列の積は、行と列の内積です。

⚠ まちがえやすいところ

④ 箱の行列を、出口側から並べる

✕ 直列（入口側）→並列（出口側）を（並列）×（直列）とかける

○ （直列）×（並列）。入口側の箱を左に書く

箱の行列は「出口の組を入れると入口の組が出てくる」向きなので、出口に近い箱が右（先）です。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ A^2 を成分の 2 乗にする

$$\times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bigcirc \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ (} AA \text{ を行と列で)}$$

 A^2 は「同じ変換を 2 回」です。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 大きさをたしかめない

 $\times$ 2 行 3 列 × 2 行 3 列をかけようとする

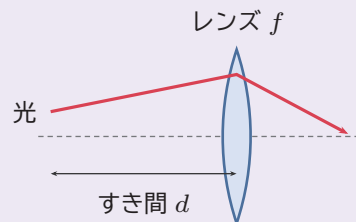
 $\bigcirc$ 左の列の数と右の行の数をくらべる

内側の数 (3 と 2) がそろわないと、かけられません。

🌀 物理・工学ではこう使う

カメラのレンズ：光線の行列

光線を「軸からの高さ y [m] と、かたむき θ [rad]」の組で表します。長さ d のすき間を進むと高さが $d\theta$ 変わり (θ が小さいとき)、焦点距離 f のうすいレンズではかたむきが y/f だけ内向きに曲がります。行列は電気の箱と同じ形 (下) ですが、電気の箱 (出口の組を入れたら入口の組が出てくる) とは**向きが反対**で、「入る光を入れたら出る光が出てくる」向きです。だから、かける順番も反対になり、すき間のあとにレンズなら (レンズ) × (すき間) です (物理 波-12)。

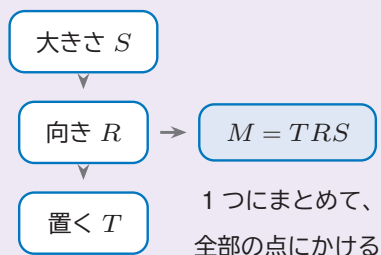


$$\text{すき間} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ レンズ} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

物理・工学ではこう使う

ゲームの画面：拡大してから回す

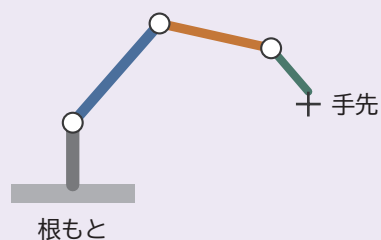
3次元のゲームでは、キャラクターの形に「大きさを合わせる」「向きを変える」「場所に置く」変換を順につなぎ、積1つにまとめておきます。何万もある形の点には、その1つの行列だけをかければよいので速いのです。順番をまちがえると、キャラクターが横に長くなったりします(④)。「置く」の行列は7-7で。



物理・工学ではこう使う

産業用ロボット：6つの関節をつなぐ

工場で車の溶接や部品の組み立てをするロボットには、関節が6つあるものが多く使われています。根もとから手先まで、関節ごとに「回して、腕の長さだけ進む」行列を作り、6つの行列を順にかけると、手先の位置と向きが1つの行列で求まります(物理 力-7、数学 7-7)。積の順番を1つでもまちがえると、手先はまったくちがう場所になってしまいます。



章末問題

7-3 のまとめ

基本

- 1 次の積を計算しましょう( 例題 1)。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 2 次の A 、 B で、 AB と BA を計算してくらべましょう( 例題 2)。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3 はじめに上下の裏返し（左）をし、つぎに横に 2 倍（右の S ）にする変換を、1 つの行列で表しましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また、点 $(1, 1)$ がどこへ行くかを 2 通りで求めましょう( 例題 3)。

- 4 次の行列 A の A^2 と A^3 を求めましょう( 例題 4)。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5 直列の抵抗 4Ω の箱（入口側）と、並列の抵抗 2Ω の箱（出口側）をつなぎます。(1) つないだ回路の行列 (2) 出口を開いて出口の電圧を $2V$ にするときの入口の電圧と電流 (3) つなぐ順番を入れかえた行列、を求めましょう( 例題 7)。

- 6 次の積 PQ を求めましょう( 例題 6)。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

チャレンジ ★★★★★

7 例題9の箱 ($L = 10 \text{ mH}$ 、 $C = 1 \mu\text{F}$) で、 $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ のときの行列を求め、出口を開いたとき、出口の電圧の大きさが入口の何倍になるかを求めましょう。入口より大きくなるのはなぜかも考えましょう (ヒント: 6-13 の共振) (☞例題9)。

8 光線が、長さ $d = 0.1 \text{ m}$ のすき間を進んでから、焦点距離 $f = 0.05 \text{ m}$ のレンズを通ります (物理・工学ではこう使う)。(1) 2 つをつないだ行列を求めましょう。(2) 高さ $y = 0.01 \text{ m}$ 、かたむき $\theta = 0.1 \text{ rad}$ で入った光の、レンズを出たあとの高さとかたむきを求めましょう (☞例題3)。

9 2本のうでのロボットで、肩を 90° 、ひじを 90° 回しました (⑦)。 $R_{90}R_{90}$ を計算し、2本めのうでの向き $\vec{e}_x = (1, 0)$ がどこへ行くかを求めましょう。また、肩を 90° ・ひじを -90° (右回りに 90°) 回したときはどうなりますか。右回りに 90° の行列は、下の行列です (☞例題1)。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10 直列の抵抗 3Ω 、並列の抵抗 2Ω 、直列の抵抗 1Ω の3つの箱を、この順に入口側からつないだ回路の行列を求め、左上×右下－右上×左下を計算しましょう (☞例題8)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 行列×行列を、行と列の内積で計算できる。 → 109 ページ
- ☐ 変換をつなぐと積になり、順番で結果が変わることを説明できる。 → 110 ページ
- ☐ 電気の箱をつないだ回路を、行列の積で計算できる。 → 114 ページ



ソラ

機械をつなぐと、行列の積 1 つになるんだね。次の 7-4 では、行列が面積を何倍にするかを 1 つの数で表すよ。

第1部 行列の計算

★★★★

7-4

行列式：
面積が何倍になるか

📌 道しるべ この章の前に [3-6](#) [4-9](#) [4-11](#) [4-14](#) [7-2](#) [7-3](#)
 この章の先に [7-5](#) [7-6](#) [7-8](#) [7-11](#) [8-3](#) [8-6](#)

📌 この章でできるようになること

- ★★★★★ 行列をかけると方眼の正方形の面積が何倍になるかを、方眼で数えて、また $ad - bc$ で計算できる。
- ★★★★★ 行列式の符号（裏返し）と 0（平らにつぶれる）の意味がわかり、行列式が 0 になる行列を見分けられる。
- ★★★★★ 3×3 の行列式をサラスの方法で計算し、ロボットの腕・ひものつり合い・電気の箱の行列式を読める。

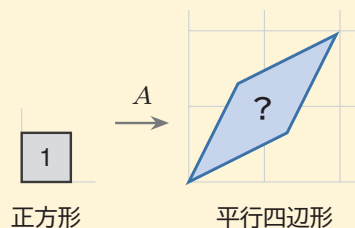
？ はてな？

方眼の 1 マス（面積 1）の正方形に、主役の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

をかけると、正方形は平行四辺形になります（7-2）。この平行四辺形の面積は、いくつでしょう。

また、面積が 0 になってしまう行列はあるのでしょうか。そのとき、絵はどうなるでしょう。



7-2・7-3 では、行列をかけると、方眼にかいた絵がのびたり、ずれたり、回ったりするのを見ました。絵の形は変わりますが、**面積が何倍になったか**は、たった1つの数で言い表せます。この数を、その行列の**行列式**といいます。

行列式を見ると、その行列が「絵を裏返すか」「平らにつぶしてしまうか」もわかります。平らにつぶす行列では、連立方程式の答えが1つに決まりません(7-5)。ロボットの腕が急に動きにくくなる姿勢や、ひもに大きな力がかかるつり方も、行列式でわかります。

△ やってみよう 方眼で面積を数えよう

用意するもの

方眼紙(1cmの方眼)、えんぴつ、定規、色えんぴつ

- ① 方眼紙に x 軸と y 軸をかき、1マスの正方形(頂点 O 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(0, 1)$)をかこう。
- ② 行列の1列めの矢印(赤)と、2列めの矢印(緑)を、 O からかこう。
- ③ 2本の矢印を2辺とする平行四辺形をかこう。4つめの頂点は、2本の矢印をたした点だよ。
- ④ 平行四辺形を、方眼の線にそった長方形でかこもう。長方形の面積から、まわりの三角形と長方形の面積をひくと、平行四辺形の面積が出るよ。
- ⑤ 表1の行列で①～④をくり返し、面積を表にしよう。

行列	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
何をする?	横に2倍	ずらし	主役		
数えた面積	2	1	3	5	4

表1 ソラさんが方眼で数えた面積。ずらしでは、底辺も高さも1のままなので、面積は1のまま。

3 × 3 の行列式は計算が長くなりますが、1 回でわからなくても大丈夫です。まず 2 × 2 の面積の図で、意味をしっかりとつかみましょう。主役の行列で、④の数え方を見ておきます (図 1)。

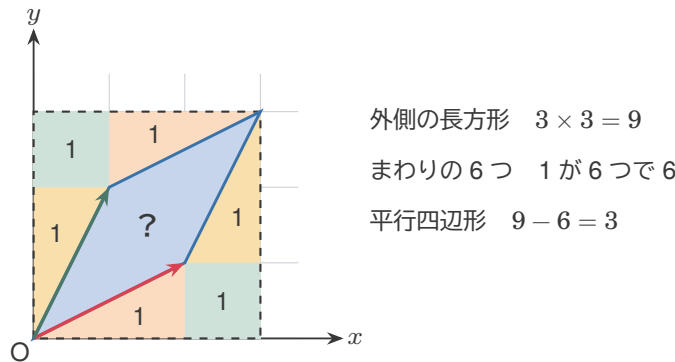


図 1 主役の行列 A で数えた例。1 列め (2, 1) と 2 列め (1, 2) の平行四辺形を、3 × 3 の長方形でかこむ。まわりは、三角形 4 つ (どれも面積 1) と、1 マスの正方形 2 つ。

面積と、行列の 4 つの数をくらべてみましょう。主役の行列なら、**左上 × 右下**は $2 \times 2 = 4$ 、**右上 × 左下**は $1 \times 1 = 1$ です。その差 $4 - 1 = 3$ が、数えた面積と同じです。ほかの行列でも、確かめてみましょう。

行列	横に 2 倍	ずらし	主役	4 つめ	5 つめ
左上 × 右下	$2 \times 1 = 2$	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$2 \times 3 = 6$
右上 × 左下	$0 \times 0 = 0$	$1 \times 0 = 0$	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$
その差	2	1	3	5	4
数えた面積	2	1	3	5	4

表 2 どの行列でも、「左上 × 右下 - 右上 × 左下」が、数えた面積と同じになった。

どの行列でも、ぴったり同じになりました。偶然ではありません。数学の道具②で、なぜこうなるのかを確かめます。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 7-2** 行列×ベクトルは「入れると出てくる機械」。1列めは $(1, 0)$ の行き先、2列めは $(0, 1)$ の行き先。まっすぐな線はまっすぐなまま、平行な線は平行なまま、原点は動かない。
- 7-3** $AB\vec{x}$ は、 B を先にかけて、次に A をかける。 AB と BA は、ふつうはちがう。単位行列 I は、かけても何も変わらない行列。
- 4-14** 外積の大きさは、2本のベクトルがつくる平行四辺形の面積。 z 成分は $a_x b_y - a_y b_x$ 。3本のベクトルがつくる箱の体積は $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 。
- 4-11** 平行でない2本のベクトルがあれば、平面のどんなベクトルも、その2本の何倍かの和で作れる（ななめの2本の物差し）。
- 3-6** 連立方程式の2本の直線が平行なら答えはなく、重なれば答えは無数にある。
- 4-9** 加法定理： $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 、
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

数学の道具

1 正方形は、いつも平行四辺形になる

やってみようでは、どの行列でも、正方形が平行四辺形になりました。なぜ、いつも平行四辺形になるのでしょうか。行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

として、正方形の4つの頂点の行き先を順に調べます（7-2）。ここでは、たて書きのベクトルを、文の中で (x, y) と横に書きます（7-2）。

正方形の頂点	行き先	わけ
O (0, 0)	(0, 0)	原点は動かない
(1, 0)	(a, c)	1 列め (赤い矢印の先)
(0, 1)	(b, d)	2 列め (緑の矢印の先)
(1, 1)	(a + b, c + d)	(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) なので、行き先も「1 列め + 2 列め」(7-2 の線形)

表3 正方形の4つの頂点に、行列Aをかけた行き先。

4つめの頂点は、2本の矢印をたした点です。2本の矢印をたすと、その2本がつくる平行四辺形の対角線になります(4-10)。だから、正方形は、**1列めと2列めの矢印がつくる平行四辺形**になります。

どのマスも、同じ倍率でのびる

となりのマスはどうなるでしょう。(1, 0)、(2, 0)、(2, 1)、(1, 1)のマスは、1つめのマスを(1, 0)だけずらしたものです。行列をかけると、1つめの平行四辺形を1列めの矢印だけずらした、**同じ形の平行四辺形**になります(7-2: 平行は平行のまま、たしてからかけても、かけてからたしても同じ)。

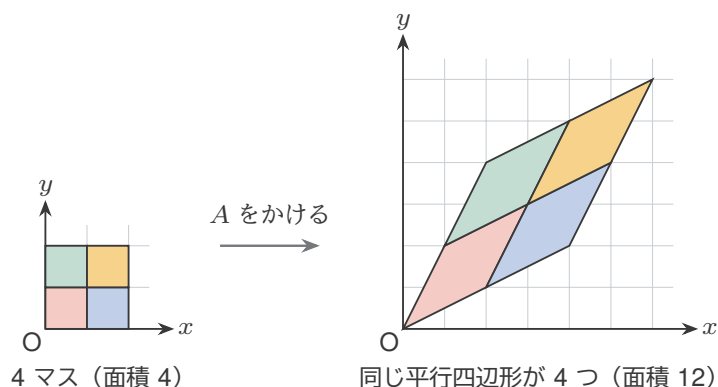


図2 4つのマスは、同じ形の平行四辺形4つになり、すきまなくならぶ。面積は

$$4 \times 3 = 12。$$

図2のように、どのマスも、同じ形で同じ面積の平行四辺形になります。マスを何個か集めた絵の面積は、マスの数×(1マスの面積の倍率)倍になります。た

たとえば、7-2 の家の絵（面積 5）に主役の行列をかけると、面積は $5 \times 3 = 15$ です。丸い形でも、細かいマスでうめて考えれば同じです（5-9 の積分の考え方）。つまり、行列をかけると、**どんな絵の面積も、同じ倍率で変わります**。その倍率は、1 マスの正方形が何倍になるかを見ればわかります。**？はてな？** の 1 つめの答えは、やってみようで数えたとおり、**面積 3** です。主役の行列は、どんな絵の面積も 3 倍にします。

② 面積の倍率を式で作る： $ad - bc$

やってみようで気づいた「左上×右下－右上×左下」が、なぜ面積になるのかを確かめます。2 通りで考えます。

考え方 1：長方形から、まわりの 6 つをひく

1 列め (a, c) と 2 列め (b, d) の平行四辺形を、横 $a + b$ 、たて $c + d$ の長方形でかこみます（ a, b, c, d がどれもプラスで、図 3 のような形のととき）。

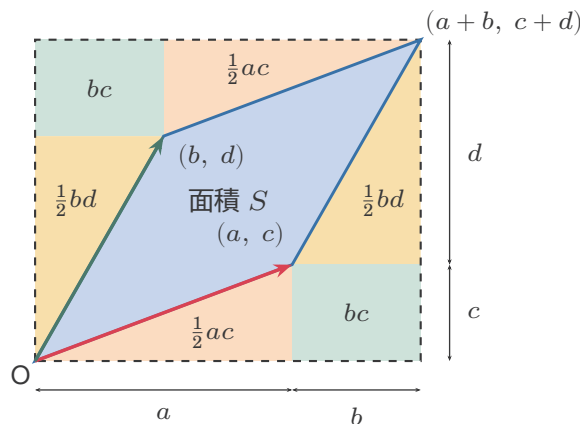


図 3 長方形（点線）から、三角形 4 つと長方形 2 つをひくと、平行四辺形が残る。

まわりの 6 つの面積は、次のとおりです。

- 下と上の三角形（オレンジ）：底辺 a 、高さ c 。1 つ $\frac{1}{2}ac$ で、2 つある。
- 左と右の三角形（黄色）：底辺 b 、高さ d 。1 つ $\frac{1}{2}bd$ で、2 つある。
- 右下と左上の長方形（緑）：横 b 、たて c 。1 つ bc で、2 つある。

平行四辺形の面積 S を、1 行ずつ計算します。

$$S = (a + b)(c + d) - ac - bd - 2bc$$

長方形から、まわりの6つをひく
(三角形は2つで ac と bd)

$$S = ac + ad + bc + bd - ac - bd - 2bc$$

$(a + b)(c + d)$ のかっこを開く
(3-8)

$$S = ad + bc - 2bc$$

ac と bd は、たしてひくので消える

$$S = ad - bc$$

bc を1つたして2つひくと、1つひいたことになる

「左上×右下－右上×左下」が、たしかに面積になりました。主役の行列で確かめると、 $(2 + 1)(1 + 2) - 2 \times 1 - 1 \times 2 - 2 \times 1 \times 1 = 9 - 2 - 2 - 2 = 3$ で、やってみようと同じです。

考え方2：外積の z 成分 (4-14)

4-14 で、外積の大きさは、2本のベクトルがつくる平行四辺形の面積でした。平面のベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$ と $\vec{b} = (b_x, b_y, 0)$ の外積は、 z 成分だけが残り、

$$a_x b_y - a_y b_x$$

でした。1列め (a, c) を $\vec{a}$ 、2列め (b, d) を $\vec{b}$ とすると、 $a_x = a$ 、 $a_y = c$ 、 $b_x = b$ 、 $b_y = d$ なので、

$$a_x b_y - a_y b_x = a \times d - c \times b = ad - bc$$

考え方1と同じ式になりました。考え方2では、 a 、 b 、 c 、 d がマイナスのときも、矢印がどんな向きときも、同じ式が使えます。

行列式という名前

この数 $ad - bc$ を、行列 A の**行列式**（ぎょうれつしき）といい、 $\det A$ と書きます。 $\det$ は英語の **determinant**（デターミナント、「決めるもの」）の頭の 3 文字です。連立方程式の答えが 1 つに決まるかどうかを、この数が決めるからです（④・7-5）。

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (\text{面積の倍率})$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} = ad - bc$$

左上×右下 右上×左下

図 4 青のななめの 2 つをかけ、赤のななめの 2 つをかけて、ひく。「たすきに掛けてひく」と覚える。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

土地の面積を、行列式で計算する

三角形 O 、 P 、 Q の面積は、 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$

なら $\frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)$ です（平行四辺形の半分。左

回りならプラス）。多角形は、原点からの三角形に分

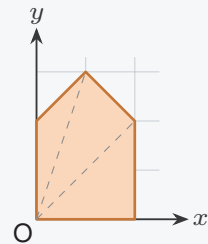
けて、となりあう頂点の組ごとにこの数をたせば、

面積になります。7-2 の家の絵なら、 O をふくまな

い 3 組で

$$\frac{1}{2}\{(2 \times 2 - 0 \times 2) + (2 \times 3 - 2 \times 1) + (1 \times 2 - 3 \times 0)\} = \frac{1}{2}(4 + 4 + 2) = 5$$

です。境界の点の座標から土地の面積を求めるこの方法は、測量で「座標法」とよばれています。



せいかくに言うと

専門書では、行列式を $|A|$ や $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (たての棒ではさむ) とも書きます。この $| |$ は、絶対値 (3-2) やベクトルの大きさ (4-10) とは別の意味です。行列式はマイナスにもなります (③)。まちがえないように、この本では $\det A$ と書きます。行列式は、たて・横の数が同じ行列 (正方行列、7-1) だけに決めます。2 × 3 の行列には行列式はありません。

③ マイナスは「裏返し」

行列式は「左上×右下－右上×左下」なので、マイナスになることもあります。たとえば、上下を裏返す行列 (7-2) では、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) - 0 \times 0 = -1$$

面積が -1 倍、とはどういうことでしょうか。図5で、正方形にかいた「F」の字がどうなるかを見ます。

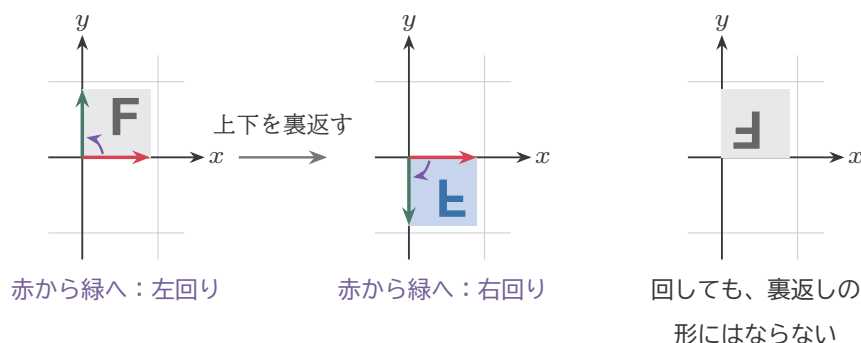


図5 左：はじめの正方形。中：上下を裏返す行列 (1 行め (1, 0)、2 行め (0, -1)) をかけたあと。「F」は鏡にうつした形になり、赤 (1 列め) から緑 (2 列め) へ回る向きが逆になる。右：「F」を 180° 回しても、まん中の形にはならない。

面積の大きさは変わっていません (1 マスのまま)。変わったのは**向き**です。はじめは、赤い矢印 (1 列め) から緑の矢印 (2 列め) へ、左回りに回っていました。裏返したあとは、右回りです。「F」の字は、鏡にうつした形になりました。紙の上でどう回しても、この形にはなりません。紙を裏返さないと作れない形です。

$\det A > 0$ ：向きはそのまま $\det A < 0$ ：裏返し

面積の倍率は、行列式の大きさ

これは、4-14 の外積の向きと同じ考え方です。外積の z 成分は、 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ左回り（ 180° より小さく）に回るときプラス、右回りに回るときマイナスでした（右ねじの向き）。行列式でも、1 列めから 2 列めへ左回りならプラス、右回りならマイナスです。

列を入れかえると、符号が変わる

1 列めと 2 列めを入れかえると、回る向きが逆になります。式でも確かめられます。

$$\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

たとえば、次の行列は、 x と y を入れかえる行列です。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

単位行列 I の列を入れかえたものなので、行列式は -1 です。直線 $y = x$ を鏡にした裏返しになります。なお、7-6 で学ぶ回転の行列は、どれも行列式が 1 です。回しても裏返しにはならないからです。

4 0 なら、平らにつぶれる

行列式が 0 になる行列を考えます。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

1 列めは $(1, 2)$ 、2 列めは $(2, 4)$ です。2 列めは、1 列めのちょうど 2 倍です。2 本の矢印は**同じ直線の上**にのっていて、平行四辺形が作れません。正方形は、つぶれて線分になります（図 6 の左）。面積は 0 です。

つぶれるのは正方形だけではなく。どんな点 (x, y) も、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

になります（2行めは1行めのちょうど2倍だから）。どの点も、1列めの矢印（1, 2）の何倍か、つまり直線 $y = 2x$ の上へ行きます。**平面全体が、1本の直線に平らにつぶれる**のです。

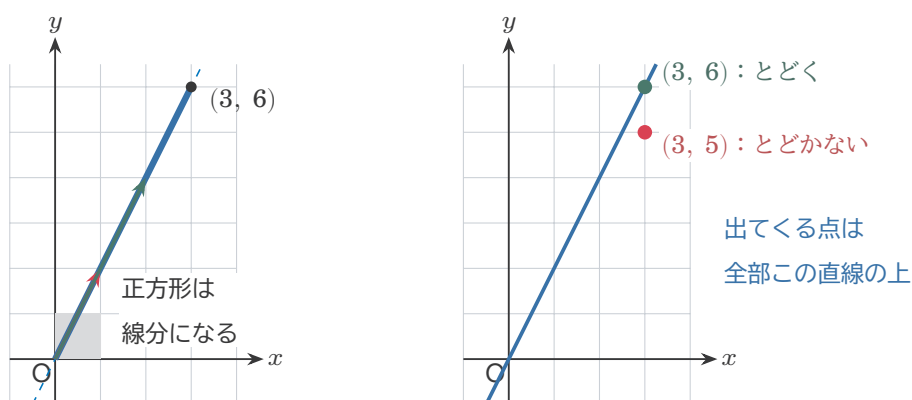


図6 左：1行め（1, 2）、2行め（2, 4）の行列では、1列め（赤）と2列め（緑）が同じ直線にのり、正方形は線分（太い線）になる。右：どの点に行列をかけても、直線 $y = 2x$ の上に出てくる。

つぶれた絵は、元にもどせない

ちがう点をこの行列に入れても、同じ点が出てくることがあります。

入れた点 (x, y)	計算 $(x + 2y, 2x + 4y)$	出てきた点
$(2, 0)$	$(2 + 0, 4 + 0)$	$(2, 4)$
$(0, 1)$	$(0 + 2, 0 + 4)$	$(2, 4)$
$(4, -1)$	$(4 - 2, 8 - 4)$	$(2, 4)$

表4 3つのちがう点が、どれも $(2, 4)$ に行く。

出てきた $(2, 4)$ だけを見ても、入れた点が $(2, 0)$ だったのか、 $(0, 1)$ だったのか、わかりません。つぶれた絵は、**元にもどすことができない**のです。7-5 で学ぶ「元にもどす行列（逆行列）」は、行列式が 0 の行列にはありません。

連立方程式では：答えがないか、無数にあるか

行列式が 0 の行列で、連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を考えます。

$$\begin{cases} x + 2y = p \\ 2x + 4y = q \end{cases}$$

左辺は、どの x, y でも直線 $y = 2x$ の上の点になります（図 6 の右）。

- $\vec{b} = (3, 6)$ のように、右辺が直線の上にあるとき：入れると $(3, 6)$ が出てくる点は、 $(3, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(5, -1)$ 、…といくつもある。**答えは無数**。
- $\vec{b} = (3, 5)$ のように、右辺が直線の上にないとき：どんな x, y でもとどかない。**答えはない**。

これは、3-6 で学んだことと同じです。 $x + 2y = 3$ と $2x + 4y = 6$ は、2 倍すると同じ式なので、2 本の直線が重なります（答えは無数）。 $x + 2y = 3$ と $2x + 4y = 5$ は、2 本の直線が平行で、交わりません（答えはない）。行列式が 0 でなければ、正方形は本当の平行四辺形になり、平面全体が平面全体にうつります。そのときは、どの点にも、ちょうど 1 つの点からとどきます。だから、**答えはちょうど 1 つ**です（7-5）。

$\det A \neq 0$: 答えはちょうど 1 つ

$\det A = 0$: 答えがないか、無数にある

？はてな？ の 2 つめの答えです。面積が 0 になる行列は、あります。行列式が 0 の行列です。そのとき、絵は平らにつぶれて 1 本の直線（または 1 点）になり、元にもどすことはできません。

0 になるのは、2つの列が平行なとき

$ad - bc = 0$ は、 $ad = bc$ ということです。 c と d が 0 でなければ、両辺を cd でわって $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ です。1 列め (a, c) と 2 列め (b, d) の、横とたての比が同じ、つまり 2 本の矢印が同じ直線の上にあるということです。4-11 で「平行でない 2 本のベクトルがあれば、平面のどんなベクトルも作れる」と学びました。行列式が 0 のときは、その裏返しで、2 本の列が平行なので、平面の全部は作れないのです。

せいかくに言うと

「2つの列が平行」には、片方の列が $\vec{0}$ (0 倍) のときもふくめます。たとえば、1 行め $(1, 0)$ 、2 行め $(0, 0)$ の行列は、7-2 の影の行列と同じように、高さ (ここでは y) を 0 にする行列です。2 列めが $\vec{0}$ で、行列式は 0 です。平面全体を x 軸にうつします。行列式が 0 になるのは、**片方の列が、もう片方の列の何倍か (0 倍もふくむ) になっているとき、そのときだけです**。また、このとき、2 つの行も同じように何倍かの関係になっています (④の行列では、2 行め $(2, 4)$ は 1 行め $(1, 2)$ の 2 倍)。

5 つないだ変換の行列式は、かけ算

7-3 で、2 つの行列をかけると、2 つの変換をつないだ行列になることを学びました。面積の倍率はどうなるでしょう。横に 2 倍する行列 S ($\det S = 2$) をかけてから、主役の行列 A ($\det A = 3$) をかけてみます。

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

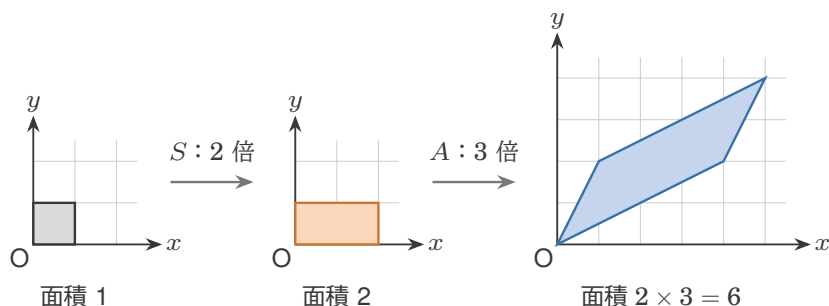


図7 S で面積が 2 倍になり、そのあと A で 3 倍になる。つないだ行列 AS では、 $2 \times 3 = 6$ 倍。

S をかけると、どんな絵の面積も 2 倍になります。そのあと A をかけると、その 2 倍になった面積が、さらに 3 倍になります。つないだ行列 AS では、面積は $2 \times 3 = 6$ 倍のはずです。計算で確かめます。

$$AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

積の成分は、行と列の内積です (7-3)。たとえば 1 行 1 列めは $2 \times 2 + 1 \times 0 = 4$ です。

$$\det(AS) = 4 \times 2 - 1 \times 2 = 6 \quad \text{たすきにかけてひく}$$

$$\det A \times \det S = 3 \times 2 = 6 \quad \text{同じになった}$$

$$\det(AB) = \det A \times \det B$$

かける順番を変えた SA は、 AS とはちがう行列です (7-3)。

$$SA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

でも、行列式は $4 \times 2 - 2 \times 1 = 6$ で同じです。 $\det(SA) = \det S \times \det A$ も、数のかけ算なので $2 \times 3 = 3 \times 2$ だからです。符号もかけ算です。裏返し (-1) を 2 回すると、 $(-1) \times (-1) = 1$ で、元の向きにもどります。

かけ算のきまりから、わかること

- 単位行列 I は何も変えないので、 $\det I = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ 。
- 行列を 2 倍した $2A$ は、たても横も 2 倍にする $2I$ と、 A をつないだものです ($2A = (2I)A$)。 $\det(2I) = 2 \times 2 = 4$ なので、 $\det(2A) = 4 \det A$ です。主役の行列なら、 $2A$ は成分がどれも 2 倍の行列で、行列式は $4 \times 4 - 2 \times 2 = 12 = 4 \times 3$ 。たても横も 2 倍になるので、面積は 4 倍です (2 倍ではない)。
- 2×2 の行列を k 倍すると、行列式は k^2 倍。

- 行列のたし算には、このようなきまりはありません。 $A + S$ （成分ごとにたした行列）は、1行め $(4, 1)$ 、2行め $(1, 3)$ で、行列式は $12 - 1 = 11$ です。これは $\det A + \det S = 3 + 2 = 5$ とはちがいます。
- 転置（7-1）しても、行列式は変わりません。転置した行列は1行め (a, c) 、2行め (b, d) で、行列式は $ad - cb$ 。同じ式だからです。

6 3×3 の行列式は、体積の倍率

3×3 の行列は、3次元の点を動かします（7-2）。1辺1の立方体（体積1）に 3×3 の行列をかけると、3本の列の矢印がつくる、ななめにかたむいた箱（平行六面体）になります。2次元と同じ考え方で、立方体の3本の辺 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ は、1列め・2列め・3列めへ行くからです。だから、 **3×3 の行列式は、体積の倍率**です。

4-14の「もっと知りたい」で、3本のベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

がつくる箱の体積を、 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 24$ と求めました。「7-4の行列式で、もう一度出会います」と約束した箱です。3本を列にならべた行列を M とします。

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

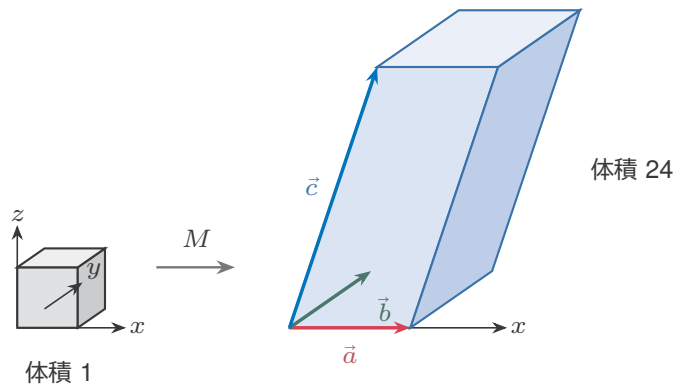


図8 1辺1の立方体（左）は、行列 M をかけると、3本の列 $\vec{a}$ （赤）、 $\vec{b}$ （緑）、 $\vec{c}$ （青）がつくる箱（右）になる。底面積 $2 \times 3 = 6$ 、高さ4で、体積24。

体積の式を、行列の成分で書く

3本の列を $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ と書きます。行列は次の形です。

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

箱の体積 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ を、4-14の外積の成分の式で計算します。まず、外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

です（4-14）。これと $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ の内積は、成分どうしをかけてたしたものです（4-12）。

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

かっこを開き、プラスの3つを前に、マイナスの3つを後ろにならべかえます。

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

6つの項が出てきました。どの項も、**どの行からも1つずつ、どの列からも1つずつ**成分をえらんでかけたものです。この6つの項の和を、 3×3 の行列 M の行列式 $\det M$ とよびます。 2×2 の $ad - bc$ （2つの項）と同じく、体積の倍率で、マイナスは裏返し（右手系が左手系になる：4-13）です。

サラスの方法

6つの項は、次のようにえらぶと、もれなく見つけれられます。この見つけ方を**サラスの方法**といいます。

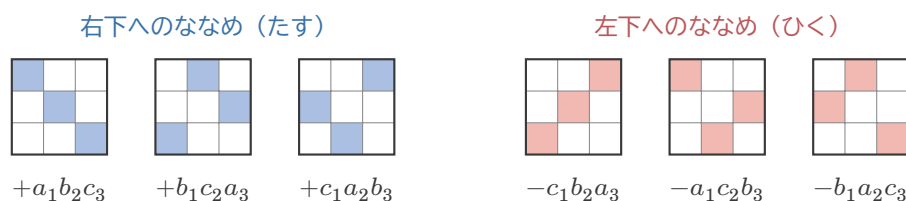


図9 3×3 の行列のマス。ぬったマスの3つの成分をかける。右下へ向かうななめ（はみ出した分は左はしへもどる）の3つをたし、左下へ向かうななめの3つをひく。

- ① 左上から右下へのななめ (a_1, b_2, c_3) をかける。
- ② その線を1つ右にずらす。右はしからはみ出した分は、左はしにもどる (b_1, c_2, a_3)。もう1つずらす (c_1, a_2, b_3)。この3つの積を**たす**。
- ③ 右上から左下へのななめ (c_1, b_2, a_3) と、それをずらした2本の積を**ひく**。

図9の6つの項は、上の体積の式の6つの項と、かける順番がちがうだけで同じです ($b_1c_2a_3 = a_3b_1c_2$ など)。行列の右に1列め・2列めをもう一度書きたしておくと、ななめの線がまっすぐ引けて、見つけやすくなります。

4-14の箱で確かめます。 $a_1 = 2, b_1 = 0, c_1 = 1, a_2 = 0, b_2 = 3, c_2 = 1, a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = 4$ です。

たす3つ： $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 = 2 \times 3 \times 4 + 0 \times 1 \times 0 + 1 \times 0 \times 0 = 24$

ひく3つ： $c_1b_2a_3 + a_1c_2b_3 + b_1a_2c_3 = 1 \times 3 \times 0 + 2 \times 1 \times 0 + 0 \times 0 \times 4 = 0$

$$\det M = 24 - 0 = 24$$

4-14の約束どおり、箱の体積24が、行列式として出てきました。

3 × 3 でも、0 なら平らにつぶれる

3 × 3 の行列式が 0 になるのは、3 本の列の矢印が、原点を通る 1 つの平面（または 1 本の直線）の上ののってしまうときです。箱がつぶれて、厚さが 0 になるからです。たとえば、次の行列の 3 列めは、1 列めと 2 列めの和になっています。

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 列め} = 1 \text{ 列め} + 2 \text{ 列め})$$

サラスの方法で計算すると、たす 3 つは $1 \times 1 \times 2 + 0 \times 1 \times 1 + 1 \times 0 \times 1 = 2$ 、ひく 3 つは $1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 + 0 \times 0 \times 2 = 2$ で、 $\det N = 2 - 2 = 0$ です。3 本の矢印は、1 列めと 2 列めがつくる平面の上にあります。3 次元の空間全体が、1 つの平面に平らにつぶれるのです。2 × 2 と同じく、つぶれた空間は元にもどせず、3 つの文字の連立方程式の答えは、ないか無数にあるかのどちらかになります。

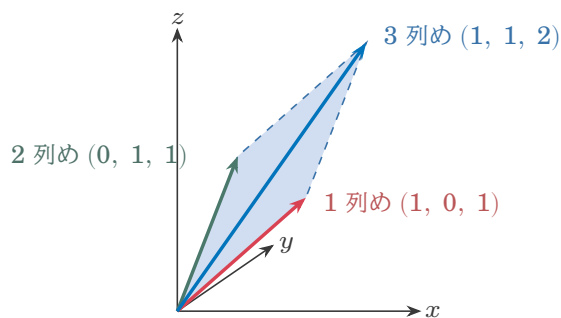


図 10 3 列め（青）は、1 列め（赤）と 2 列め（緑）がつくる平行四辺形の対角線。3 本とも同じ平面（色をぬった面）の上であり、箱の厚さは 0。

サラスの方法は、3 × 3 だけ

4 × 4 の行列で同じようにななめを引いても、行列式にはなりません（4 × 4 の行列式は 24 個の項がありますが、ななめは 8 本しかありません）。4 × 4 より大きい行列式は、コンピュータで計算します (⑧)。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

3 × 3 の行列式を、2 × 2 の行列式で書く

体積の式 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ を、1 行めの成分 a_1, b_1, c_1 でまとめると、次の形にもなります。

$$\det M = a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

1 行めの成分に、「その成分の行と列を消した残りの 2×2 の行列式」をかけ、符号を +、−、+ と変えてたします。4-14 の箱なら、 $2 \times (3 \times 4 - 1 \times 0) - 0 + 1 \times (0 \times 0 - 3 \times 0) = 24$ です。このまとめ方を**余因子展開**（よいんしてんかい）といいます。4 × 4 の行列式も、同じように 3 × 3 の行列式 4 つで書けます。ただ、大きな行列では手間がとても多くなるので、コンピュータは 7-5 の掃き出し法を使って計算します。

7 工学で働く行列式

行列式は、工学の機械やしくみが「うまく働くか」「どこでこまったことが起きるか」を教えてください。3 つの例を見ます。

(ア) ひもが水平に近いと、大きな力がある

4-11 で、重さ 100 N の看板を、左は水平から 30°、右は水平から 60° の 2 本のひもでつるしました。左のひもの力を T_1 [N]、右を T_2 [N] とし、横とたての力のつり合いは

$$\begin{cases} -T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0 \\ T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 100 \end{cases}$$

でした。行列で書くと (7-1)、

$$\begin{pmatrix} -\cos 30^\circ & \cos 60^\circ \\ \sin 30^\circ & \sin 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

1 列めは、左のひもが引く向きの矢印（長さ 1）、2 列めは、右のひもが引く向きの矢印（長さ 1）です。行列式を計算します。

$$\det = -\cos 30^\circ \sin 60^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$$

たすきに掛けてひく（右上
×左下をひく）

$$\det = -(\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ)$$

マイナスでくくり、かける
順を入れかえた

$$\det = -\sin(60^\circ + 30^\circ) = -\sin 90^\circ$$

加法定理 (4-9)

$$\det = -1$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

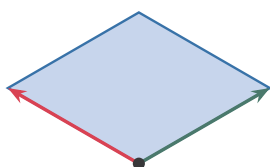
同じように計算すると、左のひもが水平から θ_1 、右が θ_2 のとき、行列式は $-\sin(\theta_1 + \theta_2)$ です。

4-11 の電灯（40 N、左右とも水平から θ ）では、行列式は $-\sin 2\theta$ です。 θ を小さくして、ひもを水平に近づけていくと、どうなるでしょう。4-11 と同じく、たての力のつり合い $2T \sin \theta = 40$ から $T = \frac{40}{2 \sin \theta}$ で、ひもの力 T を求めます。

ひもの角 θ	45°	30°	20°	10°	5°
行列式 $-\sin 2\theta$	-1	-0.866	-0.643	-0.342	-0.174
ひもの力 T [N]	28.3	40	58.5	115	229

表 5 行列式が 0 に近づくほど、ひもの力は大きくなる。5° では、電灯の重さの 5 倍以上。

平行四辺形の面積 0.866

ひもの角 30°

平行四辺形の面積 0.342

ひもの角 10°

図 11 2本のひもが引く向きの矢印（長さ1）。2本がつくる平行四辺形の面積が、行列式の大きさ。ひもが水平に近いと、2本の矢印は反対向きに近くなり、平行四辺形はうすくつぶれる。

2本のひもで、上向き 40 N の力を作らなければなりません。これは、4-11 の「ななめの2本の物差し」で、たて向きの矢印 $(0, 40)$ を、2本の矢印の何倍かの和で作ることです。2本の矢印がほとんど反対向き（平行四辺形がうすい）だと、上向きの成分が小さいので、それぞれをととても長くしないと届きません。**行列式が0に近いと、答えがととても大きくなるのです。**7-5で、連立方程式の答えは行列式でわる形になることを学びます。0に近い数でわるので、答えが大きくなるのです。

(イ) ロボットの腕がのびきると、動けない向きができる

7-2で、2つの関節をもつロボットの腕（物理 力-7と同じ：肩からひじ $L_1 = 0.30$ m、ひじから手先 $L_2 = 0.25$ m、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ ）の手の速度を、ヤコビ行列 J で求めました。

$$\dot{\mathbf{p}} = J\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -0.391 & -0.241 \\ 0.325 & 0.065 \end{pmatrix}$$

$\dot{\mathbf{p}}$ [m/s] は手の速度、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ [rad/s] は肩とひじの角速度です（7-2と同じ書き方）。 J の列にも意味があります（7-2：列は行き先）。1列めは「肩だけを1 rad/sで回したときの手の速度」、2列めは「ひじだけを1 rad/sで回したときの手の速度」です。 J の行列式を計算します（成分は物理 力-7の、丸める前の値を使う）。

$$\det J = (-0.3915) \times 0.0647 - (-0.2415) \times 0.3245$$

ひく数がマイナスなので、たし算になり、 $-0.0253 + 0.0784 = 0.0530$ です。
この数は、 $L_1 L_2 \sin \theta_2$ を計算した値と同じです。

$$L_1 L_2 \sin \theta_2 = 0.30 \times 0.25 \times \sin 45^\circ = 0.30 \times 0.25 \times 0.7071 = 0.0530$$

偶然ではありません。

肩だけを回すと、手先は肩を中心とする円の上を動きます。だから手の速度は、**肩から手先までの矢印を 90° 回した向き**で、大きさは「肩から手先までの距離 $\times$ 角速度」です (4-15)。手先の位置を (x, y) とすると、1 列めは $(-y, x)$ です (4-8: 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$)。同じように、2 列めは、ひじから手先までの矢印 $(L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$ を 90° 回したものです。

$$J = \begin{pmatrix} -y & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ x & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

ここで、手先の位置は 4-7 の順運動学の式です。

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

行列式を 1 行ずつ計算します。式を短くするため、 $\theta_1 + \theta_2$ を θ_{12} と書きます。

$$\det J = -y L_2 \cos \theta_{12} + L_2 \sin \theta_{12} \times x \quad \text{たすきに掛けてひく}$$

$$\det J = L_2 (x \sin \theta_{12} - y \cos \theta_{12}) \quad L_2 \text{ でくくった}$$

$$x \sin \theta_{12} - y \cos \theta_{12} \quad \text{かつこの中だけを計算する}$$

$$= L_1 \cos \theta_1 \sin \theta_{12} - L_1 \sin \theta_1 \cos \theta_{12} \quad \begin{array}{l} x, y \text{ を入れる } (L_2 \text{ の項は} \\ \text{消える}) \end{array}$$

$$= L_1 \sin(\theta_{12} - \theta_1) \quad \begin{array}{l} \text{加法定理 (4-9) の} \\ \sin(\alpha - \beta) \end{array}$$

$$\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2 \quad \theta_{12} - \theta_1 = \theta_2$$

$$\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2$$

行列式は、ひじの角 θ_2 だけで決まります。 $\theta_2 = 90^\circ$ でいちばん大きく ($0.30 \times 0.25 = 0.075$)、腕がまっすぐにのびきる $\theta_2 = 0^\circ$ で0になります。

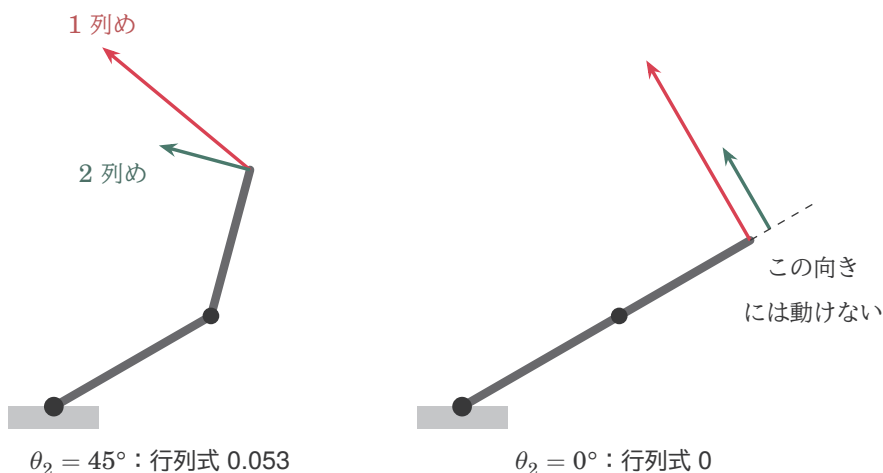


図12 手先の矢印は、 J の1列め（赤：肩だけ回す）と2列め（緑：ひじだけ回す）。右のようにのびきると、2本とも腕に直角な同じ向きになり、平行四辺形がつぶれる。腕の向き（点線）には、どんなに関節を回しても手先を動かせない。

のびきった腕では、肩を回しても、ひじを回しても、手先は腕に直角な向きにしただけ動きます。2つの列が平行なので、行列式は0です（④）。手先を腕の向きに動かすことは、どう関節を回してもできません。このように、行列式が0になって、動けない向きができてしまう姿勢を、**特異姿勢**（とくいしせい）といいます。のびきる少し手前でも、行列式は0に近いので、手先を腕の向きに少し動かすだけで、関節をととても速く回さなければなりません（(ア)と同じ理由）。本物のロボットを動かすプログラムは、行列式を見て、特異姿勢に近づかないように気をつけています。

(ウ) 電気の箱の行列式は、いつも 1

7-3 で、電気の箱を、**出口の電圧と電流を入ると、入口の電圧と電流が出てくる** 2×2 の行列で表しました。抵抗 R $[\Omega]$ を直列に入れた箱と、並列に入れた箱の行列は、次の形でした。

$$\text{直列の箱} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{並列の箱} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

どちらも、行列式は $1 \times 1 - R \times 0 = 1$ 、 $1 \times 1 - 0 \times \frac{1}{R} = 1$ です。2 つの箱をつないだ行列は、2 つの行列の積でした (7-3)。⑤の $\det(AB) = \det A \times \det B$ から、つないだ箱の行列式も $1 \times 1 = 1$ です。7-3 の例題で作った行列で確かめます。直列 2Ω のあとに並列 2Ω をつないだ箱と、つなぐ順を逆にした箱です (行列はちがう)。

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 - 2 \times 0.5 = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times 2 - 2 \times 0.5 = 1$$

つなぐ順で行列は変わりますが、行列式はどちらも 1 です。箱を何個つないでも、行列式は $1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ のままです。

コイルとコンデンサーの箱 (7-3。6-10・6-13 の複素数のインピーダンス) でも同じです。コイル $j\omega L$ を直列に、コンデンサーを並列に入れた箱の行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

です (1 行 1 列めは $1 + j\omega L \times j\omega C = 1 + j^2 \omega^2 LC = 1 - \omega^2 LC$)。行列式は、

$$(1 - \omega^2 LC) \times 1 - j\omega L \times j\omega C$$

たすきにかけてひく

$$= 1 - \omega^2 LC - j^2 \omega^2 LC$$

$$j\omega L \times j\omega C = j^2 \omega^2 LC$$

$$= 1 - \omega^2 LC + \omega^2 LC = 1$$

$$j^2 = -1$$

$j^2 = -1$ (6-8) のおかげで、ちょうど 1 になりました。

電気の本では、この箱の行列の 4 つの数を A 、 B 、 C 、 D (四端子定数) とよび、抵抗・コイル・コンデンサーだけでできた箱では、いつも $AD - BC = 1$ になることを、計算を確かめるのに使います (物理シリーズの電磁気学、7-11)。 $AD - BC$ は、この章の行列式 $ad - bc$ そのものです。

8 表計算と Python で行列式を求める

表計算では、MDETERM (エム・デターム) という関数で行列式を求めます。行列を左上から入れ、空いたマスに式を書きます。

	A	B	C	D
1	行列 A			行列式
2	2	1		3
3	1	2		

表 6 D2 のマスに =MDETERM(A2:B3) と入れると、3 が出る。3 × 3 なら
=MDETERM(A2:C4) のように、行列のはんいを書く。

Python では、numpy の `np.linalg.det` を使います (`linalg` は linear algebra (線形代数) の略)。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])          # 主役の行列（1 行ずつ書く）
M = np.array([[2, 0, 1],
              [0, 3, 1],
              [0, 0, 4]])      # 4-14 の箱（3 本を列にならべた）
print(np.linalg.det(A))       # 行列式
print(np.linalg.det(M))
print(round(np.linalg.det(A), 6)) # 小数第 6 位までに丸める
```

実行結果

```
2.9999999999999996
23.999999999999993
3.0
```

答えが 3 や 24 ぴったりにならず、2.9999999999999996 のように出ました。まちがいはありません。コンピュータは、たすきにかけてひくのではなく、7-5 で学ぶ掃き出し法で行列式を計算します。その途中で、わり算をして小数を 2 進法で表すので、ごくわずかなずれが出るのです（2-19 の「0.1 を 10 回たすと…」と同じ理由）。小数第 6 位までに丸めれば、3.0 になります。

コンピュータを使うと、 4×4 やもっと大きな行列の行列式も、すぐに求められます。たとえば

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の行列式は、`np.linalg.det` で 4.999999999999999、つまり 5 です。

表計算で、ひもの角と行列式と力を一覧にする

⑦（ア）の電灯（40 N）で、ひもの角をもっと小さくするとどうなるかを、表計算で調べます。A 列に角を入れ、B 列で行列式、C 列でひもの力を計算します。

	A	B	C
1	角 θ (°)	行列式	力 T (N)
2	45	-1.000	28.3
3	30	-0.866	40.0
4	20	-0.643	58.5
5	10	-0.342	115.2
6	5	-0.174	229.5
7	2	-0.070	573.1
8	1	-0.035	1146.0

表7 B2の式は $=-\text{SIN}(\text{RADIANS}(2*A2))$ （行列式 $-\sin 2\theta$ ）、C2の式は $=40/(2*\text{SIN}(\text{RADIANS}(A2)))$ （ $T = \frac{40}{2\sin\theta}$ ）。RADIANS は度をラジアンに直す関数（6-9）。

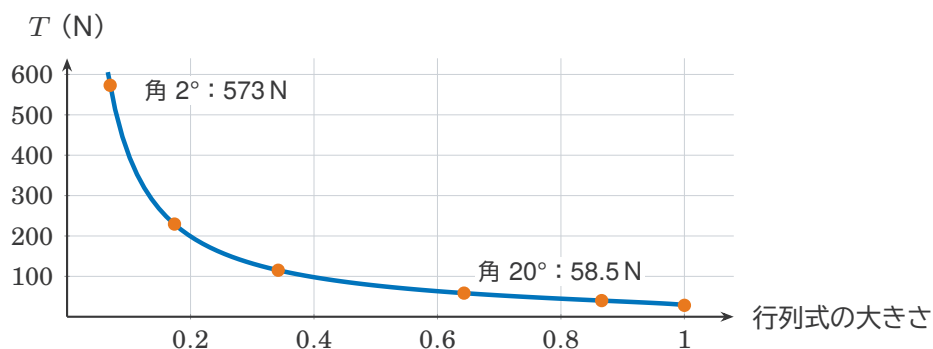


図13 行列式の大きさ（横）と、ひもの力（たて）。行列式が0に近づくと、力は急に大きくなる。角1°（行列式0.035）では1146 Nで、電灯の重さの約29倍。

ひもをぴんと水平に張って物をつるすことはできない、とよく言われます。水平に近づくほど行列式が0に近づき、ひもの力が限りなく大きくなるからです。物干しのロープや電線が、少したるませて張ってあるのは、このためでもあります。

専門書をのぞいてみよう 線形代数の教科書ふうの書き方

2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し、 $|A| = ad - bc$ を A の行列式という。 A の表す線形変換によって、図形の面積は $||A||$ 倍される。また、 $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

記 $|A|$ はこの章の $\det A$ (絶対値ではない)。「2 次の正方行列」は 2×2 の行列、「線形変換」は行列をかける変換 (7-2)。 $||A||$ は、行列式の絶対値 (大きさ) で、外側のたての棒だけが絶対値の記号。面積の倍率は、行列式の大きさ (③) ということ。

たいせつ

2 × 2 の行列式 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (たすきに掛けてひく)

意味 面積の倍率。マイナスは裏返し

0 のとき 2 つの列が平行で、平らにつぶれる。元にもどせない

連立方程式 $\det A \neq 0$ なら答えは 1 つ。0 なら、ないか無数

積と数倍 $\det(AB) = \det A \times \det B$ 、 $\det(kA) = k^2 \det A$ (2 × 2)

3 × 3 体積の倍率。サラスの方法 (3 × 3 だけ)

この章で出てきたことば

行列式 正方行列から決まる1つの数。 2×2 では $ad - bc$ 。面積（ 3×3 では体積）の倍率。

サラスの方法 3×3 の行列式の6つの項を、ななめの線で見つける方法。 3×3 だけに使える。

余因子展開 3×3 の行列式を、 2×2 の行列式3つで書く方法。

特異姿勢 ロボットの腕のヤコビ行列 J の行列式が0になり、動けない向きができる姿勢。

記号カード

初めて出た章 7-4

 $\det A$

読み方 デターミナント・エー
意味 行列 A の行列式。 2×2 なら $ad - bc$ 。面積・体積の倍率
英語 determinant

記号カード

初めて出た章 7-4

 $|A|$

読み方 デターミナント・エー
意味 行列式の、専門書での書き方。絶対値ではないので、マイナスにもなる
英語 determinant

コラム 関孝和とライプニッツ

行列式の考えは、「行列」という名前ができる（1850年ごろ）よりも、ずっと前に生まれました。日本の数学者、関孝和は、1683年にまとめた本の中で、文字をいくつもふくむ方程式から文字を消していく計算に、行列式と同じ考えを使っていたと伝えられています。ドイツのライプニッツも、1693年の手紙の中で、3つの式から2つの文字を消すときの「たすきにかけてひく」形の計算を書いています。2人は、まったく別々に、ほぼ同じころ、同じ考えにたどりついたのです。どちらも、連立方程式を解く計算の中から、この数を見つけました。この章では面積から入りましたが、歴史では連立方程式のほうが先だったのです。

例題でたしかめよう

例題 1 方眼で面積を数える

次の行列をかけると、1 マスの正方形は平行四辺形になります。平行四辺形の面積を、方眼で数えて求め、行列式とくらべましょう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

考え方 1 列め (3, 1) と 2 列め (1, 2) の平行四辺形を、横 3 + 1、たて 1 + 2 の長方形でかこむ。まわりの 6 つ (三角形 4 つ、長方形 2 つ) をひく。

式 長方形 : $(3 + 1) \times (1 + 2) = 4 \times 3 = 12$

下と上の三角形 (底辺 3、高さ 1) : $\frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times 2 = 3$

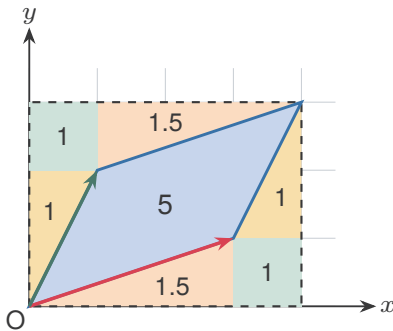
左と右の三角形 (底辺 1、高さ 2) : $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2 = 2$

右下と左上の長方形 (横 1、たて 1) : $1 \times 1 \times 2 = 2$

平行四辺形 : $12 - 3 - 2 - 2 = 5$

行列式 : $3 \times 2 - 1 \times 1 = 6 - 1 = 5$

答え 面積は 5 で、行列式の 5 と同じ



例題 1 の平行四辺形を方眼にかきました。まわりの 6 つの面積は、1.5、1.5、1、1、1、1 で、合わせて 7 です。長方形 12 から 7 をひいた 5 が、まん中の平行四辺形の面積です。

じぶんでとこう1

次の行列をかけると、1マスの正方形は平行四辺形になります。平行四辺形の面積を、方眼で数えて求め、行列式とくらべましょう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例題2 行列式を計算して、意味を読む

次の行列の行列式を求めましょう。また、行列をかけると、面積は何倍になりますか。裏返しになりますか。

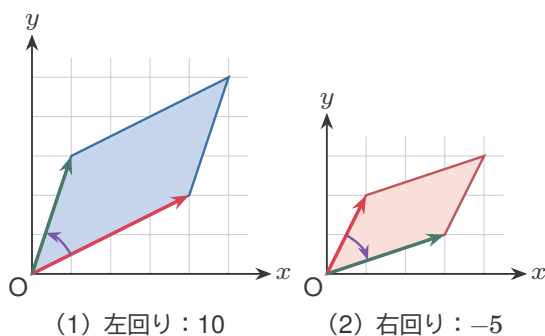
$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 たすきにかけてひく。面積の倍率は行列式の大きさ、マイナスなら裏返し (③)。

式 (1) $4 \times 3 - 1 \times 2 = 12 - 2 = 10$

(2) $1 \times 1 - 3 \times 2 = 1 - 6 = -5$

答え (1) 行列式 10。面積は 10 倍、裏返しにはならない。(2) 行列式 -5 。面積は 5 倍、裏返しになる。



例題2の行列の列を、方眼にかきました。赤(1列め)から緑(2列め)へ回る向きを見ると、(1)は左回り、(2)は右回りです。(2)の面積は -5 倍ではなく5倍で、形が裏返しになります。

じぶんでこう2

次の行列の行列式を求めましょう。また、行列をかけると、面積は何倍になりますか。裏返しになりますか。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例題3 行列式が0になる数をさがす

次の行列の行列式が0になるのは、 k がいくつのときですか。また、そのとき、この行列をかけると、平面の点はどこへ行きますか。

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

考え方 行列式を k の式で書いて、0 とおく。0 のとき 2 つの列は平行で、点は 1 列めの矢印の直線の上へ行く (④)。

式 行列式： $1 \times 4 - k \times 2 = 4 - 2k$

$$4 - 2k = 0 \text{ より } 2k = 4, k = 2$$

$k = 2$ のとき、1 列めは $(1, 2)$ 、2 列めは $(2, 4)$ で、2 列めは 1 列めの 2 倍

どの点も $(1, 2)$ の何倍かになるので、直線 $y = 2x$ の上へ行く

答え $k = 2$ 。平面のすべての点が、直線 $y = 2x$ の上へ行く (平らにつぶれる)

k をいろいろに変えて、行列式 $4 - 2k$ がどうなるかを見ておきましょう。

k	0	1	2	3	4
行列式 $4 - 2k$	4	2	0	-2	-4
面積の倍率	4	2	0	2	4

表8 k が2より小さいと向きはそのまま、2で平らにつぶれ、2より大きいと裏返しになる。

2列め $(k, 4)$ の矢印は、 k がふえると右へたおれていきます。 $k = 2$ でちょうど1列め $(1, 2)$ と重なり、それをこえると1列めの右側へまわりこみます。だから、行列式は0を通過してマイナスに変わるのです。

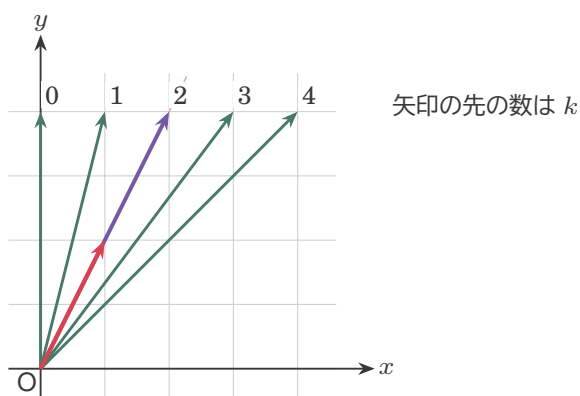


図14 2列め $(k, 4)$ の矢印（緑）と、1列め $(1, 2)$ の矢印（赤）。 $k = 2$ のとき（むらさき）、2列めは1列めと同じ直線（点線）の上にいる。

じぶんでこう3

次の行列の行列式が0になるのは、 k がいくつのときですか。また、そのとき、この行列をかけると、平面の点はどこへ行きますか。

$$\begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

例題 4 積の行列式と、数倍の行列式

次の行列 A 、 B について答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) AB を計算して $\det(AB)$ を求め、 $\det A \times \det B$ とくらべましょう。

(2) $\det(2A)$ を求めましょう。

考え方 (1) 積の成分は、行と列の内積 (7-3)。(2) 2×2 の行列を 2 倍すると、行列式は $2^2 = 4$ 倍 (⑤)。

式 (1) 1 行 1 列め $2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$ 、1 行 2 列め $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$

2 行 1 列め $1 \times 1 + 2 \times 0 = 1$ 、2 行 2 列め $1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = 2 \times 3 - 3 \times 1 = 3$$

$$\det A \times \det B = (4 - 1) \times (1 - 0) = 3 \times 1 = 3$$

$$(2) \det(2A) = 2^2 \times \det A = 4 \times 3 = 12$$

確かめ： $2A$ は 1 行め $(4, 2)$ 、2 行め $(2, 4)$ なので $16 - 4 = 12$

答え (1) $\det(AB) = 3$ で、 $\det A \times \det B = 3$ と同じ。(2) 12

ずらしの行列 B は、面積を変えません (行列式 1)。だから、 B をかけてから A をかけても、面積は 3 倍のままです。

じぶんでところ4

次の行列 A 、 S 、 B について答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) SA を計算して $\det(SA)$ を求め、 $\det S \times \det A$ とくらべましょう。
- (2) $\det(3B)$ を求めましょう。

例題5 3×3 の行列式

サラスの方法で、行列式を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

考え方 右下へのななめ3本をたし、左下へのななめ3本をひく (図9)。

1行めは $a_1 = 2$ 、 $b_1 = 1$ 、 $c_1 = 1$ 、2行めは $a_2 = 1$ 、 $b_2 = 3$ 、 $c_2 = 2$ 、3行めは $a_3 = 1$ 、 $b_3 = 0$ 、 $c_3 = 2$ 。

式 たす1つめ: $a_1 b_2 c_3 = 2 \times 3 \times 2 = 12$

たす2つめ・3つめ: $b_1 c_2 a_3 = 1 \times 2 \times 1 = 2$ 、 $c_1 a_2 b_3 = 1 \times 1 \times 0 = 0$

ひく1つめ: $c_1 b_2 a_3 = 1 \times 3 \times 1 = 3$

ひく2つめ・3つめ: $a_1 c_2 b_3 = 2 \times 2 \times 0 = 0$ 、 $b_1 a_2 c_3 = 1 \times 1 \times 2 = 2$

$\det = (12 + 2 + 0) - (3 + 0 + 2) = 14 - 5 = 9$

答え 9

じぶんでこう5

サラスの方法で、行列式を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題6 3×3 の行列式が 0 になる数をさがす

次の行列の行列式が 0 になるのは、 k がいくつのときですか。そのとき、3 列めは 1 列めと 2 列めでどう表せますか。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 サラスの方法で、行列式を k の式で書いて 0 とおく。0 なら、3 本の列は 1 つの平面の上にある (⑥)。

式 たす 3 つ： $1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 + k \times 0 \times 0 = 1 + 2 + 0 = 3$

ひく 3 つ： $k \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 0 + 2 \times 0 \times 1 = k + 0 + 0 = k$

行列式： $3 - k = 0$ より $k = 3$

3 列めは $(3, 1, 1)$ 。1 列め $(1, 0, 1)$ と 2 列め $(2, 1, 0)$ をたすと $(3, 1, 1)$

答え $k = 3$ 。3 列め = 1 列め + 2 列め (3 本の列が 1 つの平面にのる)

じぶんでところ6

次の行列の行列式が0になるのは、 k がいくつのときですか。そのとき、3列めは1列めと2列めでどう表せますか。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例題7 ロボットの腕の行列式

2つの関節をもつロボットの腕 ($L_1 = 0.30 \text{ m}$, $L_2 = 0.25 \text{ m}$) で、

(1) ひじの角 $\theta_2 = 10^\circ$ のときの $\det J$ を求めましょう ($\sin 10^\circ = 0.174$)。

(2) $\det J = 0$ になるのは、 θ_2 が何度のときですか ($0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$)。

考え方 $\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2$ (⑦ (イ))。肩の角 θ_1 には関係しない。

式 (1) $\det J = 0.30 \times 0.25 \times 0.174 = 0.075 \times 0.174 = 0.013$

(2) $\sin \theta_2 = 0$ になるのは $\theta_2 = 0^\circ$ と 180°

答え (1) 約 0.013。(2) 0° (腕がまっすぐのびきる) と 180° (腕が折りたたまれる)

(1) の 0.013 は、 $\theta_2 = 45^\circ$ のときの 0.053 の約 4 分の 1 です。腕がのびきる手前で、行列式は 0 に近づいています。

じぶんでところ7

肩からひじ $L_1 = 0.40 \text{ m}$ 、ひじから手先 $L_2 = 0.30 \text{ m}$ のロボットの腕で、

(1) $\theta_2 = 30^\circ$ のときの $\det J$ を求めましょう。

(2) $\det J$ がいちばん大きくなるのは、 θ_2 が何度のときですか。そのときの $\det J$ も求めましょう。

例題 8 ひもの角と行列式

(1) 4-11 の看板（左のひもは水平から 30° 、右は 60° ）のつり合いの行列の行列式を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} -\cos 30^\circ & \cos 60^\circ \\ \sin 30^\circ & \sin 60^\circ \end{pmatrix}$$

(2) 重さ 40 N の電灯を、左右とも水平から 10° のひもでつるします。つり合いの行列の行列式と、ひもの力 $T[\text{N}]$ を求めましょう ($\sin 10^\circ = 0.174$ 、 $\sin 20^\circ = 0.342$)。

$$\begin{pmatrix} -\cos 10^\circ & \cos 10^\circ \\ \sin 10^\circ & \sin 10^\circ \end{pmatrix}$$

考え方 行列式は $-\sin(\theta_1 + \theta_2)$ (⑦ (ア))。(2) のひもの力は、たての力のつり合い $2T \sin 10^\circ = 40$ から。

式 (1) $-\cos 30^\circ \sin 60^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = -\sin(30^\circ + 60^\circ)$

$$-\sin(30^\circ + 60^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

(2) $-\cos 10^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ \sin 10^\circ = -\sin(10^\circ + 10^\circ)$

$$-\sin(10^\circ + 10^\circ) = -\sin 20^\circ = -0.342$$

$$2T \times 0.174 = 40 \text{ より } T = \frac{40}{0.348} = 115$$

答え (1) -1 。(2) 行列式 -0.342 、ひもの力は約 115 N

(2) の行列式の大きさ 0.342 は、(1) の 1 よりずっと小さく、 0 に近づいています。ひもの力も、電灯の重さ 40 N の約 3 倍になりました。

じぶんでとこう 8

(1) 左右とも水平から 45° のひもで看板をつるすときの、つり合いの行列の行列式を求めましょう。

$$\begin{pmatrix} -\cos 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \sin 45^\circ \end{pmatrix}$$

(2) 重さ 40 N の電灯を、左右とも水平から 20° のひもでつるします。つり合いの行列の行列式と、ひもの力 $T[\text{N}]$ を求めましょう ($\sin 20^\circ = 0.342$ 、 $\sin 40^\circ = 0.643$)。

$$\begin{pmatrix} -\cos 20^\circ & \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \sin 20^\circ \end{pmatrix}$$

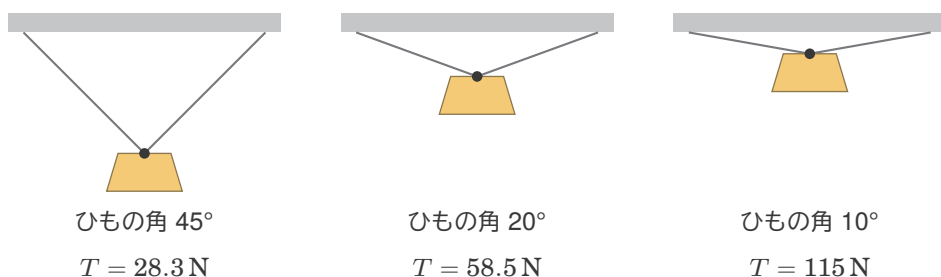


図 15 重さ 40 N の電灯をつるすひもの力。行列式の大きさは、左から 1、0.643、0.342。
ひもが水平に近いほど、行列式は 0 に近づき、ひもの力は大きくなる。

例題 9 電気の箱の行列式は 1

(1) 4Ω の抵抗を直列に入れた箱（入口側）のあとに、 2Ω の抵抗を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列を求め、行列式が 1 になることを確かめましょう。

(2) コイル ($j\omega L = j10 [\Omega]$) を直列に入れた箱（入口側）のあとに、コンデンサー ($j\omega C = j0.05 [\text{S}]$) を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列の行列式を求めましょう。

考え方 直列の箱は 1 行め (1, R)、2 行め (0, 1)。並列の箱は 1 行め (1, 0)、2 行め ($1/R$, 1)。入口側の箱を左に書いてかける (7-3)。 $j^2 = -1$ 。

式 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 行 } 1 \text{ 列めは } 1 \times 1 + 4 \times 0.5 = 3)$$

行列式： $3 \times 1 - 4 \times 0.5 = 3 - 2 = 1$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & j10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j0.05 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & j10 \\ j0.05 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 行 1 列め： $1 \times 1 + j10 \times j0.05 = 1 + 0.5j^2 = 1 - 0.5 = 0.5$)

行列式： $0.5 \times 1 - j10 \times j0.05 = 0.5 - 0.5j^2 = 0.5 + 0.5 = 1$

答え (1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ 、行列式 1。(2) 1

じぶんでとこう9

(1) 1Ω の抵抗を直列に入れた箱（入口側）のあとに、 4Ω の抵抗を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列を求め、行列式が1になることを確かめましょう。

(2) コイル ($j4 [\Omega]$) を直列に入れた箱（入口側）のあとに、コンデンサー ($j0.125 [S]$) を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列の行列式を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

かける組み合わせ

✗ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac - bd$ (たてにかけた)

○ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (ななめにかけた)

「左上×右下」と「右上×左下」のように、ななめにかけます。 ac は1列めの2つをかけたもので、面積の意味がありません。主役の行列で $ac - bd = 2 - 2 = 0$ になってしまい、面積3と合いません。

⚠ まちがえやすいところ

2 倍した行列の行列式

✕ $\det A = 3$ なので、 $\det(2A) = 2 \times 3 = 6$

○ 2×2 では、 $\det(2A) = 2^2 \times 3 = 12$

$2A$ は、たても横も 2 倍にします。正方形の 1 辺が 2 倍なら、面積は $2 \times 2 = 4$ 倍です。 3×3 なら、体積は $2^3 = 8$ 倍になります。

⚠ まちがえやすいところ

たした行列の行列式

✕ $\det(A + B) = \det A + \det B$

○ $\det(AB) = \det A \times \det B$ 。たし算にはきまりがない

主役の行列 A と、横に 2 倍する S では、 $\det(A + S) = 11$ ですが、 $\det A + \det S = 5$ です。行列式は「つなぐ」とかけ算になりますが、「たす」ときには使えるきまりがありません。

⚠ まちがえやすいところ

サラスの方法を 4×4 に使う

✕ 4×4 の行列でも、ななめにかけてたしひきする

○ サラスの方法は 3×3 だけ。 4×4 はコンピュータか、余因子展開で 4×4 の行列式には 24 個の項がありますが、ななめの線は 8 本しかありません。項が足りないので、ちがう答えになります。

⚠ まちがえやすいところ

$|A|$ を絶対値と思う

✗ 専門書に $|A|$ と書いてあるから、行列式はいつもプラス

○ $|A|$ は行列式の記号。マイナスにもなる

専門書の $|A|$ は、行列式 $\det A$ の別の書き方です。例題2(2)の行列なら、 $|A|$ は -5 です。面積の倍率は、行列式の大きさ（絶対値）の5です。

⚠ まちがえやすいところ

コンピュータの答えを読む

✗ `np.linalg.det` が `2.9999999999999996` と出たから、行列式は3ではない

○ 2進法で計算したときのずれ。行列式は3

コンピュータの小数には、ごくわずかなずれが出ます(2-19)。 10^{-15} ほどのずれは、丸めて読みます。成分が整数の行列なら、行列式も整数です。

⚠ まちがえやすいところ

行列式が0なら、答えはない？

✗ 行列式が0だから、連立方程式の答えはない

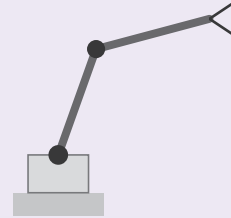
○ 行列式が0なら、答えがないか、無数にあるかのどちらか

$x + 2y = 3$ 、 $2x + 4y = 6$ は、行列式は0ですが、 $(3, 0)$ 、 $(1, 1)$ など、答えは無数にあります。右辺がつぶれた直線の上にあるかどうかで決まります(④)。

物理・工学ではこう使う

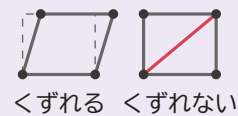
● 産業用ロボットの特異姿勢

工場で車のボディを組み立てる 6 つの関節のロボットでは、腕がのびきったときや、手首の 2 つの回転軸が一直線にならんだときなどに、ヤコビ行列 (6×6) の行列式が 0 になります。この姿勢の近くでは、手先を少し動かすだけで、関節を急に速く回す必要が出てきます。ロボットを動かすプログラムは、行列式を計算して、特異姿勢を通らない道すじを選んだり、速さを落としたりしています。



● トラスの形がくずれない条件

棒をピンでつないだ四角形のわくは、横から押すと、平行四辺形にくずれてしまいます。ななめの棒を 1 本入れて三角形にすると、くずれなくなります。棒の力のつり合いの式を行列で書くと (7-5・物理 力-5)、くずれる組み方では、その行列の行列式が 0 になります。力が 1 つに決まらず、形も 1 つに決まらないのです。



物理・工学ではこう使う

● ゲームの画面：表か裏かを行列式で決める

3次元のゲームでは、物の表面を小さな三角形に分けて画面にかきます。三角形の頂点は、表から見たとき左回りになる順番に決めておきます。画面にうつしたあと、2本の辺の矢印で 2×2 の行列式を計算し、マイナス（右回り、つまり裏返し）なら、その三角形は物の裏側を向いているので、かかずにとばします。見えない面をかかないことで、計算の手間をへらしているのです。



● 回路の電流は1つに決まる

3-6の2つの電源の回路の式

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

の行列の行列式は $16 - 4 = 12$ で、0ではありません。だから、電流はただ1組（2Aと0.5A）に決まります。抵抗と電源だけの回路では、正しく式を立てれば、行列式が0にならないことが知られています。もし0になったら、同じ式を2回立てたなど、式の立て方をまちがえたしるしです（7-5）。

🔍 コラム ヤコビ行列の「ヤコビ」

ロボットの腕の行列 J の名前は、ドイツの数学者ヤコビ（1804～1851年）からきています。ヤコビは、行列式の性質をくわしく調べた論文を書き、とくに「いくつもの量がいっしょに変わるとき、その変わり方を並べた表の行列式」を研究しました。その表がヤコビ行列、その行列式はヤコビアンとよばれます。この章で見たように、ヤコビ行列の行列式は「小さな面積が何倍になるか」を表します。だから、ロボットの特異姿勢だけでなく、第8巻で学ぶ、曲がった座標（極座標など）での積分の計算にも、ヤコビアンが出てきます（8-3）。



章末問題

7-4 のまとめ

基本



1 次の行列式を求めましょう。

$$(1) \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2 次の行列をかけると、1 マスの正方形は平行四辺形になります。平行四辺形の面積を方眼で数えて求め、行列式とくらべましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3 次の行列で、面積は何倍になりますか。裏返しになりますか。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4 次の行列の行列式が0になるのは、 k がいくつのときですか。また、そのとき平面の点はどんな直線の上へ行きますか。

$$\begin{pmatrix} 3 & k \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

5 次の行列 A 、 B について答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) AB を計算して $\det(AB)$ を求め、 $\det A \times \det B$ とくらべましょう。(2) $\det(3A)$ を求めましょう。

6 サラスの方法で、次の行列式を求めましょう。(2) は物理の次元解析（物理力-15）で出てくる行列です。

$$(1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 6Ω の抵抗を直列に入れた箱（入口側）のあとに、 2Ω の抵抗を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列を求め、行列式が1になることを確かめましょう。

8 コイル ($j2 [\Omega]$) を直列に入れた箱（入口側）のあとに、コンデンサー ($j0.25 [S]$) を並列に入れた箱（出口側）をつなぎます。つないだ箱の行列の行列式を求めましょう。

チャレンジ ★★★★★

- 9 重さ 40 N の電灯を、左右とも水平から 15° のひもでつるします。つり合いの行列の行列式と、ひもの力 T [N] を求め、 30° でつるすとき（行列式 -0.866 、 $T = 40$ N）とくらべましょう（ $\sin 15^\circ = 0.259$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ ）。

$$\begin{pmatrix} -\cos 15^\circ & \cos 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \sin 15^\circ \end{pmatrix}$$

- 10 ロボットの腕（ $L_1 = 0.30$ m、 $L_2 = 0.25$ m）で、 $\theta_2 = 30^\circ$ 、 90° 、 0° のときの $\det J$ を求めましょう。特異姿勢はどれですか。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 方眼で面積を数え、 $ad - bc$ で行列式を計算できる。 → 143 ページ
- ☐ 行列式のマイナス（裏返し）と 0（平らにつぶれる）の意味がわかる。 → 147 ページ
- ☐ 3×3 の行列式をサラスの方法で計算し、工学の行列式を読める。 → 152 ページ



ミナ

行列式が 0 だと、つぶれて元にもどせない。次の 7-5 では、0 でない行列を「元にもどす行列」を作って、連立方程式を一気に解くよ。

第1部 行列の計算



7-5

逆行列で 連立方程式を解く

📖 道しるべ この章の前に [3-6](#) [3-16](#) [4-11](#) [4-12](#) [7-1](#) [7-3](#) [7-4](#)
 この章の先に [7-9](#) [7-11](#) [9-10](#)

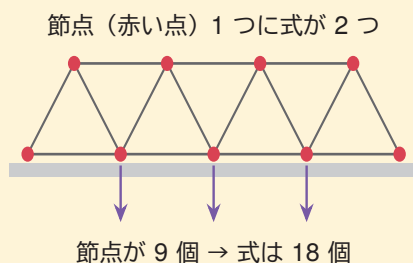
📌 この章でできるようになること

- ★★★★★ 2×2 の逆行列を作って確かめ、連立方程式を $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ で解ける。
- ★★★★★ 掃き出し法で、3つの文字の連立方程式と逆行列を、表の行の操作で求められる。
- ★★★★★ 表計算・Python で連立方程式を解き、最小二乗法の式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ で直線を求められる。

? はてな?

3-6 では、2つの式の連立方程式を、
加減法で解きました。

橋のトラスでは、棒がつながる点
(節点) の1つ1つで、横とたての力の
のつり合いの式が2つずつできます。
節点が50個なら、式は100個です。
大きな電気の回路でも同じです。
式が100個もある連立方程式を、ど
うやって解くのでしょうか。



7-1 では、連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ と、たった 1 つの式で書きました。数の方程式 $2x = 6$ とそっくりの形です。 $2x = 6$ は、両辺を 2 でわって $x = 3$ と解きました。行列でも、同じように「わって」解けないでしょうか。

行列には、わり算はありません。そのかわり、7-4 で「つぶさない行列（行列式が 0 でない行列）は、元にもどせる」ことを学びました。この章では、行列の変換を**元にもどす行列**を作り、それをかけて連立方程式を解きます。そして、コンピュータが、式が 100 個でも 100 万個でも、同じ手順で解いているしくみを見ます。最後に、3-16 の最小二乗法を、行列で解きます。

△ やってみよう 表計算で連立方程式を解こう

3-6 の回路（9V と 6V の電源、 2Ω の抵抗 3 つ）の式 $4I_1 + 2I_2 = 9$ 、 $2I_1 + 4I_2 = 6$ を、表計算の関数で解きます。

- 1 A2:B3 に係数、C2:C3 に右辺（電源の電圧）を入れよう（7-1 の並べ方）。
- 2 D2 に `=MMULT(MINVERSE(A2:B3),C2:C3)` と入れて、7-1 と同じように確定しよう。D2:D3 に I_1 、 I_2 が出るよ。
- 3 答えを元の式に入れて確かめよう。E2 に `=MMULT(A2:B3,D2:D3)` と入れると、右辺の 9 と 6 にもどるかな？
- 4 C2:C3 を 12 と 0 に変えてみよう。答えはどうなるかな？

D2		<code>=MMULT(MINVERSE(A2:B3),C2:C3)</code>			
	A	B	C	D	E
1	係数 A		右辺 $\vec{b}$	答え $\vec{x}$	確かめ $A\vec{x}$
2	4	2	9	2	9
3	2	4	6	0.5	6

表 1 MINVERSE は逆行列を作る関数（①で学ぶ）。答えは $I_1 = 2\text{A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{A}$ で、3-6 と同じ。E 列で元の式にもどしても、9 と 6 になる。

④で右辺を 12 と 0 にすると、答えは $I_1 = 4$ 、 $I_2 = -2$ になります。 I_2 のマイナスは、右の電源の電流が、3-6 の図の矢印と反対向きに流れるという意味です (3-6 で決めた向きを基準にしている)。右辺を変えるだけで、すぐに答えが変わりました。表計算は、どんな計算をしているのでしょうか。この章は手順が多いので、1 回でわからなくても大丈夫です。2 つの文字の小さな例で手を動かしてから、もう一度読むと、ずっとわかりやすくなります。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 3-6** 加減法：式に数をかけたり、式どうしをひいたりして、文字を消す。係数の表の行どうしをひいても同じ (行列の種)。
- 7-1** 連立方程式は $A\vec{x} = \vec{b}$ (A は係数行列) と書ける。2 行 3 列の行列と 3 行 1 列の行列はかけられる (左の列の数 = 右の行の数)。
- 7-2** 行列は「入れると出てくる機械」。1 列めは $(1, 0)$ の行き先、2 列めは $(0, 1)$ の行き先。
- 7-3** $AB\vec{x}$ は B を先にかける。 $(AB)C = A(BC)$ 。単位行列 I は $AI = IA = A$ 。
- 7-4** 2×2 の行列式は $ad - bc$ (たすきに掛けてひく)。0 なら平らにつぶれて元にもどせない。 $\det(AB) = \det A \times \det B$ 。
- 4-12** 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ 。直角なら内積は 0。 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ 。
- 3-16** 最小二乗法：ずれの 2 乗の和 S をいちばん小さくする。原点を通る直線 $y = ax$ なら、 $a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和})$ 。

数学の道具

① 元にもどす機械：逆行列

数の方程式 $2x = 6$ を、もう一度ていねいに見ます。「2 でわる」は、「 $\frac{1}{2}$ をかける」ことです。 $\frac{1}{2}$ は、2 にかけると 1 になる数です。

$$2x = 6$$

問題の式

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 6$$

両辺に、左から $\frac{1}{2}$ をかける

$$1 \times x = 3$$

 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (「2 倍」を「元にもどす」)

$$x = 3$$

1 をかけても変わらない

行列でも、同じことをしたいのです。そのためには、「行列 A にかけてと単位行列 I になる行列」がほしくなります。単位行列 I は、数の 1 と同じく、かけても何も変えない行列でした (7-3)。

絵を元にもどす

7-2 で、家の絵に主役の行列 A をかけると、ななめにのびた家になりました。この家を、元の家にもどす行列はあるでしょうか。

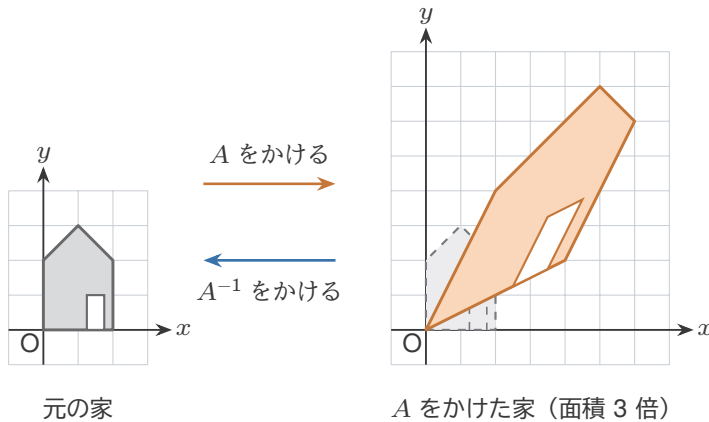


図 1 主役の行列 A で、家はななめにのびる (オレンジ)。元にもどす行列 A^{-1} をかけると、元の家 (灰色) にもどる。

7-4 で学んだように、主役の行列の行列式は 3 で、0 ではありません。家はつぶれずに、面積が 3 倍の家になっただけです。つぶれていないので、元にもどすことができそうです。

元にもどす行列を、さがしてみる

元にもどす行列を X として、 $AX = I$ になる X をさがします。行列×行列は「右の行列の列ごとに、行列×ベクトルをする」のでした (7-1、7-3)。 I の1列めは $(1, 0)$ 、2列めは $(0, 1)$ です。だから、 X の1列めは $A\vec{x} = \vec{e}_x$ の答え、2列めは $A\vec{x} = \vec{e}_y$ の答えです。2つの連立方程式を、加減法で解きます ($\vec{x}$ の成分を x, y とする)。

$$2x + y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 \text{ 列め: } A\vec{x} = \vec{e}_x$$

$$x + 2y = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$3x = 2, \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ で、} y \text{ が消える}$$

$$3y = -1, \quad y = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{ で、} x \text{ が消える}$$

$$2x + y = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$2 \text{ 列め: } A\vec{x} = \vec{e}_y$$

$$x + 2y = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$3x = -1, \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ で、} y \text{ が消える}$$

$$3y = 2, \quad y = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{ で、} x \text{ が消える}$$

2つの答えを列にしてならべると、元にもどす行列が見つかります。

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

どちらの答えにも、3でわる形が出てきました。この3は、加減法で x や y の前に出てきた数 $2 \times 2 - 1 \times 1$ 、つまり行列式 $\det A$ の値です。

見つけた行列を、こんどは A に左からかけて、確かめてみます。4つの成分は、行と列の内積です (7-3)。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1 \text{ 行め} : 2 \times 2 + (-1) \times 1 = 3, \quad 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$$

$$2 \text{ 行め} : (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 0, \quad (-1) \times 1 + 2 \times 2 = 3$$

ななめ以外が0になって、 $3I$ (単位行列の3倍) です。 $\frac{1}{3}$ 倍すれば、ちょうど I になります。左からかけても、元にもどす行列になっていました。

どんな 2×2 の行列でも、同じ形になる

文字でも、同じように解きます。 A の成分を a, b, c, d とします (1行め (a, b) 、2行め (c, d))。

$$ax + by = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$1 \text{ 列め} : A\vec{x} = \vec{e}_x$$

$$cx + dy = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$(ad - bc)x = d$$

$$\textcircled{1} \times d - \textcircled{2} \times b \text{ で、} y \text{ が消える}$$

$$(ad - bc)y = -c$$

$$\textcircled{2} \times a - \textcircled{1} \times c \text{ で、} x \text{ が消える}$$

$$ax + by = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$2 \text{ 列め} : A\vec{x} = \vec{e}_y$$

$$cx + dy = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$(ad - bc)x = -b$$

$$\textcircled{1} \times d - \textcircled{2} \times b \text{ で、} y \text{ が消える}$$

$$(ad - bc)y = a$$

$$\textcircled{2} \times a - \textcircled{1} \times c \text{ で、} x \text{ が消える}$$

どれも $ad - bc$ (行列式) であれば答えです。1列めは $(d, -c)$ 、2列めは $(-b, a)$ を $ad - bc$ でわったもの。 a と d が入れかわり、 b と c にマイナスがついた形です。

この行列を A に左からかけても I になるか、4つの成分を1つずつ計算して確かめます (行と列の内積、7-3)。

$$1 \text{ 行 } 1 \text{ 列め } d \times a + (-b) \times c = ad - bc \quad \text{行列式そのもの}$$

$$1 \text{ 行 } 2 \text{ 列め } d \times b + (-b) \times d = 0 \quad db \text{ と } bd \text{ が消える}$$

$$2 \text{ 行 } 1 \text{ 列め } (-c) \times a + a \times c = 0 \quad ca \text{ と } ac \text{ が消える}$$

$$2 \text{ 行 } 2 \text{ 列め } (-c) \times b + a \times d = ad - bc \quad \text{行列式そのもの}$$

答えは、ななめが $ad - bc$ 、ほかが0の行列、つまり $(ad - bc)I$ です。だから、行列式 $ad - bc$ でわれば、ちょうど I になります。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ を元にもどす行列は } \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

この行列を A の**逆行列** (ぎゃくぎょうれつ) といい、 A^{-1} と書きます。「エー・インバース」と読みます (inverse は「逆の」という意味)。作り方は3つの手順です。

- ① 左上 a と右下 d を入れかえる。
- ② 右上 b と左下 c に、マイナスをつける (場所はそのまま)。
- ③ 全体を、行列式 $ad - bc$ でわる ($\frac{1}{ad - bc}$ 倍する)。

主役の行列なら、次のとおりです。

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

逆から見ても、図で見ても

逆行列の1列めは、 $(1, 0)$ の行き先です(7-2)。主役の A^{-1} の1列めは $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ です。これに A をかけると、

$$A \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で、 $(1, 0)$ にもどります。 A^{-1} は、「 A をかけると $(1, 0)$ になる点」に、 $(1, 0)$ を送る機械なのです。

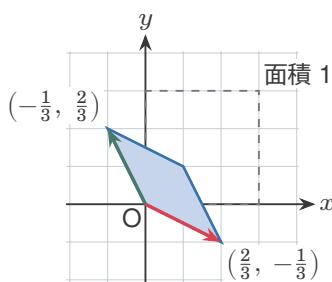


図2 A^{-1} の1列め(赤)と2列め(緑)。2本がつくる平行四辺形の面積は $\frac{1}{3}$ (点線の正方形は面積1)。

また、 A^{-1} の2本の列がつくる平行四辺形(図2)の面積は $\frac{1}{3}$ です。 A が面積を3倍にするので、元にもどす A^{-1} は面積を $\frac{1}{3}$ 倍にします。7-4の $\det(AB) = \det A \times \det B$ から、 $\det(A^{-1}) \times \det A = \det I = 1$ 、つまり $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ です。

かける順を変えても、 I になる

7-3で、 AB と BA はふつうちがう、と学びました。でも、逆行列は、右からかけても（①で $AX = I$ として作った）、左からかけても（①で確かめた）、 I になります。主役の行列で、右からかけたものをもう一度見ておきます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-1 & -2+2 \\ 2-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

文字で計算しても、次のようになります（成分を計算して確かめよう）。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I$$

「元にもどす」と「もどしてから、もう一度かける」は、どちらも何もしなかったのと同じなのです。

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

行列式が0なら、逆行列はない

$\frac{1}{ad-bc}$ は、 $ad-bc=0$ のときは計算できません（0ではわれない）。7-4で、行列式が0の行列は平面を平らにつぶし、つぶれた絵は元にもどせないことを学びました。式で見ても、図で見ても、**行列式が0の行列には、逆行列はありません**。逆行列がある正方行列を、**正則**（せいそく）な行列といいます。行列式が0でないことと、正則であることは、同じことです。

せいかくに言うと

A^{-1} を $\frac{1}{A}$ とは書きません。行列のわり算は決めていないからです。もし $\frac{B}{A}$ と書くと、 $A^{-1}B$ （ B のあとに A^{-1} ）なのか、 BA^{-1} （ A^{-1} のあとに B ）なのか、わかりません。行列ではかける順で答えが変わる（7-3）ので、いつも「 A^{-1} を左からかける」「右からかける」と、場所をはっきり書きます。なお、 A^{-1} の -1 は、数の $2^{-1} = \frac{1}{2}$ と同じ書き方をまねたもので、「 -1 乗」と読むこともあります。

2 連立方程式を、逆行列で解く

連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の両辺に、**左から** A^{-1} をかけます。 $2x = 6$ の両辺に $\frac{1}{2}$ をかけたのと同じです。

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

問題の式 (7-1)

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

両辺に、左から A^{-1} をかける

$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

かける区切りは自由 (7-3 :

$$(AB)C = A(BC))$$

$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$A^{-1}A = I$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

I をかけても変わらない

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{の答えは} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

なぜ「左から」なのでしょう。 $A\vec{x}$ では、 A が $\vec{x}$ の左にいます。 A を消すには、 A のとなり、つまり左に A^{-1} を置いて $A^{-1}A = I$ にする必要があります。右からかけた $\vec{b}A^{-1}$ は、2 行 1 列の $\vec{b}$ に 2 行 2 列の A^{-1} をかけることになり、大きさが合わないので計算できません (7-1 : 左の列の数 = 右の行の数)。

3-6 のくだもの屋を、逆行列で解く

7-1 で、3-6 のくだもの屋の問題を行列で書きました。ソラさんはりんご 2 個とみかん 3 個で 420 円、ミナさんはりんご 2 個とみかん 1 個で 300 円でした。りんご 1 個 x 円、みかん 1 個 y 円として、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix}$$

逆行列を 3 つの手順で作ри、右辺にかけます。

$$\det A = 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4 \quad \text{行列式 (0 でないので、逆行列がある)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ と } 1 \text{ を入れかえ、} 3 \text{ と } 2 \text{ にマイナス} \\ \text{をつけ、} -4 \text{ でわる} \end{array}$$

$$A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 420 - 900 \\ -840 + 600 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{右辺にかける。1 行めは} \\ 1 \times 420 + (-3) \times 300 \end{array}$$

$$A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -480 \\ -240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix} \quad -4 \text{ でわる}$$

りんご 120 円、みかん 60 円で、3-6 と同じ答えです。元の式に入れると、
 $2 \times 120 + 3 \times 60 = 420$ 、 $2 \times 120 + 1 \times 60 = 300$ で、合っています。

右辺が変わっても、同じ逆行列が使える

3-6 の回路の式

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

では、行列式は $16 - 4 = 12$ で、

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

です。この逆行列は、抵抗だけで決まり、電源の電圧には関係しません。だから、
 電源を取りかえても、同じ A^{-1} に右辺をかけるだけで答えが出ます。

電源の電圧 $\vec{b}$	計算	電流 (I_1, I_2)
	$\frac{1}{12}(4b_1 - 2b_2, -2b_1 + 4b_2)$	
(9, 6)	$\frac{1}{12}(36 - 12, -18 + 24)$	(2, 0.5)
(12, 0)	$\frac{1}{12}(48 - 0, -24 + 0)$	(4, -2)
(6, 6)	$\frac{1}{12}(24 - 12, -12 + 24)$	(1, 1)
(0, 12)	$\frac{1}{12}(0 - 24, 0 + 48)$	(-2, 4)

表 2 同じ回路で、電源の電圧 (V) だけを変えたときの電流 (A)。逆行列は 1 回作れば、何度でも使える。

1 行めが、やってみようと 3-6 の答えです。2 行めが、やってみようの④の答えです。工学では、同じしくみに、いろいろな入力（電圧・荷重）をあたえて調べるのがよくあります。逆行列を 1 回作っておくと、入力が変わるたびに連立方程式を解き直さなくてすむのです。

4-11 のななめの物差しと、看板のひも

7-2 で、4-11 のななめの物差し $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ で $(5, 5)$ を表す問題を、行列で書きました。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

行列式は $2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$ なので、

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4-11 と同じ $s = 2$ 、 $t = 1$ です。「出てきた $(5, 5)$ から、入れた (s, t) を求める」のが、逆行列の仕事です。

4-11 の看板（左のひも 30° 、右のひも 60° 、100 N）の行列は、7-4 で行列式が -1 でした。逆行列は、 -1 でわる、つまり符号を変えるだけです。

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \\ -\sin 30^\circ & -\cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cos 60^\circ \\ 100 \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 86.6 \end{pmatrix}$$

4-11 と同じく、 $T_1 = 50 \text{ N}$ 、 $T_2 = 86.6 \text{ N}$ です。7-4 の⑦で、ひもが水平に近いと行列式が 0 に近づき、力が大きくなることを見ました。逆行列は行列式でわるので、行列式が 0 に近いと、答えがとても大きくなるのです。

ロボットを、手の速度で動かす

7-2 の物理・工学ではこう使うで、「ほしい手の速度から、関節の角速度を求める」計算は 7-5 で学ぶ、と約束しました。2 つの関節のロボットの腕 ($L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$) では、7-2・7-4 のヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} -0.3915 & -0.2415 \\ 0.3245 & 0.0647 \end{pmatrix}, \quad \det J = 0.0530$$

でした（丸める前の値）。手をまっすぐ右へ 0.1 m/s で動かしたいとき、関節の角速度 $\dot{\theta}$ は、次の式の答えです。

$$J\dot{\theta} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\theta} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.0647 & 0.2415 \\ -0.3245 & -0.3915 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

右辺の 2 行めが 0 なので、逆行列の 1 列めだけが効きます。

$$\dot{\theta} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.0647 \times 0.1 \\ -0.3245 \times 0.1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.00647 \\ -0.03245 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.122 \\ -0.612 \end{pmatrix}$$

肩を 0.122 rad/s で左回りに、ひじを 0.612 rad/s で右回りに回せばよいのです。確かめに J をかけると、次のように、ほしい速度になります。

$$-0.3915 \times 0.122 + 0.2415 \times 0.612 = 0.100$$

$$0.3245 \times 0.122 - 0.0647 \times 0.612 = 0.000$$

ひじの角が 10° で腕がのびきる近くでは、 $\det J = 0.0130$ まで小さくなり、同じ 0.1 m/s のために、肩 1.47 rad/s 、ひじ -3.47 rad/s もの角速度がいります。7-4 の特異姿勢の近くで「関節をととても速く回さなければならない」のは、逆行列が小さな行列式でわるからです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

クラメルの公式：行列式だけで答えを書く

2つの文字の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

の答えは、逆行列をかけて成分を書き出すと、

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc} = \frac{\det \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc} = \frac{\det \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

です。 x は「1列めを右辺に取りかえた行列の行列式」を、もとの行列式でわったもの、 y は「2列めを右辺に取りかえた行列の行列式」をわったものです。くだもの屋なら、 $x = \frac{420 \times 1 - 3 \times 300}{-4} = \frac{-480}{-4} = 120$ です。これを**クラメルの公式**といい、スイスのクラメルが1750年の本で示しました。 3×3 でも同じ形になりますが、行列式の計算がふえるので、大きな連立方程式には掃き出し法を使います。

③ 2つの機械を元にもどす順番

B をかけてから A をかける機械 AB (7-3) を、元にもどすにはどうするでしょう。朝、くつ下をはいてから、くつをはきます。夜、ぬぐときは、くつが先で、くつ下があとです。**あとからしたことを、先にもどします。**

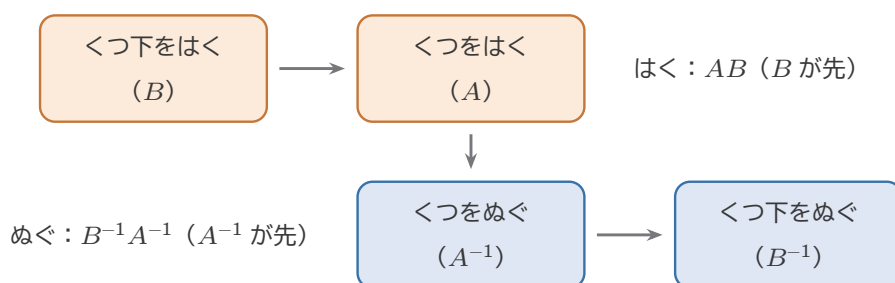


図3 はくのは B が先 (AB)。ぬぐのは A^{-1} が先なので、右から先にかける書き方では $B^{-1}A^{-1}$ 。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{順番が逆になる})$$

本当に元にもどるか、1行ずつ確かめます。

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)$$

もどす機械 $B^{-1}A^{-1}$ を、 AB のあとにかける

$$= B^{-1}(A^{-1}A)B$$

かける区切りは自由 (7-3)

$$= B^{-1}IB = B^{-1}B$$

$A^{-1}A = I$ 、 I は何も変えない

$$= I$$

$$B^{-1}B = I$$

$A^{-1}B^{-1}$ の順では、まん中が $B^{-1}A$ になって消えません。数で確かめます。
主役の行列 A と、ずらしの行列 B で計算します。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{同じ}), \quad A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ちがう})$$

4 掃き出し法：表の行の操作で解く

2×2 の逆行列は、3 つの手順ですぐに作れました。でも、 3×3 やもっと大きな行列では、こんなに短い作り方はありません。そこで、3-6 ⑥で学んだ「係数の表の行どうしをひく」加減法を、きちんとした手順にします。

3 つの操作

係数と右辺を、たて線で区切って 1 つの表にならべます。1 行が 1 つの式です。この表に、次の 3 つの操作だけをくり返します。

操作 1 ある行に、0 でない数をかける（またはわる）。

操作 2 ある行から、ほかの行の何倍かをひく（またはたす）。

操作 3 2 つの行を入れかえる。

どの操作も、式を加減法で変形しただけなので、答えは変わりません。また、どの操作も、逆の操作（わる・たす・もう一度入れかえる）で元の表にもどせます。だから、答えがふえたり、へったりもしないのです。

3 つの文字の連立方程式を解く

3-6 のもっと知りたいの連立方程式を解きます。

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & \dots \textcircled{1} \\ x - y = 1 & \dots \textcircled{2} \\ y - z = 1 & \dots \textcircled{3} \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

②の $x - y = 1$ は $1x + (-1)y + 0z = 1$ 、③の $y - z = 1$ は $0x + 1y + (-1)z = 1$ と読んで、0 もきちんと書きます。めざすのは、左の 3 列が「ななめが 1、ほか 0」（単位行列 I ）になった表です。そうなれば、各行は「 $x = \bigcirc$ 」「 $y = \bigcirc$ 」「 $z = \bigcirc$ 」と読めます。1 列めから順に、ななめの数を 1 にし、その列のほかの

数を0にしていきます。矢印の上の①②③は、表の1行め・2行め・3行めのことで、「②-①」は「2行めから1行めをひく」という意味です。

$$\xrightarrow{\text{②}-\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{②} \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0.5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

1列めは、1行め以外がもう0になりました(③の1列めは、はじめから0)。②から①をひくと「0, -2, -1, -8」です(1-1=0, -1-1=-2, 0-1=-1, 1-9=-8)。右辺もいっしょにひくことを忘れないようにします。次に、2列めのななめを1にしたので、2列めのほかの数を0にします。

$$\xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & -1.5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \div (-1.5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

最後に、3列めのほかの数を0にします。①から③の0.5倍をひき、②から③の0.5倍をひきます。

$$\xrightarrow[\text{②}-0.5 \times \text{③}]{\text{①}-0.5 \times \text{③}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

左の3列が単位行列になりました。1行めは $1x + 0y + 0z = 4$ 、つまり $x = 4$ です。同じように $y = 3$ 、 $z = 2$ で、3-6と同じ答えです。元の式に入れると、 $4 + 3 + 2 = 9$ 、 $4 - 3 = 1$ 、 $3 - 2 = 1$ で合っています。

このように、1列ずつ、ななめ以外の数を0にして「はき出して」いく解き方を、**掃き出し法**(はきだしほう)といいます。ほうきでごみを掃き出すように、じやまな数を0にしていくので、この名前があります。7-1のコラムで見た『九章算術』の「方程」も、係数を算木で表に並べ、列(いまの行)どうしをひいて解いていました。2000年前の計算と同じ考え方です。

0 の所では、行を入れかえる

ななめにしたい場所が 0 のときは、その数でわって 1 にすることができません。そのときは、その列が 0 でない行と入れかえます（操作 3）。式を書く順番を変えるだけなので、答えは変わりません。 $y = 2$ 、 $x + y = 5$ で見てみます。矢印の「① ↔ ②」は、1 行めと 2 行めを入れかえるという意味です。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftrightarrow \text{②}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} - \text{②}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

はじめの表は、1 行め 1 列めが 0 です（ $y = 2$ は $0x + 1y = 2$ ）。2 行めと入れかえると、ななめは 1 になりました。あとは今までどおり、① − ② で $x = 3$ 、 $y = 2$ です。3 つの文字のときも同じです（例題 5）。

せいかくに言うと

コンピュータは、いちばん大きな数を上にする

0 でなくても、とても小さな数でわると、誤差が大きくなります。そこでコンピュータは、ななめにしたい場所が 0 でなくても、その列でいちばん大きな数の行を上に入れかえてから計算します（部分ピボット選択という）。また、コンピュータは、ななめより下だけを 0 にしてから（前進消去）、下の行から順に答えを代入していきます（後退代入）。こうすると計算の回数が少なくて済みます。この方法を**ガウスの消去法**といいます。

表計算で掃き出す

掃き出し法の 1 回 1 回の操作は、表計算の「式のコピー」と相性がよいのです。たとえば「② − ①」は、2 行めの各マスから、1 行めの同じ列のマスをひく式を、横にコピーするだけです。

A6		=A3-A2		
	A	B	C	D
1	x	y	z	右辺
2	1	1	1	9
3	1	-1	0	1
4	0	1	-1	1
5	1	1	1	9
6	0	-2	-1	-8
7	0	1	-1	1

表3 2～4行めがはじめの表、5～7行めが「②-①」をしたあとの表。A5には=A2、A6には=A3-A2、A7には=A4と入れて、D列まで右へコピーする。次の操作は、この下に同じように続ける。

掃き出し法で、逆行列を作る

表の右に単位行列 I をならべて、左が I になるまで掃き出すと、右に逆行列 A^{-1} が出てきます。主役の行列でやってみます。

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1} \div 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2} \div 1.5} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{1} - 0.5 \times \textcircled{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

右に出てきたのは、①で作った主役の逆行列 A^{-1} と同じ行列です（① $-0.5 \times$ ②の右上は $0 - 0.5 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ ）。

なぜ逆行列が出てくるのでしょうか。行の操作は、どれも「ある行列を左からかける」ことと同じです（たとえば②-①は、1行め $(1, 0)$ 、2行め $(-1, 1)$ の行列を左からかけること）。全部の操作をまとめた行列を G とすると、左の A は

GA に、右の I は $GI = G$ になります。左が I になったのなら $GA = I$ なので、 G は A の逆行列です。そして右には、その G がそのまま出ているのです。

5 コンピュータは、どう解くか

② はてな? の答えです。式が 100 個あっても、コンピュータがすることは、掃き出し法（ガウスの消去法）の 3 つの操作のくり返しです。手順は、式が 2 個のときとまったく同じで、くり返す回数がふえるだけです。

かけ算の回数

ガウスの消去法で、 n 個の文字の連立方程式を解くのに必要なかけ算（わり算もふくむ）の回数は、およそ $\frac{n^3}{3}$ 回です。1 つの列を 0 にするのに、およそ $n \times n$ 回の計算をし、それを n 列ぶんくり返すからです（下の行ほど、残りの列が少ないので 3 でわる）。

式の数 n	3	10	100	1000
かけ算の回数（約）	9	333	33 万	3.3 億

表 4 式が 10 倍になると、計算の回数は約 1000 倍になる。それでも、いまのパソコンは 1 秒間に何億回も計算できるので、1000 個の式でも 1 秒もかからずに解ける。

表計算：MMULT(MINVERSE())

物理第 1 巻（力-5）では、正三角形のトラスの部材の力と支点の反力（わからない数 6 つ）を、6 つの式で求めました。表計算では、行列を A2:F7、右辺を G2:G7 に入れ、**空いた列のたて 6 マスをえらび** =MMULT(MINVERSE(A2:F7),G2:G7) と入れます（物理の本と同じ書き方）。

	A	B	C	D	E	F	G
1	N_{AC}	N_{BC}	N_{AB}	R_{Ax}	R_{Ay}	R_B	右辺
2	0.5	0	1	1	0	0	0
3	0.866	0	0	0	1	0	0
4	0	-0.5	-1	0	0	0	0
5	0	0.866	0	0	0	1	0
6	-0.5	0.5	0	0	0	0	0
7	-0.866	-0.866	0	0	0	0	10
8	-5.77	-5.77	2.89	0	5	5	← 答え

表5 物理 力-5 の正三角形のトラス（荷重 10 kN）。8 行めは、答えを横に並べ直したもの。
マイナスは押される力（圧縮）。

MINVERSE は逆行列を作る関数、MMULT は行列のかけ算（7-1）です。2 つを組み合わせて、 $A^{-1}\vec{b}$ を一度に計算しています。確定のしかたは、7-1 と同じです。

Python : np.linalg.solve

Python では、np.linalg.inv で逆行列が、np.linalg.solve で連立方程式の答えが求められます。3-6 の回路で確かめます。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[4, 2],
              [2, 4]])          # 係数行列
b = np.array([9, 6])          # 右辺
print(np.linalg.inv(A))       # 逆行列
print(np.linalg.inv(A) @ b)   # 逆行列×右辺
print(np.linalg.solve(A, b))  # 連立方程式を解く（7-5）
```

実行結果

```
[[ 0.33333333 -0.16666667]
 [-0.16666667  0.33333333]]
[2.  0.5]
[2.  0.5]
```


逆行列の1行めは、 $\frac{4}{12} = 0.333\dots$ 、 $-\frac{2}{12} = -0.166\dots$ です。2つの方法で、同じ答え(2, 0.5)が出ました。コンピュータに大きな連立方程式を解かせるときは、solveを使います。solveは逆行列を全部は作らずに、ガウスの消去法で直接答えを出すので、計算が速く、丸めのずれも小さいからです。

3つのばねを、Pythonで解く

7-1で、3つのばね(ばね定数 $k = 100 \text{ N/m}$ 、球1個の重さ 0.98 N)のつり合いを、 $K\vec{u} = \vec{F}$ と行列で書きました。答えは7-5で求める約束でした。

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.98 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

Python

```
import numpy as np
k = 100
K = np.array([[2*k, -k, 0],
              [-k, 2*k, -k],
              [0, -k, k]])
F = np.array([0.98, 0.98, 0.98])
u = np.linalg.solve(K, F)
print(u)
print(K @ u)
```

ばねの行列(剛性行列)
 # 球の重さ(N)
 # 連立方程式を解く(7-5)
 # のび u1, u2, u3 (m)
 # 元の式に入れて確かめる

実行結果

```
[0.0294 0.049  0.0588]
[0.98 0.98 0.98]
```

$u_1 = 0.0294 \text{ m}$ 、 $u_2 = 0.0490 \text{ m}$ 、 $u_3 = 0.0588 \text{ m}$ です(物理 力-16と同じ)。0.049のあとの空白は、numpyが数の位置をそろえるために入れたものです。2行めで、元の式に入れると右辺の0.98にもどることも確かめました。

6 解けないとき、解きにくいとき

行列式が0の連立方程式を、掃き出し法で解こうとすると、どうなるでしょう。7-4 ④の例で見ます。

$$(ア) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \quad (イ) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

どちらも、②から①の2倍をひきます。

$$(ア) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(イ) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

2行めの左が、どちらも全部0になりました。2列めのななめを1にできないので、掃き出しはここで止まります。

- (ア) の2行めは「 $0x + 0y = 0$ 」で、どんな x 、 y でも成り立ちます。この式は $x + 2y = 3$ の1つだけなので、 y を決めると $x = 3 - 2y$ が決まります。**答えは無数**です。
- (イ) の2行めは「 $0x + 0y = -1$ 」、つまり $0 = -1$ です。どんな x 、 y でも成り立ちません。**答えはありません**。

7-4 ④と同じ結論です。表計算の MINVERSE では #NUM! (計算できない) と出て、Python の `np.linalg.solve` では、次のように「Singular matrix (正則でない行列)」と出て止まります。

実行結果

```
numpy.linalg.LinAlgError: Singular matrix
```

せいかくに言うと

(ア) では、式は2つありましたが、2つめは1つめの2倍で、新しいことを何も言っていませんでした。掃き出したあとに残る「左が全部0ではない行」の数を、行列の**階数** (かいすう) といいます。(ア)・(イ) の行列の階数は1です。階数は「本当に役に

立っている式の数」です。わからない数の数より階数が小さいと、答えは1つに決まりません。物理の次元解析（力-15）で、無次元数がいくつできるかも、この階数で決まります。くわしくは大学の線形代数で学びます。

行列式が0に近いと、答えがゆれる

行列式が0でなくても、0にとっても近いと、こまったことが起きます。

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.001y = 2.001 \end{cases} \quad \det = 1 \times 1.001 - 1 \times 1 = 0.001$$

答えは $x = 1$ 、 $y = 1$ です。ところが、右辺の 2.001 を、たった 0.001 だけ変えて 2.002 にすると、答えは $x = 0$ 、 $y = 2$ に大きく変わります（元の式に入れて確かめよう）。2本の直線がほとんど平行なので、少し動かしただけで、交わる点が遠くへ動いてしまうのです。

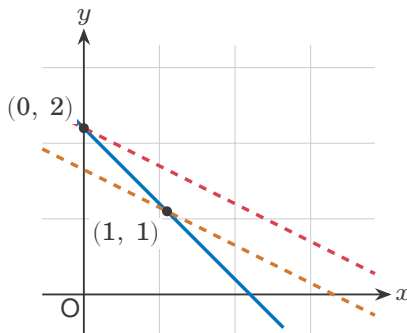


図4 青が $x + y = 2$ 。オレンジの点線と赤の点線は、2つめの式の右辺を少し変えた直線。ほとんど平行なので、交わる点は $(1, 1)$ から $(0, 2)$ へ大きく動く（見やすいように、かたむきの差を大きくしてかいた）。

はかった値には、いつも少しのずれがあります（2-6）。行列式が0に近い連立方程式では、そのずれが答えの大きなずれになってしまいます。このような連立方程式を「条件が悪い」といいます。7-4のひもの角やロボットの特異姿勢も、同じ理由で気をつけなければならないのです。

7 最小二乗法を行列で解く

3-16で、ソラさんのばねのデータに、ずれの2乗の和がいちばん小さくなる直線を引きました。原点を通る直線 $y = ax$ なら、 $a = (xy \text{ の和}) \div (x^2 \text{ の和})$ でした。3-16では、「 a と b の2つを同時に決める $y = ax + b$ のときも、たくさん式を同時に解けば求められます（行列、7-5）」と約束しました。ここでは、その方法を、行列とベクトルの図で作ります。

おもりの数 x (個)	0	1	2	3	4	5	6
のび y (cm)	0	1.6	2.9	4.6	5.9	7.6	8.9

表6 3-0・3-16のソラさんのデータ

式が多すぎる連立方程式

もし7つの点が全部、直線 $y = ax + b$ の上にあるなら、次の7つの式が全部成り立つはずですが、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 2.9 \\ 4.6 \\ 5.9 \\ 7.6 \\ 8.9 \end{pmatrix}$$

1行めは $0a + 1b = 0$ 、2行めは $1a + 1b = 1.6$ 、…です。左の7行2列の行列を A 、右辺を $\vec{b}$ 、わからない (a, b) を $\vec{x}$ と書くと、 $A\vec{x} = \vec{b}$ です。でも、わからない数2つに、式が7つもあります。点は少しずつずれているので、7つ全部を成り立たせる a, b はありません。そこで、ずれ $\vec{b} - A\vec{x}$ (7つの成分) の2乗の和 S を、いちばん小さくします。 S は、7つの成分をもつベクトル (4-11: 成分が7つでもベクトル) $\vec{b} - A\vec{x}$ の長さの2乗です (三平方の定理、4-4・4-12)。

$$S = |\vec{b} - A\vec{x}|^2$$

いちばん小さい例：点2つ、文字1つ

考え方を、図にかける小さな例で見ます。点 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ に、原点を通る直線 $y = ax$ を引きます。式は $1a = 2$ 、 $2a = 3$ の2つで、どちらも成り立つ a はありません。

2つの x を並べた矢印 $\vec{u} = (1, 2)$ と、2つの y を並べた矢印 $\vec{b} = (2, 3)$ を、1つの平面にかきます（横の軸は1つめの点、たての軸は2つめの点の値）。直線の式が予想する y の組は $(1a, 2a) = a\vec{u}$ で、 a を変えると、 $\vec{u}$ の向きの直線の上を動きます。ずれ $\vec{b} - a\vec{u}$ の長さがいちばん短くなるのは、図5のように、**ずれの矢印が、直線に直角になるとき**です（点から直線へは、垂線がいちばん短い）。

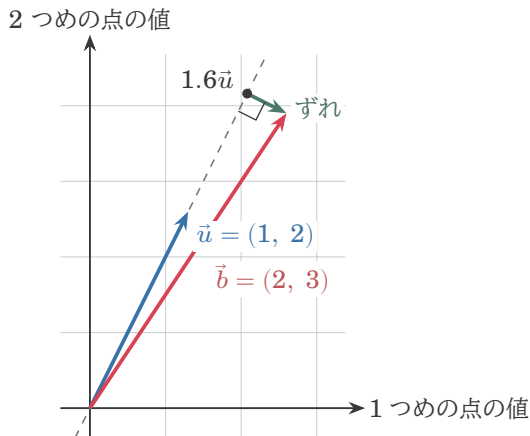


図5 $a\vec{u}$ は点線の直線の上を動く。 $\vec{b}$ (赤) からの距離 (緑のずれ) がいちばん短いのは、ずれが直線に直角になる点 $1.6\vec{u}$ のとき。

直角なら、内積は0です (4-12)。 $\vec{u} \cdot (\vec{b} - a\vec{u}) = 0$ を解きます。

$$\vec{u} \cdot (\vec{b} - a\vec{u}) = 0$$

ずれが $\vec{u}$ に直角

$$\vec{u} \cdot \vec{b} - a \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

内積をカッコの中に分ける

$$a = \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

a について解く

$$a = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3}{1 \times 1 + 2 \times 2} = \frac{8}{5} = 1.6$$

成分を入れる

$\vec{u} \cdot \vec{b}$ は「 xy の和」、 $\vec{u} \cdot \vec{u}$ は「 x^2 の和」です。3-16 で平方完成から作った「 a は、 xy の和を x^2 の和でわったもの」と、まったく同じ式が、直角の図から出てきました。 a を少し変えて、 $S = (2 - a)^2 + (3 - 2a)^2$ を表にしても確かめられます。

a	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
S	0.40	0.25	0.20	0.25	0.40

表7 $a = 1.6$ で S がいちばん小さい（直角の図の答えと同じ）。

点3つ、文字2つ：ずれが「面」に直角

次に、点 $(0, 1)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 2)$ に、直線 $y = ax + b$ を引きます。予想する y の組は、

$$\begin{pmatrix} 0a + b \\ 1a + b \\ 2a + b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

です。3つの値の組なので、3次元の矢印です。 a と b を変えると、この矢印は、 A の2本の列 $(0, 1, 2)$ と $(1, 1, 1)$ がつくる平面の上を動きます（4-11のなめの物差しの3次元版）。はかった値 $\vec{b} = (1, 3, 2)$ は、この平面からはみ出しています。いちばん近い点は、ずれの矢印がこの平面に直角になる点です。

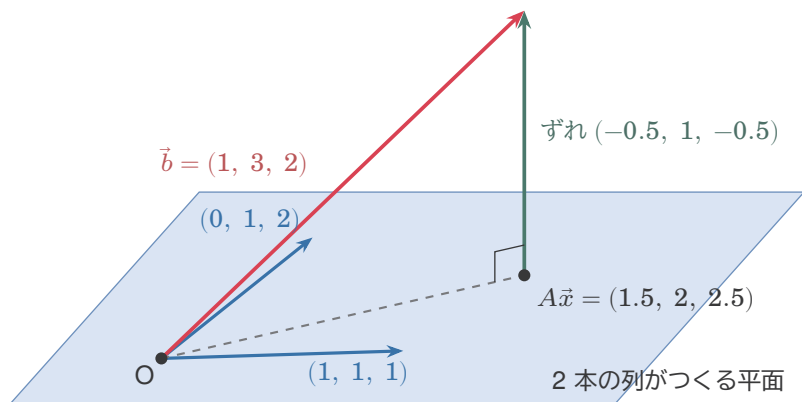


図6 A の2本の列（青）がつくる平面（色をぬった面）。 $A\vec{x}$ はこの面の上を動く。はかった値 $\vec{b}$ （赤）にいちばん近いのは、ずれ（緑）が面に直角になる点（ようすをかいた図で、長さや角は正確ではない）。

ずれが平面に直角ということは、平面をつくる 2 本の列の**どちらとも**直角ということです。内積で書くと、2 つの式になります。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (\vec{b} - A\vec{x}) = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\vec{b} - A\vec{x}) = 0$$

この 2 つの内積を、行列のかけ算でまとめます。内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ は、 $\vec{u}$ を転置した行ベクトルと $\vec{v}$ の積でした (7-1)。2 本の列を転置して行にならべた行列は、 A の転置 A^T です。

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$$

2 つの内積が 0、をまとめた (A^T の行は A の列)

$$A^T\vec{b} - A^TA\vec{x} = \vec{0}$$

かっこを開く (行列のかけ算も分けられる)

$$A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$$

$A^TA\vec{x}$ を右辺へ移して、左右を入れかえた

いちばんよく合う $\vec{x}$ は $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ の答え

この式を**正規方程式** (せいきほうていしき) といいます。 A は 3 行 2 列、 A^T は 2 行 3 列なので、 A^TA は 2 行 2 列の行列です (7-1: かけられる大きさ)。式が多すぎた連立方程式が、ちょうど文字の数と同じ、2 つの式になりました。あとは①の逆行列で解けます。

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

成分は、行と列の内積です。たとえば、 $A^T A$ の1行1列めは、 $0 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2$ で5です。正規方程式の行列式は、 $5 \times 3 - 3 \times 3$ で6です。だから、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

直線は $y = 0.5x + 1.5$ です。ずれは、次のとおりです。

$$\vec{b} - A\vec{x} = (1 - 1.5, 3 - 2, 2 - 2.5) = (-0.5, 1, -0.5)$$

2本の列との内積は、どちらも0です。

$$0 \times (-0.5) + 1 \times 1 + 2 \times (-0.5) = 0, \quad 1 \times (-0.5) + 1 \times 1 + 1 \times (-0.5) = 0$$

たしかに、どちらとも直角です。このときの S は $0.25 + 1 + 0.25 = 1.5$ です。

a や b を少し変えると、 S はどれも1.5より大きくなります。

	$b = 1.4$	$b = 1.5$	$b = 1.6$
$a = 0.4$	1.64	1.55	1.52
$a = 0.5$	1.53	1.50	1.53
$a = 0.6$	1.52	1.55	1.64

表8 a と b を0.1ずつ変えたときの S 。まん中の $a = 0.5$ 、 $b = 1.5$ がいちばん小さい。

ソラさんのデータで

点が7つでも、考え方は同じです。 $A^T A$ と $A^T \vec{b}$ の成分は、表の和で計算できます。 A の1列めは x 、2列めは1が7個なので、

$$A^T A = \begin{pmatrix} x^2 \text{ の和} & x \text{ の和} \\ x \text{ の和} & \text{点の数} \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} xy \text{ の和} \\ y \text{ の和} \end{pmatrix}$$

です。ソラさんのデータでは、 x の和21、 x^2 の和91、 y の和31.5、 xy の和136.2 (3-16の表)、点の数7です。

$$\begin{pmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136.2 \\ 31.5 \end{pmatrix}$$

正規方程式

$$\det = 91 \times 7 - 21 \times 21 = 196$$

行列式 (637 - 441)

$$a = \frac{7 \times 136.2 - 21 \times 31.5}{196} = \frac{291.9}{196} = 1.489$$

逆行列の1行めをかける

$$b = \frac{-21 \times 136.2 + 91 \times 31.5}{196} = \frac{6.3}{196} = 0.032$$

逆行列の2行めをかける

求めた直線は、次のとおりです。

$$y = 1.489x + 0.032$$

3-0・3-16 で表計算が出した式 ($a = 1.4893$ 、 $b = 0.0321$) と同じです。原点を通る直線 (3-16) の $a = 1.497$ とは、少しちがいます。 b も自由に動かせるぶん、ずれの2乗の和は少し小さくなっています。

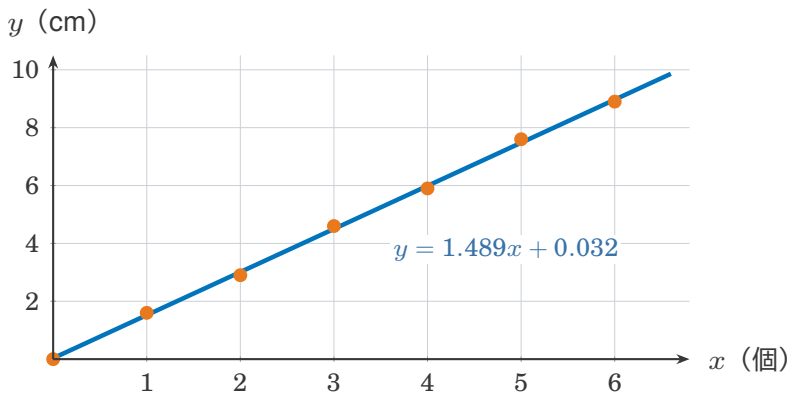


図7 ソラさんのデータ (オレンジ) と、正規方程式で求めた直線 (青)。ずれ (残差、緑の線) は 0.1 cm ほどしかなく、点にかくれてほとんど見えない。ずれの2乗の和が、いちばん小さくなっている。

表計算と Python で確かめる

表計算では、LINEST（ライン・エスト）という関数で、 $y = ax + b$ の a と b がいっぺんに出ます。A2:A8 に x 、B2:B8 に y を入れて、D2 に $=\text{LINEST}(B2:B8, A2:A8)$ と入れると、D2 に $a = 1.4893$ 、E2 に $b = 0.0321$ が横にならんで出ます（はじめに y の範囲、次に x の範囲。確定のしかたは 7-1 と同じ）。Python では、正規方程式を solve で解いても、最小二乗法の関数 `np.linalg.lstsq` を使っても、同じ答えです。

Python

```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6])
y = np.array([0, 1.6, 2.9, 4.6, 5.9, 7.6, 8.9])
A = np.column_stack([x, np.ones(7)])    # 1 列めが x、2 列めが 1 の行列
print(A.T @ A)                          # A の転置 × A
print(A.T @ y)
print(np.linalg.solve(A.T @ A, A.T @ y)) # 正規方程式を解く
print(np.linalg.lstsq(A, y, rcond=None)[0]) # 最小二乗法の関数
```

実行結果

```
[[91. 21.]
 [21.  7.]
 [136.2  31.5]
 [1.48928571  0.03214286]
 [1.48928571  0.03214286]]
```

4 行めでは、 x と、1 を 7 個ならべたベクトル `np.ones(7)` を、列としてならべて行列 A を作りました（column は列、stack は積み重ねるという意味）。`lstsq` は least squares（最小二乗）の略です。

せいかくに言うと

ここでは、ずれが「列のつくる面」に直角になる点が、いちばん近い点だと考えました。それは、面の上のほかの点 $\vec{q}$ をとると、 $\vec{b}$ から $\vec{q}$ までの距離の 2 乗が、三平方の定理で「(ずれの長さ)² + ($A\vec{x}$ から $\vec{q}$ までの長さ)²」になり、ずれの長さより必ず長くなるからです。3-16 の平方完成や、のちに学ぶ偏微分 (8-2) で求めても、同じ正規方程式が出てきます。また、 A の 2 本の列が平行でなければ (x の値がすべて同じではなければ)、 $A^T A$ の行列式は 0 にならず、答えはただ 1 つに決まります。

📖 専門書をのぞいてみよう 線形代数の教科書ふうの書き方

n 次正方行列 A に対し $AX = XA = E$ を満たす X が存在するとき、 A は正則であるといい、 X を A の逆行列とよび A^{-1} で表す。 A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である。このとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただ 1 つの解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ をもつ。

訳 E はこの本の単位行列 I 、 $|A|$ は行列式 $\det A$ 、太字の $\mathbf{x}$ はこの本の $\vec{x}$ 。「正則」は「逆行列がある」こと。物理第 1 巻 (力-5) の「正方かつ正則」は「行列がたて・横同じ大きさで、逆行列がある」こと。「必要十分条件」は「同じことの言い換え」：正則なら行列式は 0 でなく、行列式が 0 でなければ正則。

たいせつ

逆行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

解き方

$A\vec{x} = \vec{b}$ の答えは $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ (左からかける)

順番

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

掃き出し法

かける・ひく・入れかえる、の 3 つの操作で左を I に

解けない

$\det A = 0$ なら逆行列はなく、答えはないか無数

最小二乗法

正規方程式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ (ずれが列に直角)

📖 この章で出てきたことば

逆行列 行列 A の変換を元にもどす行列 A^{-1} 。 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ 。

正則 逆行列がある（行列式が0でない）正方行列のこと。

掃き出し法 係数と右辺の表に、行の3つの操作をくり返して、左を単位行列にする解き方。

ガウスの消去法 ななめより下を0にしてから、下の行から代入していく解き方。コンピュータが使う。

階数 掃き出したあとに残る、左が全部0ではない行の数。本当に役に立っている式の数。

正規方程式 最小二乗法の答えを決める式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ 。

📇 記号カード

初めて出た章 7-5

 A^{-1}

読み方 エー・インバース

意味 A の逆行列。 A を元にもどす行列。 $\frac{1}{A}$ とは書かない

英語 inverse matrix

🔍 コラム ガウスの消去法と『九章算術』

コンピュータが使う「ガウスの消去法」には、ドイツの数学者ガウスの名前がついています。ガウスは、星の動きを調べる研究の中で、最小二乗法の正規方程式を、この消去法で解く手順をまとめました（1809年の本などで）。でも、係数を表に並べて、行どうしをひいて文字を消していく方法そのものは、7-1のコラムで見た中国の『九章算術』（紀元1世紀ごろまでにまとめられた）の「方程」の章に、すでに書かれていました。2000年前の人たちが算木で計算していた手順が、いまでは、橋や飛行機的设计で、何百万個もの式をコンピュータで解く手順になっているのです。

例題でたしかめよう

例題 1 2×2 の逆行列を作って確かめる

次の行列の逆行列を作り、もとの行列にかけて I になることを確かめましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

考え方 ①の3つの手順： a と d を入れかえ、 b と c にマイナス、行列式でわる。

式 (1) 行列式 $3 \times 2 - 1 \times 5 = 1$ 。逆行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{確かめ: } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 2-2 \\ -15+15 & -5+6 \end{pmatrix} = I$$

(2) 行列式 $4 \times 4 - 2 \times 2 = 12$ 。逆行列 $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{確かめ: } \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 16-4 & 8-8 \\ -8+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = I$$

答え (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

じぶんでとこう1

次の行列の逆行列を作り、もとの行列にかけて I になることを確かめましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例題2 逆行列で連立方程式を解く

次の連立方程式を、逆行列を使って解きましょう。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 420 \\ 2x + y = 300 \end{cases}$$

考え方 $A\vec{x} = \vec{b}$ と書いて、 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ 。逆行列は左からかける。

式 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 、行列式 $2 \times 1 - 3 \times 2 = -4$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 \times 420 - 3 \times 300 \\ -2 \times 420 + 2 \times 300 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -480 \\ -240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}$$

確かめ： $2 \times 120 + 3 \times 60 = 420$ 、 $2 \times 120 + 60 = 300$

答え $x = 120$ 、 $y = 60$

じぶんでこう2

次の連立方程式を、逆行列を使って解きましょう。

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

例題3 同じ逆行列で、右辺だけを変える

次の回路の式（電圧 E_1 、 E_2 [V]、電流 I_1 、 I_2 [A]）で、(1) $E_1 = 9$ 、 $E_2 = 6$ 、(2) $E_1 = 12$ 、 $E_2 = 0$ のときの電流を求めましょう。

$$\begin{cases} 4I_1 + 2I_2 = E_1 \\ 2I_1 + 4I_2 = E_2 \end{cases}$$

考え方 逆行列 $\left(\frac{1}{12}\right)$ に 1 行め $(4, -2)$ 、2 行め $(-2, 4)$ をかけたものは電圧に関係しないので、1 回作って両方に使う。

式 (1) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \times 9 - 2 \times 6 \\ -2 \times 9 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \times 12 - 2 \times 0 \\ -2 \times 12 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 48 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

答え (1) $I_1 = 2\text{ A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{ A}$ 。(2) $I_1 = 4\text{ A}$ 、 $I_2 = -2\text{ A}$ (I_2 は矢印と反対向きに 2 A)

じぶんでところ3

次の回路の式で、(1) $E_1 = 8$ 、 $E_2 = 7$ 、(2) $E_1 = 5$ 、 $E_2 = 0$ のときの電流を求めましょう。

$$\begin{cases} 3I_1 + 2I_2 = E_1 \\ 2I_1 + 3I_2 = E_2 \end{cases}$$

例題4 つないだ機械の逆行列

次の A 、 B について、 $(AB)^{-1}$ を2通りで求めて、くらべましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 (ア) AB を計算してから逆行列。(イ) $B^{-1}A^{-1}$ (順番が逆)。

式 (ア) $AB = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+1 \\ 1+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 、行列式 $4 - 3 = 1$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(イ) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 、 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (どちらも行列式 1)

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2-1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

答え どちらも $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

じぶんでこう4

次の A 、 B について、 $(AB)^{-1}$ を 2 通りで求めて、くらべましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 5 掃き出し法で 3 つの文字

次の連立方程式を、掃き出し法で解きましょう。

$$\begin{cases} y + 3z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

考え方 1 行め 1 列めが 0 なので、このままでは 1 にできない。1 列めが 0 でない②と入れかえてから（操作 3）、1 列めから順に、ななめを 1、ほかを 0 にする。右辺もいっしょに計算する。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftrightarrow \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{③} - \text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{③} + 2 \times \text{②}]{\text{①} - \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{③} \div 7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{②} - 3 \times \text{③}]{\text{①} + 2 \times \text{③}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

確かめ： $2 + 9 = 11$ 、 $1 + 2 + 3 = 6$ 、 $1 - 2 + 6 = 5$

答え $x = 1$ 、 $y = 2$ 、 $z = 3$

じぶんでこう5

次の連立方程式を、掃き出し法で解きましょう。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

例題6 掃き出し法で逆行列

次の行列の逆行列を、掃き出し法で求めましょう。また、①の3つの手順の答えとくらべましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

考え方 右に I をならべて、左が I になるまで掃き出す。右に出てきた行列が逆行列。

$$\begin{aligned} \text{式} \quad & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{②}-3\times\text{①}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{①}-2\times\text{②}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$3 \text{ つの手順: 行列式 } 7 - 6 = 1. \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{答え} \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ つの手順の答えと同じ})$$

じぶんでところ6

次の行列の逆行列を、掃き出し法で求めましょう。また、①の3つの手順の答えとくらべましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例題7 答えがあるかどうかを調べる

次の連立方程式を掃き出し法で調べ、答えがないか、無数にあるかを答えましょう。

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

考え方 行列式は $4 - 4 = 0$ 。② - 2 × ① で 2 行めの左が 0 になる。右が 0 なら無数、0 でなければ答えはない。

式 (1) ② - 2 × ① : $(2 - 2, 4 - 4 \mid 6 - 6) = (0, 0 \mid 0)$ 。「 $0 = 0$ 」

(2) ② - 2 × ① : $(2 - 2, 4 - 4 \mid 5 - 6) = (0, 0 \mid -1)$ 。「 $0 = -1$ 」

答え (1) 答えは無数 ($x = 3 - 2y$ なら何でもよい)。(2) 答えはない

じぶんでとこう7

次の連立方程式を掃き出し法で調べ、答えがないか、無数にあるかを答えましょう。

$$(1) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

例題8 ロボットの関節の角速度

2つの関節のロボットの腕で、ヤコビ行列が次のとき ($\det J = 0.0530$)、

$$J = \begin{pmatrix} -0.3915 & -0.2415 \\ 0.3245 & 0.0647 \end{pmatrix}$$

手をまっすぐ上へ 0.1 m/s で動かす (手の速度 $(0, 0.1)$) には、肩とひじを何 rad/s で回せばよいですか。

考え方 手の速度 $(0, 0.1)$ を右辺にして、逆行列で解く。右辺の1行めが0なので、逆行列の2列めだけが効く。

$$\text{式} \quad \text{逆行列: } J^{-1} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.0647 & 0.2415 \\ -0.3245 & -0.3915 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.2415 \times 0.1 \\ -0.3915 \times 0.1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.02415 \\ -0.03915 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{0.0530} \begin{pmatrix} 0.02415 \\ -0.03915 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.456 \\ -0.739 \end{pmatrix}$$

答え 肩を約 0.46 rad/s (左回り)、ひじを約 0.74 rad/s (右回り)

丸める前の値で計算すると 0.455 と -0.738 です（小さなちがいは丸めのため）。確かめに J をかけると、ほしい速度になります。

$$-0.3915 \times 0.456 + 0.2415 \times 0.739 = 0.000$$

$$0.3245 \times 0.456 - 0.0647 \times 0.739 = 0.100$$

じぶんでこう 8

例題 8 と同じロボットの腕で、手をまっすぐ左へ 0.1 m/s で動かす（手の速度 $(-0.1, 0)$ ）には、肩とひじを何 rad/s で回せばよいですか。

例題 9 最小二乗法で直線を引く

4 つの点 $(1, 3)$ 、 $(2, 5)$ 、 $(3, 6)$ 、 $(4, 8)$ に、最小二乗法で直線 $y = ax + b$ を引きましょう。

考え方 正規方程式（左の行列は「 x^2 の和、 x の和 / x の和、点の数」、右辺は「 xy の和 / y の和」）を作って、逆行列で解く。

式 x の和 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 、 x^2 の和 $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

y の和 $3 + 5 + 6 + 8 = 22$ 、 xy の和 $3 + 10 + 18 + 32 = 63$

正規方程式 $\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 22 \end{pmatrix}$ 、行列式 $120 - 100 = 20$

$$a = \frac{4 \times 63 - 10 \times 22}{20} = \frac{32}{20} = 1.6,$$

$$b = \frac{-10 \times 63 + 30 \times 22}{20} = \frac{30}{20} = 1.5$$

答え $y = 1.6x + 1.5$

じぶんでところ9

おもり x 個が 1~5 のとき、ばねの長さ y [cm] は 14.0、15.9、18.1、20.1、21.9 でした (3-16 のばね C)。最小二乗法で、直線 $y = ax + b$ を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

逆行列をかける場所

✗ $A\vec{x} = \vec{b}$ だから $\vec{x} = \vec{b}A^{-1}$

○ $A\vec{x} = \vec{b}$ だから $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ (左からかける)

A は $\vec{x}$ の左にいるので、消すための A^{-1} も左に置きます。 $\vec{b}A^{-1}$ は、2 行 1 列 $\times$ 2 行 2 列で、大きさが合わず計算できません。

⚠ まちがえやすいところ

逆行列の作り方

✗ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

左上と右下を入れかえるのを忘れ、行列式でわるのも忘れています。作ったら、もとの行列にかけて I になるか確かめましょう。まちがいにすぐ気づけます。

⚠ まちがえやすいところ

つないだ機械の逆行列

✗ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

○ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (順番が逆)

あとからしたことを、先にもどします (くつ下とくつ)。行列ではかける順で答えが変わるので、順番をまちがえると、ちがう行列になります。

⚠ まちがえやすいところ

行列式が 0 のとき

✗ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を、3 つの手順で作る

○ 行列式が $4 - 4 = 0$ なので、逆行列はない

0 でわることになるので、逆行列は作れません。表計算は #NUM!、Python は LinAlgError と出ます。はじめに行列式を計算するくせをつけましょう。

⚠ まちがえやすいところ

右辺をひき忘れる

✗ ② - ① で、左の係数だけをひいて、右辺はそのまま

○ 右辺もいっしょにひく (1 行全体をひく)

1 つの行は 1 つの式です。式から式をひくときは、左辺も右辺もひきます。右辺を忘れると、ちがう式になってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

0 の所で、入れかえない

✕ 1行め1列めが0なのに、①÷0をしようとする（または、行ではなく列を入れかえる）

○ 1列めが0でない行と、行ごとに入れかえる（右辺もいっしょに）

0ではられません。行を入れかえるのは、式を書く順番を変えるだけなので、答えは変わりません。列を入れかえると、 x と y の場所が入れかわるので、答えを読むときにまちがえます。

⚠ まちがえやすいところ

正規方程式のかける順

✕ $AA^T\vec{x} = A^T\vec{b}$

○ $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$

ソラさんのデータでは、 A は 7 行 2 列です。 A^TA は 2 行 2 列で、 a と b の 2 つの式になります。 AA^T は 7 行 7 列になり、 $\vec{x}$ (2 行 1 列) にかかけられません。「 $A\vec{x} = \vec{b}$ に、左から A^T をかけた形」と覚えましょう。

⚠ まちがえやすいところ

逆行列を $\frac{1}{A}$ と書く

✕ $\vec{x} = \frac{\vec{b}}{A}$

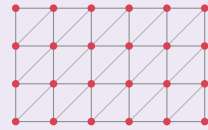
○ $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

行列のわり算は決めていません。 $\frac{\vec{b}}{A}$ では、 A^{-1} を左からかけるのか右からかけるのかがわかりません。

物理・工学ではこう使う

● 橋やビルの設計：何百万個の連立方程式

橋やビルを設計するときは、建物を小さな部品（要素）に細かく分け、部品どうしがつながる点ごとに、力のつり合いの式を立てます。これを「有限要素法」といいます。7-5 の 3 つのばねの $K\vec{u} = \vec{F}$ と同じ形の連立方程式で、大きな建物では式が何百万個にもなります（物理 力-16）。それを、この章のガウスの消去法の考えを使ったプログラムで解いて、どこにどれだけの力がかかるかを調べています。



● 電子回路のシミュレーション

電子回路の設計では、回路の各点の電圧をわからない数として、キルヒホッフの法則（3-6 のきまり 1~3）の式を立て、コンピュータで解きます（物理 電-5）。トランジスタのように、電流と電圧が比例しない部品があるときも、少しずつ直しながら、何度も連立 1 次方程式を解いて答えに近づけます。

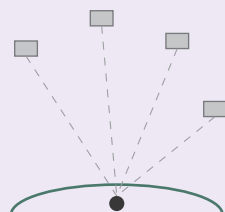
● ロボットの腕：ヤコビ行列の逆行列

工場のロボットは、手を決まった道すじで動かすために、手の速度 $\dot{\vec{p}}$ から関節の角速度を $\dot{\vec{\theta}} = J^{-1}\dot{\vec{p}}$ で、1 秒に何百~何千回も計算しています（例題 8）。腕がのびきる近くでは $\det J$ が 0 に近づき、関節を急に速く回さなければならなくなります（章末問題 10）。そこで、その近くを通らないように、道すじを決めておくのです。

物理・工学ではこう使う

● GPS：衛星までの距離から、位置を決める

スマホの GPS は、空の人工衛星から届く電波の時刻から、衛星までの距離を求めます。わからない数は、自分の位置 x 、 y 、 z と、スマホの時計のずれの4つなので、4つ以上の衛星が必要です。距離の式は2乗をふくむので、近い位置を仮に決め、そこからの「少しのずれ」についての連立1次方程式を解いて、位置を直すことをくり返します。5つ以上の衛星が見えるときは、式が多すぎるので、最小二乗法 (⑦) でいちばんよく合う位置を求めます。



● 次元解析：単位の指数を逆行列で

物理 力-15 では、長さ・質量・時間の単位の指数を並べた行列の行列式が1 (7-4 の章末問題) なので、逆行列があり、ほしい量を作る指数の組がただ1つに決まることを使いました。行列式が0でない (正則) ことが、答えがただ1つに決まる保証になっているのです。

● センサーの目もり合わせ (校正)

温度センサーや圧力センサーは、はかった量を電圧に変えて出します。工場では、温度がわかっている所でセンサーの電圧を何回もはかり、「温度と電圧の直線」を最小二乗法 (⑦) で決めておきます。こうして決めた直線を使って、電圧から温度を計算するのです。はかる点の数が何十個でも、解くのは2つの文字の正規方程式だけです。

✓ 章末問題

7-5 のまとめ

基本 ★★★★★

- 1 次の行列の逆行列を作り、もとの行列にかけて I になることを確かめましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2 次の連立方程式を、逆行列を使って解きましょう。

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

- 3 次の回路の式で、(1) $E_1 = 12$ 、 $E_2 = 9$ 、(2) $E_1 = 21$ 、 $E_2 = 0$ のときの電流 I_1 、 I_2 [A] を求めましょう。

$$\begin{cases} 5I_1 + 2I_2 = E_1 \\ 2I_1 + 5I_2 = E_2 \end{cases}$$

- 4 次の A 、 B について、 $(AB)^{-1}$ を 2 通り (AB の逆行列と、 $B^{-1}A^{-1}$) で求めましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5 次の連立方程式を、掃き出し法で解きましょう。

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

- 6 次の連立方程式を、掃き出し法で解きましょう（例題5）。

$$\begin{cases} y + 2z = 8 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

- 7 次の行列の逆行列を、掃き出し法で求めましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 8 次の連立方程式を掃き出し法で調べ、答えがないか、無数にあるかを答えましょう。

$$(1) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

チャレンジ ★★★★★

- 9 最小二乗法で、直線 $y = ax + b$ を引きましょう。

(1) 4つの点 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 5)$

(2) 3つの点 $(0, 2)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 5)$ 。また、ずれの和が0になることを確かめましょう。

10 ロボットの腕の肩とひじを、何 rad/s で回せばよいかを求めましょう。

(1) 例題 8 の腕 ($\det J = 0.0530$) で、手の速度を $(0.1, 0.1)$ (m/s) にする
(②の本文の $(0.1, 0)$ の答えと、例題 8 の答えをたしてもよい)。

(2) ひじの角が 10° で、腕がのびきる近くの腕 (ヤコビ行列は下のとおりで、 $\det J = 0.0130$) で、手をまっすぐ上へ 0.1 m/s で動かす (手の速度 $(0, 0.1)$)。
例題 8 (ひじ 45°) の答えとくらべましょう。

$$J = \begin{pmatrix} -0.3107 & -0.1607 \\ 0.4513 & 0.1915 \end{pmatrix}$$

11 4-11 の看板で、左のひもが水平から 45° 、右のひもも 45° のとき、重さ 100 N をつるすひもの力 T_1, T_2 を、逆行列で求めましょう ($\cos 45^\circ$ も $\sin 45^\circ$ も 0.707 とする)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 2×2 の逆行列を作って確かめ、 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ で連立方程式を解ける。

→ 188 ページ

☐ 掃き出し法で、3 つの文字の連立方程式と逆行列を求められる。

→ 201 ページ

☐ 正規方程式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ で、最小二乗法の直線を求められる。

→ 210 ページ

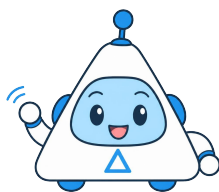


ソラ

逆行列と掃き出し法で、式が何個あっても解けるようになった。第 2 部では、行列で「回す」ことを考えるよ。

回転と座標の変換

- ? ロボットの手の位置は、どうやって計算する？
- ? 30° 回して 45° 回すと、何° 回したことになる？
- ? ドローンの向きは、いくつの数で決まる？



回す・向きを変える・座標を取りかえる、をすべて行列のかけ算で書くよ。ロボットの腕やドローンの姿勢、ゲームの画面は、この計算で動いているよ。

この部で学ぶこと

7-6 回転行列：くるっと回す

✓ ★★★★★ P.238

30° 回して 45° 回すと、75° 回したのと同じ

7-7 3次元の回転と座標の変換

🚀 ★★★★★ P.274

ドローンの向きを、3つの回転で表す

この部を読むと…

回転行列と同次変換行列で、ロボットの腕の先の位置や、3次元の向きを計算できるようになります。物理シリーズの力学で、そのまま使います。

第2部 回転と座標の変換

★★★★

7-6

回転行列：
くるっと回す

道しるべ この章の前に 4-6 4-8 4-9 6-9 7-2 7-3 7-5 この章の先に 7-7 7-8 7-9

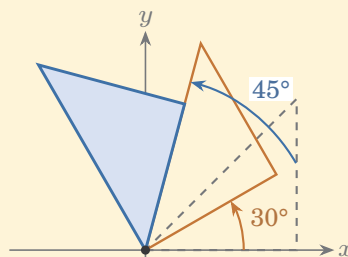
この章でできるようになること

- ★★★★ 回転行列 $R(\theta)$ を「矢印の行き先」から作り、点や図形を回せる。
- ★★★★ 回転をつなぐ式 $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ と、回す前にもどす式 $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$ を使える。
- ★★★★ 軸を回した座標で点や力を見たり、ロボットの腕の手の位置を求めたりできる。

? はてな?

三角定規を、原点のまわりに 30° 回し、そこからさらに 45° 回します。全部で 75° 回したのと同じ形になるのは、あたりまえに見えます。

では、「 30° 回す行列」と「 45° 回す行列」をかけると、本当に「 75° 回す行列」になるのでしょうか。そのかけ算の中には、第4巻で苦労して作った、ある公式がかくれています。どの公式でしょう。



7-2 で、4 つの数の表（行列）をかけると、方眼にかいた絵がのびたり、ずれたり、回ったりすることを見ました。7-3 では、2 つの変換を続けて行うことが、行列のかけ算になることを学びました。

この章では、その中の「回す」だけを取り出して、くわしく調べます。回す行列は、ロボットの腕、ゲームの画面、スマホの写真、橋の部材の力の計算など、工学のあらゆる所で使われています。次の 7-7 で 3 次元の回転に進むための、土台にもなります。 $\cos \cdot \sin$ がたくさん出てきますが、1 回でわからなくても大丈夫です。90° のような簡単な角で、方眼の上で確かめながら進みましょう。

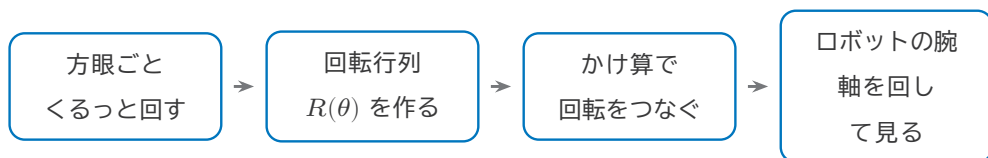


図 1 この章の道すじ。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 4-8** 半径 1 の円（単位円）の上で、 x 軸から左回りに角 θ の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。
左回り（時計の針と反対の向き）を + とする。
- 4-8** 点を原点のまわりに左回りに 90° 回すと $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。
- 4-9** 加法定理： $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 、
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。
- 6-9** 複素数に $\cos \theta + j \sin \theta$ をかけると、複素平面の点は原点のまわりに θ 回る。
- 7-1** 転置 A^T は、行列のたてとよこを入れかえたもの。
- 7-2** 行列 $\times$ ベクトルの 1 列めは $\vec{e}_x = (1, 0)$ の行き先、2 列めは $\vec{e}_y = (0, 1)$ の行き先。
- 7-3** $AB\vec{x}$ は、右の B が先にはたらく。積の成分は、左の行列の行と、右の行列の列の内積。
- 7-5** A^{-1} は A の変換を元にもどす行列。2 $\times$ 2 なら、 $ad - bc$ でわり、 a と d を入れかえ、 b と c の符号を変える。

△ やってみよう 三角定規を 30° ずつ回して、頂点の座標を読もう

45° の三角定規の頂点を、 $O \cdot A \cdot B$ とします (O が 45° の角、 A が直角)。

- 1 方眼紙に x 軸と y 軸をかき、1 目もりを 1 cm とします。
- 2 三角定規を、 O が原点、 A が $(4, 0)$ 、 B が $(4, 4)$ に来るように置きます (短い辺が 4 cm より長いときは、紙を三角形に切りぬいて使う)。
- 3 O を指でおさえ、分度器で 30° ずつ、左回りに回します。そのたびに、 A と B の座標を目もりで読み、表に書きます。

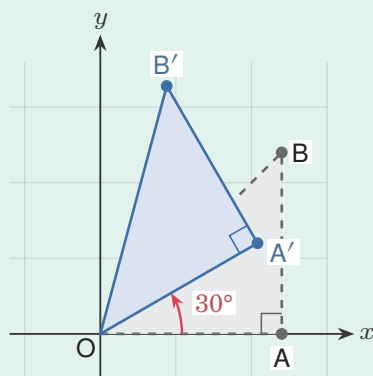
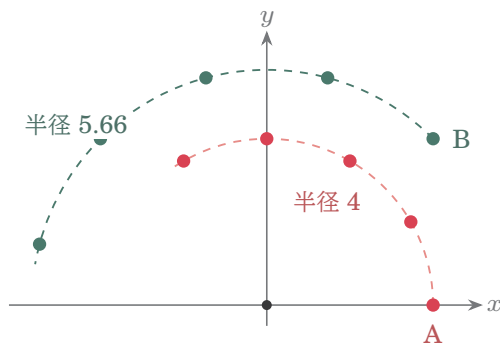


図2 はじめの位置 (点線) と、 30° 回した位置 (青)。

頂点の座標を、計算で求めた値を表にしました。目もりで読んだ値と、小数第1位くらいまで合っていれば大成功です。

回した角 θ	A の x	A の y	B の x	B の y
0°	4	0	4	4
30°	3.46	2	1.46	5.46
60°	2	3.46	-1.46	5.46
90°	0	4	-4	4
120°	-2	3.46	-5.46	1.46

表1 三角定規の頂点 $A \cdot B$ の座標 (小数第2位まで)。



A も B も、O を中心とする円の上を動きます。A は半径 4 の円の上で、角が θ の点なので、座標は $(4 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ です (4-8)。

B はどうでしょう。B は O から $4\sqrt{2} \approx 5.66$ はなれ、角は $\theta + 45^\circ$ です。でも、「 45° 」をいちいち考えずに、もっとかんたんに B の座標を出す方法があります。それが、この章の回転行列です。

数学の道具

1 回転行列を作る：方眼ごと回す

三角定規を回すとき、三角定規の下の方眼紙ごと回すことを考えます。方眼は、回しても、正方形が並んだ方眼のままです。この見方で、どんな点でも回せる式を作ります。

点を「矢印の歩数」で読む

点 $(3, 2)$ は、「 $\vec{e}_x = (1, 0)$ の向きに 3 歩、 $\vec{e}_y = (0, 1)$ の向きに 2 歩」進んだ所です (4-11 の成分の考え方)。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$$

方眼ごと回すと、2 本の矢印 $\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y$ も回ります。回した方眼の上でも、点は「回した $\vec{e}_x$ の向きに 3 歩、回した $\vec{e}_y$ の向きに 2 歩」の所にあります。方眼といっしょに回ったので、歩数は変わらないのです。

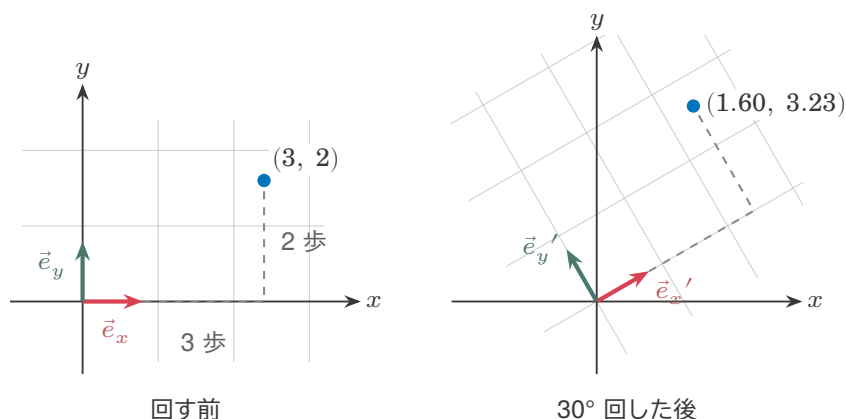


図3 方眼ごと 30° 回す。点は、回した矢印 $\vec{e}_x'$ の向きに3歩、 $\vec{e}_y'$ の向きに2歩の所へ行く。

回した2本の矢印は、どこを向く？

- ① $\vec{e}_x = (1, 0)$ は、単位円の上の角 0° の点です。 θ 回すと、単位円の上の角 θ の点に行きます(4-8)。だから $\vec{e}_x' = (\cos \theta, \sin \theta)$ です。
- ② $\vec{e}_y = (0, 1)$ は、 $\vec{e}_x$ を 90° 回した矢印です。方眼ごと回すと、この「 90° の関係」も変わらないので、 $\vec{e}_y'$ は $\vec{e}_x'$ を 90° 回した矢印です。4-8 の $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ に $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ を入れて、 $\vec{e}_y' = (-\sin \theta, \cos \theta)$ です。

歩数をかけてたす

点 (x, y) は「 $\vec{e}_x$ に x 歩、 $\vec{e}_y$ に y 歩」なので、回した点は「 $\vec{e}_x'$ に x 歩、 $\vec{e}_y'$ に y 歩」です。1 行ずつ計算します。

$$x \vec{e}_x' + y \vec{e}_y'$$

回した矢印で、同じ歩数

$$= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

①と②の矢印を入れた

$$= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

上の成分どうし、下の成分どうしをたした

この形は、7-2 で学んだ「行列×ベクトル」そのものです。1 列めに $\vec{e}_x$ の行き先、2 列めに $\vec{e}_y$ の行き先を並べた行列をかけています（7-2 の「列は矢印の行き先」）。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

1 列め: $\vec{e}_x$ の行き先
2 列め: $\vec{e}_y$ の行き先

図 4 1 行め（オレンジ）と、ベクトルの列（青）の内積が、回した点の x 座標（緑）。

原点のまわりに左回りに θ 回す行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

この行列を**回転行列**（かいてんぎょうれつ）といい、 $R(\theta)$ と書きます。 R は rotation（回転）の頭文字です。 θ が正なら左回り、負なら右回りに回します。

やってみようの B で確かめる

B (4, 4) を 30° 回します ($\cos 30^\circ = 0.866$, $\sin 30^\circ = 0.5$)。

$$\begin{aligned} R(30^\circ) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.866 \times 4 - 0.5 \times 4 \\ 0.5 \times 4 + 0.866 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.464 \\ 5.464 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

表の (1.46, 5.46) と同じです。「B の角は 45° だから…」と考えなくても、4 つの数をかけてたすだけで出ました。図 3 の点 (3, 2) も、同じ計算で $(3 \times 0.866 - 2 \times 0.5, 3 \times 0.5 + 2 \times 0.866) = (1.598, 3.232)$ です。

知っている角で確かめる

- $\theta = 90^\circ$: $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ なので、次の行列です。 (x, y) にかけると $(-y, x)$ で、4-8 の「 90° 回す」と同じです。

$$R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列は、これからよく使うので、 R_{90} とも書きます。

- $\theta = 0^\circ$: $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$ なので、単位行列 I です。 0° 回す=何もしない、です。
- $\theta = 180^\circ$: $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 180^\circ = 0$ なので、 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 。原点について反対側へ行きます。

せいかくに言うと

「方眼ごと回すと、方眼は方眼のまま」というのは、回転が、原点を動かさず、長さや角の大きさを変えない動きだからです。だから、7-2 で学んだ「まっすぐはまっすぐのまま、平行は平行のまま、原点は動かない」をみだし、行列で書けます。原点ではない点（たとえば $(1, 1)$ ）のまわりに回すときは、原点も動くので、行列をかけるだけでは書けません（②のあとのもっと知りたいと 7-7）。

2 もう1つの作り方：複素数のかけ算

6-9 では、複素数 $x + yj$ に $\cos \theta + j \sin \theta$ をかけると、複素平面の点が θ 回ることを学びました。このかけ算を 1 行ずつ展開して、回転行列と見くらべます。

$$(x + yj)(\cos \theta + j \sin \theta)$$

6-9 : θ 回すかけ算

$$= x \cos \theta + jx \sin \theta + jy \cos \theta + j^2 y \sin \theta$$

分配法則で、4 つの項に分けた

$$= x \cos \theta + jx \sin \theta + jy \cos \theta - y \sin \theta$$

$j^2 = -1$ (6-8)

$$= (x \cos \theta - y \sin \theta) + (x \sin \theta + y \cos \theta)j$$

j のない項（実部）と、 j のつく項（虚部）にまとめた

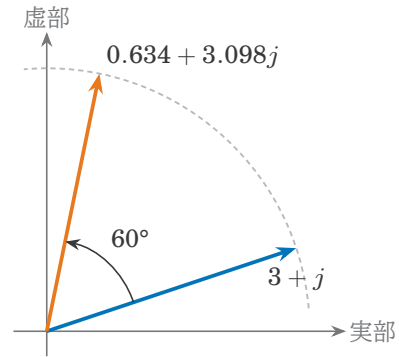
実部が $x \cos \theta - y \sin \theta$ 、虚部が $x \sin \theta + y \cos \theta$ です。①で作った $R(\theta)\vec{x}$ の上の成分と下の成分に、ぴったり同じです。

6-9 では、 $3 + j$ を 60° 回すと

$0.634 + 3.098j$ になりました。同じ回転を、行列で計算します ($\cos 60^\circ = 0.5$ 、 $\sin 60^\circ = 0.866$)。

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 \\ 0.866 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.634 \\ 3.098 \end{pmatrix}$$

6-9 と同じ点が出ました。**複素数のかけ算と回転行列は、同じ回転を 2 つの書き方で表したものです。**



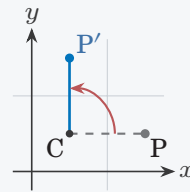
行列のよいところは、3次元でも同じように使えることです (7-7)。複素数のかけ算で回せるのは、平面の回転だけです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

原点ではない点のまわりに回す

時計の針は、文字盤の中心 C のまわりに回りま

す。 C が原点でないときは、① C が原点に来るように全体をずらし ($\vec{p} - \vec{c}$)、②原点のまわりに $R(\theta)$ で回し、③もとの場所へずらしてもどします ($+\vec{c}$)。



$$\vec{p}' = R(\theta)(\vec{p} - \vec{c}) + \vec{c}$$

たとえば、 $P(3, 1)$ を $C(1, 1)$ のまわりに 90° 回すと、① $(2, 0)$ 、② R_{90} をかけて $(0, 2)$ 、③ $(1, 1)$ をたして $(1, 3)$ です。「ずらす」がまぎるので、行列を1回かけるだけでは書けません。7-7 では、数を1つふやした「同次座標」で、これも1つの行列にまとめます。

3 表計算と Python で、まとめて回す

三角形の 3 つの頂点を、1 つずつ回すのはたいへんです。7-3 で学んだように、行列×行列は「右の行列の列ごとに、行列×ベクトルをする」計算でした。そこで、**点を列に並べた行列**を作り、回転行列を左から 1 回かければ、全部の点がいっぺんに回ります。

$$R(30^\circ) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3.464 & 1.464 \\ 0 & 2 & 5.464 \end{pmatrix}$$

1 列めが O、2 列めが A、3 列めが B です。O は原点なので動きません。

表計算

回す角を F2 のセルに入れておき、回転行列の 4 つの成分を COS と SIN で作ります。表計算の COS・SIN はラジアンで計算するので、RADIANS で度をラジアンに直します（4-6・6-9 と同じ注意）。3 列の答えは右に入らないので、回した点は表の下（A5 から）に出します。

A2	=COS(RADIANS(F2))	B2	=-SIN(RADIANS(F2))
A3	=SIN(RADIANS(F2))	B3	=COS(RADIANS(F2))
A5	=MMULT(A2:B3,C2:E3)		

	A	B	C	D	E	F
1	R(θ)		点 O・A・B			角(度)
2	0.866	-0.5	0	4	4	30
3	0.5	0.866	0	0	4	
4	回した点 O・A・B					
5	0	3.464	1.464			
6	0	2	5.464			

表 2 回した点は、表の下の A5 から（7-1 と同じように確定する）。

F2 を 60、90、120 と書きかえると、やってみようの表の続きが一瞬で出ます。回した点を表計算のグラフ（散布図）にかくと、次の図のように、三角形がくるっと回っていくのが見えます。

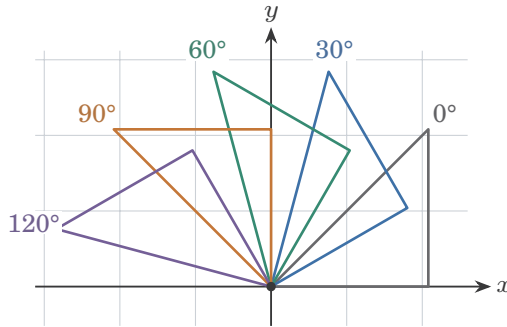


図5 F2 を 0、30、60、90、120 にして求めた三角形。数字は回した角で、B の近くに書いた。

Python

Python では、`np.radians` で度をラジアンに直してから、`np.cos`・`np.sin` を使います。行列×行列は `@` です（7-1・7-3）。

```
import numpy as np
th = np.radians(30)           # 30° をラジアンに直す
R = np.array([[np.cos(th), -np.sin(th)],
              [np.sin(th),  np.cos(th)]])
P = np.array([[0, 4, 4],
              [0, 0, 4]])      # 点 0・A・B を列に並べる
print(np.round(R @ P, 3))      # 小数第3位まで出す
```

Python

実行結果

```
[[0.    3.464 1.464]
 [0.    2.    5.464]]
```

答えも、点を列に並べた形で出てきます。上の行が x 座標、下の行が y 座標です。

4 回転をつなぐ: $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$

いよいよ、**② はてな?** の問いです。7-3 で学んだように、行列は右にあるものが先にはたらくので、あとからはたらく回転を左に書きます。**② はてな?** の「30° 回してから 45° 回す」は $R(45^\circ)R(30^\circ)$ です。

ここでは先に、⑦のロボットの腕の計算と同じ並びの $R(30^\circ)R(45^\circ)$ (45° が先、30° があと) を計算します。順番を入れかえた $R(45^\circ)R(30^\circ)$ も同じになるかどうかは、そのあとで確かめます。

まず、数で確かめる

表計算の MMULT か、Python の @ で、2 つの行列をかけてみます (くわしい手計算は **㊦ 例題 2**)。

$$\begin{aligned} R(30^\circ)R(45^\circ) &= \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.259 & -0.966 \\ 0.966 & 0.259 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\cos 75^\circ = 0.259$ 、 $\sin 75^\circ = 0.966$ なので、これは $R(75^\circ)$ です。

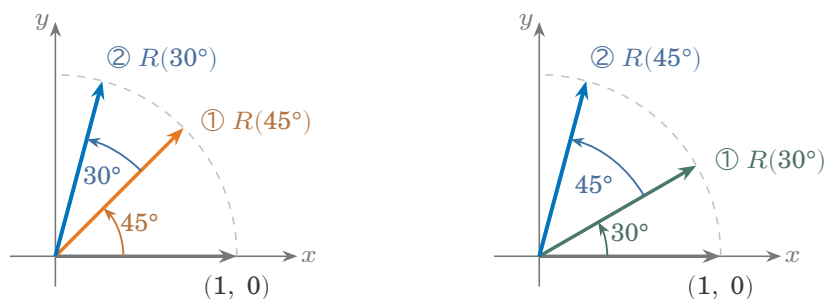


図 6 左は $R(30^\circ)R(45^\circ)$ (45° が先)、右は $R(45^\circ)R(30^\circ)$ (30° が先)。どちらも、全部で 75° 回る。

文字で計算すると、加法定理が出てくる

数で確かめたことが、どんな角でも成り立つかを調べます。 $R(\alpha)R(\beta)$ の 4 つの成分を、「左の行列の行と、右の行列の列の内積」(7-3) で、1 つずつ計算します。

$$R(\alpha)R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

成分	行と列の内積	加法定理 (4-9) で
1 行 1 列	$\cos \alpha \cos \beta + (-\sin \alpha) \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta)$
1 行 2 列	$\cos \alpha(-\sin \beta) + (-\sin \alpha) \cos \beta$	$-\sin(\alpha + \beta)$
2 行 1 列	$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta)$
2 行 2 列	$\sin \alpha(-\sin \beta) + \cos \alpha \cos \beta$	$\cos(\alpha + \beta)$

表 3 1 行 2 列は、 $-(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$ とまとめてから、加法定理を使った。

右の列を並べると、 $R(\alpha + \beta)$ そのものです。

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

回転をつなぐと、角はたし算になる

【はてな？】 の答えです。回転行列のかけ算の中には、4-9 の加法定理がかくれています。4-9 では、単位円の図をくふうして加法定理を導きました。行列で考えると、「 β 回してから α 回すと、 $\alpha + \beta$ 回る」というあたりまえのことから、加法定理が出てきます。加法定理を忘れたら、2 つの回転行列をかければ、いつでも作り直せます。

回転どうしは、かける順番を変えてもよい

$R(\beta)R(\alpha) = R(\beta + \alpha)$ で、 $\beta + \alpha = \alpha + \beta$ なので、 $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$ です (図6の左と右)。数でも確かめます。**②はてな?**の並びの $R(45^\circ)R(30^\circ)$ の1行1列は $0.707 \times 0.866 + (-0.707) \times 0.5 = 0.6123 - 0.3535 = 0.2588$ 、2行1列は $0.707 \times 0.866 + 0.707 \times 0.5 = 0.9658$ で、 $R(30^\circ)R(45^\circ)$ と同じ $R(75^\circ)$ になります。だから、**②はてな?**の答えは「本当に 75° 回す行列になる」です。7-3では、「回してのぼす」と「のぼして回す」はちがいました。**平面の回転どうしなら、順番を変えても同じ**です。ただし、これは2次元だけの話で、3次元の回転では順番が大事になります (7-7)。

同じ回転をくり返す

$R(\theta)$ を n 回かけると、角は θ が n 個たされて $n\theta$ です。

$$R(\theta)^n = R(n\theta)$$

たとえば、 $R(30^\circ)$ を12回かけると $R(360^\circ)$ で、1周して元にもどるので I です ($30 \times 12 = 360$)。 R_{90} を2回かけると $R(180^\circ)$ で、すべての点が反対側へ行くので、 $-I$ です。

$$R_{90}R_{90} = R(180^\circ) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

6-8では、「 j をかけると 90° 回る。だから $j^2 = -1$ 」と考えました。 R_{90} は、行列の世界の j です。

⑤ 回す前にもどす： $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$

θ 回したものを元にもどすには、反対に θ 、つまり $-\theta$ 回せばよいはずです。これを、7-5の逆行列の公式と、7-1の転置の2つで確かめます。

逆行列の公式で

$R(\theta)$ の $ad - bc$ は、 $\cos \theta \cdot \cos \theta - (-\sin \theta) \cdot \sin \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ です（単位円の上の点なので、三平方の定理で $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 。4-8）。7-5 の公式で、1 行ずつ計算します。

$$R(\theta)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$ad - bc = 1$ 。 a と d を入れかえ、 b と c の符号を変えた

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
(4-8)

$$= R(-\theta)$$

回転行列の形になった

たしかに、 $-\theta$ 回す行列です。

転置と見くらべる

$R(\theta)$ のたてとよこを入れかえる（7-1 の転置）と、次のようになります。

$$R(\theta)^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

上の逆行列と、まったく同じです。

$$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$$

回転行列は、転置するだけで逆行列になる

ふつうの行列では、逆行列を作るには、行列式でわったり、掃き出し法を使ったりと、手間がかかります（7-5）。回転行列は、**たてとよこを入れかえるだけ**で逆行列になります。3 次元の回転（7-7）でも同じで、ロボットやゲームの計算が速くできる理由の 1 つです。

長さも面積も変えない

回しても、原点からの距離は変わらないはずです。回した点の座標の2乗の和を、1行ずつ計算します。

$$\begin{aligned}
 & (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 && \text{回した点の } x \text{ 座標の 2 乗と } y \text{ 座標の 2 乗の和} \\
 & = x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta && \text{1 つめを展開した} \\
 & \quad + x^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta && \text{2 つめを展開した} \\
 & = x^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) && -2xy \cdots \text{ と } +2xy \cdots \text{ が消えた} \\
 & = x^2 + y^2 && \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1
 \end{aligned}$$

三平方の定理 (4-4) で、距離の2乗は $x^2 + y^2$ なので、回しても距離は変わりません。たとえば、(3, 1) を 60° 回した (0.634, 3.098) では、次のように、回す前の $3^2 + 1^2 = 10$ と同じです。

$$0.634^2 + 3.098^2 = 0.402 + 9.598 = 10.000$$

また、行列式は1なので、図形の面積も1倍、つまり変わりません (7-4)。

せいかくに言うと

$R^T R = I$ をみたす行列を、**直交行列** (ちょっこうぎょうれつ) といいます。 $R^T R$ の成分は、 R の列どうしの内積 (4-12) になります。1行1列は1列めどうしの内積 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 、1行2列は1列めと2列めの内積 $-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$ です。つまり直交行列とは、「2つの列が、どちらも長さ1で、たがいに直角 (直交)」な行列です。回転した $\vec{e}_x'$ と $\vec{e}_y'$ は、長さ1で直角なので、回転行列は直交行列です。7-2の裏返し行列 (下の式) も、列は長さ1で直角なので直交行列ですが、行列式は-1です (7-4: 裏返すと符号が変わる)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2×2 の直交行列は、回転（行列式 1）か、回転と裏返しを組み合わせたもの（行列式 -1 ）のどちらかです。

6 点を回す・軸を回す

ここまでは、軸を動かさずに、点を回してきました。工学では、反対に「点はそのまま、軸（ものさし）のほうを回して見る」ことがよくあります。坂の上の荷物の力を、坂にそった向きと坂に垂直な向きで見る（4-6）、かたむけたカメラで見る、回っているロボットの腕から見る、などです。

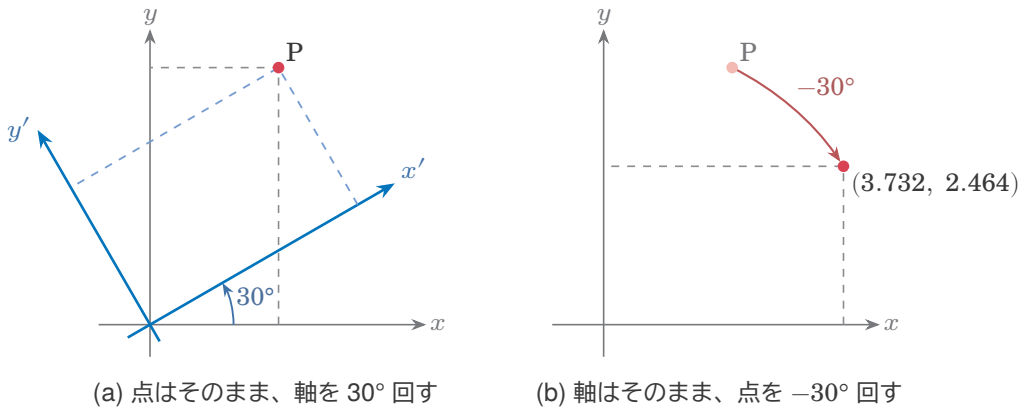


図 7 (a) と (b) で、点と軸の関係は同じ。だから (a) の新しい座標 (x', y') は、(b) の回した点の座標と同じ $(3.732, 2.464)$ 。

見方 1：軸を回すのは、点を反対に回すのと同じ

図 7 の (a) のように、点 $P(2, 4)$ はそのまま、軸を左回りに 30° 回します。新しい軸 x' 、 y' で P を読むと、いくつになるでしょう。

(a) の図を、新しい軸がまっすぐ横・たてになるように、紙ごと右に 30° 回して見てください。すると (b) になります。軸から見ると、**軸が左に 30° 回ること**は、**点が右に 30° (-30°) 回ることと同じ**です。だから、新しい座標は $R(-30^\circ)$ をかけて求められます。そして、⑤で調べたとおり、 $R(-30^\circ) = R(30^\circ)^T$ です。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(30^\circ)^T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.732 \\ 2.464 \end{pmatrix}$$

見方2：新しい軸の向きの矢印との内積

もう1つの見方です。4-12 で学んだように、ある向きの長さ1の矢印との内積は、「その向きに何歩分あるか」でした。新しい x' 軸の向きの長さ1の矢印は $\vec{e}_x' = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ 、 y' 軸は $\vec{e}_y' = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)$ です (①)。

$$x' = \vec{e}_x' \cdot \overrightarrow{OP} = 0.866 \times 2 + 0.5 \times 4 = 3.732 \quad x' \text{ 軸の向きに何歩分か}$$

$$y' = \vec{e}_y' \cdot \overrightarrow{OP} = -0.5 \times 2 + 0.866 \times 4 = 2.464 \quad y' \text{ 軸の向きに何歩分か}$$

見方1と同じ答えです。 $R(\theta)^T$ の1行めは $\vec{e}_x'$ 、2行めは $\vec{e}_y'$ です。 $R(\theta)$ の列が、そのまま $R(\theta)^T$ の行になっているからです。

$$\text{軸を } \theta \text{ 回した座標で見ると } \vec{x}' = R(\theta)^T \vec{x}$$

$$\text{もとの座標にもどすと } \vec{x} = R(\theta) \vec{x}'$$

2つめの式は、1つめの両辺に左から $R(\theta)$ をかけたものです ($R(\theta)R(\theta)^T = I$)。このように、同じ点を別の軸で表しなおすことを、**座標の変換** (座標変換) といいます。

物理の本では

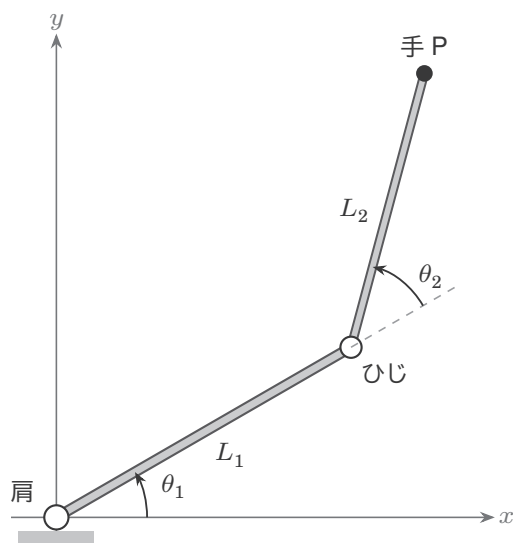
物理シリーズ第1巻 (力学) では、回る台の上の座標で見た位置 $\vec{r}'$ を、地面の座標に直すのに、2つめの式と同じ形の $\vec{r} = R(\theta)\vec{r}'$ を使います。また、橋の部材の中の力 (応力) を、ななめの向きの軸で見るときに R^T を使います。そこらは7-9の「軸を変えて見る」で、もう一度出てきます。

せいかくに言うと

「点を回す」行列と「軸を回して見る」行列は、角の向きが反対です。軸を左に θ 回して見ると、点は右に θ 回ったように見えるからです。本や場面によって、どちらの意味で回転行列を使っているかがちがうので、「点を回しているのか、軸を回しているのか」を、いつも図で確かめましょう。この本では、 $R(\theta)$ は「点を左に θ 回す」行列です。

7 ロボットの腕の手の位置

4-7 では、2 本の腕（2 リンク）の手の位置を、三角比で求めました（4-7 の数は $L_1 = 40 \text{ cm}$ 、 $L_2 = 30 \text{ cm}$ ）。ここでは、物理シリーズ第 1 巻の力学（力-7）と同じ腕（ $L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ ）を、回転行列で計算します。 θ_1 は肩の角（ x 軸から）、 θ_2 はひじの角（上の腕の向きから）です。



上の腕は、 x 軸の向きの矢印

$(L_1, 0)$ を θ_1 回したものです。

下の腕は、上の腕から見ると、矢印

$(L_2, 0)$ を θ_2 回したものです。上の

腕がさらに θ_1 回っているのを、地面

から見ると、それをもう一度 θ_1 回し

ます（⑥の $\vec{x} = R(\theta)\vec{x}'$ ）。

肩から手への矢印 $\vec{p}$ は、2 本の腕の矢印の和なので、次の式になります。

$$\vec{p} = R(\theta_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} + R(\theta_1)R(\theta_2) \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R(\theta_1)R(\theta_2)$ では、右の $R(\theta_2)$ （ひじ）が先にはたらき、そのあと $R(\theta_1)$ （肩）がはたらきます。④より $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ なので、成分にすると次のようになります。

$$R(\theta_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \theta_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

1 列めだけが残る（2 つめの成分が 0）

$$R(\theta_1 + \theta_2) \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

同じように、1 列めに L_2 をかけた

2つをたすと、4-7の順運動学の式になります。

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

数を入れる

$\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ では、 $\theta_1 + \theta_2 = 75^\circ$ です。手の位置を1 mm (0.001 m) まで正しく出したいので、 $\cos \cdot \sin$ は5けたで計算します ($\cos 30^\circ = 0.86603$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ 、 $\cos 75^\circ = 0.25882$ 、 $\sin 75^\circ = 0.96593$)。

$$R(30^\circ) \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25981 \\ 0.15000 \end{pmatrix} \quad 0.30 \times 0.86603, 0.30 \times 0.5$$

$$R(75^\circ) \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06470 \\ 0.24148 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0.25 \times 0.25882, \\ 0.25 \times 0.96593 \end{matrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0.32451 \\ 0.39148 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.325 \\ 0.391 \end{pmatrix} \quad \text{2つをたした (m)}$$

手は、肩から右へ0.325 m、上へ0.391 mの所にあります。手の向き（下の腕の向き）は x 軸から 75° です。

関節がふえても、同じ

腕の先に、長さ0.10 mの道具をつけ、手首を 15° 曲げたとします ($\theta_3 = 15^\circ$)。道具は、肩・ひじ・手首の3つの回転を受けるので、道具の矢印にかかる回転は次のとおりです。

$$R(\theta_1)R(\theta_2)R(\theta_3) = R(30^\circ + 45^\circ + 15^\circ) = R(90^\circ)$$

$$R(90^\circ) \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

これを手の位置にたして、道具の先は (0.325, 0.491) です。関節が 3 つ、4 つとふえても、回転行列を 1 つずつかけていけばよいのです。工場のロボットは、関節が 6 つあるので、3 次元の回転行列 (7-7) を 6 つかけていきます。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

回転行列を微分する

$R(\theta)$ の 4 つの成分を、それぞれ θ で微分します (行列の微分は、成分ごとに微分すると決めます)。 $(\cos \theta)' = -\sin \theta$ 、 $(\sin \theta)' = \cos \theta$ (5-15) なので、

$$\frac{dR}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

これは、 $R(\theta)$ と R_{90} の積に等しくなります。行と列の内積で確かめます。

$$R(\theta)R_{90} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

点 $\vec{r}_0$ を角速度 ω で回すと、時刻 t の位置は $\vec{r} = R(\omega t)\vec{r}_0$ です。合成関数の微分 (5-6) で、速度は次のようになります (回転どろしは順番を変えてよいので、 $R(\omega t)R_{90} = R_{90}R(\omega t)$)。

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega R(\omega t)R_{90}\vec{r}_0 = \omega R_{90}R(\omega t)\vec{r}_0 = \omega R_{90}\vec{r}$$

つまり、**速度は、位置の矢印を 90° 回して ω 倍したもので**、大きさは $r\omega$ (4-8)、向きは円の接線 (4-15) です。物理シリーズ第 1 巻では、この式から、回る台の上で感じる遠心力とコリオリの力を導きます。

専門書をのぞいてみよう 線形代数の教科書ふうの書き方

平面上の原点のまわりの角 θ の回転は、行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

による一次変換で表される。 $R(\theta)$ は直交行列であり、 ${}^tR(\theta)R(\theta) = E$ 、 $\det R(\theta) = 1$ をみたす。また、 $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ が成り立つ。

訳 「一次変換」は、行列をかける変換 (7-2) のこと。 ${}^tR$ は転置 R^T の別の書き方 (左上に小さな t を書く)。 E は単位行列で、この本の I と同じ。 $\det$ は行列式 (7-4)。

たいせつ

回転行列	$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (左回りに θ)
作り方	1 列め = $\vec{e}_x$ の行き先、2 列め = $\vec{e}_y$ の行き先
つなぐ	$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ (中に加法定理)
もどす	$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$
軸を回す	軸を θ 回して見ると $\vec{x}' = R(\theta)^T \vec{x}$
2本の腕	$\vec{p} = R(\theta_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} + R(\theta_1)R(\theta_2) \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

この章で出てきたことば

回転行列 原点のまわりに点を回す行列 $R(\theta)$ 。

直交行列 $R^T R = I$ をみたす行列。列が長さ 1 で、たがいに直角。回転と裏返し。

座標の変換 同じ点を、別の軸 (ものさし) で表しなおすこと。座標変換ともいう。

順運動学 関節の角から、手の位置を求めること (4-7)。

記号カード

初めて出た章 7-6

$$R(\theta)$$

読み方 アール・シータ

意味 原点のまわりに左回りに θ 回す回転行列。

$$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$$

英語 rotation matrix

記号カード

初めて出た章 7-6

$$R_{90}$$

読み方 アール・きゅうじゅう

意味 90° 回す回転行列 $R(90^\circ)$ 。

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)。$$

$$R_{90} R_{90} = -I \quad (j^2 = -1 \text{ と同じ})$$

英語 rotation by 90°

例題でたしかめよう

例題 1 点を回す

点 $(3, 1)$ を、原点のまわりに左回りに 60° 回した点を、回転行列で求めましょう。

$$(\cos 60^\circ = 0.5, \sin 60^\circ = 0.866)$$

考え方 $R(60^\circ)$ をかける。回した点の x 座標は 1 行めとベクトルの内積、 y 座標は 2 行めとベクトルの内積。

式 $R(60^\circ)$ の 1 行めは $(0.5, -0.866)$ 、2 行めは $(0.866, 0.5)$

$$x = 0.5 \times 3 + (-0.866) \times 1 = 1.5 - 0.866 = 0.634$$

$$y = 0.866 \times 3 + 0.5 \times 1 = 2.598 + 0.5 = 3.098$$

答え $(0.634, 3.098)$

6-9 で、 $3 + j$ に $\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ$ をかけた答え $0.634 + 3.098j$ と同じです。

じぶんでとこう1

点 $(4, 2)$ を、原点のまわりに左回りに 30° 回した点を、回転行列で求めましょう。

$$(\cos 30^\circ = 0.866, \sin 30^\circ = 0.5)$$

例題2 回転をつなぐ

$R(30^\circ)R(45^\circ)$ を計算し、 $R(75^\circ)$ とくらべましょう。

$$(\cos 30^\circ = 0.866, \sin 30^\circ = 0.5, \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707)$$

$$(\cos 75^\circ = 0.259, \sin 75^\circ = 0.966)$$

考え方 積の成分は、左の行列の行と、右の行列の列の内積 (7-3)。途中は小数第4位まで書き、最後に第3位にまるめる。

式 1行1列: $0.866 \times 0.707 + (-0.5) \times 0.707$

$$= 0.6123 - 0.3535 = 0.2588$$

1行2列: $0.866 \times (-0.707) + (-0.5) \times 0.707$

$$= -0.6123 - 0.3535 = -0.9658$$

2行1列: $0.5 \times 0.707 + 0.866 \times 0.707$

$$= 0.3535 + 0.6123 = 0.9658$$

2行2列: $0.5 \times (-0.707) + 0.866 \times 0.707$

$$= -0.3535 + 0.6123 = 0.2588$$

答え 1行めが $(0.259, -0.966)$ 、2行めが $(0.966, 0.259)$ (小数第3位まで) で、 $R(75^\circ)$ と同じ

じぶんでとこう 2

$R(20^\circ)R(40^\circ)$ を計算し、 $R(60^\circ)$ とくらべましょう。

($\cos 20^\circ = 0.940$, $\sin 20^\circ = 0.342$, $\cos 40^\circ = 0.766$, $\sin 40^\circ = 0.643$)

($\cos 60^\circ = 0.5$, $\sin 60^\circ = 0.866$)

例題 3 同じ回転をくり返す

$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を使って、次の問いに答えましょう。

(1) $R(45^\circ)^2 = R(45^\circ)R(45^\circ)$ を成分で計算し、何° 回す行列か答えましょう。

(2) $R(45^\circ)^4 = R(45^\circ)^2 R(45^\circ)^2$ を計算しましょう。

(3) $R(45^\circ)$ を何回かけると、はじめて I になりますか。

考え方 行と列の内積で計算する。 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

式 (1) 1 行 1 列: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, 1 行 2 列: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$
 2 行 1 列: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 2 行 2 列: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
 1 行めが $(0, -1)$ 、2 行めが $(1, 0)$ で、 R_{90}

(2) $R_{90}R_{90}$ を、行と列の内積で計算する

1 行 1 列: $0 \times 0 + (-1) \times 1 = -1$

1 行 2 列: $0 \times (-1) + (-1) \times 0 = 0$

2 行 1 列: $1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

2 行 2 列: $1 \times (-1) + 0 \times 0 = -1$

(3) $R(45^\circ)^n = R(45^\circ \times n)$ が $R(360^\circ) = I$ になるのは
 $45 \times n = 360$ のとき

答え (1) R_{90} (90° 回す) (2) $-I$ (180° 回す) (3) 8 回

じぶんでとこう3

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ を使って、次の問いに答えましょう。

- (1) $R(30^\circ)^2$ を成分で計算し、何° 回す行列か答えましょう。
- (2) $R(30^\circ)^3 = R(30^\circ)^2 R(30^\circ)$ を計算しましょう。
- (3) $R(30^\circ)$ を何回かけると、はじめて I になりますか。

例題4 三角形をまとめて回す

3点 $O(0, 0)$ 、 $A(4, 0)$ 、 $B(4, 4)$ を頂点とする三角形を、原点のまわりに 30° 回します。点を列に並べた行列を使って、回した頂点を求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$)。

考え方 点を列に並べた行列に、左から $R(30^\circ)$ をかけると、列ごとに回す (7-3)。表計算なら MMULT。

式 $R(30^\circ) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を、列ごとに計算する

1 列め (O) : $(0, 0)$ のまま

2 列め (A) : $x = 0.866 \times 4 - 0.5 \times 0 = 3.464$

$$y = 0.5 \times 4 + 0.866 \times 0 = 2$$

3 列め (B) : $x = 0.866 \times 4 - 0.5 \times 4 = 1.464$

$$y = 0.5 \times 4 + 0.866 \times 4 = 5.464$$

答え O $(0, 0)$ 、A $(3.464, 2)$ 、B $(1.464, 5.464)$

じぶんでこう4

例題 4 の三角形を、原点のまわりに 60° 回した頂点を、点を列に並べた行列を使って求めましょう ($\cos 60^\circ = 0.5$, $\sin 60^\circ = 0.866$)。

例題 5 回す前にもどす

ある点を $R(60^\circ)$ で回したら、 $(0.634, 3.098)$ になりました。

(1) $R(60^\circ)^{-1}$ を、逆行列の公式 (7-5) で求め、 $R(-60^\circ)$ と $R(60^\circ)^T$ にくらべましょう ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)。

(2) もとの点を求めましょう ($\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$)。

考え方 $R(60^\circ)^{-1}$ を左からかけると、回す前にもどる。

式 (1) $ad - bc = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

a と d を入れかえ、 b と c の符号を変えて

$$R(60^\circ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}, \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので}$$

$R(-60^\circ)$ と同じ

$R(60^\circ)$ のたてとよこを入れかえた $R(60^\circ)^T$ と同じ

(2) $x = 0.5 \times 0.634 + 0.866 \times 3.098$

$$= 0.317 + 2.683 = 3.000$$

$$y = -0.866 \times 0.634 + 0.5 \times 3.098$$

$$= -0.549 + 1.549 = 1.000$$

答え (1) 3 つとも同じ行列 (2) (3, 1)

例題 1 で回した点が、ちゃんと元にもどりました。

じぶんでこう5

ある点を $R(30^\circ)$ で回したら、 $(2.464, 3.732)$ になりました。

(1) $R(30^\circ)^{-1}$ を逆行列の公式で求め、 $R(-30^\circ)$ と $R(30^\circ)^T$ にくらべましょう ($\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)。

(2) もとの点を求めましょう ($\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$)。

例題6 回転行列かどうかを見分ける

次の行列は、回転行列ですか。回転行列なら、何° 回す行列かも答えましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 回転行列なら、列が長さ1で直角(内積0)、行列式が1(⑤)。行列式が-1なら裏返しがまざる。

式 (1) 列の長さの2乗: $0.6^2 + 0.8^2 = 1$ 、 $(-0.8)^2 + 0.6^2 = 1$

$$\text{内積: } 0.6 \times (-0.8) + 0.8 \times 0.6 = 0$$

$$\text{行列式: } 0.6 \times 0.6 - (-0.8) \times 0.8 = 0.36 + 0.64 = 1$$

$$\cos \theta = 0.6, \sin \theta = 0.8, \tan \theta = \frac{0.8}{0.6} \text{ より } \theta \approx 53.1^\circ$$

(2) 列の長さは1、内積 $0.6 \times 0.8 + 0.8 \times (-0.6) = 0$

$$\text{行列式: } 0.6 \times (-0.6) - 0.8 \times 0.8 = -1$$

(3) 1列めの長さの2乗が $1^2 + 1^2 = 2$ で、長さが1でない

答え (1) 回転行列(約 53.1°) (2) ちがう(裏返しがまざる) (3) ちがう(長さを変える)

(3) は、 45° 回して長さを $\sqrt{2}$ 倍にする行列です。

じぶんでこう6

次の行列は、回転行列ですか。回転行列なら、何° 回す行列かも答えましょう ($\tan 36.9^\circ \approx 0.75$)。

$$(1) \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例題7 ロボットの腕の手の位置

2本の腕の長さが $L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ のロボットで、肩の角が $\theta_1 = 30^\circ$ 、ひじの角が $\theta_2 = 45^\circ$ のとき、手の位置を回転行列で求めましょう。

$$(\cos 30^\circ = 0.86603, \sin 30^\circ = 0.5)$$

$$(\cos 75^\circ = 0.25882, \sin 75^\circ = 0.96593)$$

考え方 ⑦のわくの式に入れる。 $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ (④)。

式 $\theta_1 + \theta_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

上の腕： $R(30^\circ)$ を $(0.30, 0)$ にかけて

$$\begin{aligned} & (0.30 \times 0.86603, 0.30 \times 0.5) \\ & = (0.25981, 0.15000) \end{aligned}$$

下の腕： $R(75^\circ)$ を $(0.25, 0)$ にかけて

$$\begin{aligned} & (0.25 \times 0.25882, 0.25 \times 0.96593) \\ & = (0.06470, 0.24148) \end{aligned}$$

$$\text{たす： } x = 0.25981 + 0.06470 = 0.32451$$

$$y = 0.15000 + 0.24148 = 0.39148$$

答え 約 $(0.325, 0.391)$ (m)

物理シリーズ第1巻の力-7では、同じ腕の手の位置を、7-7の「同次変換行列」でも計算します。

じぶんでとこう7

- (1)  例題7の腕で、 $\theta_1 = 45^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ のときの手の位置を、回転行列で求めましょう ($\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.70711$ 、 $\cos 90^\circ = 0$ 、 $\sin 90^\circ = 1$)。
- (2)  例題7の腕 ($\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$)の先に、長さ0.10mの道具をつけ、手首を $\theta_3 = 15^\circ$ 曲げました。道具の先の位置を求めましょう (⑦の「関節がふえても、同じ」)。

コラム 電卓は、回転で $\sin \cdot \cos$ を計算する

1959年、アメリカの技術者ボルダーは、飛行機の位置を計算する機械のために、かけ算をほとんど使わずに回転させる方法を発表しました。CORDIC (コーディック) とよばれる方法です。

回転行列は、 $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$ を使うと、次のように書けます。

$$R(\theta) = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{pmatrix}$$

$\tan \theta$ が 1 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、…になる角 (45° 、 26.57° 、 14.04° 、 7.13° 、…) だけを使い、左回り・右回りを選びながら、回したい角に近づけていきます。コンピュータの中の数値は2進法なので、 $\frac{1}{2}$ 倍や $\frac{1}{4}$ 倍は、けたを1つ・2つずらすだけでできます。だから、かけ算の回路がなくても速く回せます。(1, 0) をこうして回せば、行き先の座標が $\cos$ と $\sin$ です (最後に、 $\cos$ の部分をまとめてかけて直す)。電卓や小さなコンピュータの中では、いまもこの考え方が使われています。

例題 8 軸を回して見る

(1) 点 $P(2, 4)$ を、 x 軸・ y 軸を左回りに 30° 回した x' 軸・ y' 軸で表しましょう。

(2) 質量 1.0 kg の荷物が、 30° の坂にのっています。荷物にはたらく重力 $(0, -9.8) \text{ (N)}$ を、坂にそって上向きの x' 軸と、坂に垂直で上向きの y' 軸の成分で表しましょう。

$$(\cos 30^\circ = 0.866, \sin 30^\circ = 0.5)$$

考え方 軸を θ 回して見ると $\vec{x}' = R(\theta)^T \vec{x}$ (⑥)。坂の軸は、 x 軸・ y 軸を坂の角だけ回したものの。

式 $R(30^\circ)^T$ の 1 行めは $(0.866, 0.5)$ 、2 行めは $(-0.5, 0.866)$

$$(1) \quad x' = 0.866 \times 2 + 0.5 \times 4 = 3.732$$

$$y' = -0.5 \times 2 + 0.866 \times 4 = 2.464$$

$$(2) \quad F_{x'} = 0.866 \times 0 + 0.5 \times (-9.8) = -4.9$$

$$F_{y'} = -0.5 \times 0 + 0.866 \times (-9.8) = -8.49$$

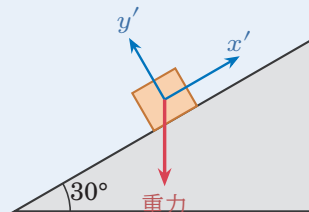
答え (1) $(3.732, 2.464)$ (2) $(-4.9, -8.49) \text{ (N)}$

(2) は「坂にそって下向きに 4.9 N 、坂をお

す向きに 8.49 N 」という意味で、4-6 の

$mg \sin \theta = 4.9$ 、 $mg \cos \theta = 8.49$ と同じで

す。回転行列なら「軸を坂の角だけ回して見る」だけで、どんな向きの力も同じ計算で分けられます。



じぶんでとこう 8

- (1) 点 $(4, 2)$ を、 x 軸・ y 軸を左回りに 60° 回した x' 軸・ y' 軸で表しましょう ($\cos 60^\circ = 0.5$ 、 $\sin 60^\circ = 0.866$)。
- (2) 質量 2.0 kg の荷物が、 20° の坂にのっています。重力 $(0, -19.6)$ (N) を、坂にそって上向きの x' 軸と、坂に垂直で上向きの y' 軸の成分で表しましょう ($\cos 20^\circ = 0.940$ 、 $\sin 20^\circ = 0.342$)。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

— $\sin \theta$ の場所

- ✗ 左回りの回転行列の1行めは $(\cos \theta, \sin \theta)$
- 左回りの回転行列の1行めは $(\cos \theta, -\sin \theta)$
- ×は $R(-\theta)$ で、右回りです。 $\theta = 90^\circ$ を入れて、 $(1, 0)$ が $(0, 1)$ へ行くか確かめましょう。

まちがえやすいところ

かける順番と、回す順番

- ✗ $R(30^\circ)R(45^\circ)$ は「 30° 回してから 45° 回す」
- $R(30^\circ)R(45^\circ)$ は「 45° 回してから 30° 回す」(右の行列が先)
- 平面の回転どうしは、順番を入れかえても答えは同じですが、読み方は大事です。7-7 の3次元の回転では、順番で答えが変わります。

⚠ まちがえやすいところ

度のまま $\cos$ を計算する

✗ Python で $\text{np.cos}(30)$ とすると、 $\cos 30^\circ = 0.154$

○ $\text{np.cos}(\text{np.radians}(30))$ とすると、 $\cos 30^\circ = 0.866$

$\text{np.cos}(30)$ は「30 ラジアン」の $\cos$ です。表計算の COS も同じなので、RADIANS で直します (4-6)。

⚠ まちがえやすいところ

軸を回して見るのに $R(\theta)$ をかける

✗ 軸を 30° 回して見た座標は $R(30^\circ)\overrightarrow{OP}$

○ 軸を 30° 回して見た座標は $R(30^\circ)^T\overrightarrow{OP}$

軸が左に回ると、点は右に回ったように見えます (図 7)。図 7 の (a) と (b) を思い出しましょう。

⚠ まちがえやすいところ

下の腕を $R(\theta_2)$ だけで回す

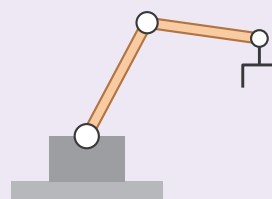
✗ 下の腕の矢印は、 $(L_2, 0)$ に $R(\theta_2)$ だけをかけたもの

○ 下の腕の矢印は、 $(L_2, 0)$ に $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ をかけたもの
 θ_2 は上の腕からはかった角で、下の腕も上の腕といっしょに θ_1 回っています。

物理・工学ではこう使う

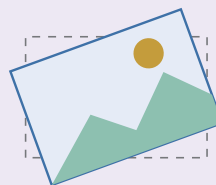
ロボットの腕

工場で部品を組み立てるロボットは、関節のモーターについたセンサーで、それぞれの関節の角をはかっています。制御の計算機は、⑦のように回転行列をかけて手先の位置を求め、目標の位置とのずれを直す計算を、1秒に何百～何千回もくり返します。関節が6つあるロボットでは、3次元の回転行列（7-7）を使います。



スマホの写真を回す

写真は、小さな点（画素）が並んだ数の表です（1-13）。写真を回すアプリは、回した後の画面の1つ1つの画素について、 $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$ をかけて「回す前の写真のどこの色か」を求め、その色をぬります。数百万個の画素に、同じ4つの数をかけていきます。



橋の部材の力を、ななめの向きで見る

橋や機械の部材の中の力（応力）は、切り口の向きで大きさが変わります。いちばんこわれやすい向きをさがすとき、⑥の「軸を回して見る」を使います（物理シリーズ第1巻の力-9、7-9）。

🔍 コラム ゲームのキャラクターが回るとき

7-0 のはてな? で、「ゲームの画面で、キャラクターがくるっと回るとき、コンピュータは何を計算しているのかな?」と問いかけました。答えは、この章の回転行列です。キャラクターの絵は、たくさんの点（頂点）をつないでできています。画面は 1 秒に 60 回かきかえられるので、1 秒で 1 回転させるなら、1 回のかきかえごとに $360^\circ \div 60 = 6^\circ$ ずつ回します。すべての頂点に $R(6^\circ)$ をかけ、それを 60 回くり返すと $R(6^\circ)^{60} = R(360^\circ) = I$ で、ちょうど元の向きにもどります (④)。

ただし、コンピュータの計算には小さな丸めのずれがあり (2-19)、同じ行列を何千回もかけ続けると、ずれがたまって絵が少しずつゆがむことがあります。そこで、回した角だけを数えておき、毎回 $R(\text{角})$ を作り直してかける、というくふうがよく使われます。



章末問題

7-6 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次の点を、原点のまわりに左回りに、[] の角だけ回した点を求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$, $\sin 30^\circ = 0.5$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$)。

- (1) $(2, 0)$ $[90^\circ]$
- (2) $(1, 3)$ $[30^\circ]$
- (3) $(2, 2)$ $[45^\circ]$

2 $R(15^\circ)R(45^\circ)$ を計算し、 $R(60^\circ)$ とくらべましょう。

($\cos 15^\circ = 0.966$, $\sin 15^\circ = 0.259$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$)
 ($\cos 60^\circ = 0.5$, $\sin 60^\circ = 0.866$)

3 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を使って答えましょう。

(1) $R(60^\circ)^2$ を成分で計算し、何° 回す行列か答えましょう。

(2) $R(60^\circ)$ を何回かけると、はじめて I になりますか。

4 回転行列の逆行列を転置で求めて、回す前の点を求めましょう。

($\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$)

(1) ある点を $R(90^\circ)$ で回したら、 $(-3, 5)$ になりました。

(2) ある点を $R(45^\circ)$ で回したら、 $(0, 2.828)$ になりました。

5 3点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ 、 $B(2, 1)$ を頂点とする三角形を、原点のまわりに 90° 回した頂点を、点を列に並べた行列を使って求めましょう。

6 $L_1 = 0.40\text{ m}$ 、 $L_2 = 0.30\text{ m}$ の2本の腕で、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 60^\circ$ のときの手の位置を、回転行列で求めましょう ($\cos 30^\circ = 0.86603$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ 、 $\cos 90^\circ = 0$ 、 $\sin 90^\circ = 1$)。

7 質量 1.0 kg の荷物が、 45° の坂にのっています。重力 $(0, -9.8)$ (N) を、坂にそって上向きの x' 軸と、坂に垂直で上向きの y' 軸の成分で表しましょう ($\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$)。

8 次の行列は、回転行列ですか。回転行列なら、何° 回す行列かも答えましょう ($\tan 73.7^\circ \approx 3.43$)。

$$\begin{pmatrix} 0.28 & -0.96 \\ 0.96 & 0.28 \end{pmatrix}$$

チャレンジ ★★★★★

9 **？はてな？** の「 30° 回してから 45° 回す」を、行列のかけ算で書きましょう。また、その積を計算し、 $R(75^\circ)$ と同じになるか確かめましょう ($\cos 30^\circ = 0.866$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ 、 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$)。

10 $R(\theta)R(-\theta)$ を、行と列の内積で成分ごとに計算し、 I になることを確かめましょう。

11  **例題 7** の腕 ($L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$) の先に、長さ 0.10 m の道具をつけ、手首の角を $\theta_3 = -75^\circ$ にしました。道具の先の位置を求めましょう。道具はどちらを向いていますか。

 ふりかえり できるようになったかな？

☐ 回転行列 $R(\theta)$ を作り、点や図形を回せる。 → 241 ページ

☐ $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ と $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$ を使える。 → 248 ページ

☐ 軸を回して点や力を見たり、腕の手の位置を求めたりできる。 → 253 ページ



ソラ

平面の回転は、角をたすだけでつなげたね。次の 7-7 では 3 次元。本を回してみると、順番で向きが変わってしまうんだ。

第2部 回転と座標の変換

★★★★★

7-7

3次元の回転と
座標の変換

📖 道しるべ この章の前に 4-13 4-14 6-9 7-2 7-3 7-6 この章の先に 7-11 8-5

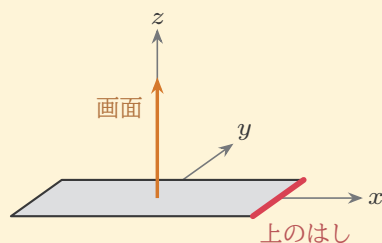
🚩 この章でできるようになること

- ★★★★★ $x \cdot y \cdot z$ 軸のまわりの回転を 3×3 の行列 $R_x \cdot R_y \cdot R_z$ で表し、点を回せる。
- ★★★★★ ロール・ピッチ・ヨーの3つの回転から機体の向きを求め、順番で向きが変わることを説明できる。
- ★★★★★ 同次変換行列で「回して進む」を1つの行列にまとめ、ロボットの手やカメラの見た物の位置を求められる。

? はてな?

机の上に、画面を上にしてスマホを置きます。次の2つの回し方をくらべます。

- ① 奥のはしを持ち上げて手前に起こす (90°) → 上から見て左回りに 90° 回す
 - ② 上から見て左回りに 90° 回す → 奥のはしを持ち上げて手前に起こす (90°)
- 回す動きは同じ2つで、順番だけがちがいます。最後のスマホは、同じ向きになるでしょうか。



7-6 では、平面の中の回転を学びました。平面の回転は、順番を変えても同じで、角をたせば何回でもつながられました。

この章では、空間の中の回転を調べます。ドローン・飛行機・人工衛星の向き(姿勢)、6つの関節をもつロボットの腕、ゲームやVRの3次元の画面は、どれも3次元の回転の計算で動いています。3次元になると、回転の軸が3本になり、順番が大事になります。最後に、7-2で「行列ではできない」とわかった「ずらす」動きも、行列にまとめる方法を学びます。3次元の回転は、頭の中だけで思いうかべるのがむずかしいので、1回でわからなくても大丈夫です。本やスマホを手にとって、実際に回しながら読みましょう。

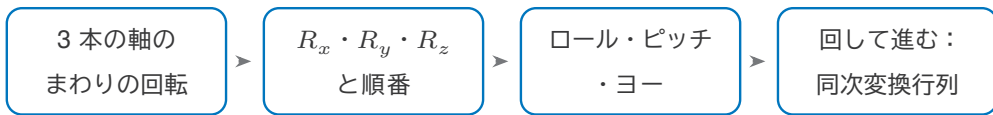


図1 この章の道すじ。

🔄 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 4-13** 空間の点は (x, y, z) の3つの数で表す。3本の軸は右手系に並べる（親指 x 、人さし指 y 、中指 z ）。
- 4-14** 右ねじ： x 軸を y 軸のほうへ回すと、右ねじは z 軸の+の向きへ進む。
- 7-2** 行列の列は、物差しの矢印の行き先。行列をかけても原点は動かないので、「ずらす」は行列ではできない。
- 7-3** $AB\vec{x}$ は、右の B が先にはたらく。
- 7-6** 回転行列 $R(\theta)$ は、1行めが $(\cos \theta, -\sin \theta)$ 、2行めが $(\sin \theta, \cos \theta)$ で、左回りに θ 回す。 $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$ 。軸を θ 回して見ると $\vec{x}' = R(\theta)^T \vec{x}$ 。
- 7-6** 2本の腕 ($L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $30^\circ \cdot 45^\circ$) の手は $(0.325, 0.391)$ 。
- 6-9** 3次元の回転には、複素数を広げた「クォータニオン」も使われる。

Ⅷ やってみよう スマホや本を回して、順番で向きが変わるか確かめよう

- ① 机の上に、 x 軸（右）・ y 軸（奥）・ z 軸（上）をかいた紙を置きます。
スマホ（本でもよい）を、画面を上、上のはし（カメラのある方）を右にして、原点に置きます。
- ② **？はてな？** の①の順に回し、上のはしと画面がどちらを向いたかを書きます。回す軸は、いつも紙にかいた軸（動かない軸）です。
- ③ もとにもどして、②の順に回し、同じように書きます。
- ④ スマホに、かたむきの角を表示するアプリ（水準器のアプリなど）があれば、回しながら数がどう変わるかも見てみましょう。

	上のはしの向き	画面の向き
①の順に回した後		
②の順に回した後		

表 1 結果を書きこむ表。

📏 数学の道具

👁️ **目でわかる** 3本の軸と、回す順番

★★★

① 3本の軸のまわりの回転

平面の回転は、原点のまわりに回すだけでした。空間では、どの軸のまわりに回すかを決めなければなりません。まず、 x 軸・ y 軸・ z 軸の 3 本のまわりの回転を考えます。

回る向きは、右ねじで決める

平面では「左回りが+」でした。空間では、見る向きによって左回りか右回りかが変わってしまいます。そこで、4-14の右ねじを使って決めます。

- 右ねじが軸の+の向きへ進むように回す向きを、+とする。
- 同じことを、軸の矢印の先から原点のほうを見て言うと、「左回りが+」です。

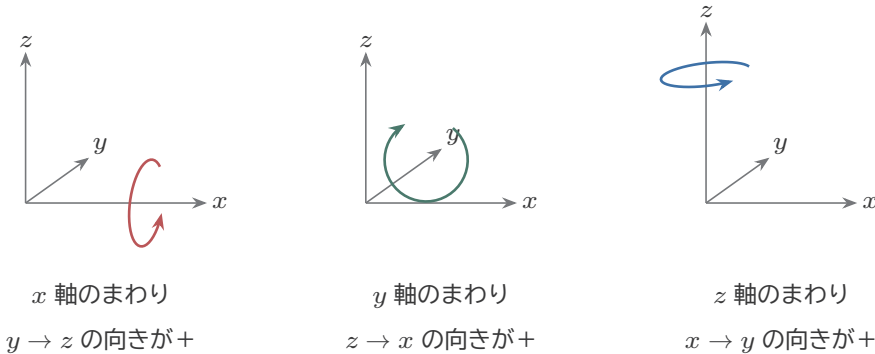


図2 3本の軸のまわりの回転。どれも、右ねじが軸の+の向きへ進む向きが+。

$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ の順に、ぐるっと回っている。

図2の下の方を見てください。 z 軸のまわりは「 x を y のほうへ」、 x 軸のまわりは「 y を z のほうへ」、 y 軸のまわりは「 z を x のほうへ」回すのが+です。 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots$ という、ぐるっと回る順番になっています。 y 軸のまわりだけ「 x を z のほうへ」ではないことに注意しましょう。あとで、行列の $\sin$ の符号に関係してきます。

この章の図のかき方

この章の図は、 x 軸を右、 y 軸を奥（右上へななめ）、 z 軸を上にかきます。4-13の図とは見る向きがちがいますが、同じ右手系です（ x を y のほうへ回すと、右ねじは上へ進む）。

2 飛行機・ドローンの向き：ロール・ピッチ・ヨー

飛行機やドローンには、機体についての 3 本の軸を考えます。 x 軸は機首の向き（前）、 y 軸は左のつばさの向き（左）、 z 軸は上です。この 3 本も右手系になっています（前を左のほうへ回すと、右ねじは上へ進む）。

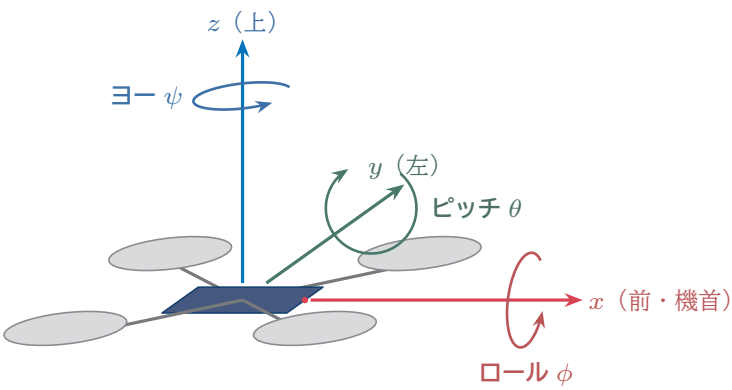


図 3 ドローンの 3 本の軸と、3 つの回転。赤い点が機首。

名前（文字）	まわりの軸	どんな動き（+の向き）
ロール ϕ	x （前）	左のつばさが上がり、右へかたむく
ピッチ θ	y （左）	機首が上がったり下がったりする （+は機首が下がる向き）
ヨー ψ	z （上）	上から見て機首の向きが変わる（+は 左を向く向き）

表 2 ロール・ピッチ・ヨー。 $\phi \cdot \theta \cdot \psi$ はファイ・シータ・プサイと読む。

ピッチの+が「機首が下がる向き」なのは、 y 軸のまわりの+が「 z を x のほうへ」、つまり上を前のほうへたおす向きだからです。だから、機首を上げるときは、ピッチは負の角になります。

VR ゴーグルの6つの数

4-13のコラムでは、VR ゴーグルが「頭の場所の3つの数と、向きの3つの角」の、合わせて6つの数をはかっていると書きました。この「向きの3つの角」が、ロール（首をかしげる）・ピッチ（うなずく）・ヨー（首を横にふる）です。

せいかくに言うと

飛行機の本では、機体の y 軸を右のつばきの向き、 z 軸を下向きにとることが多く、そのときは「機首を上げる」「右を向く」が+になります。軸の向きの決め方がちがうだけで、この章の行列の形や考え方は同じです。本を読むときは、まず軸の向きを図で確かめましょう。

3 順番を変えると、向きが変わる

② はてな? のスマホを、図で確かめます。スマホの上のはし（赤）を x の向き、画面（オレンジの矢印）を z の向きにして置きます。「奥のはしを持ち上げて手前に起こす」は、右を向いた x 軸のまわりの $+90^\circ$ ($y \rightarrow z$) です。「上から見て左回り」は、 z 軸のまわりの $+90^\circ$ ($x \rightarrow y$) です。

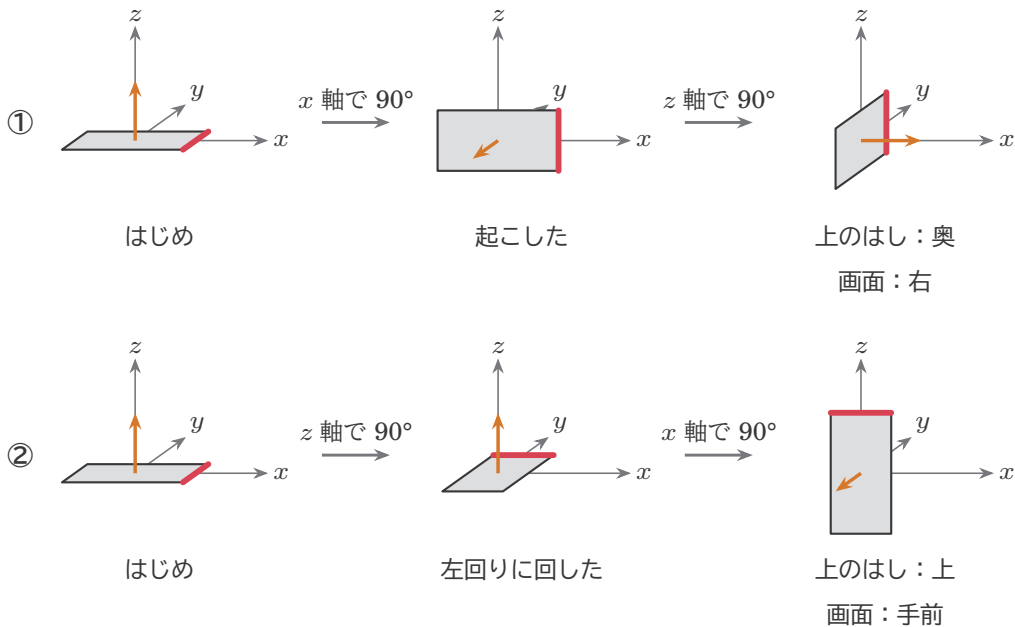


図4 同じ2つの回転でも、順番を変えると最後の向きがちがう。赤い線が上のはし、オレンジの矢印が画面の向き。

❓はてな? の答えは、「**同じ向きにはならない**」です。①では上のはしが奥を、画面が右を向いて、横向きに立ちます。②では上のはしが真上を、画面が手前を向いて立ちます。

7-6 では、平面の回転は順番を変えても同じでした。平面では、回す軸がいつも同じ（紙に垂直な軸）だからです。空間では、回す軸がちがう回転をつなぐと、**順番で結果が変わります**。7-3 の「回してのぼす」と「のぼして回す」と同じで、行列のかけ算の順番を変えると答えが変わるのです。この「順番」を、行列の計算で確かめられるようにするのが、次の段です。



手でわかる 3×3 の回転行列



④ z 軸のまわりの回転 $R_z(\psi)$

7-2 と 7-6 では、行列の列は「物差しの矢印の行き先」でした。空間では、物差しの矢印が $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ 、 $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ の 3 本になり、行列は 3×3 になります。1 列めが $\vec{e}_x$ の行き先、2 列めが $\vec{e}_y$ の行き先、3 列めが $\vec{e}_z$ の行き先です。

z 軸のまわりに角 ψ 回すとき、3 本の矢印はどこへ行くでしょう。

- ① $\vec{e}_z$ は回す軸そのものなので、動きません。行き先は $(0, 0, 1)$ 。
- ② $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ は、 x - y 平面(床)の中で、7-6 と同じように回ります。上から見ると、 x を右、 y を上にした、いつもの平面です。だから $\vec{e}_x \rightarrow (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ 、 $\vec{e}_y \rightarrow (-\sin \psi, \cos \psi, 0)$ 。高さ (z 成分) は 0 のままです。

3 本の行き先を、列に並べます。

z 軸のまわりに ψ 回す

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

左上の 2×2 は、7-6 の $R(\psi)$ そのものです。回らない z の行と列は「0 と 1」で、 z 座標がそのまま残ることを表しています。

5 x 軸のまわりの回転 $R_x(\phi)$

x 軸のまわりに ϕ 回すときは、 $\vec{e}_x$ が動かず、 y - z 平面の中で回ります。 x 軸の先から見ると、 y が右、 z が上に見え、 $y \rightarrow z$ が左回りです。だから、7-6 の「 x を右・ y を上」の平面と同じに考えて、 $\vec{e}_y \rightarrow (0, \cos \phi, \sin \phi)$ 、 $\vec{e}_z \rightarrow (0, -\sin \phi, \cos \phi)$ です。

x 軸のまわりに ϕ 回す

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

今度は、回らない x の行と列が「1 と 0」で、右下の 2×2 が $R(\phi)$ です。

6 y 軸のまわりの回転 $R_y(\theta)$: 符号に注意

y 軸のまわりの回転は、まちがえやすいので、ていねいに見ます。①で調べたように、 y 軸のまわりの+は「 z を x のほうへ」です。 y 軸の先から原点のほうを見ると、 z が右、 x が上に見えます。

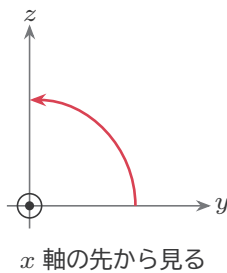
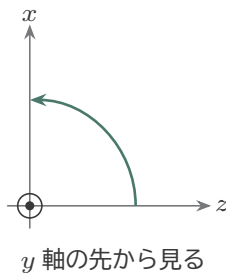
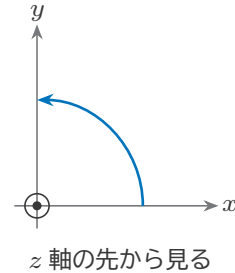


図5 軸の先から見ると、その軸のまわりの+の回転は、どれも左回り。まん中の $\odot$ は、見ている軸がこちらを向いていること。 y 軸の先から見ると、横が z 、たてが x になる。

まん中の図で、 z を右・ x を上にした平面で、左回りに θ 回します。7-6 と同じように考えて、

- 右を向いていた $\vec{e}_z$ は、 (z, x) で言うと $(\cos \theta, \sin \theta)$ へ行く。ふつうの順 (x, y, z) に直すと、 $\vec{e}_z \rightarrow (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。
- 上を向いていた $\vec{e}_x$ は、 (z, x) で言うと $(-\sin \theta, \cos \theta)$ へ行く。 (x, y, z) に直すと、 $\vec{e}_x \rightarrow (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ 。
- $\vec{e}_y$ は軸なので動かない。

y 軸のまわりに θ 回す

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

R_x や R_z とくらべると、 $-\sin$ が左下に、 $+\sin$ が右上にあり、逆になったように見えます。これは、 R_y だけ、行列の中での並び (x, z) と、左回りの並び (z, x) が入れかわっているからです。まちがいではありません。

数で確かめる：90° 回すと

$\theta = 90^\circ$ なら $R_y(90^\circ)$ は次の行列で、 $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ は $(0, 0, -1)$ 、つまり真下へ行きます。

$$R_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

「 z を x のほうへ」たおす向きに 90° 回すと、上 (z) は前 (x) へ、前 (x) は下 ($-z$) へ行きます。ドローンなら、ピッチ+ 90° で機首が真下を向くことになり、②の表の「+は機首が下がる向き」と合っています。

せいかくに言うと

3本とも、行列式は1です。たとえば $R_z(\psi)$ の行列式は、右下の1をかけて $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$ です。どの列も長さ1で、たがいに直角（内積0）なので、7-6と同じく直交行列で、 $R^T R = I$ 、つまり $R^{-1} = R^T$ です。空間でも、回転は長さも体積も変えず、逆に回すには転置すればよいのです。

7 順番の計算：右から先にはたらく

②はてな? の①は「 x 軸で 90° 回してから、 z 軸で 90° 回す」でした。7-3で学んだように、先にはたらく行列を右に書くので、①は $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)$ 、②は $R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)$ です。

上のはし $\vec{e}_x$ の行き先を、右から1ずつ

①：まず $R_x(90^\circ)$ を $(1, 0, 0)$ にかけて、 x 軸のまわりなので $(1, 0, 0)$ のまま。次に $R_z(90^\circ)$ をかけると、 x が y へ行くので $(0, 1, 0)$ 。上のはしは y （奥）を向きます。

②：まず $R_z(90^\circ)$ をかけると $(0, 1, 0)$ 。次に $R_x(90^\circ)$ をかけると、 y が z へ行くので $(0, 0, 1)$ 。上のはしは z （上）を向きます。

$$R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

図4と同じ結果です。

行列のかけ算で確かめる

2つの積を、行と列の内積（7-3）で計算すると、次のようになります。 $R_x(90^\circ)$ と $R_z(90^\circ)$ の成分は、 $0 \cdot 1 \cdot -1$ だけです。

$$R_z(90^\circ)R_x(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_x(90^\circ)R_z(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2つの答えはちがう行列です。それぞれの1列め ($\vec{e}_x$ の行き先) は、 $(0, 1, 0)$ と $(0, 0, 1)$ で、1つずつ計算した結果と同じです。3列め ($\vec{e}_z$ 、画面の行き先) は $(1, 0, 0)$ (右) と $(0, -1, 0)$ (手前) で、これも図と合っています。

表計算と Python

3×3 の積も、表計算の MMULT でできます (型のとおり、左の行列を A2:C4、右の行列を D2:F4 に入れ、答えは下の A6:C8 に出す)。

A6		=MMULT(A2:C4,D2:F4)				
	A	B	C	D	E	F
1	$R_z(90^\circ)$			$R_x(90^\circ)$		
2	0	-1	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	-1
4	0	0	1	0	1	0
5	積 (答え)					
6	0	0	1			
7	1	0	0			
8	0	1	0			

表3 3×3 の積。答えは A6 から (7-1 と同じように確定する)。左右の行列を入れかえると、②の答えになる。

Python

```
import numpy as np
def Rx(deg):
    # x 軸のまわりに deg 度回す行列
    t = np.radians(deg); c, s = np.cos(t), np.sin(t)
    return np.array([[1, 0, 0], [0, c, -s], [0, s, c]])
def Rz(deg):
    # z 軸のまわりに deg 度回す行列
    t = np.radians(deg); c, s = np.cos(t), np.sin(t)
    return np.array([[c, -s, 0], [s, c, 0], [0, 0, 1]])
ex = np.array([1, 0, 0])
print(np.round(Rz(90) @ Rx(90) @ ex, 3) + 0) # +0 は -0. を 0. に
print(np.round(Rx(90) @ Rz(90) @ ex, 3) + 0)
```

実行結果

```
[0. 1. 0.]
[0. 0. 1.]
```

def は、何回も使う計算に名前をつける書き方です(2-19)。Rz(90) @ Rx(90) @ ex は右から計算され、 R_x が先にはたります。

ここまでで十分



ここまでわかれば、ゴールです。この先は、飛行機の向きの式と、「回して進む」行列を調べます。



式でわかる オイラー角と同次変換行列

★★★★★

8 機体の向きを3つの角で表す：オイラー角

ドローンの向きは、ロール ϕ ・ピッチ θ ・ヨー ψ の3つの角で表します。この3つから回転行列を作るきまりが、次の式です。

$$R = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi)$$

機体の座標で表した矢印を、地面の座標に直す行列

このように、3つの軸のまわりの回転の角で向きを表したものを、**オイラー角**といいます。6-10のオイラーの公式と同じオイラーが、18世紀に、かたい物の向

きを3つの角で表すことを考えました。オイラーが使ったのは、 $z \cdot x \cdot z$ の順に回す角です。この本のように3本のちがう軸で回す角は、タイト・ブライアン角ともよびますが、工学ではどちらもオイラー角とよぶことが多いのです。

行列の意味：機体の矢印を、地面の矢印に直す

機体上で「前」は、いつも $(1, 0, 0)$ です。でも、地面から見た「機首の向き」は、機体の姿勢によって変わります。 R は、機体の座標で書いた矢印 $\vec{v}_{\text{機体}}$ を、地面の座標の矢印に直します(7-6 ⑥)の「もとの座標にもどす」 $\vec{x} = R(\theta)\vec{x}'$ と同じ形)。

$$\vec{v}_{\text{地面}} = R \vec{v}_{\text{機体}}$$

いちばん右の $R_x(\phi)$ が先にはたらくので、地面に置いたドローンを「まずロール、次にピッチ、最後にヨー」と、地面の軸のまわりに回したのと同じ向きになります。

機首の向きを求める

機首の向きは、 R に $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ をかけたもの、つまり R の1列めです。右から1つずつかけます。

$$R_x(\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ロールは x 軸のまわりなので、機首は動かない

$$R_y(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

R_y の1列め (⑥)

$$R_z(\psi) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

R_z をかけた。 $x \cdot y$ 成分だけが ψ 回る

機首の向き $(\cos \psi \cos \theta, \sin \psi \cos \theta, -\sin \theta)$

機首の向きは、ヨーとピッチだけで決まり、ロールには関係しません。ロールは、機首を軸にした回転だからです。たとえば、ヨー 30° ・ピッチ 0° なら $(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ, 0) = (0.866, 0.5, 0)$ で、水平のまま左に 30° 向いています。ピッチ -30° (機首を 30° 上げる) なら、 z 成分は $-\sin(-30^\circ) = 0.5$ で、上を向きます。

せいかくに言うと

$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ は、2通りに読めます。

(a) 地面の軸 (動かない軸) のまわりに、右から順に「ロール→ピッチ→ヨー」と回す。

(b) 機体の軸 (いっしょに動く軸) のまわりに、左から順に「ヨー→ピッチ→ロール」と回す。つまり、まず機首の向きを左右に決め (ヨー)、次に機体の左右の軸で機首を上下させ (ピッチ)、最後に機首の軸で機体をかたむける (ロール)。

2つの読み方は、いつも同じ向きになります (Python で、いろいろな角で確かめられる)。飛行機の本は (b) の読み方で説明することが多く、この本の①・やってみようは (a) の読み方です。どちらの読み方かを取りちがえると、順番が逆になるので注意しましょう。

9つの成分と、逆の回転

R の9つの成分を、先に $R_y(\theta)R_x(\phi)$ を計算し、それに $R_z(\psi)$ をかけて求めると、表4になります ($\cos$ を c 、 $\sin$ を s と短く書いた)。 R_z をかけると、1行めと2行めだけが、7-6の回転のようにまざります。

	1列め	2列め	3列め
1行	$c\psi c\theta$	$c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi$	$c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi$
2行	$s\psi c\theta$	$s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi$	$s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi$
3行	$-s\theta$	$c\theta s\phi$	$c\theta c\phi$

表4 $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ の成分。たとえば $c\psi$ は $\cos \psi$ 。1列めが機首の向き。

3つの回転行列はどれも直交行列で、行列式は1なので、 R も直交行列で、行列式は $1 \times 1 \times 1 = 1$ です (7-4 の $\det(AB) = \det A \det B$)。逆の回転は、7-5の「くつ下とくつ」のように順番が逆になり、角は反対になります。

$$R^{-1} = R^T = R_x(-\phi) R_y(-\theta) R_z(-\psi)$$

9 ピッチが $\pm 90^\circ$ になると：ジンバルロック

ドローンが機首を真上に向けたとき（この本の軸ではピッチ $\theta = -90^\circ$ ）を考えます。機首が真下を向く $\theta = +90^\circ$ でも、ロールの軸とヨーの軸が重なるので、同じことが起きます（そのときは $\psi - \phi$ だけで決まる）。表4に $\cos(-90^\circ) = 0$ 、 $\sin(-90^\circ) = -1$ を入れて、1 つずつまとめます。

$$\text{1行2列} = -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \quad s\theta = -1 \text{ を入れた}$$

$$= -\sin(\psi + \phi) \quad \text{加法定理 (4-9)}$$

$$\text{2行2列} = -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \quad s\theta = -1 \text{ を入れた}$$

$$= \cos(\psi + \phi) \quad \text{加法定理}$$

$$\text{1行3列} = -\cos(\psi + \phi) \quad \text{同じようにまとめた}$$

$$\text{2行3列} = -\sin(\psi + \phi) \quad \text{同じようにまとめた}$$

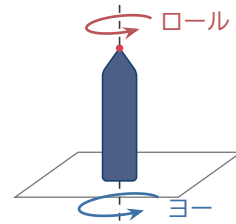
1列めは $(0, 0, 1)$ （機首は真上）、3行めは $(1, 0, 0)$ です。まとめると、次の行列です。

$$\text{ピッチ } -90^\circ \text{ のとき } R = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\psi + \phi) & -\cos(\psi + \phi) \\ 0 & \cos(\psi + \phi) & -\sin(\psi + \phi) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ヨー ψ とロール ϕ が、和 $\psi + \phi$ の形でしか出てきません。たとえば「ヨー 30° ・ロール 0° 」と「ヨー 0° ・ロール 30° 」は、どちらも $\psi + \phi = 30^\circ$ なので、まったく同じ向きです。3つの角があるのに、自由に決められる向きが2つ分になってしまいます。

図で見ると、わけがわかります。機首が真上を向くと、機首の軸（ロールの軸）が、上下の軸（ヨーの軸）とぴったり重なります。だから、ロールで回しても、ヨーで回しても、同じ軸のまわりの回転になってしまうのです。このことを**ジンバルロック**といいます。

ジンバルロックの近くでは、少し向きが変わっただけで、3つの角が大きく変わってしまい、制御の計算がうまくいきません。そこで、ドローンや宇宙船、ゲームの3次元の画面では、向きを回転行列そのものや、6-9で名前の出たクォータニオンで持ち、角は表示に使うだけにすることが多いのです。



機首が真上：ロールの軸とヨーの軸が重なる。

⑩「回して進む」を1つの行列に：同次座標

7-2で、行列をかけても原点は動かないので、「ずらす（平行移動）」は行列のかけ算ではできないとわかりました。7-6のもっと知りたいの「原点ではない点のまわりに回す」でも、「ずらす」がまぎるので、行列1回では書けませんでした。ここで、それを解決する方法を学びます。

数を1つふやす

平面の点 (x, y) に、3つめの数として1をつけた $(x, y, 1)$ を考えます。そして、次の 3×3 の行列をかけてみます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ずらす量 a 、 b を右の列に入れた
行列

$$= \begin{pmatrix} 1 \times x + 0 \times y + a \times 1 \\ 0 \times x + 1 \times y + b \times 1 \\ 0 \times x + 0 \times y + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

行と列の内積

$$= \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

x に a 、 y に b がたされた

3つめの1が、右の列の a 、 b を「たし算」として取り出してくれました。**行列のかけ算で、ずらすことができたのです。**3つめの数は、かけた後も1のままです。

このように、数を1つふやして1をつけた座標を**同次座標**（どうじざひょう）といいます。同次座標の考えは、1827年ごろのメビウス（メビウスの帯の人）の本にさかのぼるといわれています。

位置には1、向きには0

「向き」を表す矢印（ドローンの機首の向き、速度など）は、ずらしても変わってほしくありません。そこで、向きの矢印には3つめの数として0をつけます。たとえば、ずらす量が $a = 3$ 、 $b = 2$ のとき、次のようになります。

- 点 $(1, 1)$ は $(1, 1, 1)$ と書き、行列をかけると $(4, 3, 1)$ 。点 $(4, 3)$ へずれた。
- 向き $(1, 1)$ は $(1, 1, 0)$ と書き、行列をかけると $(1, 1, 0)$ 。向きは変わらない。

3つめが0だと、右の列の a 、 b に0がかかって、たし算されないからです。

回して、進む： $A(\theta, L)$

7-6の2本の腕を思い出します。腕1本の動きは、「関節で θ 回して、回った向きに長さ L 進む」です。これを同次座標で書きます。「回す」は、左上の 2×2 に7-6の $R(\theta)$ を入れた行列、「進む」は、 x の向きに L ずらす行列です。進む向きは、回った後の腕の向きなので、7-6⑥の「腕といっしょに回る座標」で x の向きに L ずらし、それを回します。右から先にはたらくので、ずらす行列を右に置きます。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{回す行列} \times x \text{ に } L \text{ ずらす} \\ \text{行列} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & L \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & L \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{右の列は、1行めと} \\ (L, 0, 1) \text{ の内積 } L \cos \theta \\ \text{など} \end{array}$$

$$A(\theta, L) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & L \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & L \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

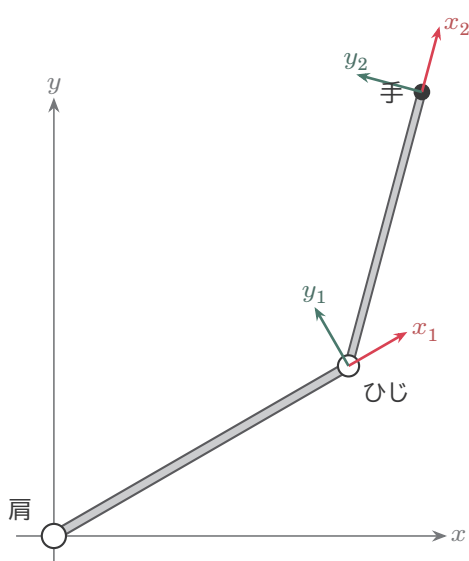
左上の 2×2 が回転、右の列が「回った向きに L 進む」移動

これを**同次変換行列**（どうじへんかんぎょうれつ）といいます。物理シリーズ第1巻（力学）の力-7と同じ文字・同じ形です。右の列 $(L \cos \theta, L \sin \theta)$ は、4-6・4-8の「長さ L 、角 θ の腕の先の座標」そのものです。

11 2本の腕を、同次変換行列のかけ算で

肩からひじまでが $A(\theta_1, L_1)$ 、ひじから手までが $A(\theta_2, L_2)$ です。肩から手までは、2つをかけた1つの行列 T になります。

$$T = A(\theta_1, L_1) A(\theta_2, L_2)$$



ひじには、上の腕にそった軸 $x_1 \cdot y_1$ 、
 手には、下の腕にそった軸 $x_2 \cdot y_2$ を考
 えます。 $A(\theta_2, L_2)$ は、手の軸で見た
 点を、ひじの軸で見た点に直します。
 $A(\theta_1, L_1)$ は、ひじの軸で見た点を、
 肩（地面）の軸で見た点に直します。
 手は、手の軸で見ると原点 $(0, 0, 1)$ で
 す。 T に $(0, 0, 1)$ をかけると T の右
 の列だけが残るので、 **T の右の列の上の
 2 つが、手の位置です。**

数を入れる

$L_1 = 0.30$ 、 $L_2 = 0.25$ (m)、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ です。成分は小数第3位
 まで（物理 力-7 の例題と同じ）にします。

$$A(30^\circ, 0.30) = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 & 0.260 \\ 0.5 & 0.866 & 0.150 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(45^\circ, 0.25) = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 & 0.177 \\ 0.707 & 0.707 & 0.177 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

積の右の列だけを、「1 つめの行列の行と、2 つめの行列の右の列の内積」(7-3)
 で計算します。

$$x = 0.866 \times 0.177 + (-0.5) \times 0.177 + 0.260 \times 1 \quad \text{1 行めと右の列の内積}$$

$$= 0.1533 - 0.0885 + 0.260 = 0.3248 \approx 0.325$$

$$y = 0.5 \times 0.177 + 0.866 \times 0.177 + 0.150 \times 1 \quad \text{2 行めと右の列の内積}$$

$$= 0.0885 + 0.1533 + 0.150 = 0.3918 \approx 0.392$$

7-6で回転行列を5けたで計算した(0.325, 0.391)と、ほぼ同じです(小数第3位の小さなちがいは、成分を途中で3けたに丸めたため)。積の左上の 2×2 を計算すると、1行1列は $0.866 \times 0.707 + (-0.5) \times 0.707 = 0.259 = \cos 75^\circ$ などで、 $R(75^\circ)$ になります。 T は、手の位置(右の列)と手の向き(左上の 2×2)を、いっしょに表しているのです。

関節がいくつあっても、かけるだけ

関節が3つなら $T = A_1 A_2 A_3$ 、6つなら $T = A_1 A_2 \cdots A_6$ と、腕の根もとから順に行列をかけるだけです。7-6の回転行列の方法では、「回転をかける」と「腕の矢印をたす」の2つの計算が必要でしたが、同次変換行列なら、かけ算だけで済みます。コンピュータにとって、同じ計算をくり返すのは得意なことです。

12 3次元では 4×4 の同次変換行列

空間の点 (x, y, z) には、1をつけて $(x, y, z, 1)$ とし、 4×4 の行列を使います。左上の 3×3 に回転行列 R 、右の列の上の3つに移動 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 、いちばん下の行に0, 0, 0, 1を入れます。

$$\begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{左上の } R \text{ は } 3 \times 3, \text{ 右上の } \vec{p} \text{ はたての } 3 \text{ つ})$$

たとえば、2本の腕を、高さ0.10mの台の上に置きます。腕は床に平行な平面の中で動くとし、関節は z 軸のまわりに回るとします。腕の2つの 4×4 の行列は、左上に $R_z(\theta)$ 、右の列に $(L \cos \theta, L \sin \theta, 0)$ を入れたものです。その前に、台の高さの分だけ上へずらす行列をかけます。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_1 A_2$$

腕の2つの行列の積 $A_1 A_2$ の右の列は、平面のときと同じで、 $x = 0.325$ 、 $y = 0.391$ 、 $z = 0$ 、4つめが1です。これに台の行列をかけると z に0.10がたされて、手の位置は次のようになります (m)。

$$(0.325, 0.391, 0.10)$$

6つの関節をもつ工場のロボットの、関節ごとに1つずつ、 4×4 の同次変換行列を6つかけて、手の位置と向きを求めます。1955年に、デナビットとハーテンバーグが、機械の関節を 4×4 の行列で表すきまりを発表し、いままロボットの本で使われています (専門書をのぞいてみよう)。

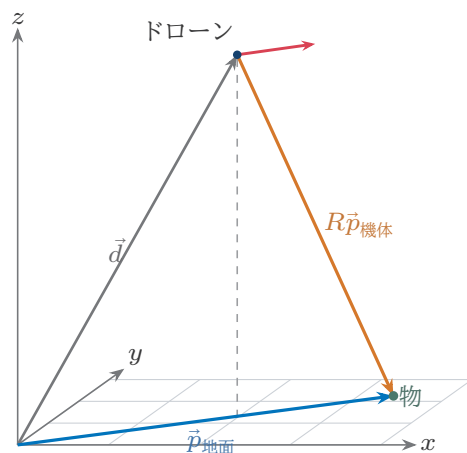
13 座標の変換：ドローンのカメラで見た物の位置

空を飛ぶドローンのカメラで、地面の上の物を見つけました。カメラ (ドローン) から見た物の位置は、ドローンの座標 (x は機首の向き) でわかります。地面の座標では、どこにあるでしょう。

ドローンの位置を $\vec{d}$ 、ドローンの姿勢の回転行列を R 、ドローンから見た物の位置を $\vec{p}_{\text{機体}}$ とします。7-6 ⑥ と⑧の考えで、ドローンから物への矢印を地面の向きに直すと $R\vec{p}_{\text{機体}}$ 。それにドローンの位置をたします。

$$\vec{p}_{\text{地面}} = R\vec{p}_{\text{機体}} + \vec{d}$$

これは、「回して、ずらす」なので、同次変換行列1つで書けます。



数で確かめる

ドローンが地面の点 (10, 5, 20) (m) にいて、ロール 0° ・ピッチ 0° ・ヨー 30° (水平のまま、左に 30° 向いている) とします。カメラは、物が「機首の向きに 8m、真下へ 20m」、つまり $\vec{p}_{\text{機体}} = (8, 0, -20)$ の所にあると知らせてきました。 $R = R_z(30^\circ)$ です。

$$\begin{aligned}
 R_z(30^\circ) \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.866 \times 8 - 0.5 \times 0 \\ 0.5 \times 8 + 0.866 \times 0 \\ -20 \end{pmatrix} && \text{機体の矢印を、地面の向きに直す} \\
 &= \begin{pmatrix} 6.928 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix} && \text{計算した} \\
 \vec{p}_{\text{地面}} = \begin{pmatrix} 6.928 + 10 \\ 4 + 5 \\ -20 + 20 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 16.93 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{ドローンの位置をたした}
 \end{aligned}$$

物は地面の点 (16.93, 9, 0) にあります。 z が 0 になったので、たしかに地面の上です。

反対に、地面の点がカメラからどう見えるか

3次元のゲームの画面を作るときは、反対に、地面 (ゲームの世界) の座標の点が、カメラからどう見えるかを計算します。上の式を $\vec{p}_{\text{機体}}$ について解きます。両辺から $\vec{d}$ をひき、左から $R^{-1} = R^T$ をかけます (7-6 ⑥の「軸を回して見る」)。

$$\vec{p}_{\text{機体}} = R^T(\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d})$$

さっきの物で確かめます。 $\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d} = (6.928, 4, -20)$ で、 $R_z(30^\circ)^T$ の 1 行めは (0.866, 0.5, 0)、2 行めは (-0.5, 0.866, 0)、3 行めは (0, 0, 1) です。

$$x = 0.866 \times 6.928 + 0.5 \times 4 = 6.000 + 2 = 8.000 \quad 1 \text{ 行めとの内積}$$

$$y = -0.5 \times 6.928 + 0.866 \times 4 = -3.464 + 3.464 = 0 \quad 2 \text{ 行めとの内積}$$

$$z = -20 \quad 3 \text{ 行めとの内積}$$

もとの $(8, 0, -20)$ にもどりました。ゲームの画面では、何万もの点に、1秒に何十回もこの計算をします。

たいせつ

3本の軸	回らない軸の行と列は「1と0」、残りは7-6の R 。 R_y だけ $\sin$ の符号が逆に見える
順番	$R_z(90^\circ)R_x(90^\circ) \neq R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)$ 。右から先にはたらく
オイラー角	$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ (ヨー・ピッチ・ロール)
機首の向き	R の1列め $(\cos \psi \cos \theta, \sin \psi \cos \theta, -\sin \theta)$
同次座標	位置は $(x, y, 1)$ 、向きは $(x, y, 0)$ 。「ずらす」も行列のかけ算に
同次変換	$A(\theta, L)$: 左上が回転、右の列が移動。 $T = A_1 A_2 \cdots$ の右の列が手の位置

🔊 この章で出てきたことば

ロール・ピッチ・ヨー 前後の軸・左右の軸・上下の軸のまわりの回転の角。

オイラー角 3つの軸のまわりの回転の角で、物の向きを表したもの。

ジンバルロック 2つの回転の軸が重なり、向きの自由が1つへってしまうこと。

同次座標 点の座標に1（向きなら0）を加えたもの。ずらす動きも行列で書ける。

同次変換行列 回転と移動を1つにまとめた行列。平面は 3×3 、空間は 4×4 。

専門書をのぞいてみよう ロボット工学の教科書ふうの書き方

リンク $i-1$ の座標系から見たリンク i の座標系の位置と姿勢を、同次変換行列 ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ で表す。手先の位置・姿勢は ${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n$ で与えられる (Denavit–Hartenberg 記法)。姿勢は ZYX オイラー角 (ψ, θ, ϕ) で表すことが多いが、 $\theta = \pm\pi/2$ で特異となるため、四元数を用いることもある。

訳 ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ は、この章の $A(\theta_i, L_i)$ のこと。左上の小さな数は「どの座標から見たか」、太字は専門書の行列の書き方。 ${}^0\mathbf{T}_n$ はこの章の T 。「ZYX オイラー角」は $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ の順のこと。「 $\theta = \pm\pi/2$ で特異」はピッチ $\pm 90^\circ$ のジンバルロック。「四元数」はクォータニオン。

記号カード

初めて出た章 7-7

 $R_x R_y R_z$

読み方 アール・エックス、アール・ワイ、アール・ゼット
意味 $x \cdot y \cdot z$ 軸のまわりに回す 3×3 の回転行列。回らない軸の行と列は 1 と 0
英語 rotation about an axis

記号カード

初めて出た章 7-7

 $\phi \theta \psi$

読み方 ファイ、シータ、ブサイ
意味 ロール・ピッチ・ヨーの角。 ϕ は、6-6 の初期位相の ϕ とは別のも
英語 roll, pitch, yaw

コラム アポロ宇宙船とジンバルロック

アポロ宇宙船は、宇宙船の向きを、3つの輪（ジンバル）で支えた、回り続けるこま（ジャイロ）ではかっていました。こまは、宇宙船がどう回っても向きを変えないので、輪の角を読めば宇宙船の向きがわかります。ところが、まん中の輪の角が 90° に近づくと、2つの輪の軸が重なってしまい (⑨のジンバルロック)、向きがわからなくなるおそれがありました。そこで、宇宙飛行士は、その向きに近づかないように注意して飛んでいた、と伝えられています。いまのドローンは、向きを計算の中で回転行列やクォータニオンとして持つので、この心配はありません。

例題でたしかめよう

例題1 軸のまわりに点を回す

点 $(2, 1, 3)$ を、次のように回した点を求めましょう。

(1) z 軸のまわりに 90° (2) y 軸のまわりに 90°

考え方 $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ を、 $R_z \cdot R_y$ に入れる。回らない軸の座標は変わらない。

式 (1) $R_z(90^\circ)$ の行は $(0, -1, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$

$$x = -1 \times 1 = -1, y = 1 \times 2 = 2, z = 3 \text{ (そのまま)}$$

(2) $R_y(90^\circ)$ の行は $(0, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(-1, 0, 0)$

$$x = 1 \times 3 = 3, y = 1 \text{ (そのまま)}, z = -1 \times 2 = -2$$

答え (1) $(-1, 2, 3)$ (2) $(3, 1, -2)$

(2) は、「 z を x のほうへ」たおす回転なので、高さ 3 だった点が x の側へ、 x が 2 だった点が下 (z が負) へ行きました。

じぶんでこう1

点 $(1, 2, 4)$ を、次のように回した点を求めましょう。

(1) x 軸のまわりに 90° (2) y 軸のまわりに 90°

例題2 回す順番を変える

$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ に、 $R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)$ と $R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)$ をそれぞれかけ、行き先をくらべましょう。

考え方 右から1つずつかける（右の行列が先）。

式 ① $R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)\vec{e}_x$

まず $R_y(90^\circ)\vec{e}_x = (0, 0, -1)$ (R_y の1列め)

次に $R_z(90^\circ)$ をかける。 z 軸のまわりなので $(0, 0, -1)$ のまま

② $R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)\vec{e}_x$

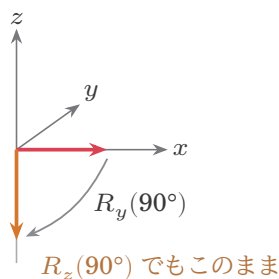
まず $R_z(90^\circ)\vec{e}_x = (0, 1, 0)$ (R_z の1列め)

次に $R_y(90^\circ)$ をかける。 y 軸のまわりなので $(0, 1, 0)$ のまま

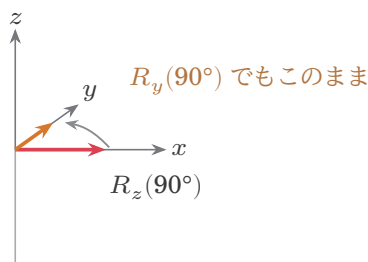
答え ①は $(0, 0, -1)$ 、②は $(0, 1, 0)$ で、ちがう

じぶんでこう2

$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ に、 $R_x(90^\circ)R_y(90^\circ)$ と $R_y(90^\circ)R_x(90^\circ)$ をそれぞれかけ、行き先をくらべましょう。



① $R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)\vec{e}_x$



② $R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)\vec{e}_x$

図6 例題2を図で見る。赤が $\vec{e}_x$ 、オレンジが行き先。①は真下へ、②は奥（ y の向き）へ行く。

例題3 オイラー角から機首の向きを求める

ドローンが、ヨー $\psi = 60^\circ$ 、ピッチ $\theta = -30^\circ$ 、ロール $\phi = 10^\circ$ の姿勢です。地面の座標で、機首はどちらを向いていますか。

$$(\cos 60^\circ = 0.5, \sin 60^\circ = 0.866)$$

$$(\cos(-30^\circ) = 0.866, \sin(-30^\circ) = -0.5)$$

考え方 機首の向きは、⑧のわくの式。ロールは関係しない。

式 x 成分： $\cos 60^\circ \cos(-30^\circ) = 0.5 \times 0.866 = 0.433$

$$y \text{ 成分：} \sin 60^\circ \cos(-30^\circ) = 0.866 \times 0.866 = 0.750$$

$$z \text{ 成分：} -\sin(-30^\circ) = -(-0.5) = 0.5$$

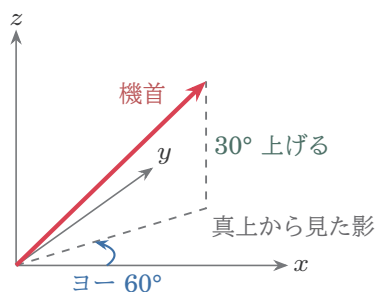
答え $(0.433, 0.750, 0.5)$ 。左に 60° 向いて、機首を 30° 上げている

じぶんでこう3

ドローンが、ヨー $\psi = 30^\circ$ 、ピッチ $\theta = -60^\circ$ 、ロール $\phi = 20^\circ$ の姿勢です。地面の座標で、機首の向きを求めましょう。

$$(\cos 30^\circ = 0.866, \sin 30^\circ = 0.5)$$

$$(\cos(-60^\circ) = 0.5, \sin(-60^\circ) = -0.866)$$



例題3 の機首の向きを図にしま

した（ななめから見た図なので、角は本当の大きさには見えません）。点線は真上から見た影で、 x 軸から 60° （ヨー）。機首は影から 30° 上を向きます。

$0.433^2 + 0.750^2 + 0.5^2 = 1$ で、長さは1です。

例題 4 ジンバルロックを確かめる

ピッチ $\theta = -90^\circ$ （機首が真上）のとき、次の2つの姿勢は同じ向きですか。⑨のわくの行列を使って調べましょう。

- (1) ヨー 30° ・ロール 0° と、ヨー 0° ・ロール 30°
- (2) ヨー 30° ・ロール 0° と、ヨー 30° ・ロール 30°

考え方 ピッチ -90° では、行列は $\psi + \phi$ だけで決まる。 $\psi + \phi$ が同じなら同じ向き。

式 (1) どちらも $\psi + \phi = 30^\circ$

どちらの行列も、1行めが $(0, -0.5, -0.866)$

2行めが $(0, 0.866, -0.5)$ 、3行めが $(1, 0, 0)$

(2) $\psi + \phi$ は 30° と 60° でちがう

2つめの行列の1行めは $(0, -0.866, -0.5)$

1つめの $(0, -0.5, -0.866)$ とちがう

答え (1) 同じ向き (2) ちがう向き

じぶんでこう 4

ピッチ $\theta = -90^\circ$ のとき、次の2つの姿勢は同じ向きですか。⑨のわくの行列を使って調べましょう。

- (1) ヨー 50° ・ロール -20° と、ヨー 20° ・ロール 10°
- (2) ヨー 20° ・ロール 10° と、ヨー 20° ・ロール 40°

例題5 ずらす行列と、位置・向き

x に3、 y に2ずらす同次座標の行列を、次のものにかけてみましょう。

(1) 点 $(1, 1)$ (2) 向きの矢印 $(1, 1)$

考え方 行列の右の列に $(3, 2)$ を入れる。点には3つめに1、向きには0をつける (10)。

式 行列の行は $(1, 0, 3)$ 、 $(0, 1, 2)$ 、 $(0, 0, 1)$

(1) $(1, 1, 1)$ にかけて、 $(1+3, 1+2, 1) = (4, 3, 1)$

(2) $(1, 1, 0)$ にかけて、 $(1+3 \times 0, 1+2 \times 0, 0) = (1, 1, 0)$

答え (1) 点 $(4, 3)$ (2) 向き $(1, 1)$ のまま

じぶんでこう5

x に-2、 y に5ずらす同次座標の行列を、次のものにかけてみましょう。

(1) 点 $(4, 1)$ (2) 向きの矢印 $(0, 3)$

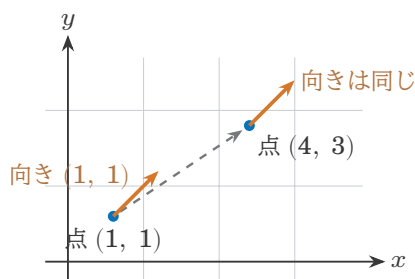


図7 例題5を図で見る。点は $(3, 2)$ だけずれるが、向きの矢印は、ずらしても変わらない。

例題 6 同次変換行列で手の位置

$L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ の 2 本の腕の手の位置を、 $T = A(30^\circ, 0.30)A(45^\circ, 0.25)$ の右の列から求めましょう（成分は小数第 3 位まで）。

考え方 ⑪の行列を使う。右の列の上の 2 つが手の位置。右の列だけを、行と右の列の内積で計算する。

式 $A(30^\circ, 0.30)$ の 1 行めは $(0.866, -0.5, 0.260)$ 、2 行めは $(0.5, 0.866, 0.150)$

$A(45^\circ, 0.25)$ の右の列は $(0.177, 0.177, 1)$

$$x = 0.866 \times 0.177 + (-0.5) \times 0.177 + 0.260 \times 1$$

$$= 0.1533 - 0.0885 + 0.260 = 0.3248$$

$$y = 0.5 \times 0.177 + 0.866 \times 0.177 + 0.150 \times 1$$

$$= 0.0885 + 0.1533 + 0.150 = 0.3918$$

答え 約 $(0.325, 0.392) \text{ (m)}$

物理シリーズ第 1 巻の力-7 の例題と同じ計算です（7-6 の $(0.325, 0.391)$ とのちがいは、途中の丸めのため）。

じぶんでこう 6

$L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、 $\theta_1 = 45^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ の腕の手の位置を求めましょう。 $A(45^\circ, 0.30)A(45^\circ, 0.25)$ の右の列から求めます（ $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$ 。成分は小数第 3 位まで）。

例題7 カメラで見た物の位置を、地面の座標に直す

ドローンが地面の点 $(10, 5, 20)$ (m) にいて、ロール 0° ・ピッチ 0° ・ヨー 30° の姿勢です ($\cos 30^\circ = 0.866$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$)。

(1) カメラで見た物の位置が、機体の座標で $(8, 0, -20)$ でした。地面の座標で求めましょう。

(2) 地面の点 $(16.93, 9, 0)$ は、機体の座標ではどこですか。

考え方 (1) $\vec{p}_{\text{地面}} = R\vec{p}_{\text{機体}} + \vec{d}$ 、(2) $\vec{p}_{\text{機体}} = R^T(\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d})$ 、 $R = R_z(30^\circ)$ (⑬)。

式 (1) $R_z(30^\circ)$ をかけて $(0.866 \times 8, 0.5 \times 8, -20)$

$$= (6.928, 4, -20)$$

$$\vec{d} \text{ をたして } (16.928, 9, 0)$$

$$(2) \vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d} = (6.93, 4, -20)$$

$$x = 0.866 \times 6.93 + 0.5 \times 4 = 6.00 + 2 = 8.00$$

$$y = -0.5 \times 6.93 + 0.866 \times 4 = -3.47 + 3.46 \approx 0,$$

$$z = -20$$

答え (1) 約 $(16.93, 9, 0)$ (m) (2) 約 $(8, 0, -20)$ (m)

じぶんでこう7

ドローンが地面の点 $(0, 0, 30)$ (m) にいて、ロール 0° ・ピッチ 0° ・ヨー 90° の姿勢です。

(1) カメラで見た物の位置が、機体の座標で $(10, 5, -30)$ でした。地面の座標で求めましょう。

(2) 地面の点 $(-5, 10, 0)$ は、機体の座標ではどこですか。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

かける順番と、回す順番

✗ $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)$ は、先に z 軸で回してから x 軸で回す

○ $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)$ は、先に x 軸で回してから z 軸で回す
ベクトルは右におくので、右の行列から先にはたります (7-3)。空間では順番で答えが変わるので、とくに大事です。

⚠ まちがえやすいところ

R_y の $\sin$ の符号

✗ $R_y(\theta)$ の 1 行めは $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$

○ $R_y(\theta)$ の 1 行めは $(\cos \theta, 0, \sin \theta)$

y 軸のまわりの $+$ は「 z を x のほうへ」です。 $\theta = 90^\circ$ で $\vec{e}_z$ が $\vec{e}_x$ へ行くか (3 列めが $(1, 0, 0)$ か) で確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところ

回す軸を、スマホといっしょに動かしてしまう

✗ ①の 2 つめの「左回り」を、たおしたスマホの軸のまわりに回す

○ ①の 2 つめの「左回り」は、紙にかいた (動かない) z 軸のまわりに回す

行列を右から順にかけるときは、動かない軸のまわりに回します。動く軸で考えるときは、かける順番が逆になります (⑧のせいかくに言うと)。

⚠ まちがえやすいところ

同次座標の最後の数

✗ 向きの矢印（速度など）にも、最後に 1 をつける

○ 位置には 1、向きには 0 をつける

1 をつけると、向きまでずれてしまいます。向きは、場所を移しても変わりません。

⚠ まちがえやすいところ

腕の行列のかける順番

✗ 手の位置は $A(\theta_2, L_2)A(\theta_1, L_1)$ の右の列

○ 手の位置は $A(\theta_1, L_1)A(\theta_2, L_2)$ の右の列（根もとの行列が左）

$A(\theta_2, L_2)$ が手の軸をひじの軸に直し、そのあと $A(\theta_1, L_1)$ がひじの軸を肩の軸に直します。

⚠ まちがえやすいところ

逆の回転の順番

✗ $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ の逆は $R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi)$

○ R の逆は $R_x(-\phi)R_y(-\theta)R_z(-\psi)$ ($= R^T$)

もどすときは、最後に回したもののから先にもどします（7-5 のくつ下とくつ）。順番も、角の符号も、両方逆になります。

物理・工学ではこう使う

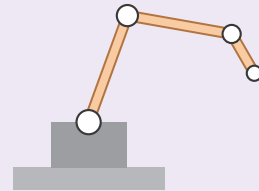
ドローンの姿勢の制御

ドローンの中のジャイロセンサーと加速度センサーは、1秒に何百～何千回も、機体の回る速さとかたむきをはかります。計算機は、それをもとに回転行列（またはクォータニオン）で機体の向きを求め、かたむきを直すように、4つのプロペラの回る速さを少しずつ変えます。



6つの関節のロボット

自動車の工場で、車体を溶接したり、色をぬったりするロボットは、6つの関節をもっています。関節の角から 4×4 の同次変換行列を6つ作ってかけ、手先の位置と向き (⑫) を求めます。手先を目標へ動かす角を求める「逆運動学」は、7-11 で読みます。



3次元のゲームとVR

ゲームの世界の物の点は、まず物の向きと位置の 4×4 の行列で世界の座標に直され、次にカメラ (VR ゴーグルなら頭) の向きと位置の行列の逆 (⑬の $R^T(\vec{p} - \vec{d})$) で、カメラから見た座標に直されます。何万もの点に、1秒に何十回も 4×4 の行列をかけて、画面を作っています。



章末問題

7-7 のまとめ

基本



1 点 $(3, 1, 2)$ を、次のように回した点を求めましょう。

(1) z 軸のまわりに 90°

(2) x 軸のまわりに 90°

(3) y 軸のまわりに 90°

2 $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ に、 $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)$ と $R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)$ をそれぞれかけ、行き先をくらべましょう。

3 ドローンが、ヨー $\psi = 90^\circ$ 、ピッチ $\theta = -45^\circ$ 、ロール $\phi = 30^\circ$ の姿勢です。地面の座標で、機首の向きを求めましょう ($\cos(-45^\circ) = 0.707$ 、 $\sin(-45^\circ) = -0.707$)。

4 ピッチ $\theta = -90^\circ$ のとき、「ヨー 40° ・ロール 20° 」と「ヨー 70° ・ロール -10° 」は同じ向きですか。

5 $L_1 = 0.40\text{ m}$ 、 $L_2 = 0.30\text{ m}$ 、 $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = -90^\circ$ の腕の手の位置を、 $A(90^\circ, 0.40)A(-90^\circ, 0.30)$ の右の列から求めましょう。

6 x に 4、 y に -1 ずらす同次座標の行列を、点 $(2, 3)$ と、向きの矢印 $(2, 3)$ にかけてみましょう。

7 ドローンが地面の点 $(20, 10, 15)$ (m) にいて、ロール 0° ・ピッチ 0° ・ヨー 0° の姿勢です。カメラで見た物の位置が、機体の座標で $(5, -2, -15)$ でした。地面の座標で求めましょう。

チャレンジ ★★★★★

- 8** ? はてな? のスマホの画面の向き $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ に、 $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)$ と $R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)$ をそれぞれかけ、図4の画面の向きと合っているか確かめましょう。
- 9** ドローンが地面の点 $(0, 0, 30)$ (m) にいて、ロール 0° ・ピッチ 0° ・ヨー 90° の姿勢です。地面の点 $(10, 10, 0)$ は、機体の座標ではどこですか。また、それはドローンから見て、前・後ろ・左・右のどちらの側ですか。
- 10** ドローンが、ヨー $\psi = 45^\circ$ 、ピッチ $\theta = -30^\circ$ 、ロール $\phi = 50^\circ$ の姿勢です。機首の向きを求め、その長さが1であることを確かめましょう ($\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.707$, $\cos(-30^\circ) = 0.866$, $\sin(-30^\circ) = -0.5$)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 3本の軸のまわりの回転を $R_x \cdot R_y \cdot R_z$ で表し、点を回せる。
→ 280 ページ
- ☐ ロール・ピッチ・ヨーから機首の向きを求め、順番で向きが変わることを説明できる。
→ 285 ページ
- ☐ 同次変換行列で、腕の手の位置やカメラで見た物の位置を求められる。
→ 289 ページ

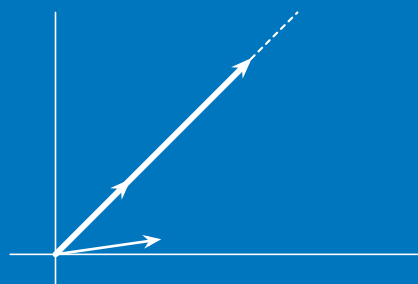
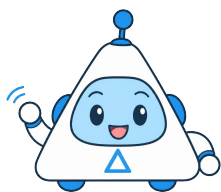


ミナ

空間では、回す順番で向きが変わるんだね。次の 7-8 では、行列をかけても向きが変わらない、特別な矢印をさがそう。

固有値と行列の使いみち

- ? 変換しても、向きが変わらない矢印はある？
- ? 2つの台車のゆれは、なぜ2つのリズムに分けられる？
- ? 同じ行列を何回もかけると、どうなる？



行列をかけても向きが変わらない、特別な矢印があるよ。その矢印の向きで見ると、こみいった変換も「のびるだけ」に分かれる。ゆれのモードも、くり返しの行方も、ここから見えてくるよ。

この部で学ぶこと

7-8 固有値と固有ベクトル：向きが変わらない方向

★★★★★ P.312

変換しても、向きが変わらない矢印がある

7-9 対角化：まっすぐな方向に分けて考える

★★★★★ P.354

こみいった変換も、のびるだけの変換に分けられる

7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で

★★★★★ P.386

何回もかけるとどうなるかは、固有値が教えてくれる

7-11 行列の使いみち【読みもの】

★★★★☆ P.430

ロボット、電気回路、画像…行列はどこで働いている？

この部を読むと…

固有値と固有ベクトルを求め、対角化で振動モードやくり返しの計算を見通せるようになります。第 6 巻の特性方程式とつながり、第 9 巻の状態方程式の土台になります。

第3部 固有値と行列の使いみち

★★★★★

7-8

固有値と固有ベクトル：
向きが変わらない方向

📖 道しるべ この章の前に 3-10 4-12 6-6 6-12 6-14 7-2 7-4 7-5
この章の先に 7-9 7-10 7-11 9-10 9-11

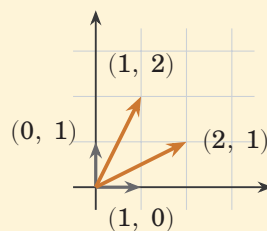
📌 この章でできるようになること

- ★★★★★ 行列をかけても向きが変わらない矢印を、図と表計算でさがせる。
- ★★★★★ $A\vec{v}$ を計算して固有ベクトルかどうかを確かめ、振動モードが固有ベクトルだと説明できる。
- ★★★★★ 特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ で固有値と固有ベクトルを求め、6-12 の s と同じものだと確かめられる。

? はてな？

7-2 から使ってきた主役の行列 A を、方眼にかいた矢印にかけてみます。右向きの矢印 $(1, 0)$ は $(2, 1)$ になり、向きが少し上に変わります。上向きの矢印 $(0, 1)$ は $(1, 2)$ になり、向きが少し右に変わります。

行列をかけると、ふつうは矢印の向きが変わります。では、 A をかけても**向きが変わらない矢印**は、あるでしょうか。あるとしたら、どの向きでしょう。



灰色の矢印に A をかけると、オレンジの矢印になる。

7-2 で、行列は「矢印を入れると、矢印が出てくる機械」だと学びました。7-4 では面積が何倍になるか、7-5 では元にもどす方法、7-6・7-7 では回す行列を調べました。この章では、行列という機械の「くせ」を調べます。

多くの行列には、「入れても向きが変わらず、のびたりちぢんだりするだけ」の特別な向きがあります。その向きと、のびる倍率がわかると、機械の動きのほとんどがわかってしまいます。じつは、6-14 の 2 つの台車の「いっしょに動く」「反対に動く」ゆれ（振動モード）は、この特別な向きでした。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、表計算と、行列×ベクトルの計算（7-2）だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。

やってみよう 向きが変わらない矢印を、表計算でさがそう

長さ 1 の矢印を、下向き (-90°) から上向き (90°) まで、 15° ずつ回します。1 本ずつ主役の行列 A をかけ、出てきた矢印の向きが何度変わったかを表にします。

- ① A 列に矢印の角 θ を入れる。A2 に -90 、A3 に $=A2+15$ と入れ、A14 (90) まで下へコピーする。
- ② 長さ 1 の矢印の成分を作る。B2 に $=\text{COS}(\text{RADIANS}(A2))$ 、C2 に $=\text{SIN}(\text{RADIANS}(A2))$ 。
- ③ A をかける。D2 に $=2*B2+1*C2$ 、E2 に $=1*B2+2*C2$ 。
- ④ 出てきた矢印の向きの角を F2 に $=\text{DEGREES}(\text{ATAN2}(D2,E2))$ 、向きの変わり方を G2 に $=F2-A2$ と入れる。
- ⑤ 2 行めの B~G を下へコピーして、G 列が 0 になる角をさがそう。

②は、角 θ の向きの長さ 1 の矢印が $(\cos \theta, \sin \theta)$ だからです (4-8)。表計算の COS は角をラジアンで受けとるので、RADIANS で度から直しています (6-9)。③は、 A の 1 行め (2, 1) と矢印の内積、2 行め (1, 2) と矢印の内積です (7-2 の

行列×ベクトル)。④の ATAN2 は、「 x 成分, y 成分」の順に入れると、矢印の向きの角を -180° から 180° で答える関数です (6-9 でも使いました)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	θ	x	y	$A\vec{v}$ の x	$A\vec{v}$ の y	向き	変わり方
2	-90	0.000	-1.000	-1.000	-2.000	-116.6	-26.6
3	-75	0.259	-0.966	-0.448	-1.673	-105.0	-30.0
4	-60	0.500	-0.866	0.134	-1.232	-83.8	-23.8
5	-45	0.707	-0.707	0.707	-0.707	-45.0	0.0
6	-30	0.866	-0.500	1.232	-0.134	-6.2	23.8
7	-15	0.966	-0.259	1.673	0.448	15.0	30.0
8	0	1.000	0.000	2.000	1.000	26.6	26.6
9	15	0.966	0.259	2.191	1.484	34.1	19.1
10	30	0.866	0.500	2.232	1.866	39.9	9.9
11	45	0.707	0.707	2.121	2.121	45.0	0.0
12	60	0.500	0.866	1.866	2.232	50.1	-9.9
13	75	0.259	0.966	1.484	2.191	55.9	-19.1
14	90	0.000	1.000	1.000	2.000	63.4	-26.6

表1 表計算の結果 (小数第3位・第1位までにそろえた)。G列が0になるのは、 $\theta = -45^\circ$ と $\theta = 45^\circ$ の2か所。

G列は、矢印が何度回されたかです。正なら左回り、負なら右回りに回されています。表から、次のことがわかります。

1 45° と -45° では、向きが変わらない。

45° の矢印 (0.707, 0.707) は (2.121, 2.121) になります。同じ向きのまま、ちょうど3倍の長さです ($0.707 \times 3 = 2.121$)。 -45° の矢印 (0.707, -0.707) は、そのまま (0.707, -0.707)。向きも長さも変わりません (1倍)。

② 45° のまわりの矢印は、 45° のほうへ引きよせられる。

30° の矢印は左回りに 9.9° 、 60° の矢印は右回りに 9.9° 回されて、どちらも 45° に近づきます。

③ -45° のまわりの矢印は、 -45° から遠ざけられる。

-30° の矢印は左回りに 23.8° 、 -60° の矢印は右回りに 23.8° 回されて、 -45° からはなれます。

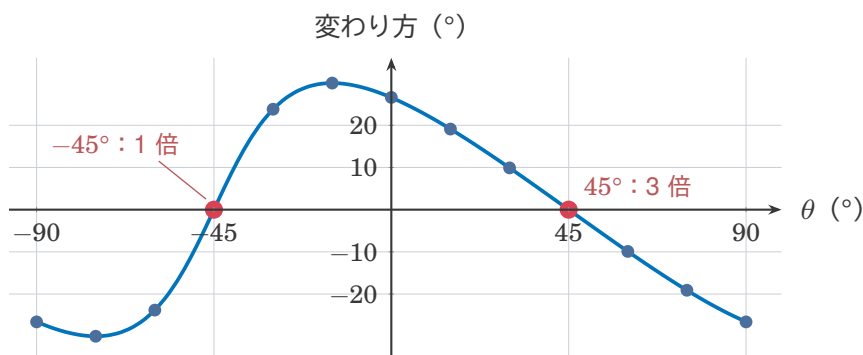


図 1 表の G 列（向きの変わり方）をグラフにした。0 の線と交わる 2 つの角（赤い点）で、矢印の向きが変わらない。

🔄 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

7-2 行列×ベクトル： $A\vec{x}$ の 1 つめの成分は「 A の 1 行めと $\vec{x}$ の内積」、2 つめは「2 行めと $\vec{x}$ の内積」。行列は、矢印を入ると矢印が出てくる機械。

7-4 行列式 $\det A = ad - bc$ は面積の倍率。0 なら、平面が 1 本の直線（または 1 点）に平らにつぶれる。

7-5 行列式が 0 でなければ逆行列 A^{-1} があり、 $A\vec{x} = \vec{b}$ の答えは $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ の 1 つだけ。

6-14 2 つの台車 ($m = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $K = 10 \text{ N/m}$) は、和（いっしょに動く）と差（反対に動く）に分けるとほどけた。角振動数は $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = \sqrt{120} \approx 10.95 \text{ (rad/s)}$ 。

6-12 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に $x = e^{st}$ を入れると、特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$ 。3-10 の $s^2 + 3s + 2 = 0$ の解は -1 と -2 。

4-12 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトルの内積が 0 なら、2 つは直交する（直角に交わる）。

数学の道具

目でわかる 向きが変わらない矢印

★★★

1 矢印を回しながら、さがす

やってみようの表から、5本の矢印をえらんで図にかきます。灰色が入れた矢印 $\vec{v}$ 、オレンジが出てきた矢印 $A\vec{v}$ です。

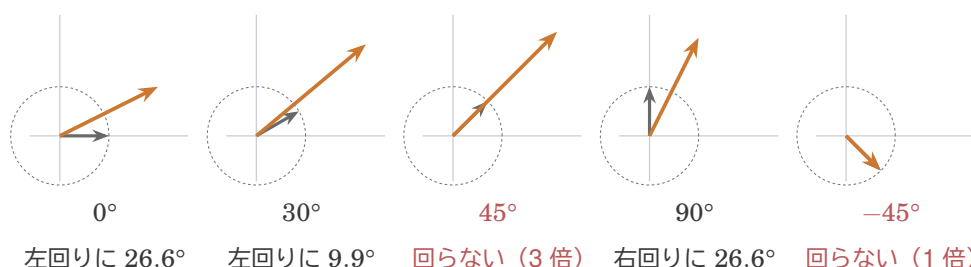


図2 入れた矢印（灰色）と、 A をかけて出てきた矢印（オレンジ）。点線の円は長さ1。
 -45° では2本がぴったり重なっている。

$0^\circ \cdot 30^\circ \cdot 90^\circ$ の矢印は、向きが変わっています。ところが 45° の矢印は、同じ向きのまま3倍にのび、 -45° の矢印は、まったく変わりません。

円がだ円になる

長さ1の矢印の先を、ぐるっと一周ぶん全部集めると、半径1の円になります。この円の上のすべての点に A をかけると、どんな形になるでしょう。表計算のD列・E列の点を方眼にかいていくと、ななめにのびた**だ円**になります。

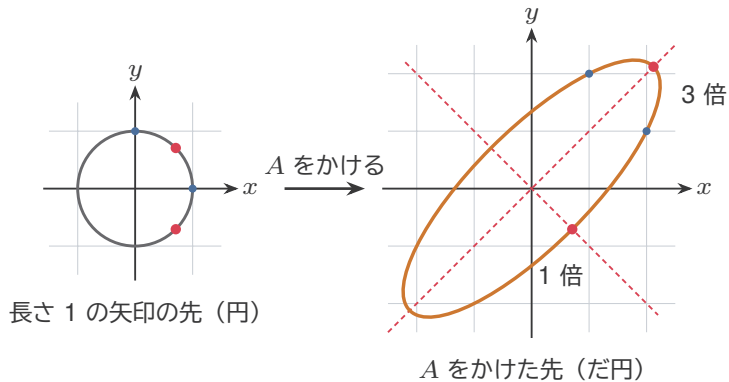
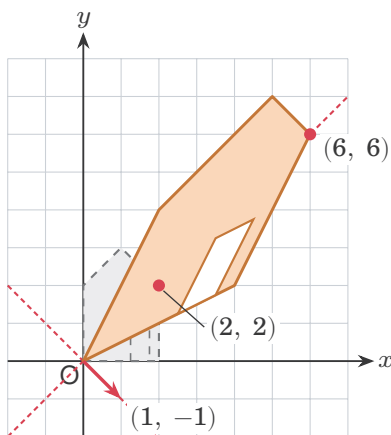


図3 円は、ななめにのびただ円になる。赤い点 (45° と -45°) は、点線の直線の上にとどまる。青い点 $(1, 0) \rightarrow (2, 1)$ 、 $(0, 1) \rightarrow (1, 2)$ へ動き、向きが変わる。

だ円のいちばん長い向き (45°) と、いちばん短い向き (-45°) が、ちょうど向きが変わらない2つの向きです。いちばん長い向きの矢印は、まっすぐ3倍にのばされるだけです。いちばん短い向きの矢印は、1倍で、そのままです。そのほかの矢印は、のばされながら、長い向きのほうへかたむけられます。だから円が、 45° の向きにのびただ円になるのです。

方眼の家の絵で見る

7-2 の家の絵でも確かめます。原点を通る2本の直線 $y = x$ (45°) と $y = -x$ (-45°) を、赤い点線でかきこみました。



- もとの家（灰色の点線）の頂点③ $(2, 2)$ は、直線 $y = x$ の上にあります。A をかけると $(6, 6)$ 。同じ直線の上で、原点から3倍の所です。
- 矢印 $(1, -1)$ は、A をかけても $(1, -1)$ のまま。直線 $y = -x$ の上の点は、動きません。
- ほかの頂点、たとえば④ $(1, 3)$ は $(5, 7)$ へ動き、原点から見た向きが変わります。

図4 主役の行列 A をかけた家（オレンジ）。2本の赤い点線の上の点は、A をかけても同じ直線の上にある。

家の絵は、ななめにのびて、ゆがみます。でも、2本の赤い直線の上だけは、のび・ちぢみがあるだけで、直線そのものは動きません。

② 名前をつける：固有ベクトルと固有値

ここまでに見つけたことを、式で書きます。45°の向きの矢印を、成分が簡単な(1, 1)にしてかけてみます。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

どちらも、「行列をかける」が「数をかける」と同じになっています。1つめは3をかけるのと同じ、2つめは1をかけるのと同じです。

このように、行列 A をかけても向きが変わらず、ある数 λ をかけたのと同じになる、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{v}$ を、 A の**固有ベクトル**（こゆうベクトル）といいます。そのときの倍率 λ を、**固有値**（こゆうち）といいます。 λ はギリシャ文字で「ラムダ」と読みます。

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$\vec{v}$: 固有ベクトル ($\vec{0}$ でない) λ : 固有値

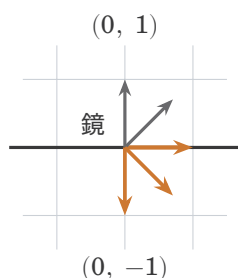
左辺は「行列×ベクトル」、右辺は「数×ベクトル」です。物理の本では、固有ベクトルを「**向きが変わらない特別なベクトル**」とよんでいます。主役の行列 A の固有値は3と1で、固有ベクトルは(1, 1)と(1, -1)です。

「固有」は、「その物だけがもともと持っている」という意味です。6-6のもっと知りたいで、ギターの弦の「固有値問題」が出てきました。同じ「固有」のことばで、考え方もよくにっています（コラム『固有』ということば）。6-12の約束どおり、固有値には文字 λ を使います。

固有値が負のとき：向きが反対でも同じ直線

7-2 の「裏返し」の行列で考えます。 x 軸を鏡にして、上下を入れかえる行列です。

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$(1, 0)$ は鏡の上にあるので動きません（固有値 1）。
 $(0, 1)$ は $(0, -1)$ になり、向きは反対です。でも、 y 軸という同じ直線の上にあります。これも固有ベクトルで、固有値は -1 です。ななめの矢印（灰色）は、向きが変わります。

図 5 裏返しの行列 F 。灰色が入れた矢印、オレンジが出てきた矢印。

「向きが変わらない」は、正確には「**原点を通る同じ直線の上にある**」という意味です。固有値が負なら、矢印は反対を向きますが、同じ直線の上です。

何倍しても固有ベクトル

$(1, 1)$ が固有ベクトルなら、それを 2 倍した $(2, 2)$ はどうでしょう。

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同じ直線の上の矢印は、長さや向き（ -1 倍）がちがっても、みな固有ベクトルで、固有値は同じ 3 です。だから「固有ベクトルは $(1, 1)$ 」と答えても、「 $(2, 2)$ 」と答えても、同じことを言っています。ふつうは、成分がいちばん簡単な整数のものを答えます。

なぜ $\vec{0}$ はのぞくのか

$\vec{0}$ (成分がどちらも 0) には、どんな行列をかけても $\vec{0}$ です。そして $\vec{0}$ はどんな数をかけても $\vec{0}$ です。だから $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ は、 λ が 3 でも 100 でも成り立ってしまい、何も教えてくれません。そこで、固有ベクトルは $\vec{0}$ でないものに決めています。いっぽう、**固有値は 0 でもかまいません**。 $A\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$ は「その向きの矢印は、原点につぶされる」という、大事な情報だからです (③の水そうで出てきます)。

❓ はてな? の答え

主役の行列 A をかけても向きが変わらない矢印は、 $(1, 1)$ の向き (45°) と、 $(1, -1)$ の向き (-45°) の 2 つです。 $(1, 1)$ の向きの矢印は 3 倍に、 $(1, -1)$ の向きの矢印は 1 倍に (そのまま) なります。

たいせつ

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ となる $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{v}$ が固有ベクトル、倍率 λ が固有値。
- 固有ベクトルは「 A をかけても、原点を通る同じ直線の上にある矢印」。何倍しても固有ベクトル。
- 主役の行列 A の固有値は 3 と 1、固有ベクトルは $(1, 1)$ と $(1, -1)$ 。



手でわかる

かけて確かめる・くり返して見つける★★★★

③ かけて確かめる：台車と水そう

ある矢印が固有ベクトルかどうかは、行列をかけてみればわかります。手順は 3 つです。

- ❶ $A\vec{v}$ を計算する (7-2)。
- ❷ $A\vec{v}$ の成分を、 $\vec{v}$ の同じ場所の成分でわる。
- ❸ わった答えが全部同じなら固有ベクトルで、その数が固有値。ちがえば固有ベクトルではない。

主役の行列 A で、 $(1, 2)$ を確かめてみます。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$4 \div 1 = 4$ 、 $5 \div 2 = 2.5$ で、そろいません。だから $(1, 2)$ は固有ベクトルではありません。 $(1, 1)$ なら $3 \div 1 = 3$ 、 $3 \div 1 = 3$ でそろいました。(成分に 0 があるときは、0 の成分どうしは、どちらも 0 になっていればよい、と考えます。)

6-14 の台車を、行列で書く

6-14 の 2 つの台車をもう一度考えます。 $m = 1 \text{ kg}$ 、外側のばね $k = 100 \text{ N/m}$ 、つなぎのばね $K = 10 \text{ N/m}$ でした。

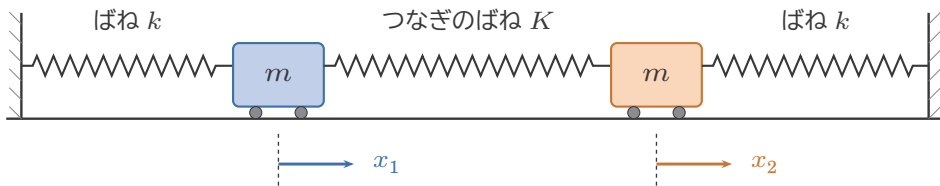


図 6 6-14 の 2 つの台車。 x_1 、 x_2 はつり合いの位置からのずれ (右向きが正)。

6-14 で作った運動方程式を $m = 1$ でわると、加速度は次のようになりました (6-14 ②)。

$$\ddot{x}_1 = -110x_1 + 10x_2 \quad \ddot{x}_2 = 10x_1 - 110x_2$$

-110 は $-(k + K) \div m = -(100 + 10) \div 1$ 、 10 は $K \div m = 10 \div 1$ です。

7-1 と同じように、係数を行列に、 x_1 、 x_2 をベクトルにまとめます。

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 & 10 \\ 10 & -110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \ddot{\vec{x}} = B\vec{x}$$

7-2 のように右辺を計算すると、1 行めは $-110x_1 + 10x_2$ です。2 行めは $10x_1 - 110x_2$ です。もとの 2 つの式にもどりました。この節では、この係数の行列を B とよびます（主役の行列 A と区別するため）。

6-14 で見つけた 2 つの動き方、「いっしょに動く $(1, 1)$ 」と「反対に動く $(1, -1)$ 」に、 B をかけてみます。

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 + 10 \\ 10 - 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \end{pmatrix} = -100 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 - 10 \\ 10 + 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 120 \end{pmatrix} = -120 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 つの振動モードは、行列 B の固有ベクトルでした。 固有値は -100 と -120 です。

なぜ、固有値が $-\omega^2$ になるのか

固有値 -100 、 -120 と、6-14 の角振動数 $\omega_1 = 10$ 、 $\omega_2 = \sqrt{120}$ には、 $-100 = -10^2$ 、 $-120 = -(\sqrt{120})^2$ の関係があります。わけを考えます。

振動モードでは、2 つの台車が「同じ形」をたもったまま、全体の大きさだけが $\cos \omega t$ で変わります（6-14 ⑥）。形を表す矢印を $\vec{v}$ とすると、

$$\vec{x} = \vec{v} \cos \omega t \quad \text{形 } \vec{v} \text{ のまま、大きさが } \cos \omega t \text{ で変わる}$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{v} \cos \omega t \quad \text{成分ごとに 2 回微分した (6-6)}$$

$$B\vec{x} = (B\vec{v}) \cos \omega t \quad \cos \omega t \text{ はただの数なので、外に出せる}$$

$$B\vec{v} = -\omega^2 \vec{v} \quad \ddot{\vec{x}} = B\vec{x} \text{ なので、2 行めと 3 行めが等しい}$$

最後の行は、 $B\vec{v} = \lambda\vec{v}$ の形です。だから、形 $\vec{v}$ は B の固有ベクトルで、 $-\omega^2$ が固有値です。

振動モードの形 = 固有ベクトル 固有値 = $-\omega^2$

だから $\omega = \sqrt{-\lambda}$

$\omega_1 = \sqrt{100} = 10$ 、 $\omega_2 = \sqrt{120} \approx 10.95$ (rad/s) で、6-14 と同じ数が出てきました。3 本とも同じばね ($K = k = 100$) なら、 B の対角成分は -200 、ほかは 100 になり、固有値は -100 と -300 、 ω は 10 と $\sqrt{300} \approx 17.3$ で、これも 6-14 と一致します。

6-14 では、「和と差」という組み合わせを、うまく思いついて式をほどきました。その組み合わせは、係数の行列の固有ベクトルだったのです。6-14 で予告した「ほどける組み合わせを、係数の表（行列）の計算で見つける方法」が、この章の方法です。

6-14 の水そう：固有値は 0 でもよい

6-14 の、同じ形の 2 つの水そうの式も、行列で書きます。

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \dot{\vec{h}} = H\vec{h}$$

1 行めは $-0.1h_1 + 0.1h_2 = -0.1(h_1 - h_2)$ で、6-14 の左の水そうの式です。

$(1, 1)$ と $(1, -1)$ をかけると、

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} = -0.2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値は 0 と -0.2 です。固有値 0 の $(1, 1)$ は「2 つの水位がそろった状態」で、そこでは水はもう動きません。合計の水位が変わらなかったのは、このためです。固有値 -0.2 の $(1, -1)$ は「差」の向きで、6-14 の $\frac{dD}{dt} = -0.2D$ の -0.2 と同じ数です。

コラム 「固有」ということば

固有値・固有ベクトルの「固有」は、ドイツ語の **eigen**（アイゲン：自分の、その物だけの）を訳したことばです。英語でも **eigenvalue**（アイゲンバリュー）、**eigenvector** とよびます。20 世紀のはじめごろ、ドイツの数学者ヒルベルトたちが、微分方程式や積分方程式の「とびとびの特別な値」をこの名前でよび、それが行列にも広まったと伝えられています。対称な行列の固有値がいつも実数になることは、19 世紀の前半、フランスの数学者コーシーが、惑星の動きの計算に関係して示したと伝えられています（1829 年ごろ）。行列ということばができる（1850 年）より前のことです。

4 何回もかけると、そろってくる

やってみようのグラフでは、矢印は 45° のほうへ引きよせられました。では、同じ行列 A を何回もかけたら、どうなるでしょう。（1, 0）から始めて、 A を 1 回ずつかけていきます。

回数	矢印	向き	長さ
0	(1, 0)	0°	
1	(2, 1)	26.6°	2.236 倍
2	(5, 4)	38.7°	2.864 倍
3	(14, 13)	42.9°	2.984 倍
4	(41, 40)	44.3°	2.998 倍
5	(122, 121)	44.8°	3.000 倍

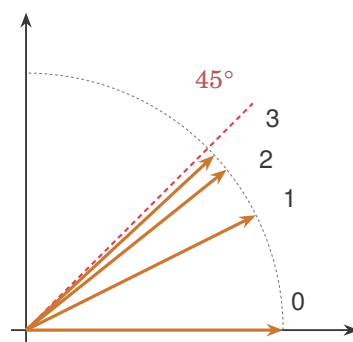


図7 (1, 0) に A をくり返しかけた。「長さ」は前の行の矢印の長さの何倍か。右の図は矢印の長さをそろえて向きだけをかいたもので、数字はかけた回数（4 回め以降は 45° の線とほぼ重なる）。向きは 45° に、倍率は 3 に近づく。

2回めは $A(2, 1) = (2 \times 2 + 1 \times 1, 1 \times 2 + 2 \times 1) = (5, 4)$ です。かけるたびに、向きは 45° （固有ベクトル $(1, 1)$ の向き）に近づき、長さは毎回ほぼ3倍（大きいほうの固有値）になっていきます。

なぜ、そろうのか

わけは、 $(1, 0)$ を2つの固有ベクトルに分けるとわかります。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（右辺を計算すると $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = (1, 0)$ です。） A をかけると、 $(1, 1)$ の部分は3倍に、 $(1, -1)$ の部分は1倍になります（7-2の線形：たしてからかけても、かけてからたしても同じ）。5回かけると、

$$A^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3^5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1^5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121.5 + 0.5 \\ 121.5 - 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 121 \end{pmatrix}$$

で、表と同じです。（ A^5 は A を5回かけること。7-3。）3倍の部分は、かけるたびに大きくなり、1倍の部分は小さいまま残ります。だから、矢印はどんどん $(1, 1)$ の向きにそろうのです。

このように、くり返しかけて、いちばん大きい固有値の固有ベクトルを見つける方法を、**べき乗法**（べきじょうほう）といいます。「べき乗」は、 3^5 のような「何回もかけること」の名前です。インターネットの検索で、ページに順位をつける計算にも使われています（7-10・7-11）。

🔍 コラム 表計算で、くり返しかける

このべき乗法は、表計算でもできます。2行めにはじめの矢印 $(1, 0)$ を入れ、B3 に $=2*B2+1*C2$ 、C3 に $=1*B2+2*C2$ （前の行に A をかける）、D3 に $=C3/B3$ 、E3 に $=B3/B2$ と入れて、3行めを下へコピーします。

	A	B	C	D	E
1	回数	x	y	$y \div x$	何倍か
2	0	1	0		
3	1	2	1	0.5	2
4	2	5	4	0.8	2.5
5	3	14	13	0.929	2.8
6	4	41	40	0.976	2.929
7	5	122	121	0.992	2.976

D列は1（向き $(1, 1)$ ）に、E列は3（固有値）に近づきます。B3・C3の式の数を変えれば、ほかの行列でも同じように確かめられます（例題3）。

5 コンピュータで求める

表計算には、固有値を求める関数はありません（やってみようの表やべき乗法で見つけます）。Python の numpy には、固有値と固有ベクトルを一度に求める関数 `np.linalg.eig` があります。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
w, V = np.linalg.eig(A)  # w に固有値、V に固有ベクトル
print(w)
print(V)
```

実行結果

```
[3.+0.j 1.+0.j]
[[ 0.70710678+0.j -0.70710678+0.j]
 [ 0.70710678+0.j  0.70710678+0.j]]
```

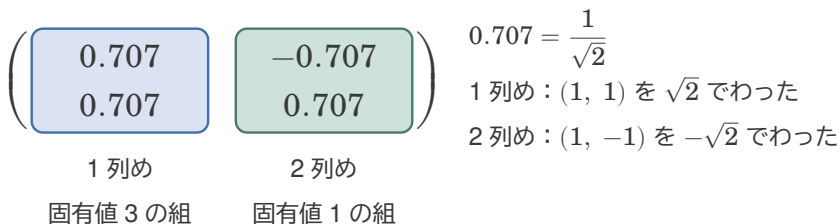


図8 numpyの固有ベクトルは、列（たて）に並んでいる。 w の1つめの固有値には V の1列め、2つめには2列めが組になる。

実行結果は、次のように読みます。

1 w の行

固有値は3と1です。 $+0.j$ は「虚部が0の複素数」という意味です（6-8：numpyの j は虚数単位）。numpy 2.5からは、固有値はいつも複素数の形で出てきます（2.4までの版では $[3. \ 1.]$ と出ます）。

2 V の行列

固有ベクトルは、**列ごと**にたてに並んでいます。1行めの $(0.707, -0.707)$ を固有ベクトルと読むのはまちがいです（まちがえやすいところ④）。

3 長さは1にそろえてある

0.70710678 は $1 \div \sqrt{2}$ です。1列めは $(1, 1)$ を、長さが1になるように $\sqrt{2}$ （ $(1, 1)$ の長さ。4-4の三平方）でわったものです。2列めは $(-0.707, 0.707)$ で、 $(1, -1)$ と向きが反対ですが、同じ直線の上なので、同じ固有ベクトルです。

見つけ方	できること
やってみようの表	向きが変わらない角を、表とグラフでだいたい見つける
べき乗法（くり返し）	いちばん大きい固有値と、その固有ベクトルを見つける
<code>np.linalg.eig</code>	全部の固有値と固有ベクトルを一度に（列に並ぶ・長さ 1）
⑥の特性方程式	式で、ぴったりの値を求める

表 2 固有値と固有ベクトルの見つけ方。どれで見つけても、最後は $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をかけて確かめられる。

ここまでで十分



向きが変わらない矢印を、かけて確かめ、表やくり返しやコンピュータで見つけられれば十分です。この先は、式でぴったり求めます。

 式でわかる 特性方程式で求める



⑥ $\det(A - \lambda I) = 0$: 特性方程式

表やくり返しでは、だいたいの向きしかわかりません。 λ と $\vec{v}$ を、式でぴったり求める方法を作ります。わからないものは、固有値 λ と、固有ベクトル $\vec{v} = (x, y)$ の 3 つです。まず、 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ を変形します。

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

固有ベクトルの式

$$A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$$

単位行列 I はかけても変わらないので、

$$\vec{v} = I\vec{v} \quad (7-3)$$

$$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$$

右辺を左辺へうつした

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

 $\vec{v}$ でくくった (行列の分配法則。7-3)

2 行めで I を入れたのは、行列 A から数 λ を、そのままではひけないからです (大ききのちがうものはひけない。7-1)。 λI は、ななめに λ が並んだ行列なので、 $A - \lambda I$ は、**ななめの成分 (対角成分) からだけ λ をひいた行列**になります。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

なぜ、行列式が 0 になるのか

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ は、「行列 $A - \lambda I$ は、 $\vec{0}$ でない矢印 $\vec{v}$ を、原点につぶしてしまう」ということです。そんなことができるのは、どんな行列でしょう。2 通りで考えます。

図で考える $\lambda = 3$ のとき、 $A - 3I$ を方眼にかけてみます。

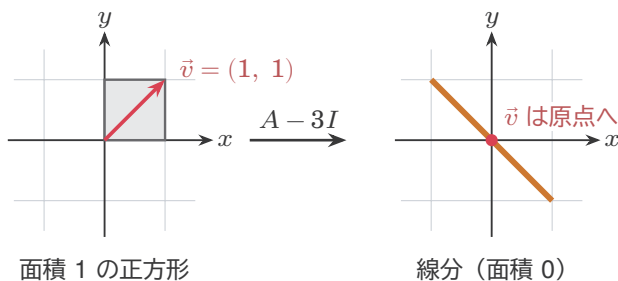


図 9 $A - 3I$ をかけると、正方形は 1 本の線分につぶれる。(1, 0) は (-1, 1) に、(0, 1) は (1, -1) に、(1, 1) は原点に行く。

$A - 3I$ の1列めは $(-1, 1)$ 、2列めは $(1, -1)$ です (7-2: 列は物差しの矢印 $(1, 0) \cdot (0, 1)$ の行き先)。2本の列は同じ直線の上にあるので、正方形は平行四辺形にならず、1本の線分につぶれます。面積は0。7-4の「行列式0 = 平らにつぶれる」です。 $\vec{0}$ でない矢印が原点に行くのは、平面がつぶれるときだけです。

逆行列で考える もし $\det(A - \lambda I) \neq 0$ なら、逆行列 $(A - \lambda I)^{-1}$ があります (7-5)。 $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ の両辺に左からかけると、 $\vec{v} = (A - \lambda I)^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ 。 $\vec{v}$ は $\vec{0}$ になってしまい、固有ベクトルではありません。だから、固有ベクトルがあるためには、行列式が0でなければなりません。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

特性方程式 (固有方程式ともいう)

この λ の方程式を、行列 A の**特性方程式** (とくせいほうていしき)、または固有方程式といいます。6-12と同じ名前なのは、⑦で見るように、同じものだからです。

主役の行列で解く

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \times 1 \quad ad - bc \text{ (7-4)}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 \quad \text{かっこを展開した (3-8)}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \quad \text{まとめた}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \text{特性方程式}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{因数分解した (3-10)}$$

$$\lambda = 1, 3 \quad \text{固有値}$$

やってみようの表で見つけた「3倍」と「1倍」が、式から出てきました。

固有値から、固有ベクトルを求める

$\lambda = 3$ を $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ にもどします。 $\vec{v} = (x, y)$ として、

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 行めは $-x + y = 0$ 、2 行めは $x - y = 0$ です。**2つの式は同じ式**です（2つめは、1つめに -1 をかけたもの）。どちらも $y = x$ を表します。

● なぜ同じ式になる？

$\det(A - 3I) = 0$ なので、 $A - 3I$ の 2 つの行は平行です（7-4：行列式 0 なら、2 本の列も 2 本の行も平行）。だから 2 つの式は同じことを言っています。もし別々の式だったら、連立方程式の答えは $x = y = 0$ の 1 つだけになり（3-6）、固有ベクトルは見つかりません。

● 確かめに使える

計算した λ を入れても 2 つの式が同じにならなければ、 λ の計算がまちがっています。

$y = x$ をみたとす $\vec{0}$ でない矢印なら、どれでも固有ベクトルです。いちばん簡単な $(1, 1)$ を答えにします。

$\lambda = 1$ のときは、 $A - I$ の行が $(1, 1)$ と $(1, 1)$ になり、2 つの式はどちらも $x + y = 0$ です。 $y = -x$ なので、固有ベクトルは $(1, -1)$ です。

たいせつ

固有値と固有ベクトルの求め方

- ① 対角成分から λ をひいた行列 $A - \lambda I$ を作る。
- ② 特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ (λ の 2 次方程式) を解いて、固有値を出す。
- ③ 固有値を 1 つずつ $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ に入れる。2 つの式は同じ式になるので、1 つから x と y の関係を出す。
- ④ その関係をみたとす簡単な $\vec{v}$ を答え、 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をかけて確かめる。

2つの確かめの式

2×2 の行列を文字で書き、特性方程式を、文字のまま作ります。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

いっぽう、2つの固有値を λ_1, λ_2 とすると、この式は次のようにも書けます (6-12 の解と係数の関係)。

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

2つの式の係数をくらべると、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad (\text{対角成分の和}) \quad \lambda_1\lambda_2 = ad - bc = \det A$$

主役の行列なら、 $3 + 1 = 4 = 2 + 2$ 、 $3 \times 1 = 3 = \det A$ です。台車の B なら、次のとおりです。

$$(-100) + (-120) = -220 = (-110) + (-110)$$

$$(-100) \times (-120) = 12\,000 = (-110) \times (-110) - 10 \times 10$$

2つめの式には、おもしろい意味があります。主役の行列は、 $(1, 1)$ の向きに3倍、 $(1, -1)$ の向きに1倍のばします。だから面積は $3 \times 1 = 3$ 倍。7-4 で方眼を数えて見つけた「面積3倍」は、2つの固有値のかけ算だったのです。

7 6-12 の s は、行列の固有値

6-12 では、ばね・質量・ダンパーの式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に $x = e^{st}$ を入れて、特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$ を作りました。そこで「第7巻では、行列の固有値も同じ λ で書く」と約束しました。同じ「特性方程式」の名前がついているわけを、確かめます。

2 回微分の式を、行列の式にする

6-14 ④ で、2 回微分の式 1 つは、「位置」と「速度」の 1 回微分の式 2 つの組に書きかえられました。速度を $\dot{x}$ と書くと、

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x}$$

2 つめは、 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ を「 $\ddot{x} = \dots$ 」の形にしたものです。位置と速度をたてに並べたベクトルを $\vec{x}$ として (6-14 の「状態」)、係数を行列にまとめます。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

右辺の 1 行めは $0 \times x + 1 \times \dot{x} = \dot{x}$ 、2 行めは $-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x}$ で、たしかにもとの 2 つの式です。左辺の $\dot{\vec{x}}$ は、ベクトルの成分を 1 つずつ微分したものです。この節では、この行列を A (状態の行列) とよびます。

状態の行列の特性方程式

対角成分から λ をひくと、次の行列になります。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda) \left(-\frac{c}{m} - \lambda \right) - 1 \times \left(-\frac{k}{m} \right) \quad ad - bc \text{ (7-4)}$$

$$= \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} \quad \text{展開した}$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad = 0 \text{ と置き、} m \text{ をかけた}$$

最後の式は、6-12 の特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$ の s を λ に書きかえたものと、まったく同じです。

6-12 の特性方程式の $s =$ 状態の行列の固有値 λ

3-10 の 2 つの式と、6-7 のばねで、数を確認めます。

もとの式	状態の行列 A	6-12 の特性方程式	固有値
$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$s^2 + 3s + 2 = 0$	$-1, -2$
$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$	$s^2 + 2s + 5 = 0$	$-1 \pm 2j$
$0.5\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 8x = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{pmatrix}$	$0.5s^2 + 0.4s + 8 = 0$	$-0.4 \pm 3.980j$

表3 1行めと2行めは3-10・6-12の車A・車B、3行めは6-7のばね ($m = 0.5 \text{ kg}$ 、 $k = 8 \text{ N/m}$ 、 $c = 0.4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$)。固有値は numpy で確かめた。

3行めの -16 は $-k/m = -8 \div 0.5$ 、 -0.8 は $-c/m = -0.4 \div 0.5$ です。固有値の 3.980 は、6-12 の ω_d (減衰があるときの角振動数) と同じ数です。

なぜ同じになる？ $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ を入れる

6-12 では、「微分しても形が変わらない関数」として e^{st} を入れました。行列の式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ では、それに「向きが変わらない矢印」を組み合わせ、 $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ という形をためします。向き $\vec{v}$ はそのまま、大きさだけが e^{st} で変わる動きです。

$$\vec{x} = \vec{v}e^{st}$$

向き $\vec{v}$ は変えず、大きさが e^{st} で変わる

$$\dot{\vec{x}} = s\vec{v}e^{st}$$

成分ごとに微分した (5-14: e^{st} の微分は se^{st})

$$s\vec{v}e^{st} = A\vec{v}e^{st}$$

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の両辺に入れた

$$A\vec{v} = s\vec{v}$$

両辺を e^{st} (0 にならない) でわった

最後の行は、 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ そのものです。 $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ が答えになるのは、 $\vec{v}$ が A の固有ベクトルで、 s がその固有値のときです。だから、6-12 の s は、状態の行列の固有値です。この本で s と書いてきたものを、大学の本では λ と書くことが多いのは、このためです。

車 A で確かめます。固有値 $s = -1$ のとき、 $A - (-1)I$ の 1 行めは $(1, 1)$ なので、 $x + \dot{x} = 0$ 、固有ベクトルは $(1, -1)$ です。「位置が 1 なら、速度は -1 」という形で、 $x = e^{-t}$ 、 $\dot{x} = -e^{-t}$ にぴったり合います (e^{-t} を微分すると $-e^{-t}$)。

6-14 の答えも、固有値と固有ベクトルで書ける

6-14 の水そう $\dot{\vec{h}} = H\vec{h}$ に $\vec{h} = \vec{v}e^{st}$ を入れると、 $H\vec{v} = s\vec{v}$ 。③で求めた固有値から、 $s = 0$ (向き $(1, 1)$) と $s = -0.2$ (向き $(1, -1)$) です。2 つの答えをたし合わせて、はじめの水位 $(20, 0)$ に合わせると、

$$\vec{h} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0.2t}$$

($t = 0$ で $(10 + 10, 10 - 10) = (20, 0)$ 。) 成分にすると $h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$ 、 $h_2 = 10 - 10e^{-0.2t}$ で、6-14 の答えと同じです。6-14 の専門書の「一般解は $c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2t}$ 」は、この式のことでした。

台車の式 $\ddot{x} = Bx$ に $x = \vec{v}e^{st}$ を入れると、2 回微分なので $s^2\vec{v} = B\vec{v}$ です。 s^2 が B の固有値 -100 になるのは $s = \pm 10j$ 。 $e^{\pm 10jt}$ は $\cos 10t$ と $\sin 10t$ でゆれる動き (6-10) で、③の $\omega_1 = 10$ と同じです。

第 9 巻 (9-10) では、モーターの電圧のように外から加える量も入れた $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} +$ (外から加える量の項) を**状態方程式**とよび、機械やロボットの制御の土台にします。その固有値が、機械が落ち着くかどうかを決めます。

8 複素数の固有値：回る動き

7-6 の回転行列 $R(30^\circ)$ は、どの矢印も左回りに 30° 回します。向きが変わらない矢印は、1 本もありません。特性方程式はどうなるでしょう。 $\cos 30^\circ = 0.866$ 、 $\sin 30^\circ = 0.5$ です。

$$R(30^\circ) - \lambda I = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ - \lambda & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\cos 30^\circ - \lambda)^2 + \sin^2 30^\circ = 0 \quad \det = 0. \text{ } ad - bc \text{ の } -bc \text{ は } +\sin^2 30^\circ$$

$$\lambda^2 - 2\cos 30^\circ \lambda + 1 = 0 \quad \text{展開し、}\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1 \text{ (4-6)}$$

$$\lambda = \cos 30^\circ \pm j \sin 30^\circ \quad \text{解の公式 (3-10・6-8)}$$

判別式は $4\cos^2 30^\circ - 4 = -4\sin^2 30^\circ$ で負なので、固有値は実数になりません。 $\lambda = 0.866 \pm 0.5j$ 、つまり 6-10 の $e^{\pm j30^\circ}$ です。**実数の固有ベクトルがないとき、固有値は複素数になり、その偏角が回る角を表します。** $|\lambda| = 1$ なのは、回転が長さを変えないからです。

ばね・質量・ダンパーでも同じです。⑦の表の車 B は $-1 \pm 2j$ でした。 $e^{(-1+2j)t} = e^{-t}(\cos 2t + j \sin 2t)$ なので (6-10)、実部 -1 は「 e^{-t} で小さくなる」、虚部 2 は「角振動数 2 で回る (ゆれる)」を表します。6-14 で見た、状態の点がうずをまいて原点に近づく動きです。

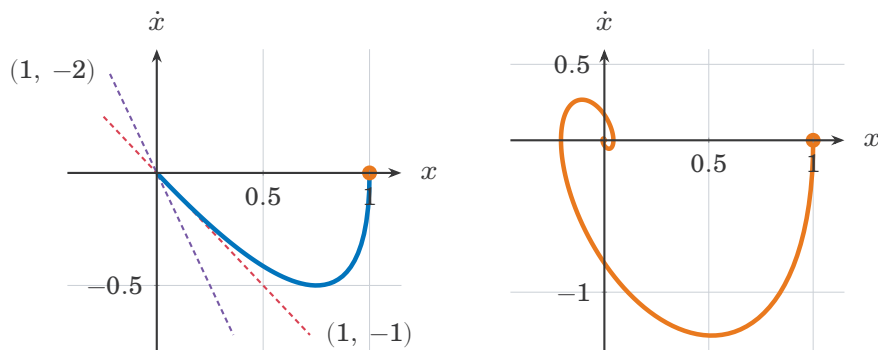


図 10 状態の点 $(x, \dot{x})$ の動き (オレンジの点がスタート)。左：車 A (固有値 $-1, -2$)。点は固有ベクトル $(1, -1)$ の直線 (赤の点線) にそって、ゆれずに原点へ。右：車 B (固有値 $-1 \pm 2j$)。実数の固有ベクトルがなく、うずをまいて原点へ。

左の車 A では、点は、はじめは固有ベクトル $(1, -2)$ の向き (固有値 -2 、速く小さくなる部分) の動きもまじっていますが、その部分は e^{-2t} ですぐに消え、あとは固有ベクトル $(1, -1)$ の直線にそって原点に近づきます (e^{-t} の部分が残る)。固有ベクトルは、状態の平面の上の「通り道」でもあるのです。

状態の行列の固有値	動き (6-12 ⑩ の s の場所と同じ)
負の実数	ゆれずに小さくなる (e^{-t} など)
0	変わらない (水そうの合計)
正の実数	どんどん大きくなる
複素数 (実部が負)	ゆれながら小さくなる (車 B・ダンパーつきのばね)
複素数 (実部が 0)	同じ大きさにゆれ続ける (台車の $\pm 10j$)

表 4 固有値の種類と、 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の動き。第 9 巻の制御では、固有値が全部「左半分」(実部が負)にあるように機械を作る。

9 対称な行列：固有ベクトルは直交する

ここまでの行列の固有ベクトルを、くらべてみます。

行列	固有値	固有ベクトル	内積
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (主役)	3、1	(1, 1)、(1, -1)	0
$\begin{pmatrix} -110 & 10 \\ 10 & -110 \end{pmatrix}$ (台車)	-100、-120	(1, 1)、(1, -1)	0
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	5、2	(1, 1)、(1, -2)	-1

表 5 固有ベクトルの内積 (4-12)。 $1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ 、 $1 \times 1 + 1 \times (-2) = -1$ 。

上の 2 つの行列では、2 本の固有ベクトルの内積が 0 で、直交しています (4-12)。この 2 つは、1-13 の九九の表のように、ななめの線をはさんで向かい合う成分が等しい**対称な行列**です (7-1)。3 つめの行列は対称ではなく、固有ベクトルは直交しません。

応力の行列：主応力と主方向

物理の本（力-9）では、物の中の力のかかり方（応力）を、 2×2 の対称な行列で表します。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} \quad (\text{単位は MPa})$$

（物理の本では、成分の σ_x と区別するために、この行列だけ太字で書きます。）

特性方程式は

$$\lambda^2 - 60\lambda - 2500 = 0 \quad \lambda = 30 \pm \sqrt{30^2 + 2500} = 30 \pm 58.31$$

（ $a + d = 80 - 20 = 60$ 、 $ad - bc = 80 \times (-20) - 30^2 = -2500$ 。）固有値は 88.31 と -28.31 で、固有ベクトルは $(1, 0.277)$ と $(1, -3.61)$ です。内積は $1 + 0.277 \times (-3.61) = 1 - 1.000 = 0$ （小さなちがいは丸めのため）で、直交しています。物理の本では、この固有値を**主応力**、固有ベクトルの向きを**主方向**とよびます。主方向の切り口では、ずらす力（せん断）がなく、引く力か押す力だけがはたらきます。

せいかくに言うと

対称な行列の固有値はいつも実数で、ちがう固有値の固有ベクトルは直交します。 2×2 で確かめます。対称な行列の 1 行めを (a, b) 、2 行めを (b, d) とします（右上と左下が同じ b ）。

実数になること 特性方程式 $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - b^2) = 0$ の判別式は

$$(a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a - d)^2 + 4b^2$$

で、2 乗の和なので 0 以上です。だから解は実数です（3-10）。

直交すること $b \neq 0$ のとき、 $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ の 1 行めは $(a - \lambda)x + by = 0$ なので、 $\vec{v} = (b, \lambda - a)$ が固有ベクトルです。2 つの固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルの内積は

$$b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = b^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) + a^2$$

です。ここに、2 つの確かめの式 $\lambda_1\lambda_2 = ad - b^2$ と $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ を入れます。

$$b^2 + (ad - b^2) - a(a + d) + a^2 = 0$$

だから直交します。($b = 0$ なら、固有ベクトルは $(1, 0)$ と $(0, 1)$ で、やはり直交します。) 3×3 以上の対称な行列でも同じことが成り立ちます (証明は大学の線形代数で学びます)。

たいせつ

固有ベクトル・固有値	$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$)。向きの変わらない矢印と倍率
特性方程式	$\det(A - \lambda I) = 0$ 。対角成分からだけ λ をひく
確かめの式	$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ 、 $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$
振動モード	形は固有ベクトル、固有値は $-\omega^2$
6-12 の s	状態の行列の固有値 ($\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ で $A\vec{v} = s\vec{v}$)
対称な行列	固有値は実数、固有ベクトルは直交

📖 この章で出てきたことば

固有ベクトル 行列をかけても向きが変わらない (原点を通る同じ直線の上にある)、 $\vec{0}$ でないベクトル。

固有値 固有ベクトルが、行列をかけると何倍になるかを表す数 λ 。0 や負の数、複素数のこともある。

特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ 。固有値を求める方程式。固有方程式ともいう。6-12 の特性方程式と同じもの。

べき乗法 同じ行列を何回もかけて、いちばん大きい固有値とその固有ベクトルを見つける方法。

主応力・主方向 応力の行列の固有値と、固有ベクトルの向き (物理 力-9)。

📇 記号カード

初めて出た章 7-8

 λ

読み方 ラムダ

意味 固有値。 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ の倍率。6-12 の特性方程式の s と同じもの

英語 eigenvalue

📇 記号カード

初めて出た章 7-8

 $\vec{v}$

読み方 ベクトル・ブイ

意味 この章では固有ベクトルによく使う文字。 $\vec{0}$ はのぞく。何倍しても同じ固有ベクトル

英語 eigenvector

📖 専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

n 次正方行列 A に対し、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をみたす零ベクトルでない $\mathbf{x}$ が存在するとき、 λ を A の固有値、 $\mathbf{x}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルという。 λ が A の固有値であるための必要十分条件は、 $|A - \lambda E| = 0$ である。実対称行列の固有値はすべて実数であり、相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。

訳 「 n 次正方行列」はたて・横 n 個ずつの行列。太字の $\mathbf{x}$ は、この本の矢印のベクトル $\vec{v}$ 。「零ベクトル」は $\vec{0}$ 。 $|A - \lambda E|$ は $\det(A - \lambda I)$ のこと (E は単位行列。この本では I)。「必要十分条件」は「ちょうどそのとき」。「実対称行列」は成分が実数の対称な行列、「相異なる」は「ちがう」。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

質量がちがう台車

2 つの台車の質量が m_1 、 m_2 とちがうと、運動方程式を質量でわる数が上と下でちがうので、係数の行列は対称になりません。それでも、 $\vec{x} = \vec{v} \cos \omega t$ を入れると、同じように $-\omega^2$ が固有値、モードの形が固有ベクトルになります。大学の本では、質量の行列 M とばねの行列 K を使って $K\vec{v} = \omega^2 M\vec{v}$ と書きます (物理 波-3 の多自由度の振動)。

3×3 の行列の特性方程式は、3 次方程式になります。手で解くのはたいへんなので、べき乗法や `np.linalg.eig` で求めます (3 階建ての建物、3 次元の応力)。

例題でたしかめよう

例題 1 固有ベクトルかどうかを確かめる

次の行列 A について、下の 3 つのベクトルが固有ベクトルかどうかを調べ、固有ベクトルなら固有値を答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $(1, 1)$ (2) $(1, -2)$ (3) $(2, 1)$

考え方 ③の手順。 $A\vec{v}$ を計算して、成分どうしをわった答えがそろうかを見る。

式 (1) $A\vec{v} = (4 \times 1 + 1 \times 1, 2 \times 1 + 3 \times 1) = (5, 5)$

$$5 \div 1 = 5, 5 \div 1 = 5 \text{ でそろう}$$

(2) $A\vec{v} = (4 \times 1 + 1 \times (-2), 2 \times 1 + 3 \times (-2)) = (2, -4)$

$$2 \div 1 = 2, (-4) \div (-2) = 2 \text{ でそろう}$$

(3) $A\vec{v} = (4 \times 2 + 1 \times 1, 2 \times 2 + 3 \times 1) = (9, 7)$

$$9 \div 2 = 4.5, 7 \div 1 = 7 \text{ でそろわない}$$

答え (1) 固有ベクトル、固有値 5 (2) 固有ベクトル、固有値 2

(3) 固有ベクトルではない

じぶんでこう 1

次の行列 A について、 $(1, 1)$ 、 $(1, -2)$ 、 $(1, 2)$ が固有ベクトルかどうかを調べ、固有ベクトルなら固有値を答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例題2 台車の振動モード

6-14の例題6と同じ台車2つです。質量は $m = 2\text{ kg}$ 、外側のばね2本は $k = 200\text{ N/m}$ 、つなぎのばねは $K = 100\text{ N/m}$ です。

- (1) $\ddot{x} = Bx$ の係数の行列 B を求めましょう。
- (2) $(1, 1)$ と $(1, -1)$ が固有ベクトルであることを確かめ、固有値を求めましょう。
- (3) 2つのモードの角振動数を求めましょう。

考え方 対角成分は $-(k + K) \div m$ 、ほかは $K \div m$ (③)。角振動数は $\omega = \sqrt{-\lambda}$ 。

式 (1) $-(200 + 100) \div 2 = -150$ 、 $100 \div 2 = 50$

(2) $B(1, 1) = (-150 + 50, 50 - 150) = (-100, -100)$ なので
固有値 -100

$B(1, -1) = (-150 - 50, 50 + 150) = (-200, 200)$ なので
固有値 -200

(3) $\omega_1 = \sqrt{100} = 10$ 、 $\omega_2 = \sqrt{200} \approx 14.1$

答え (1) 対角成分が -150 、ほかが 50 の行列

(2) -100 (いっしょに動く)、 -200 (反対に動く)

(3) 10 rad/s 、約 14.1 rad/s (6-14 と同じ)

じぶんでこう2

$m = 1\text{ kg}$ の台車2つを、 $k = 16\text{ N/m}$ のばね2本と $K = 10\text{ N/m}$ のつなぎのばねでつなぎます。係数の行列 B 、 $(1, 1)$ と $(1, -1)$ の固有値、2つのモードの角振動数を求めましょう。

例題3 くり返しかけて、固有ベクトルを見つける

次の行列 A を、 $(1, 0)$ に 3 回かけましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

また、そのたびに「 y 成分 $\div$ x 成分」と「 x 成分が前の何倍になったか」を求め、近づいていく固有ベクトルと固有値を予想しましょう。

考え方 ④のべき乗法。かけるたびに、前の答えに A をかける。

式 1 回： $(4 \times 1 + 1 \times 0, 2 \times 1 + 3 \times 0) = (4, 2)$ 、 $2 \div 4 = 0.5$ 、4 倍

2 回： $(4 \times 4 + 1 \times 2, 2 \times 4 + 3 \times 2) = (18, 14)$

$14 \div 18 \approx 0.778$ 、 $18 \div 4 = 4.5$ 倍

3 回： $(4 \times 18 + 1 \times 14, 2 \times 18 + 3 \times 14) = (86, 78)$

$78 \div 86 \approx 0.907$ 、 $86 \div 18 \approx 4.78$ 倍

$y \div x$ は 1 に、倍率は 5 に近づいていく

答え $(4, 2)$ 、 $(18, 14)$ 、 $(86, 78)$ 。固有ベクトル $(1, 1)$ 、固有値 5（例題 1 の (1) と同じ）

じぶんでこう3

次の行列 A を、 $(1, 0)$ に 3 回かけましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

そのたびに「 y 成分 $\div$ x 成分」と「 x 成分が前の何倍になったか」を求め、近づいていく固有ベクトルと固有値を予想しましょう。

例題 4 numpy の答えを読む

例題 1 の行列 A で $w, V = \text{np.linalg.eig}(A)$ を実行すると、次のように表示されました。固有値と、それぞれの固有ベクトルを、成分が簡単な整数の形で答えましょう。

実行結果

```
[5.+0.j 2.+0.j]
[[ 0.70710678+0.j -0.4472136 +0.j]
 [ 0.70710678+0.j  0.89442719+0.j]]
```

考え方 固有ベクトルは列に並ぶ (⑤)。長さ 1 にそろえてあるので、いちばん小さい成分の大ききでわって整数にする。

式 固有値：1 つめが 5、2 つめが 2 (+0.j は虚部 0)

固有値 5：1 列め (0.707, 0.707) を 0.707 でわる

固有値 2：2 列め (-0.447, 0.894) を -0.447 でわる

答え 固有値 5、固有ベクトル (1, 1)。固有値 2、固有ベクトル (1, -2)

じぶんでところ 4

1 行めが (1, 4)、2 行めが (2, 3) の行列 A で $w, V = \text{np.linalg.eig}(A)$ を実行すると、下のように表示されました。固有値と、それぞれの固有ベクトルを、成分が簡単な整数の形で答えましょう。

実行結果

```
[-1.+0.j  5.+0.j]
[[-0.89442719+0.j -0.70710678+0.j]
 [ 0.4472136 +0.j -0.70710678+0.j]]
```

例題 5 特性方程式で固有値と固有ベクトルを求める

次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め、2つの確かめの式で確かめましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

考え方 ⑥の手順①～④。2つの式が同じ式になることを確かめながら進める。

式 $\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 \times 2$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \text{ より } (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0, \lambda = 6, 1$$

$$\lambda = 6: A - 6I \text{ の行は } (-1, 2) \text{ と } (2, -4)$$

$$\text{式は } -x + 2y = 0 \text{ と } 2x - 4y = 0 \text{ (同じ式)。} x = 2y \text{ より} \\ (2, 1)$$

$$\lambda = 1: A - I \text{ の行は } (4, 2) \text{ と } (2, 1)$$

$$\text{式は } 4x + 2y = 0 \text{ と } 2x + y = 0 \text{ (同じ式)。} y = -2x \text{ より} \\ (1, -2)$$

$$\text{確かめ: } 6 + 1 = 7 = 5 + 2, 6 \times 1 = 6 = 5 \times 2 - 2 \times 2$$

答え 固有値 6、固有ベクトル $(2, 1)$ 。固有値 1、固有ベクトル $(1, -2)$

じぶんでこう 5

次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め、2つの確かめの式で確かめましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

例題6 ばね・ダンパーの状態の行列

ばね・質量・ダンパーの式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$ ($m = 1 \text{ kg}$, $c = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k = 3 \text{ N/m}$) について、

- (1) 状態の行列 A を求めましょう。
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求め、6-12 の特性方程式の解とくらべましょう。

考え方 ⑦。1行めは $(0, 1)$ 、2行めは $(-k/m, -c/m)$ 。

式 (1) 1行め $(0, 1)$ 、2行め $(-3, -4)$

$$(2) \det(A - \lambda I) = (-\lambda)(-4 - \lambda) - 1 \times (-3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \text{ より } \lambda = -1, -3$$

$\lambda = -1$: $A + I$ の1行め $(1, 1)$ から $x + y = 0$ 、固有ベクトル $(1, -1)$

$\lambda = -3$: $A + 3I$ の1行め $(3, 1)$ から $3x + y = 0$ 、固有ベクトル $(1, -3)$

6-12: $s^2 + 4s + 3 = 0$ の解も $-1, -3$ で同じ

答え (1) 1行め $(0, 1)$ 、2行め $(-3, -4)$ の行列

(2) -1 と $(1, -1)$ 、 -3 と $(1, -3)$ 。6-12 の s と同じ

じぶんでとこう6

$2\ddot{x} + 6\dot{x} + 4x = 0$ ($m = 2 \text{ kg}$, $c = 6 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k = 4 \text{ N/m}$) の状態の行列 A 、固有値と固有ベクトルを求め、6-12 の特性方程式の解とくらべましょう。

例題 7 複素数の固有値

$\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$ の状態の行列 A の固有値を求め、どんな動きになるかを答えましょう。

考え方 ⑧。特性方程式の判別式が負なら、固有値は複素数。実部が負なら小さくなり、虚部が角振動数。

式 A は 1 行め $(0, 1)$ 、2 行め $(-10, -2)$

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)(-2 - \lambda) + 10 = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

$$\text{解の公式：}\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm 6j}{2} = -1 \pm 3j$$

実部 -1 ： e^{-t} で小さくなる。虚部 3 ：角振動数 3 rad/s でゆれる

答え $-1 \pm 3j$ 。ゆれながら小さくなる（角振動数 3 rad/s 、 e^{-t} でへる）

例題 8 対称な行列：応力の主応力と主方向

次の応力の行列 (MPa) の主応力 (固有値) と主方向 (固有ベクトル) を求め、2 本の固有ベクトルが直交することを確認しましょう。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

考え方 ⑥の手順で求め、⑨のように内積を計算する。

$$\text{式 } \lambda^2 - 70\lambda + (50 \times 20 - 20 \times 20) = \lambda^2 - 70\lambda + 600 = 0$$

$$(\lambda - 10)(\lambda - 60) = 0 \text{ より } \lambda = 60, 10$$

$$\lambda = 60 : 1 \text{ 行め } (-10, 20) \text{ から } -10x + 20y = 0, x = 2y, (2, 1)$$

$$\lambda = 10 : 1 \text{ 行め } (40, 20) \text{ から } 40x + 20y = 0, y = -2x, (1, -2)$$

$$\text{内積：} 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$$

答え 主応力 60 MPa (主方向 $(2, 1)$)、 10 MPa (主方向 $(1, -2)$)。内積 0 で直交

じぶんでこう7

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$ の状態の行列 A の固有値を求め、どんな動きになるかを答えましょう。

じぶんでこう8

次の応力の行列 (MPa) の主応力と主方向を求め、直交することを確認しましょう。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① 固有ベクトルに $\vec{0}$ を答える

✗ $(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$ の答えは $\vec{v} = (0, 0)$

○ $y = x$ をみたす $\vec{0}$ でない $\vec{v}$ 、たとえば $(1, 1)$

$\vec{0}$ はどんな λ でも式をみたすので、固有ベクトルにはふくめません。 $\vec{0}$ しか出てこないときは、 λ の計算をまちがえています。

⚠ まちがえやすいところ

② 全部の成分から λ をひく

✗ $A - \lambda I$ の行を $(2 - \lambda, 1 - \lambda)$ 、 $(1 - \lambda, 2 - \lambda)$ とする

○ $A - \lambda I$ の行は $(2 - \lambda, 1)$ 、 $(1, 2 - \lambda)$

λI は、対角成分だけが λ で、ほかは 0 の行列です。だから λ は対角成分からだけひきます。

⚠ まちがえやすいところ

③ 長さや向きがちがうと「答えがちがう」と思う

✕ 答えは $(1, 1)$ なので、 $(2, 2)$ や $(-0.707, -0.707)$ はまちがい

○ 同じ直線の上なら、どれも同じ固有ベクトル

$(1, 1)$ の何倍 ($\vec{0}$ 以外) でも、 A をかけると同じ 3 倍になります。答えの成分の比 ($x : y$) が同じかどうかを見ます。

⚠ まちがえやすいところ

④ numpy の固有ベクトルを行で読む

✕ V の 1 行め $(0.707, -0.707)$ が、固有値 3 の固有ベクトル

○ V の 1 列め $(0.707, 0.707)$ が、固有値 3 の固有ベクトル

numpy は固有ベクトルを列 (たて) に並べて返します。かけて確かめると、1 行めの $(0.707, -0.707)$ は A をかけると $(0.707, -0.707)$ で、3 倍になりません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ λ と ω を取りちがえる

✕ 固有値 -100 だから

$$\omega = -100$$

○ $\omega = \sqrt{-(-100)} = 10$

台車の固有値は $-\omega^2$ です。符号を変えてから平方根をとります。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 固有値 0 はだめだと思う

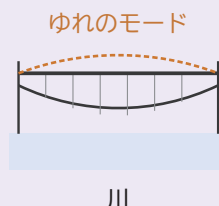
✕ $H\vec{v} = \vec{0}$ なので $(1, 1)$ は固有ベクトルでない

○ 固有値 0 の固有ベクトルだめなのは $\vec{v} = \vec{0}$ です。 $\lambda = 0$ はかまいません。

物理・工学ではこう使う

橋や建物の固有振動数とモード

2000年に開通したロンドンのミレニアム・ブリッジ（歩行者用のつり橋）は、たくさんの人が歩くと横に大きくゆれ、2日ほどで通行止めになりました。人が歩くときの横ゆれのリズム（1秒に1回ほど）が、橋の横ゆれのモードの振動数に近く、共振（6-13）したと説明されています。ダンパーをつけて、2002年に再開しました。橋や建物の設計では、固有値（固有振動数）と固有ベクトル（モードの形）をコンピュータで求め、地震や風、人の歩くリズムと重ならないようにします。

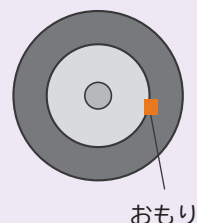


主応力：部品のこわれやすい向き

機械の部品に力がかかると、中の応力は向きによってちがいます。応力の行列の固有値（主応力）がいちばん大きい向きで、部品はさけやすくなります。ひずみゲージ（のびをはかるセンサー）で3つの向きののびをはかって応力の行列を作り、固有値を計算すれば、どの向きにどれだけの力がかかっているかがわかります（物理 力-9）。

タイヤのバランス：ぶれずに回る軸

回る物の回りにくさ（慣性モーメント）は、3次元では1つの数ではなく、 3×3 の対称な行列（慣性の行列）になります（物理 力-6）。その固有ベクトルの向きの軸（主軸）のまわりなら、物はぶれずに回ります。車のタイヤをかえると、ホイールに小さなおもりをはりつけて、回る軸と主軸をそろえます（バランス取り）。



🔍 コラム 量子の世界の「とびとびの値」

原子の中の電子は、決まったとびとびのエネルギーしか持ってません。この「とびとびの値」は、シュレディンガー方程式という方程式の固有値として求められます（物理 原-5）。水素原子から出る光の色（波長）がとびとびなのは、このためです。固有値の考えは、橋のゆれから原子の中まで、とても広く使われています。

✓ 章末問題

7-8 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次の行列 A について、 $(1, 1)$ 、 $(1, -2)$ 、 $(1, 2)$ が固有ベクトルかどうかを調べ、固有ベクトルなら固有値を答えましょう(📖 例題 1)。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 6-14 の水そうで、管を太くすると、水位の式が次のようになりました (cm、分)。 $(1, 1)$ と $(1, -1)$ が固有ベクトルかどうかを調べ、固有ベクトルなら固有値を答えましょう(📖 例題 1)。

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

3 $m = 1 \text{ kg}$ の台車 2 つを、 $k = 36 \text{ N/m}$ のばね 2 本と $K = 32 \text{ N/m}$ のつなぎのばねでつなぎます。係数の行列 B 、 $(1, 1)$ と $(1, -1)$ の固有値、2 つのモードの角振動数を求めましょう(📖 例題 2)。

4 1の行列 A を $(1, 0)$ に3回かけ、そのたびに「 y 成分÷ x 成分」と「 x 成分が前の何倍になったか」を求めて、近づいていく固有ベクトルと固有値を予想しましょう(**例題3**)。

5 例題1の行列 A (1行め $(4, 1)$ 、2行め $(2, 3)$) の固有値と固有ベクトルを、特性方程式で求め、2つの確かめの式で確かめましょう(**例題5**)。

6 $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$ の状態の行列 A 、固有値と固有ベクトルを求め、6-12の特性方程式の解とくらべましょう(**例題6**)。

7 $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0$ の状態の行列の固有値を求め、どんな動きになるかを答えましょう(**例題7**)。

8 次の応力の行列 (MPa) の主応力と主方向を求め、直交することを確認しましょう(**例題8**)。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 60 & 20 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$$

チャレンジ ★★★★★

9 1行めが $(2, 3)$ 、2行めが $(3, 2)$ の行列 A で $w, V = \text{np.linalg.eig}(A)$ を実行すると、次のように表示されました。固有値と、それぞれの固有ベクトルを整数の形で答えましょう(**例題4**)。

```
[ 5.+0.j -1.+0.j]
[[ 0.70710678+0.j -0.70710678+0.j]
 [ 0.70710678+0.j  0.70710678+0.j]]
```

実行結果

10 次の応力の行列 (MPa) の主応力と主方向を求め、直交することを確認しましょう(**例題8**)。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 30 \\ 30 & -40 \end{pmatrix}$$

11 1 行めが $(7, 2)$ 、2 行めが $(2, 4)$ の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め、2 つの確かめの式と、固有ベクトルが直交することを確認しましょう ( 例題 5 ・  例題 8)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 行列をかけても向きが変わらない矢印を、図と表計算でさがせる。
→ 316 ページ
- ☐ $A\vec{v}$ を計算して固有ベクトルを確かめ、振動モードが固有ベクトルだと説明できる。
→ 320 ページ
- ☐ 特性方程式で固有値と固有ベクトルを求め、6-12 の s と同じものだと確かめられる。
→ 328 ページ



ミナ

向きの変わらない矢印が、ゆれ方まで教えてくれるんだね。次は、その矢印を物差しにしてみよう。

第3部 固有値と行列の使いみち

★★★★★

7-9

対角化：
まっすぐな方向に分けて考える

📌 道しるべ この章の前に 4-11 6-14 7-3 7-5 7-6 7-8
この章の先に 7-10 7-11 9-10 9-11

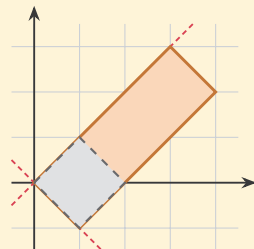
📌 この章でできるようになること

- ★★★★★ 固有ベクトルの「ななめの物差し」で見ると、行列の変換が「のびるだけ」になることを、図で説明できる。
- ★★★★★ 固有ベクトルを並べた P と固有値を並べた D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を計算で確かめられる。
- ★★★★★ 対角化を使って、 A^n を計算したり、台車の式をモードの座標でほどこいたりできる。

? はてな?

主役の行列 A をふつうの方眼にかけると、正方形はななめにゆがんだ平行四辺形になります (7-2)。

ところが、7-8 で見つけた 2 本の向き $(1, 1) \cdot (1, -1)$ でできた「ななめの正方形」にかけると、ゆがまずに長方形になります (灰色のななめの正方形が、オレンジの長方形に)。ななめの物差しで測ると、 A はどんな簡単なことをしているように見えるでしょう。



灰色のななめの正方形に A をかけると、オレンジの長方形になる。

7-8 で、主役の行列 A には「向きが変わらない矢印」が 2 本あることを見つけました。(1, 1) の向きは 3 倍に、(1, -1) の向きは 1 倍（そのまま）になります。

この章では、この 2 本の矢印を、新しい「物差し」として使います。4-11 で、ななめの 2 本の物差しで矢印を測ったのと同じです。ふつうの方眼 (x 軸・ y 軸) で見るとこみいった変換も、固有ベクトルの物差しで見ると、「それぞれの向きにのびるだけ」の、とても簡単な変換になります。この見方は、6-14 で 2 つの台車の式を「和と差」でほどいた方法を、行列の計算にしたものです。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」の段は作図だけ、「手でわかる」の段は行列のかけ算 (7-3) と逆行列 (7-5) だけで読めます。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。

🏠 やってみよう ななめの物差しで、家の絵を変換しよう

方眼紙に 7-2 の家の絵 (頂点①~⑤) をかき、原点を通る 2 本の直線 $y = x$ と $y = -x$ を引きます。

- ① それぞれの頂点が、矢印 (1, 1) を何本分と、矢印 (1, -1) を何本分たした所にあるかを読む。この 2 つの数を q_1 、 q_2 とする。
- ② q_1 を 3 倍し、 q_2 はそのままにする。
- ③ 「(1, 1) を $3q_1$ 本分」と「(1, -1) を q_2 本分」をたした点をかく。
- ④ その点が、頂点に主役の行列 A を直接かけた点 (7-2) と同じになるか、くらべよう。

たとえば頂点② (2, 0) は、(1, 1) を 1 本分と (1, -1) を 1 本分たした所です ($(1 + 1, 1 - 1) = (2, 0)$)。だから $q_1 = 1$ 、 $q_2 = 1$ 。 q_1 を 3 倍すると、 $3 \times (1, 1) + 1 \times (1, -1) = (4, 2)$ になり、 A を直接かけた $(2 \times 2 + 1 \times 0, 1 \times 2 + 2 \times 0) = (4, 2)$ と同じです。5 つの頂点をまとめると、次のようになります。

頂点	もとの点	q_1	q_2	$3q_1$	$3q_1(1, 1) + q_2(1, -1)$	A をかけた点
①	(0, 0)	0	0	0	(0, 0)	(0, 0)
②	(2, 0)	1	1	3	(4, 2)	(4, 2)
③	(2, 2)	2	0	6	(6, 6)	(6, 6)
④	(1, 3)	2	-1	6	(5, 7)	(5, 7)
⑤	(0, 2)	1	-1	3	(2, 4)	(2, 4)

表1 ななめの物差しで読み、 $(1, 1)$ の向きだけ3倍にしてもどすと、 A をかけた点とぴったり同じになる。

5つの頂点すべてで、同じ点になりました。主役の行列 A のしていることは、「 $(1, 1)$ の向きに3倍、 $(1, -1)$ の向きに1倍のぼすこと」と、まったく同じなのです。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 4-11** ななめの2本の物差し：平行でない2本の矢印 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ があれば、平面のどんな矢印も $s\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる ($\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ なら $(5, 5) = 2\vec{a} + 1\vec{b}$)。
- 6-14** 2つの台車の式は、和 $u = x_1 + x_2$ と差 $w = x_1 - x_2$ に組みかえると、ばらばらの6-6の形にほどけた。
- 7-3** 行列の積 AB の1列めは「 $A \times (B$ の1列め)」。かける順番を変えると、ふつうは答えが変わる。
- 7-5** 2×2 の逆行列は、 a と d を入れかえ、 b と c の符号を変え、全体を $ad - bc$ でわったもの。 $ad - bc = 0$ なら逆行列はない。
- 7-6** 回転行列は、転置するだけで逆行列になる： $R(\theta)^T = R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$ 。
- 7-8** $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ 。主役の行列の固有値は3と1、固有ベクトルは $(1, 1)$ と $(1, -1)$ 。対称な行列の固有ベクトルは直交する。

数学の道具

目でわかる ななめの方眼で見る

★★★

1 ななめの物差しで測る

やってみようの「 $(1, 1)$ を何本分、 $(1, -1)$ を何本分」という読み方は、4-11 のななめの物差しと同じです。2 本の固有ベクトルを、それぞれ物差しの矢印にしたのです。この物差しで方眼をかくと、ななめの方眼になります。

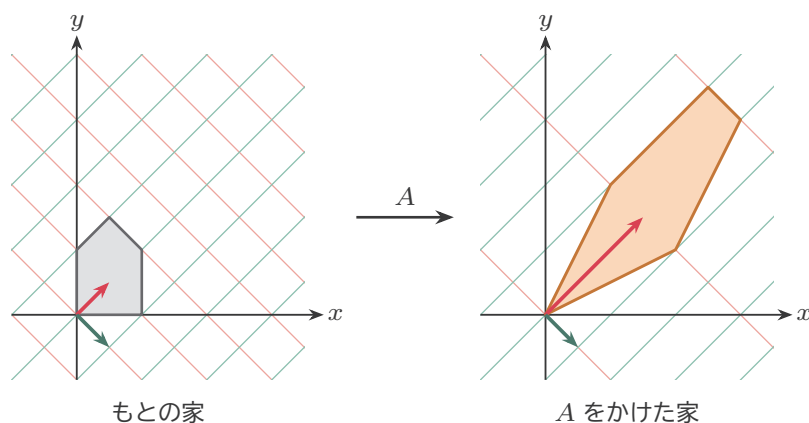


図 1 ななめの方眼（赤： $(1, 1)$ の何本分かが同じ線、緑： $(1, -1)$ の何本分かが同じ線）。
 A をかけると、赤い線のあいだが 3 倍に広がり、緑の線のあいだはそのまま。

図 1 の左の方眼の赤い線は、 q_1 ($(1, 1)$ の本数) が同じ点を結んだ線、緑の線は、 q_2 ($(1, -1)$ の本数) が同じ点を結んだ線です。 A をかけると、赤い線と赤い線のあいだが 3 倍に広がるだけで、緑の線のあいだは変わりません。家の絵は、ななめの方眼ごと、 $(1, 1)$ の向きに 3 倍にのばされたのです。ふうの方眼で見ると「ななめにゆがむ」のに、ななめの方眼で見ると「1 つの向きにのびるだけ」です。

なぜ、のびるだけになるのか

わけは、7-2 の「線形」(たしてからかけても、かけてからたしても同じ) と、7-8 の固有ベクトルの性質です。 $\vec{v}_1 = (1, 1)$ 、 $\vec{v}_2 = (1, -1)$ として、

$$A(q_1\vec{v}_1 + q_2\vec{v}_2) \quad \text{ななめの物差しで } q_1, q_2 \text{ と読める点に、} A \text{ をかける}$$

$$= q_1 A\vec{v}_1 + q_2 A\vec{v}_2 \quad \text{線形 (7-2) : たしてからかけても、かけてからたしても同じ}$$

$$= q_1 \times 3\vec{v}_1 + q_2 \times 1\vec{v}_2 \quad \text{固有ベクトル (7-8) : } A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1, A\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2$$

$$= (3q_1)\vec{v}_1 + (1q_2)\vec{v}_2 \quad q_1 \text{ が 3 倍、} q_2 \text{ が 1 倍になった}$$

ななめの物差しで読んだ数 (q_1, q_2) は、 A をかけると $(3q_1, 1q_2)$ になります。それぞれの数に、別々の数をかけるだけです。

ななめの物差しの読み方

点 (x, y) を、ななめの物差しで q_1, q_2 と読むには、次の連立方程式を解きます。

$$q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad q_1 + q_2 = x, \quad q_1 - q_2 = y$$

2つの式をたすと $2q_1 = x + y$ 、ひくと $2q_2 = x - y$ です (3-6 の加減法)。

$$q_1 = \frac{x+y}{2} \quad q_2 = \frac{x-y}{2}$$

頂点④ $(1, 3)$ なら、 $q_1 = (1+3) \div 2 = 2$ 、 $q_2 = (1-3) \div 2 = -1$ で、表と同じです。

2 6-14 の和と差は、ななめの物差しだった

6-14 では、2つの台車の位置 x_1 、 x_2 を、和 $u = x_1 + x_2$ と差 $w = x_1 - x_2$ に組みかえて、式をほどきました。①の読み方とくらべると、

$$q_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{u}{2} \quad q_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{w}{2}$$

です。和と差は、2でわるかどうかのちがいだけで、ななめの物差しの読み q_1 、 q_2 そのものです。7-8 で見たように、台車の係数の行列 B の固有ベクトルは $(1, 1)$ と $(1, -1)$ でした。**6-14 で和と差を使ったのは、台車の動きを、固有ベクトルの物差しで測ったことだったのです。**

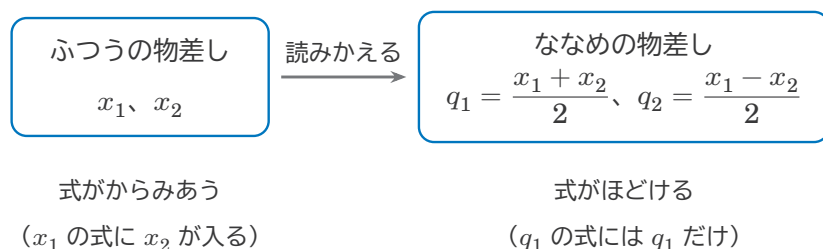


図2 同じ動きを、ちがう物差しで測る。固有ベクトルの物差しなら、式がばらばらにほどける。

？はてな？ の答え

ななめの物差し $(1, 1) \cdot (1, -1)$ で測ると、主役の行列 A は、 $(1, 1)$ の向きに3倍、 $(1, -1)$ の向きに1倍のばすだけです。だから、ななめの正方形は、 $(1, 1)$ の向きに3倍にのびた長方形になります。

たいせつ

- 固有ベクトルを物差しにして測ると、行列の変換は「それぞれの向きに固有値倍のびるだけ」になる。
- 主役の行列なら、 $q_1 = \frac{x+y}{2}$ が3倍、 $q_2 = \frac{x-y}{2}$ が1倍。
- 6-14 の和と差は、固有ベクトルの物差しで測った読みだった。



手でわかる 軸を変えて見る



③ 軸を変えて見る： $\vec{x} = P\vec{q}$

①の「ななめの物差しで読む」「のぼす」「もどす」の3つを、行列で書きます。まず、2本の固有ベクトルを、たてに並べて行列を作ります。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 列めが } \vec{v}_1 = (1, 1), 2 \text{ 列めが } \vec{v}_2 = (1, -1))$$

7-2 で学んだように、行列×ベクトルは「列の矢印を、成分の数ずつたしたもの」です。

$$P \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix}$$

だから、 $\vec{x} = P\vec{q}$ は「ななめの物差しで q_1, q_2 と読める点は、ふつうの座標で $\vec{x}$ 」という意味です。 P は、**ななめの物差しの読みを、ふつうの座標にもどす機械**です。逆に、ふつうの座標をななめの物差しで読むのは、逆行列 P^{-1} です (7-5)。

$$\det P = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \quad P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$P^{-1}\vec{x}$ の成分は $\frac{x+y}{2}$ と $\frac{x-y}{2}$ で、①の読み方そのものです。

「のぼす」は、 q_1 を3倍、 q_2 を1倍にすることでした。これは、ななめに固有値を並べた行列 D をかけることです。

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3q_1 + 0 \times q_2 \\ 0 \times q_1 + 1 \times q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

D のように、対角成分のほかがすべて0の行列を、**対角行列**（たいかくぎょうれつ）といいます。対角行列をかけることは、それぞれの成分を別々に何倍かすることです。成分どうしがまざらないので、いちばん簡単な行列です。

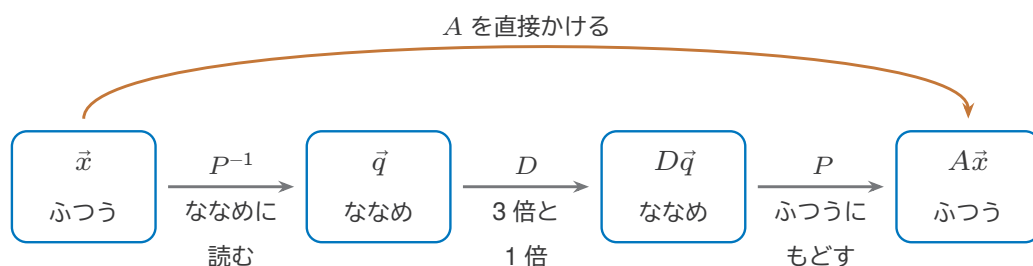


図3 上の道（ A を直接かける）と、下の道（ななめに読む→のぼす→もどす）は、同じ所に着く。

上の道と下の道が同じ所に着くので、どんな $\vec{x}$ でも $A\vec{x} = PDP^{-1}\vec{x}$ です。行列の積は右から順に働く（7-3）ので、 PDP^{-1} は「 P^{-1} が先、 D が次、 P が最後」です。点 $(1, 3)$ で確かめます。

- ① ななめに読む： $\frac{1+3}{2} = 2$ 、 $\frac{1-3}{2} = -1$ なので、 $P^{-1}\vec{x}$ は $(2, -1)$ 。
- ② のぼす： D をかけて、1 つめだけ 3 倍。 $D\vec{q}$ は $(6, -1)$ 。
- ③ もどす： P をかけて、 $(6-1, 6+1) = (5, 7)$ 。これは、 A を直接かけた $A(1, 3) = (5, 7)$ と同じです。

このように、座標の軸（物差し）を、問題に合わせて取りかえて考えることを、物理の本では「**軸を変えて見る**」といいます（物理 力-9）。

④ 表計算と Python で $P^{-1}AP$ を計算する

$A = PDP^{-1}$ の両辺に、左から P^{-1} 、右から P をかけると、 $P^{-1}AP = D$ になるはず（くわしくは⑤）。ななめの物差しで見た A が、対角行列 D になるか、表計算で確かめます。 P を A2:B3 に、 A を C2:D3 に入れ、E2 に次の式を入れて、7-1 と同じように確定します。

E2	=MMULT(MMULT(MINVERSE(A2:B3), C2:D3), A2:B3)
----	--

	A	B	C	D	E	F
1	P		A		$P^{-1}AP$	
2	1	1	2	1	3	0
3	1	-1	1	2	0	1

表 2 MINVERSE(A2:B3) が P^{-1} 、内側の MMULT が $P^{-1}A$ 、外側の MMULT で右から P をかける。

答えは、対角成分が 3 と 1、ほかの 0 の対角行列 D です。Python でも同じです。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
P = np.array([[1, 1],
              [1, -1]])
print(np.linalg.inv(P) @ A @ P) # 固有ベクトルを列に並べる
                                # P の逆行列、A、P の順にかける
```

実行結果

```
[[3. 0.]
 [0. 1.]]
```

@ は行列のかけ算です (7-1)。左から順に計算されますが、 $(P^{-1}A)P$ と $P^{-1}(AP)$ は同じなので (7-3 のつなぎ方の自由)、どちらで考えてもかまいません。

numpy の固有ベクトルを、そのまま P に使う

7-8 ⑤ で見たように、`np.linalg.eig` は固有ベクトルを列に並べた行列 V を返します。これは、そのまま P として使えます (長さが 1 にそろえてあっても、固有ベクトルの長さは自由なので、対角化には関係ありません。⑤の「気をつけること」②)。

Python

```
import numpy as np
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True) # 小数第3位まで表示
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
w, V = np.linalg.eig(A) # Vの列が固有ベクトル
print(np.linalg.inv(V) @ A @ V) # VをPとして使う
```

実行結果

```
[[ 3.+0.j  0.+0.j]
 [-0.+0.j  1.+0.j]]
```

対角成分は、 w と同じ順の固有値 3 と 1、ほかは 0 です (+0.j は虚部 0、-0.j は丸めのずれでできたごく小さな負の数を 0 と表示したもの)。表示を小数第 3 位までにしないと、0 のかわりに $4.8\text{e-}17$ (4.8×10^{-17}) のような、とても小さな数が出ます。2-19 の 0.1 の話と同じ、丸めのずれです。

ここまでで十分



固有ベクトルの物差しで見ると「のびるだけ」になることを、図と数で確かめられれば十分です。この先は、式で一般の形にします。



式でわかる 対角化と、その使いみち

★★★★★

5 対角化： $P^{-1}AP = D$

③④を、どんな 2×2 の行列でも使える形にします。行列 A の固有値を λ_1 、 λ_2 、固有ベクトルを $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ とし、 $\vec{v}_1$ を 1 列め、 $\vec{v}_2$ を 2 列めに並べた行列を P 、固有値を同じ順に対角に並べた行列を D とします。

$AP = PD$ は、固有ベクトルの式を 2 つまとめたもの

7-3 で学んだように、積 AP の 1 列めは「 $A \times (P$ の 1 列め)」、2 列めは「 $A \times (P$ の 2 列め)」です。

● **AP の 1 列め**

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \text{ (固有ベクトルの式)}$$

● **PD の 1 列め**

$$P \times (D \text{ の 1 列め } (\lambda_1, 0)) = \lambda_1\vec{v}_1 + 0 \times \vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_1$$

1 列めどうしが等しく、2 列めも同じように $\lambda_2\vec{v}_2$ で等しくなります。主役の行列なら、次のとおりです。

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$AP = PD$ から、1 行ずつ変形します。

$$AP = PD \quad \text{固有ベクトルの式 2 つを、まとめて書いた}$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD \quad \text{両辺に、左から } P^{-1} \text{ をかけた}$$

$$P^{-1}AP = D \quad P^{-1}P = I, ID = D \text{ (7-3} \cdot \text{7-5)}$$

同じように、 $AP = PD$ の両辺に右から P^{-1} をかけると、 $A = PDP^{-1}$ です。

$$P^{-1}AP = D \quad A = PDP^{-1}$$

P : 固有ベクトルを列に並べた行列 D : 固有値を対角に並べた行列

このように、固有ベクトルを使って行列を対角行列に直すことを、**対角化**（たいかくか）といいます。

気をつけること

① P の列の順と、 D の対角の順をそろえる。

P の 1 列めが固有値 3 の固有ベクトルなら、 D の左上は 3。順を入れかえて P の 1 列めを $(1, -1)$ にすれば、 D は左上が 1、右下が 3 になります。どちらも正しい対角化です。

② 固有ベクトルの長さは自由。

$(1, 1)$ のかわりに $(2, 2)$ を使っても、 $P^{-1}AP$ は同じ D になります (7-8: 何倍しても固有ベクトル)。

③ P に逆行列がなければ、できない。

2 本の固有ベクトルが平行だと、 $\det P = 0$ で逆行列がありません (7-4・7-5)。⑨で見るように、そういう行列は対角化できません。

2 本の固有ベクトルの組 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ のように、平面のどんな矢印もそのたし算で表せる「物差しの矢印の組」を、大学の本では**基底**（きてい）とよびます。対角化は、「その行列にいちばん合った基底をえらぶこと」とも言えます。

⑥ 対称な行列は、回転行列で対角化できる

主役の行列は対称な行列なので、2 本の固有ベクトルは直交しています (7-8 ⑨)。長さを 1 にそろえると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 45^\circ \\ \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

です。2 本めは $(1, -1)$ の -1 倍ですが、同じ固有ベクトルです。この 2 本を列に並べると、7-6 の回転行列 $R(45^\circ)$ になります。つまり、**ななめの物差しは、ふつうの物差しを 45° 回したものです。**

回転行列は、転置するだけで逆行列になりました (7-6: $R^T = R^{-1}$)。だから $P^{-1}AP = D$ は、 $R^TAR = D$ と書けます。計算して確かめます ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ を前に出しておく)。まず AR を計算します。

$$AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、左から R^T (R のたてと横を入れかえたもの) をかけます。 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ です。

$$R^T AR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

対称な行列は、回転行列 R で $R^T AR = D$ と対角化できる

座標の軸を 45° 回して見ると、主役の行列は「のびるだけ」に見える、ということです。 $R^T AR$ は、物理の本（力-9）が「軸を変えて見る形」とよんでいる形です。

応力の行列：主方向で、ずらす力が消える

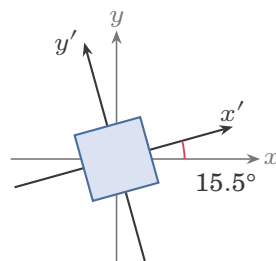
物理の本（力-9）の応力の行列 σ [MPa] は、

7-8 で固有値 $88.3 \cdot -28.3$ 、固有ベクトル

$(1, 0.277) \cdot (1, -3.61)$ でした。 $(1, 0.277)$

の向きの角は、 $\tan \theta = 0.277$ から $\theta \approx 15.5^\circ$

です。軸を 15.5° 回して見ると、



$$R^T \sigma R = \begin{pmatrix} 88.3 & 0 \\ 0 & -28.3 \end{pmatrix} \quad (R = R(15.5^\circ). \text{ numpy で確かめた})$$

になります。応力の行列の右上・左下の成分は、切り口を「ずらす力」（せん断応力）でした。軸を主方向（固有ベクトルの向き）にそろえると、ずらす力が0になり、引く・押す力（主応力）だけが残ります。物理の本で見た「主方向ではせん断が0」は、対称な行列の対角化だったのです。

7 台車の式を、モードの座標でほどく

いよいよ、6-14 の台車の式を、行列のまま、ほどきます。7-8 で、台車の式は $\ddot{\vec{x}} = B\vec{x}$ (B の対角成分 -110 、ほかは 10) と書けました。固有値は -100 と -120 、固有ベクトルは $(1, 1)$ と $(1, -1)$ なので、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -120 \end{pmatrix} \quad P^{-1}BP = D$$

です。台車の位置を、ななめの物差し（モードの物差し）で読みます。

$$\vec{x} = P\vec{q}$$

位置 $\vec{x}$ を、モードの物差しで $\vec{q}$ と読む

$$\ddot{\vec{x}} = P\ddot{\vec{q}}$$

2 回微分した。 P は時間で変わらない数なので、そのまま

$$P\ddot{\vec{q}} = BP\vec{q}$$

$\ddot{\vec{x}} = B\vec{x}$ に入れた

$$\ddot{\vec{q}} = P^{-1}BP\vec{q}$$

両辺に、左から P^{-1} をかけた

$$\ddot{\vec{q}} = D\vec{q}$$

$P^{-1}BP = D$ (⑤)

D は対角行列なので、最後の式を成分で書くと、

$$\ddot{q}_1 = -100q_1 \quad \ddot{q}_2 = -120q_2$$

です。 q_1 の式には q_1 だけ、 q_2 の式には q_2 だけ。ばらばらの、6-6 の「2 回微分すると自分の $-\omega^2$ 倍」の式 2 つにほどけました。 q_1 は角振動数 $\sqrt{100} = 10$ 、 q_2 は $\sqrt{120} \approx 10.95$ (rad/s) でゆれます。

はじめの状態から、動きを求める

6-14 と同じく、台車 1 だけを 0.1 m 引いて、静かにはなします。

- ① はじめの $\vec{q}$ を求める： $\vec{q} = P^{-1}\vec{x}$ です。速度は 0 です。

$$q_1 = \frac{0.1 + 0}{2} = 0.05 \quad q_2 = \frac{0.1 - 0}{2} = 0.05$$

- ② 6-6 の形で解く：はじめの位置が 0.05、速度が 0 なので、 $q_1 = 0.05 \cos 10t$ 、 $q_2 = 0.05 \cos 10.95t$ 。

- ③ もとの位置にもどす： $\vec{x} = P\vec{q}$ なので、 $x_1 = q_1 + q_2$ 、 $x_2 = q_1 - q_2$ 。

$$x_1 = 0.05 \cos 10t + 0.05 \cos 10.95t \quad x_2 = 0.05 \cos 10t - 0.05 \cos 10.95t$$

6-14 の答え ($X = 0.1$ の $\frac{X}{2}(\cos \omega_1 t \pm \cos \omega_2 t)$) と同じです。

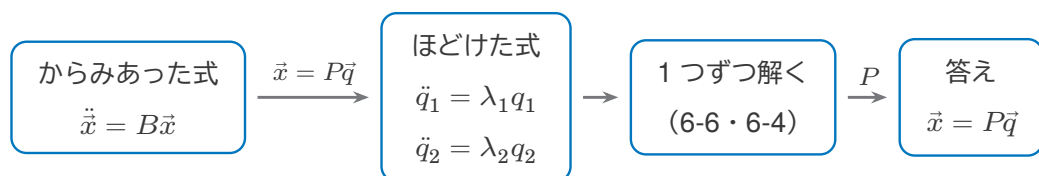


図4 対角化で、連立の微分方程式を解く道すじ。台車が3つ、4つ…とふえても、同じ道すじで解ける。

6-14 の水そう $\dot{\vec{h}} = H\vec{h}$ も同じです。 $\vec{h} = P\vec{q}$ とすると $\dot{\vec{q}} = D\vec{q}$ 、 D の対角成分は 0 と -0.2 なので、 $\dot{q}_1 = 0$ (合計の半分は変わらない)、 $\dot{q}_2 = -0.2q_2$ (差の半分は 6-4 の形でへる) にほどけます。台車がたくさんあっても、 P と D をコンピュータ (np.linalg.eig) で求めれば、同じ道すじで解けます。建物や車のゆれを調べる「モード解析」は、この方法です。

⑧ 何回もかける： $A^n = PD^nP^{-1}$

対角化のもう 1 つの使いみちは、同じ行列を何回もかける計算です。 $A = PDP^{-1}$ を、2 回かけてみます。

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$$

$A = PDP^{-1}$ を 2 つ並べた

$$= PD(P^{-1}P)DP^{-1}$$

かっこのつけかえ (7-3 :

$$(AB)C = A(BC))$$

$$= PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$P^{-1}P = I$ は、かけても変わらない

まん中の $P^{-1}P$ が消えるので、何回かけても、 $A^n = PD^nP^{-1}$ です。そして、対角行列の n 乗は、対角成分を n 乗するだけです。

$$D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 & 0 \\ 0 & 1 \times 1 \end{pmatrix} \quad D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$$

(ほかの成分は、0 をかけるので 0 のまま。) A^5 を計算します。

$$\begin{aligned} A^5 &= PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 243 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 243+1 & 243-1 \\ 243-1 & 243+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 & 121 \\ 121 & 122 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(P^{-1} は③で求めたもの。) A を 5 回かけるには、 2×2 のかけ算が 4 回いりますが、対角化すれば「 3^5 」を 1 回計算するだけです。1 列めの (122, 121) は、7-8 ④で (1, 0) に A を 5 回かけた答えと同じです。 n が大きくなると、 3^n の部分がどんどん大きくなり、 A^n の列は (1, 1) の向きにそろっていきます。このくり返しの計算は、7-10 でくわしく学びます。

n	3^n	A^n の 1 列め	向き
1	3	(2, 1)	26.6°
2	9	(5, 4)	38.7°
3	27	(14, 13)	42.9°
5	243	(122, 121)	44.8°

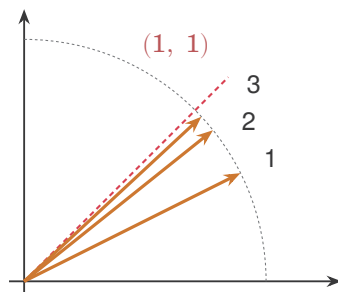


図5 A^n の 1 列めは $\frac{3^n+1}{2}$ と $\frac{3^n-1}{2}$ 。 n が大きくなると、2 つの成分の差 1 は 3^n にくらべて小さくなり、向きは (1, 1) に近づく (右の図の数字は n 。7-8 図 7 と同じ)。

せいかくに言うと

対角化できない行列もあります。7-2の「ずらし」の行列で調べます。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(S - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \times 0 = (1 - \lambda)^2$$

特性方程式 $(1 - \lambda)^2 = 0$ の解は $\lambda = 1$ だけ（重解）です。 $S - I$ の行は $(0, 1)$ と $(0, 0)$ なので、 $(S - I)\vec{v} = \vec{0}$ は $y = 0$ だけを表し、固有ベクトルは $(1, 0)$ の向き 1 本しかありません。家の絵で見ても、ずらしても向きが変わらないのは、 x 軸の上の矢印だけです。平行でない 2 本の固有ベクトルがないので、 P を作れず、対角化できません。

これは、6-12 で特性方程式が重解のとき、 e^{st} だけでは答えが足りず、 te^{st} が出てきたのと同じことが、行列で起きているのです。大学の本では、このような行列は、対角行列に近い「ジョルダン標準形」という形に直して考えます。

いっぽう、 2×2 の行列で 2 つの固有値がちがえば、2 本の固有ベクトルは平行にならないので、かならず対角化できます。また、回転行列 $R(30^\circ)$ のように固有値が複素数の行列は、実数の範囲では対角化できません（複素数を使えば対角化できます）。

たいせつ

ななめの物差し 固有ベクトルで測ると、変換は「固有値倍のびるだけ」

軸を変えて見る $\vec{x} = P\vec{q}$ 、 $\vec{q} = P^{-1}\vec{x}$

対角化 $P^{-1}AP = D$ 、 $A = PDP^{-1}$ （ P の列と D の順をそろえる）

対称な行列 回転行列で $R^T AR = D$

連立の式 $\vec{x} = P\vec{q}$ でモードごとにほどける

くり返し $A^n = PD^nP^{-1}$

この章で出てきたことば

対角行列 対角成分のほかが、すべて 0 の行列。かけると、それぞれの成分を別々に何倍かする。

対角化 固有ベクトルを並べた P で、 $P^{-1}AP$ を対角行列 D にすること。

軸を変えて見る 座標の軸（物差し）を、問題に合ったものに取りかえて考えること。座標変換ともいう。

基底 平面のどんな矢印もそのたし算で表せる、物差しの矢印の組。2次元なら平行でない 2 本。

モード解析 連立の振動の式を、固有ベクトル（モード）の座標でほどいて調べる方法。

記号カード

初めて出た章 7-9

 D **読み方** ディー**意味** 対角行列。固有値を対角に並べたもの。3-10 の判別式の D とは別**英語** diagonal matrix

記号カード

初めて出た章 7-9

 P **読み方** पी**意味** 固有ベクトルを列に並べた行列。 $P^{-1}AP = D$ 。 $\vec{x} = P\vec{q}$ で軸を変える**英語** modal matrix

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

n 次正方行列 A が n 個の一次独立な固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ をもつとき、 $P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ とおけば、 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ となる。このとき A は対角化可能であるという。特に実対称行列は、直交行列 T によって ${}^tTAT$ の形に対角化される。

訳 「一次独立」は、2 本なら「平行でない」こと（どの 1 本もほかのたし算で作れない）。 $(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ は「固有ベクトルを列に並べた行列」で、この本の P 。 $\text{diag}(\lambda_1, \dots)$ は対角行列 D の書き方。「直交行列」は回転（や裏返し）の行列（7-6）、 ${}^tT$ は転置 T^T の別の書き方。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

だ円の軸： $\vec{x}^T A \vec{x}$

7-8 ①で、主役の行列は円をななめのだ円にしました。対称な行列は、だ円の式にもあらわれます。 $\vec{x} = (x, y)$ をよこにした $\vec{x}^T$ (7-1 の転置) を左からかけると、

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

になります ($A\vec{x} = (2x + y, x + 2y)$ と $\vec{x}$ の内積)。 xy の項があるので、式を見ても形がわかりません。ところが、軸を 45° 回した座標 $\vec{x} = R\vec{q}$ で書くと、 $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{q}^T R^T A R \vec{q} = 3q_1^2 + q_2^2$ になり、 xy のような項が消えます。 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ は、 45° の向きに半径 1、 135° の向きに半径 $\sqrt{3}$ のだ円です。物の回りにくさ (慣性の行列) や、応力のモールの円 (物理 力-9) も、この考え方で軸を見つけます。

🔍 コラム コンピュータは、どうやって対角化する？

2×2 なら特性方程式 (2 次方程式) で固有値が求まりますが、建物や飛行機的设计では、何千×何千もの行列を対角化します。そんなに大きな方程式は、式では解けません。

そこで、対称な行列なら「右上と左下のいちばん大きな成分を 0 にするように、2 つの軸だけを少し回す」ことを、何回もくり返す方法があります。回すたびに、ななめ以外の成分は小さくなり、最後には対角行列にほとんど近づきます。⑥の「回転行列で対角化する」を、少しずつ行う方法です。19 世紀のなかごろ、ドイツの数学者ヤコビが考えた方法と伝えられ、ヤコビ法とよばれています。いまのコンピュータでは、さらに速い方法も使われていて、`np.linalg.eig` もその 1 つを使っています。

例題でたしかめよう

例題 1 ななめの物差しで点を変換する

主役の行列 A (1 行め $(2, 1)$ 、2 行め $(1, 2)$) を、点 $(3, 1)$ にかけた点を、ななめの物差し $(1, 1) \cdot (1, -1)$ を使って求めましょう。また、 A を直接かけて確かめましょう。

考え方 ①の手順。 $q_1 = \frac{x+y}{2}$ 、 $q_2 = \frac{x-y}{2}$ で読み、 q_1 だけ 3 倍してもどす。

式 読む： $q_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ 、 $q_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

のぼす： $3q_1 = 6$ 、 $q_2 = 1$

もどす： $6(1, 1) + 1(1, -1) = (6+1, 6-1) = (7, 5)$

確かめ： $A(3, 1) = (2 \times 3 + 1 \times 1, 1 \times 3 + 2 \times 1) = (7, 5)$

答え $(7, 5)$

じぶんでこう 1

主役の行列 A を、点 $(4, 0)$ にかけた点を、ななめの物差し $(1, 1) \cdot (1, -1)$ を使って求め、 A を直接かけて確かめましょう。

例題2 P と D を作り、 $P^{-1}AP$ を確かめる

7-8の例題1の行列 A （固有値5、固有ベクトル $(1, 1)$ 。固有値2、固有ベクトル $(1, -2)$ ）を対角化します。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ になることを計算で確かめましょう。

考え方 固有ベクトルを、固有値の順に列に並べて P 。 P^{-1} は7-5の公式。先に AP を計算する。

式 P は1列め $(1, 1)$ 、2列め $(1, -2)$ 。 D は対角成分が5と2

$$\det P = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 4+1 & 4-2 \\ 2+3 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10+5 & 4-4 \\ 5-5 & 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

答え $P^{-1}AP$ は、対角成分が5と2の D になる

じぶんでこう2

7-8の例題5の行列 A （固有値6、固有ベクトル $(2, 1)$ 。固有値1、固有ベクトル $(1, -2)$ ）を対角化します。 P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を確かめましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例題 3 対称な行列を、回転行列で対角化する

次の行列を、回転行列 $R(45^\circ)$ で $R^T A R$ と対角化しましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad R(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方 ⑥。 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を外に出して、先に AR 、次に R^T を左からかける。
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ 。

式 $AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3+1 & -3+1 \\ 1+3 & -1+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$R^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{たてと横を入れかえた})$$

$$R^T A R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4+4 & -2+2 \\ -4+4 & 2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

答え 対角成分が 4 と 2 の対角行列（固有値 $4 \cdot 2$ ）

じぶんでこう 3

次の行列を、回転行列 $R(45^\circ)$ で $R^T A R$ と対角化しましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

例題4 応力を主方向で見る

7-8 の例題8 の応力の行列 (MPa) は、固有値 60 (固有ベクトル $(2, 1)$) と 10 (固有ベクトル $(1, -2)$) でした。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

(1) 主方向の角 θ ($\tan \theta = \frac{1}{2}$) の回転行列 R を、 $\sqrt{5}$ を使って書きましょう。

(2) $R^T \sigma R$ を計算し、ずらす力が 0 になることを確かめましょう。

考え方 固有ベクトルを長さ 1 にして列に並べる。 $(2, 1)$ の長さは $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 。2 列めは $(1, -2)$ の -1 倍の $(-1, 2)$ にすると回転行列になる。

式 (1) $R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}})$

$$(2) \sigma R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 100 + 20 & -50 + 40 \\ 40 + 20 & -20 + 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 120 & -10 \\ 60 & 20 \end{pmatrix}$$

$$R^T \sigma R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 240 + 60 & -20 + 20 \\ -120 + 120 & 10 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

答え (1) 式の段の R ($\theta \approx 26.6^\circ$)

(2) 右上・左下が 0 で、主応力 60 MPa と 10 MPa だけが残る

じぶんでとこう 4

7-8 のじぶんでとこう 8 の応力の行列 (MPa) は、固有値 40 (固有ベクトル $(2, -1)$) と -10 (固有ベクトル $(1, 2)$) でした。次の回転行列 R で、 $R^T \sigma R$ を計算しましょう。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

例題 5 台車の式を、モードの座標でほどく

$m = 2 \text{ kg}$ 、 $k = 200 \text{ N/m}$ 、 $K = 100 \text{ N/m}$ の台車 2 つ (7-8 の例題 2) は、 $\ddot{\vec{x}} = B\vec{x}$ の B の固有値が -100 ($(1, 1)$) と -200 ($(1, -1)$) でした。 $x_1 = 0.05$ 、 $x_2 = 0.01$ (m) だけずらして静かにはなしたときの x_1 、 x_2 を、 $\vec{x} = P\vec{q}$ で求めましょう。

考え方 ⑦の手順。 $\vec{q} = P^{-1}\vec{x}$ ではじめの q を出し、 $\ddot{q}_1 = -100q_1$ 、 $\ddot{q}_2 = -200q_2$ を 6-6 の形で解いて、 $\vec{x} = P\vec{q}$ でもどす。

式 はじめ： $q_1 = \frac{0.05 + 0.01}{2} = 0.03$ 、 $q_2 = \frac{0.05 - 0.01}{2} = 0.02$

解く： $q_1 = 0.03 \cos 10t$ 、 $q_2 = 0.02 \cos \sqrt{200}t \approx 0.02 \cos 14.1t$

もどす： $x_1 = q_1 + q_2$ 、 $x_2 = q_1 - q_2$

答え $x_1 = 0.03 \cos 10t + 0.02 \cos 14.1t$

$x_2 = 0.03 \cos 10t - 0.02 \cos 14.1t$ (6-14 の例題 6 と同じ)

 じぶんでとこう5

$m = 1 \text{ kg}$ 、 $k = 16 \text{ N/m}$ 、 $K = 10 \text{ N/m}$ の台車 2 つ (B の固有値 $-16 : (1, 1)$ 、 $-36 : (1, -1)$) を、 $x_1 = 0$ 、 $x_2 = 0.06 \text{ (m)}$ だけずらして静かにはなしました。 x_1 、 x_2 を $\vec{x} = P\vec{q}$ で求めましょう。

 例題 6 A^n を対角化で計算する

主役の行列 A の 3 乗 A^3 を、 $A^3 = PD^3P^{-1}$ で計算しましょう。また、 A^2 を求めてから A をかけて確かめましょう。

考え方 ⑧。 D^3 は対角成分を 3 乗するだけ。 P^{-1} は次の行列。

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

式 D^3 の対角成分： $3^3 = 27$ 、 $1^3 = 1$

$$PD^3 = \begin{pmatrix} 27 & 1 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} \quad (P \text{ の 1 列めを } 27 \text{ 倍、2 列めを } 1 \text{ 倍})$$

$$PD^3P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 27+1 & 27-1 \\ 27-1 & 27+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{確かめ：} A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 10+4 & 8+5 \\ 5+8 & 4+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

答え A^3 は、対角成分が 14、ほかが 13 の行列

じぶんでこう6

例題3の行列 A (1行め $(3, 1)$ 、2行め $(1, 3)$)。固有値4: $(1, 1)$ 、固有値2: $(1, -1)$ の3乗を、 $A^3 = PD^3P^{-1}$ で計算し、 A^2 を求めてから A をかけて確かめましょう。

例題7 対角化できるかを調べる

次の2つの行列が対角化できるかを調べ、できるなら P と D を答えましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

考え方 固有値を求め、平行でない固有ベクトルが2本あるかを見る(⑨)。左下が0なので、特性方程式は対角成分の積になる。

式 (1) $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2$ より $\lambda = 2$ (重解)

$A - 2I$ の行は $(0, 1)$ と $(0, 0)$ 。式は $y = 0$ だけ。固有ベクトルは $(1, 0)$ の向き1本

(2) $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)$ より $\lambda = 2, 3$

$\lambda = 2$: 行 $(0, 1)$ から $y = 0$ 、 $(1, 0)$

$\lambda = 3$: 行 $(-1, 1)$ から $y = x$ 、 $(1, 1)$

答え (1) できない

(2) できる。 P は1列め $(1, 0)$ 、2列め $(1, 1)$ 、 D の対角成分は2と3

じぶんでとこう7

次の2つの行列が対角化できるかを調べ、できるなら P と D を答えましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① かける順をまちがえる

✗ $D = PAP^{-1}$

○ $D = P^{-1}AP$ ($A = PDP^{-1}$)

$P^{-1}AP$ は、右から「もどす→ A →ななめに読む」の順に働きます。例題2の行列で PAP^{-1} を計算すると、右上が $\frac{2}{3}$ になり、対角行列になりません。

⚠ まちがえやすいところ

② P の列の順と D の順がちがう

✗ P の1列め $(1, 1)$ 、 D の左上を1にする

○ P の1列めが $(1, 1)$ なら、 D の左上は固有値3

P の何列めの固有ベクトルの固有値が、 D の何番めの対角成分になります。順がずれると $AP = PD$ が成り立ちません。

⚠ まちがえやすいところ

③ 固有ベクトルを行に並べる

✕ P の 1 行めを $(1, 1)$ 、2 行めを $(1, -1)$

○ P の 1 列めを $(1, 1)$ 、2 列めを $(1, -1)$

主役の行列と例題 2 では、 P がたまたま対称なので同じになりますが、ふつうは対角行列になりません。固有ベクトルは、`numpy` と同じく列に並べます。

⚠ まちがえやすいところ

④ $R^T A R$ で長さを 1 にしない

✕ 列が $(1, 1) \cdot (-1, 1)$ の P のまま、 $P^T A P$ を計算する

○ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をかけて長さ 1 にした R で $R^T A R$

転置が逆行列になるのは、列の長さが 1 の回転行列のときだけです。長さ $\sqrt{2}$ のままだと、 $P^T A P$ は D の 2 倍になってしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ どれも対角化できると思う

✕ ずらしの行列も

$$P^{-1} A P = D \text{ にできる}$$

○ 固有ベクトルが 1 本しかない
ので、できない

平行でない固有ベクトルが 2 本
あるときだけ、対角化できます。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ A^n を成分の n 乗にする

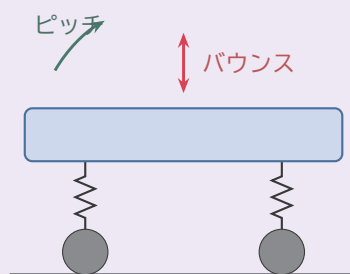
✕ A^2 の対角成分は $2^2 = 4$

○ A^2 の対角成分は 5
成分ごとに n 乗してよいのは、
対角行列 D のときだけです。

物理・工学ではこう使う

車の乗りごち：上下のゆれと、前後のかたむき

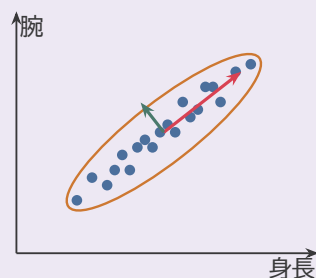
車体は、前輪と後輪のばねの上にのった、長い板のようなものです。車体の動きには、全体が上下するゆれ（バウンス）と、前後にゆらゆらかたむくゆれ（ピッチ）があり、ふつうはこの2つがまじって起きます。前と後ろの上下の動きを2つの量として運動方程式を立て、行列を対角化すると、2つの振動モードと、それぞれの振動数がわかります。乗りごちの設計では、モードごとに、ばねとダンパーの強さを決めます（6-12・



6-13)。

たくさんのデータの「いちばん大事な向き」

クラス全員の身長と腕の長さをはかって点をかくと、点はななめのだ円の形に集まります。データのばらつきを表す対称な行列（分散と共分散の表）を対角化すると、だ円のいちばん長い軸（体の大きさ）と短い軸の向きが、固有ベクトルとしてわかります。たくさんの量のデータを、大事な向き何本かだけで表す方法を**主成分分析**といい、顔の写真の見分けや、工場の機械の調子の見守りに使われています（7-11）。



✓ 章末問題

7-9 のまとめ

基本 ★★★★★

1 主役の行列 A を、次の点にかけた点を、ななめの物差し $(1, 1) \cdot (1, -1)$ を使って求め、 A を直接かけて確かめましょう (📖 例題 1)。

(1) 点 $(2, 4)$ (2) 点 $(5, 1)$

2 次の行列 A は、固有値 6 (固有ベクトル $(1, 1)$) と 3 (固有ベクトル $(1, -2)$) をもちます。 P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を確かめましょう (📖 例題 2)。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3 次の行列を、回転行列 $R(45^\circ)$ で $R^T AR$ と対角化しましょう (📖 例題 3)。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4 応力の行列 (MPa) は、固有値 70 (固有ベクトル $(2, 1)$) と 20 (固有ベクトル $(1, -2)$) をもちます。次の R で $R^T \sigma R$ を計算しましょう (📖 例題 4)。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 60 & 20 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5 $m = 1 \text{ kg}$ 、 $k = 36 \text{ N/m}$ 、 $K = 32 \text{ N/m}$ の台車 2 つ (B の固有値 $-36 : (1, 1)$ 、 $-100 : (1, -1)$) を、 $x_1 = 0.04$ 、 $x_2 = 0$ (m) だけずらして静かにはなしました。 x_1 、 x_2 を求めましょう (📖 例題 5)。

6 主役の行列 A の 4 乗を、対角化を使って計算しましょう ($A^4 = PD^4P^{-1}$) (📖 例題 6)。

7 次の行列 A は、固有値 -1 (固有ベクトル $(2, -1)$) と 5 (固有ベクトル $(1, 1)$) をもちます。 P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を確かめましょう (📖 例題 2)。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8 $m = 1 \text{ kg}$ 、 $k = 16 \text{ N/m}$ 、 $K = 10 \text{ N/m}$ の台車 2 つ (B の固有値 $-16 : (1, 1)$ 、 $-36 : (1, -1)$) を、 $x_1 = 0.04$ 、 $x_2 = 0.02$ (m) だけずらして静かにはなしました。 x_1 、 x_2 を求めましょう (📖 例題 5)。

チャレンジ ★★★★★

9 次の 4 つの行列が対角化できるかを調べ、できるなら P と D を答えましょう (📖 例題 7)。

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

10 例題 3 の行列 A (1 行め $(3, 1)$ 、2 行め $(1, 3)$) の 5 乗を、対角化で求めましょう (📖 例題 6)。

11 次の行列を、回転行列 $R(45^\circ)$ で $R^T A R$ と対角化し、固有値と固有ベクトルを答えましょう (📖 例題 3)。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

12 主役の行列 A の 6 乗を、対角化を使って求めましょう (📖 例題 6)。

✓ ふりかえり できるようになったかな？

☐ 固有ベクトルの物差しで見ると「のびるだけ」になることを、図で説明できる。 → 357 ページ

☐ P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を計算で確かめられる。

→ 360 ページ

☐ 対角化で A^n を計算したり、台車の式をモードの座標でほどいたりできる。 → 367 ページ



ソラ

軸を変えて見るだけで、からみあった式がほどけた。次は、何回もかけるとどうなるかだね。

第3部 固有値と行列の使いみち

★★★★★

7-10

行列のくり返し： 漸化式とオイラー法を行列で

📖 道しるべ この章の前に **2-18** **3-11** **5-14** **6-2** **6-14** **7-8** **7-9**
 この章の先に **7-11** **8-13** **9-10** **9-11**

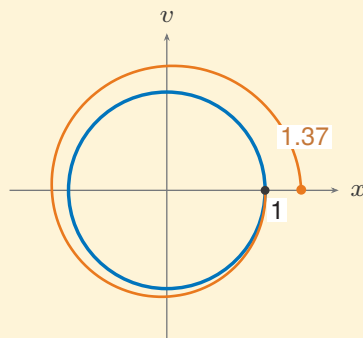
📌 この章でできるようになること

- **★★★** 同じ行列を何回もかけたとき、点がどこへ向かうかを、表計算と図で調べられる。
- **★★★★** 1つの数のくり返し（倍々）と、そのくり返しの合計（等比級数）を計算できる。
- **★★★★★** 固有値の大きさから「ふえる・消える・回る」を見分け、オイラー法でばねのゆれがふくらむわけを説明できる。

? はてな？

6-2で、ばね（ $\omega = 1$ 。5-15のばね）の動きを、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.1$ として計算しました。ほんとうのゆれは、いつまでも同じ大きさのはずです。ところが計算では、ゆれが1周するたびに**1.37倍**にふくらみました。 $\Delta t = 0.01$ にすると、1周で**1.03倍**です。

この1.37や1.03は、どこから出てきた数なのでしょう。



△ やってみよう ばねのオイラー法を、行列で何回もかけよう

6-2 のふつうのオイラー法 ($\omega = 1$ のばね、 $\Delta t = 0.1$) の 1 歩は、次の行列 G を、位置と速度の組 (x, v) にかけることと同じです（なぜそうなるかは⑨で作ります）。

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① A2:B3 に行列 G を入れる（A2 に 1、B2 に 0.1、A3 に -0.1、B3 に 1）。7-1 の型と同じ置き方。
- ② C2:C3 に、はじめの状態 $\vec{x}_0 = (1, 0)$ を入れる（はしで手をはなす。5-15）。
- ③ D2 に `=MMULT($A$2:$B$3,C2:C3)` を入れ、7-1 と同じように確定する。D2:D3 に $G\vec{x}_0$ が出る。
- ④ E2 に `=MMULT($A$2:$B$3,D2:D3)` を入れて、③と同じように確定する。F2・G2 にも、1 つ左の列を指す同じ形の式を入れる（F2 なら E2:E3）。4 行めには原点からの距離 $\sqrt{x^2 + v^2}$ （C4 に `=SQRT(C2^2+C3^2)`）を出し、右へコピーする。

	A	B	C	D	E	F	G
1	行列 G		$\vec{x}_0$	$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}_3$	$\vec{x}_4$
2	1	0.1	1	1	ア	エ	0.940
3	-0.1	1	0	-0.1	イ	オ	-0.396
4			1	1.005	ウ	カ	1.020

アからカをうめよう（小数第 3 位まで）。距離（4 行め）は、1 列ごとに何倍になっているかな？

D2:D3 は、7-1 の MMULT で「行列 $G \times C$ 列の状態」を計算したものです。E 列は「D 列の状態に G をかけたもの」、F 列は「E 列に G をかけたもの」なので、1 列ごとに「今の状態に G をかけて次の状態を作る」がくり返されます。行列の場所 \$A\$2:\$B\$3 は動かさず、かける状態だけを 1 列ずつずらすのがポイントです (2-18 の \$)。手で計算すると、次のとおりです (7-1・7-2 の「行列×ベクトル」を、1 行ずつ書いた形)。

$$x = 1 \times 1 + 0.1 \times (-0.1) = 0.99 \quad \text{ア: 1 行め (1, 0.1) と } \vec{x}_1$$

$$v = -0.1 \times 1 + 1 \times (-0.1) = -0.2 \quad \text{イ: 2 行め (-0.1, 1) と } \vec{x}_1$$

$$\sqrt{0.99^2 + 0.2^2} = 1.010 \quad \text{ウ (三平方の定理。4-4)}$$

$$x = 0.99 + 0.1 \times (-0.2) = 0.97 \quad \text{エ}$$

$$v = -0.1 \times 0.99 + (-0.2) = -0.299 \quad \text{オ}$$

$$\sqrt{0.97^2 + 0.299^2} = 1.015 \quad \text{カ}$$

距離は 1、1.005、1.010、1.015、1.020 と、**1 列ごとに約 1.005 倍**になっています。同じ計算を 63 回続けると、距離は 1.368 になります (⑩の Python で確かめます)。1 周 (約 63 歩) で 1.37 倍。**⑨ はてな?** の数が、行列を何回もかけるだけで出てきました。

ほんとうのばねなら、距離 (ゆれの円の半径。6-2 ⑩) は 1 のままのはずです。では、1 列ごとの「1.005 倍」は、行列 G のどこから来るのでしょうか。それを知るには、同じ行列を何回もかけたときに何が起きるのかを、まず調べる必要があります。

6-2 では、このふくらみを、円の図と三平方の定理で説明しました。この章では、同じことを**行列**で見なおします。すると、1.37 という数が、ある行列の「固有値の大きさ」から、たった 1 行の計算で出てきます。

6-2・6-14 の表計算は、どれも「今の行から次の行を作る」くり返しでした。2つの列を同時に進める1行ぶんの計算は、**行列を1回かける**ことと同じです。だから、表を何行も進めることは、**同じ行列を何回もかける**ことです。何回もかけると、大きくなるのか、0に近づくのか、回るのか。それを教えてくれるのが、7-8の固有値です。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、表計算と電卓だけで読めます。「式でわかる」の段は、1回で分からなくても大丈夫です。

🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 3-11** 同じ時間ごとに同じ割合でふえる（へる）量は、倍々でふえる（へる）。1.5倍を3回なら 1.5^3 倍。
- 6-2** オイラー法：次の値＝今の値＋今の変わる速さ $\times \Delta t$ 。ふつうのオイラー法では、ばねのゆれの円の半径が、1歩ごとに $\sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2}$ 倍にふくらむ。速度を先に進めると、ふくらまない。
- 6-9** 複素数のかけ算は、大きさはかけ算、角はたし算。 $|a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。
- 6-14** 2回微分の式は、位置と速度の組の、1回微分の式2つになる。2つの水そうは、和と差に分けるとほどける。
- 7-3** $A^2 = AA$ 。 $AB\vec{x}$ は、右の B が先にはたらく。 I は単位行列で、 $I\vec{x} = \vec{x}$ 。
- 7-8** $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ となる $\vec{v}$ が固有ベクトル、 λ が固有値。主役の行列は $(1, 1)$ で3倍、 $(1, -1)$ で1倍。固有値は6-12の s と同じもの。 $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ 。
- 7-9** 固有ベクトルを物差しにすると、行列は「のびるだけ」になる。だから、何回もかける計算は $A^n = PD^nP^{-1}$ と書ける。

数学の道具

目でわかる 何回もかけると、どこへ行く？

★★★

1 同じ行列を、くり返しかける

やってみようでは、ばねの1歩の行列 G を何回もかけました。7-8 ④ では、主役の行列 A を点 $(1, 0)$ に5回かけて、 $(122, 121)$ になる表を作りました。どちらも「今の点に同じ行列をかけて、次の点を作る」ことのくり返しです。これを式で書きます。

はじめの点を $\vec{x}_0$ 、1回かけた点を $\vec{x}_1$ 、2回かけた点を $\vec{x}_2$ 、…と書きます。右下の小さな数は「何回めか」を表す名札です(6-2の y_n と同じ)。やってみようなら、

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = G\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

です。次の点は、今の点にもう一度同じ行列をかけて作ります。どの回でも、することは同じです。かける行列を A と書くと、

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

次の点 = 行列 × 今の点

このように、1つ前の値から次の値を作るきまりを**漸化式**(ぜんかしき)といいます。6-2のオイラー法の1行 $y_{n+1} = y_n + f(y_n)\Delta t$ も、1つ前の y_n から次の y_{n+1} を作るので、漸化式です。

漸化式を2回使うと、 $\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A(A\vec{x}_0)$ です。7-3で学んだように、かけるつなぎ方の区切りは自由なので、 $A(A\vec{x}_0) = (AA)\vec{x}_0 = A^2\vec{x}_0$ です。同じように、 n 回かけると

$$\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0 \quad (A^n \text{ は、} A \text{ を } n \text{ 回かけた行列})$$

です。 A^0 は「1 回もかけない」ことなので、単位行列 I とします ($I\vec{x}_0 = \vec{x}_0$)。数で $2^0 = 1$ としたのと同じ考えです。7-9 ⑧ では、 $A^n = PD^nP^{-1}$ を使って、 A^5 を 1 回の計算で求めました。

同じくり返しでも、主役の行列では、点は $(1, 1)$ の向きにそろいながら約 3 倍ずつ大きくなりました (7-8 ④)。ばねの G では、点は回りながら少しずつ外へ広がりました (**？はてな？** の図)。かける行列によって、行き先はちがいます。②・③で、もう 2 つの例を見ます。

② 天気行列：落ち着く先がある

こんどは、ふえ続けない例です。ある町の天気を、毎日「晴れ」か「雨」かで記録したら、次のきまりが見つかったとします (話を簡単にするため、くもりは晴れに入れます)。

- 晴れの日の次の日は、80 % が晴れ、20 % が雨。
- 雨の日の次の日は、40 % が晴れ、60 % が雨。

「80 % が晴れ」は、晴れの日のあとの日をたくさん集めると、そのうち 80 % が晴れだった、ということです。3-17 のことばでは、晴れの次の日が晴れる**確率**は 0.8 です。

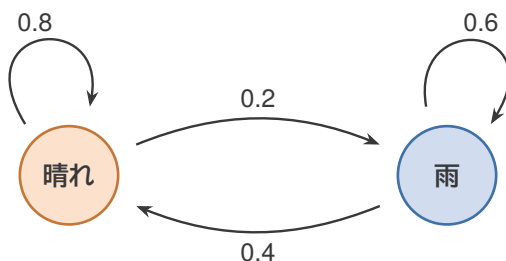


図 1 天気の移り方。矢印の数は、次の日にその天気になる確率。1 つの丸から出る矢印の数をたすと、どちらも 1 ($0.8 + 0.2 = 1$ 、 $0.4 + 0.6 = 1$)。

今日の天気が晴れるとき、明日、あさって、…の天気はどうなるでしょう。 n 日後に晴れる確率を a_n 、雨の確率を b_n として、組 $\vec{p}_n$ にします。 $\vec{p}_0$ は今日の天気です。今日は晴れと決まっているので、晴れの確率 1、雨の確率 0 です。

$$\vec{p}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

次の日に晴れるのは、「晴れの次の日が晴れ」と「雨の次の日が晴れ」の 2 つの場合です。それぞれの確率をたします。

$$a_{n+1} = 0.8 a_n + 0.4 b_n \quad \text{晴れ} \rightarrow \text{晴れ} (0.8) \text{ と、雨} \rightarrow \text{晴れ} (0.4)$$

$$b_{n+1} = 0.2 a_n + 0.6 b_n \quad \text{晴れ} \rightarrow \text{雨} (0.2) \text{ と、雨} \rightarrow \text{雨} (0.6)$$

係数を表にならべると、行列×ベクトルの形になります (7-1)。

$$\vec{p}_{n+1} = M \vec{p}_n, \quad M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

M の 1 列めは「晴れの日からの移り方」、2 列めは「雨の日からの移り方」です。どちらの列も、たすと 1 になります。次の日は、晴れか雨のどちらかに必ずなるからです。

あとは、やってみようと同じ表計算です。A2:B3 に M 、C2:C3 に今日の天気 $\vec{p}_0$ を入れ、D2 の MMULT を右へコピーします。

D2		=MMULT(\$A\$2:\$B\$3,C2:C3)					
	A	B	C	D	E	F	G
1	行列 M		$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$	$\vec{p}_4$
2	0.8	0.4	1	0.8	0.72	0.688	0.675
3	0.2	0.6	0	0.2	0.28	0.312	0.325

表 1 今日が晴れ (C2 に 1、C3 に 0) のとき。2 行めが晴れ、3 行めが雨の確率。どの列も、たすと 1。

はじめの 2 列を、手で確かめます。

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \times 1 + 0.4 \times 0 \\ 0.2 \times 1 + 0.6 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{明日 (今日が晴れ)}$$

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2 \\ 0.2 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.28 \end{pmatrix} \quad \text{あさって}$$

晴れる確率 a_n

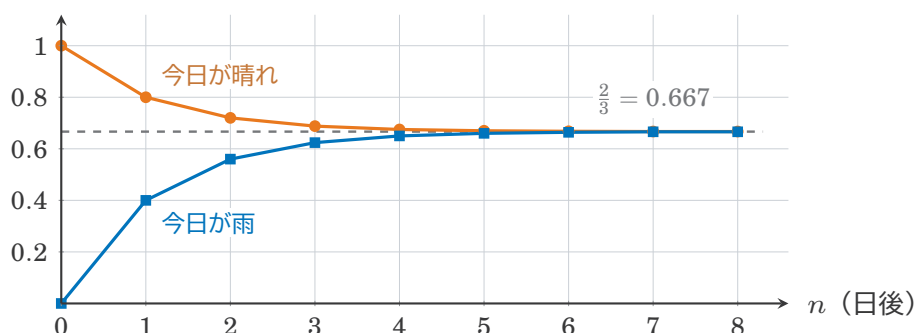


図2 n 日後に晴れる確率。今日が晴れでも雨でも、何日かたつと、同じ $\frac{2}{3}$ に落ち着く。

今日が晴れなら 1、0.8、0.72、0.688、0.675、…、今日が雨なら 0、0.4、0.56、0.624、0.650、…と進み、どちらも $\frac{2}{3} = 0.667$ に近づきます (図2)。遠い先の天気は、今日の天気をほとんど覚えていないのです。

落ち着いた先の組を、 M にかけてみます。

$$M \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \times \frac{2}{3} + 0.4 \times \frac{1}{3} \\ 0.2 \times \frac{2}{3} + 0.6 \times \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1.6+0.4}{3} \\ \frac{0.4+0.6}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

かけても変わりません。 $M\vec{v} = 1 \times \vec{v}$ なので、 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ は、**固有値 1 の固有ベクトル**です (7-8)。落ち着く先は、かけても変わらない組、つまり固有値 1 の固有ベクトルだったのです。長い目で見ると、この町は 3 日に 2 日が晴れ、ということです。

このように、「次の状態が、今の状態だけで決まり、移り方の確率が毎回同じ」くり返しを、**マルコフ連鎖** (マルコフれんさ) といいます。ほんとうの天気は、こんなに簡単ではありません (天気予報は、6-2 で見たように、空気の動きの式を数値計算で解いて作ります)。それでも、「状態の移り方の表」をくり返しかけ

る考え方は、人やお客さんの動き、機械の故障、文章の次の文字の予測など、いろいろな所で使われています。

3 回る行列・うずを巻く行列

7-6 の回転行列 $R(30^\circ)$ を、点 $(1, 0)$ に何回もかけてみます。1 回ごとに左回りに 30° 回るので、点は半径 1 の円の上を進み、12 回で 360° 回って $(1, 0)$ にもどります (図 3 の左)。大きくも小さくもなりません。

つぎに、回転行列を 0.9 倍した行列 $0.9R(30^\circ)$ をかけます。成分を書くと、次のとおりです。

$$0.9R(30^\circ) = 0.9 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.779 & -0.45 \\ 0.45 & 0.779 \end{pmatrix}$$

この行列は、「 30° 回して、長さを 0.9 倍にする」はたらきをします (7-3: 回してからちぢめる、をまとめた行列)。1 回かけるたびに 30° 回って、原点からの距離が 0.9 倍になるので、点はうずを巻きながら原点に近づきます。12 回で 1 周したときの距離は $0.9^{12} = 0.282$ です (図 3 の右)。

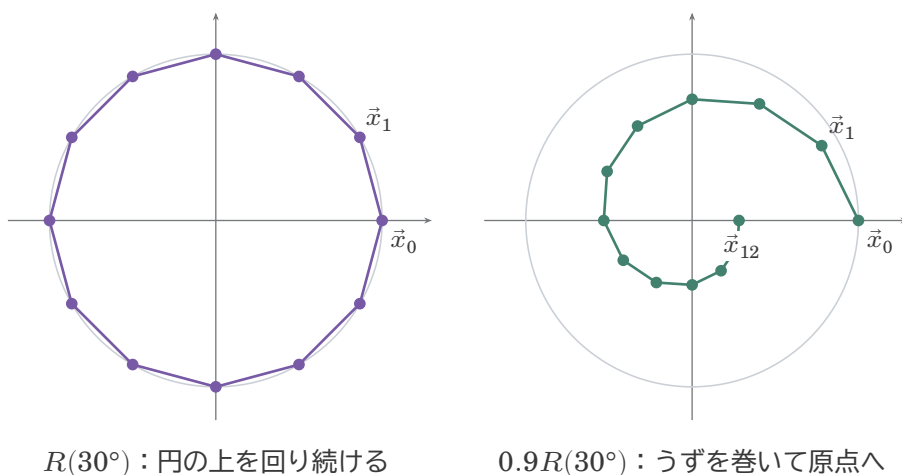


図 3 点 $(1, 0)$ に、行列を 12 回かけた。灰色の円は半径 1。左は 12 回でもとの点にもどり、右は 1 回ごとに 0.9 倍ずつ原点に近づく。

ここまでの 5 つの行列を、表にまとめます。

行列	何回もかけると
主役 A (7-8 ④)	(1, 1) の向きにそろい、1 回ごとに約 3 倍ずつ大きくなる
ばねの G (やってみよう)	回りながら、少しずつ外へ広がる (1 回ごとに約 1.005 倍)
天気 M (②)	1 つの組 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ に落ち着く
$R(30^\circ)$ (③)	円の上を回り続ける (大きさは変わらない)
$0.9R(30^\circ)$ (③)	うずを巻きながら、原点に近づく

表 2 同じ行列を何回もかけたときの、5 つのふるまい。

ふえる・広がる・落ち着く・回る・消える。かける行列によって、行き先はさまざまです。かけてみる前に、行列を見ただけで、どれになるかがわからないでしょう。答えは「固有値の大きさを見ればわかる」です。それを、まず 1 つの数 (1×1 の行列) で確かめ、⑥・⑦で行列に広げます。



手でわかる

1 つの数のくり返しから

★★★★

④ 1×1 の行列：倍々のくり返し

いちばん小さい行列は、数が 1 つだけの 1×1 の行列です。 1×1 の行列 (a) を数 x にかけることは、ふつうのかけ算 ax と同じです。だから、 1×1 の漸化式は

$$x_{n+1} = a x_n$$

です。1 回ごとに a 倍になるので、 $x_1 = ax_0$ 、 $x_2 = a^2x_0$ 、 $\dots$ 、 $x_n = a^n x_0$ 。3-11 の「倍々」そのものです。

a の値で、ふるまいがどう変わるかを見ます。 $x_0 = 1$ として、 $a = 1.5$ 、 0.5 、 -0.5 、 -1.5 の 4 つを計算しました。

a	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.5	1	1.5	2.25	3.375	5.06	7.59	11.39
0.5	1	0.5	0.25	0.125	0.063	0.031	0.016
-0.5	1	-0.5	0.25	-0.125	0.063	-0.031	0.016
-1.5	1	-1.5	2.25	-3.375	5.06	-7.59	11.39

表3 $x_{n+1} = ax_n$ 、 $x_0 = 1$ のくり返し (小数第3位までで四捨五入したものがある)。

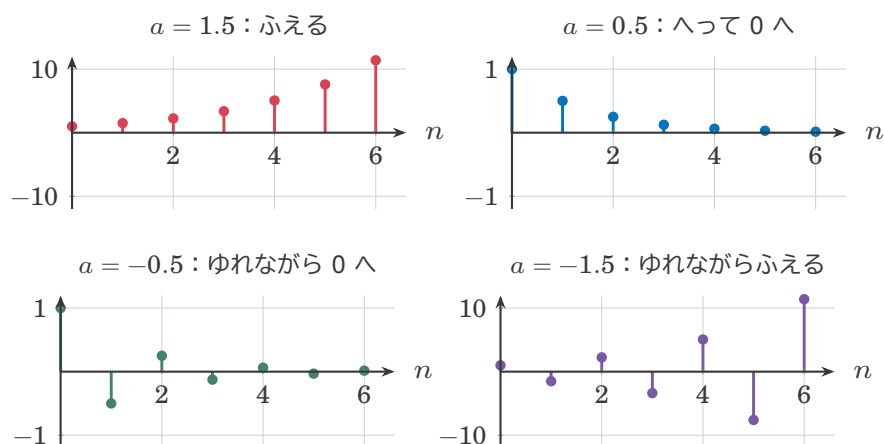


図4 4つの a でのくり返し。たての棒の長さが x_n 。上の2つは同じ符号のまま、下の2つは符号が毎回入れかわる。

表と図4から、次のきまりが読みとれます。

1 ふえるか、0に近づくかは、 a の大きさ $|a|$ で決まる。

$|a| > 1$ ならふえ続け、 $|a| < 1$ なら0に近づく。 $a = -1.5$ は負の数ですが、大きさは1.5なので、ふえていきます。

2 a が負なら、符号が毎回入れかわる。

負の数を2回かけると正になるからです。グラフは0の上と下を、行ったり来たりします。

$a = 1$ ならずっと同じ値、 $a = -1$ なら同じ大ききで符号だけが入れかわり続けます。大ききがちょうど1のときが、ふえるか消えるかの境目です。

冷めるお湯は、 1×1 のくり返し

6-2 で、冷めるお湯をオイラー法で計算しました（部屋は 20°C 、はじめ 80°C 、ルールは $\frac{dT}{dt} = -0.05(T - 20)$ ）。部屋との差 $u_n = T_n - 20$ で見ると、1 歩の計算は

$$u_{n+1} = (1 - 0.05 \Delta t) u_n$$

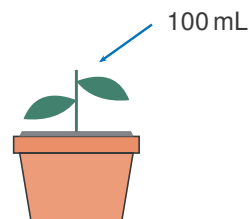
でした (6-2 ②)。これは、 $a = 1 - 0.05 \Delta t$ の 1×1 のくり返しです。 $\Delta t = 1$ 分なら $a = 0.95$ で、10 歩で $0.95^{10} = 0.5987$ 倍。差は $60 \times 0.5987 = 35.92^\circ\text{C}$ 、温度は $20 + 35.92 = 55.92^\circ\text{C}$ でした (2-18・6-2)。

6-2 ⑥ では、 $\Delta t = 30$ 分にすると、お湯が -10°C になって、部屋の温度の上と下をふらふらしました。 $a = 1 - 0.05 \times 30 = -0.5$ だからです。負の a なので符号が入れかわり (②)、大きさが 0.5 なので、ゆれながら 0 に近づきます (①)。 $\Delta t = 50$ 分なら $a = -1.5$ で、ゆれながらふえていき、計算がこわれます。6-2 でふしぎに見えたふるまいは、表と図 4 の 4 つの形のどれかだったのです。

5 くり返しの合計：等比級数

くり返しには、もう 1 つ大切な形があります。毎回 a 倍になりながら、外から同じ量加わる形です。

植木鉢の土に、毎朝 100 mL の水をやります。土中の水は、蒸発したり植物に吸われたりして、1 日で半分になるとします。水をやった直後の土の水の量を、1 日め y_1 、2 日め y_2 、…とします。



次の朝の量は「前の日の量の半分」に「新しい 100 mL 」をたしたものです。

$$y_{n+1} = 0.5 y_n + 100, \quad y_1 = 100$$

1 行ずつ計算します。

$$y_2 = 0.5 \times 100 + 100 = 150 \quad 2 \text{ 日め}$$

$$y_3 = 0.5 \times 150 + 100 = 175 \quad 3 \text{ 日め}$$

$$y_4 = 0.5 \times 175 + 100 = 187.5 \quad 4 \text{ 日め}$$

$$y_5 = 0.5 \times 187.5 + 100 = 193.75 \quad 5 \text{ 日め}$$

150、175、187.5、193.75、…と、ふえ方がだんだん小さくなり、200 に近づいていくように見えます。ほんとうに 200 に近づくのでしょうか。

合計の形に書きなおす

4 日めの水を、「いつやった水か」で分けてみます。今朝の 100 mL は全部残っています。きのうの 100 mL は 1 日たったので半分、おとといの分は 0.5^2 、3 日前の分は 0.5^3 だけ残っています。

$$\begin{aligned} y_4 &= 100 + 100 \times 0.5 + 100 \times 0.5^2 + 100 \times 0.5^3 \\ &= 100 (1 + 0.5 + 0.25 + 0.125) = 187.5 \end{aligned}$$

同じように、 n 日めの量は

$$y_n = 100 (1 + 0.5 + 0.5^2 + \cdots + 0.5^{n-1})$$

です。かつこの中は、1 から始めて、毎回 0.5 倍した数をたしたものです。

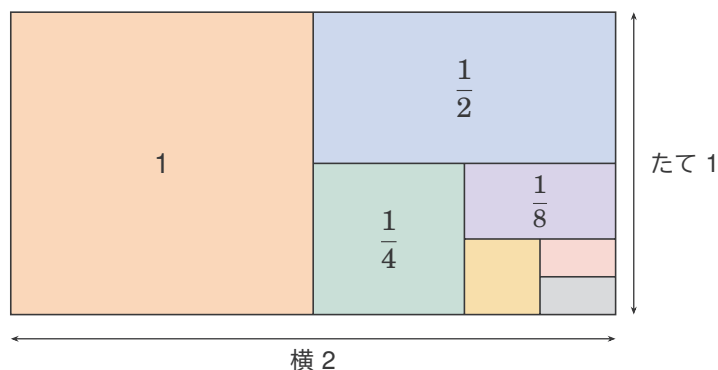


図5 面積2の長方形を、1、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、…と、前の半分ずつに切っていく。いくら切っても長方形からはみ出さず、残りの部分はいくらでも小さくなる。

$1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + \dots$ は、図 5 のように、面積 2 の長方形を半分ずつ切っていった面積の合計です。たす数をふやすほど、合計は長方形の面積 2 に近づきます (1、1.5、1.75、1.875、1.9375、 $\dots$)。だから、植木鉢の水は $100 \times 2 = 200 \text{ mL}$ に近づきます。

いつでも使える形に

1 から始めて毎回 x 倍した数の列 $1, x, x^2, x^3, \dots$ を**等比数列** (とうひすうれつ) といいます。となりどうしの比 ($x^2 \div x = x$ など) が、どこでも等しいからです。そのはじめの n 個の合計を S_n とし、図を使わずに求めます。

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

はじめの n 個の合計

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

両辺に x をかける (1 つずつずれる)

$$S_n - xS_n = 1 - x^n$$

上の式から下の式をひく。まん中は全部消える

$$(1 - x)S_n = 1 - x^n$$

左辺を S_n でくくる (3-8)

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

$1 - x$ でわる ($x \neq 1$)

3 行めで、 x から x^{n-1} までは、上の式にも下の式にもあるので、ひくと消えます。残るのは、上の式のいちばん前の 1 と、下の式のいちばん後ろの x^n だけです。

$x = 0.5$ 、 $n = 4$ で確かめます。 $0.5^4 = 0.0625$ なので、

$$S_4 = \frac{1 - 0.0625}{1 - 0.5} = \frac{0.9375}{0.5} = 1.875$$

です。じかにたした $1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1.875$ と合います。

ここで、 $|x| < 1$ なら、 n をふやすと x^n は 0 に近づきます (④の①)。だから、合計は $\frac{1}{1-x}$ に近づきます。

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1 \text{ のとき})$$

このように、等比数列を限りなくたしたものを**等比級数**（とうひきゅうすう）といいます。 $x = 0.5$ なら $\frac{1}{1-0.5} = 2$ で、図5の面積と合います。

落ち着く先を、もう1つの方法で

植木鉢の水が落ち着く先を y とすると、落ち着いたあとは「今朝の量」と「次の朝の量」が同じなので、漸化式の y_{n+1} と y_n を両方 y にできます。

$$y = 0.5y + 100$$

落ち着いたら、次の量=今の量

$$0.5y = 100$$

両辺から $0.5y$ をひく

$$y = 200$$

両辺を 0.5 でわる

等比級数の $100 \times \frac{1}{1-0.5} = 200$ と、同じ答えです。②の天気の行列で、落ち着く先が「 M をかけても変わらない組」だったのと同じ考え方です。

せいかくに言うと

等比級数の式が使えるのは $|x| < 1$ のときだけです。 $x = 2$ を入れると、

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1$$

となりますが、正の数をたしてどんどん大きくなる合計が -1 になるはずはありません。 $|x| \geq 1$ では x^n が 0 に近づかないので、3行めの x^n を消せないのです。物理の本（熱力学・原子）では、 x が e^{-a} ($a > 0$, 5-14) の形で出てきます。 $0 < e^{-a} < 1$ なので、 $1 + e^{-a} + e^{-2a} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-a}}$ と使えます。

ここまでで十分



同じ数を何回もかけると、大きさが 1 より大きければふえ、小さければ消えます。負なら符号が入れかわります。この先は、行列でも同じことが「固有値」で言えることを、式で確かめます。



式でわかる

固有値が、行き先を決める

★★★★★

6 固有ベクトルの向きでは、 λ^n 倍するだけ

行列 A の固有ベクトル $\vec{v}$ と固有値 λ は、 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をみたすものでした (7-8)。固有ベクトルに A を何回もかけると、どうなるでしょう。1 回ずつ確かめます。

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

固有ベクトルの決まり (7-8)

$$A^2\vec{v} = A(\lambda\vec{v}) = \lambda A\vec{v}$$

数 λ は行列の前に出せる (7-2)

$$= \lambda \lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

もう一度 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ を使う

$$A^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$$

同じことを n 回くり返す

固有ベクトルの向きでは、行列のくり返しは、④の「 1×1 のくり返し」と同じになります。向きは変わらず、1 回ごとに λ 倍されるだけです。

どんな点も、固有ベクトルに分けて考える

7-8 ④ では、点 $(1, 0)$ を主役の行列の 2 本の固有ベクトルに分けました。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だから、

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

上の式の両辺に A^n をかけると、それぞれの部分が λ^n 倍になります (7-2 の線形：分けてかけてからたしても同じ)。(1, 1) の部分は 1 回ごとに 3 倍、(1, -1) の部分は 1 倍のままなので、何回もかけると (1, 1) の部分ばかりが大きくなり、点はその向きにそろいます。7-8 ④ で名前をつけた**べき乗法**は、このしくみを使っています。一般に、何回もかけると、**大きさ $|\lambda|$ がいちばん大きい固有値の**

固有ベクトルの向きにそろいます。7-9 ⑧ の $A^n = PD^nP^{-1}$ も、「固有ベクトルの物差しで見ると、 D^n （それぞれ λ^n 倍）になるだけ」という、同じことを行列の形で書いたものです。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

ウサギのつがいとフィボナッチ数

1、1、2、3、5、8、13、21、…のように、前の2つをたして次を作る数の列を、フィボナッチ数といいます（1202年のイタリアの本で、ウサギのつがいの数として紹介された、と伝えられています）。「今の数と1つ前の数」の組にすると、行列のくり返しになります。

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

この行列の固有値は、特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ から $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、つまり 1.618 と -0.618 です。大ききのいちばん大きい 1.618 が勝つので（7-8 ④ のべき乗法）、となりどうしの比 $F_{n+1} \div F_n$ は、2、1.5、1.667、1.6、1.625、1.615、1.619、…と 1.618 に近づきます。この 1.618 は、美しい長方形の比として知られる**黄金比**です。

天気の流れでも

天気の流れ M の固有値は、1 と 0.4 です。固有値 1 の固有ベクトルは②で見つけた $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 、固有値 0.4 の固有ベクトルは $(1, -1)$ です（ M にかけて $(0.8 - 0.4, 0.2 - 0.6) = (0.4, -0.4)$ で、0.4 倍）。今日が晴れの $(1, 0)$ を分けると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{だから} \quad \vec{p}_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \times 0.4^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値 1 の部分は何回かけても変わらず、固有値 0.4 の部分は 0.4 倍ずつ消えていきます。だから、 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ が残ります。 $n = 3$ なら $0.4^3 = 0.064$ で、晴れの確率は $0.667 + \frac{0.064}{3} = 0.688$ 。②の表と合います。

ここまでの、表にまとめます（行列の固有値を λ_1, λ_2 とする）。

固有値の大きさ	何回もかけると
どちらも $ \lambda < 1$	0 に近づく（消える）
1 つが $\lambda = 1$ 、もう 1 つは $ \lambda < 1$	$\lambda = 1$ の固有ベクトルの部分が残し、そこに落ち着く
どちらかが $ \lambda > 1$	ふえていき、いちばん大きい $ \lambda $ の固有ベクトルの向きにそろう

表 4 くり返しの行き先は、固有値の大きさで決まる（④の 1×1 のきまりを、固有ベクトルの向きごとに使う）。

7-8 ⑧ の表は、微分方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の動きで、固有値の**実部の符号**で決まりました。くり返し $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ では、固有値の**大きさと 1** をくらべます。2 つの表のつながりは、⑧でわかります。

せいかくに言うと

「固有ベクトルに分けて、それぞれ λ^n 倍」と考えられるのは、固有ベクトルが 2 本そろそろ行列（7-9 の対角化できる行列）です。7-9 ⑧ のせいかくに言うとのずらし S は、固有ベクトルが 1 本しかありません。 S を n 回かけると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になり、固有値の大きさは 1 なのに、右上の成分が n に比例して大きくなります（6-12 の重解で、 e^{st} に t がかった te^{st} が出てきたのと同じことです）。それでも、固有値の大きさが 1 より小さければ、 n に比例する分より $|\lambda|^n$ が小さくなる分のほうが勝つので、最後は 0 に近づきます。

7 複素数の固有値は「回りながら」

③の回転行列 $R(30^\circ)$ には、向きが変わらない矢印がありません。どの矢印も 30° 回ってしまうからです。7-8 で見たように、このとき固有値は複素数になり、 $\cos 30^\circ \pm j \sin 30^\circ$ 、つまり $e^{\pm j 30^\circ}$ (6-10) でした。 $0.9R(30^\circ)$ の固有値は、それを 0.9 倍した $0.9 e^{\pm j 30^\circ}$ です。

複素数 $\lambda = r e^{j\theta}$ (大きさ r 、偏角 θ) を n 回かけると、6-9 の「大きさはかけ算、角はたし算」から、

$$\lambda^n = r^n e^{jn\theta} \quad (\text{大きさは } r^n, \text{ 角は } n\theta)$$

です。1 回かけるごとに、角が θ 進み、大きさが r 倍になります。 $R(30^\circ)$ では $r = 1$ 、 $\theta = 30^\circ$ なので、大きさを変えずに 30° ずつ回ります。 $0.9R(30^\circ)$ では $r = 0.9$ なので、 30° ずつ回りながら 0.9 倍ずつ小さくなります。図3のとおりです。

複素数の固有値でも、行き先を決めるのは**大きさ** $|\lambda|$ です。 $|\lambda| = 1$ なら回り続け、 $|\lambda| < 1$ ならうずを巻いて消え、 $|\lambda| > 1$ ならうずを巻いて広がります。実数の固有値は、角が 0° (正の数) か 180° (負の数) の特別な場合です。角が 180° の負の数では、1 回ごとに向きが反対になり、④の「符号が入れかわる」になります。

固有値の地図：単位円

固有値を、6-9 の複素数平面に点でかきます。原点を中心とする半径 1 の円を**単位円** (たんいえん) といいます。固有値が単位円の内側にあれば $|\lambda| < 1$ 、外側にあれば $|\lambda| > 1$ です。

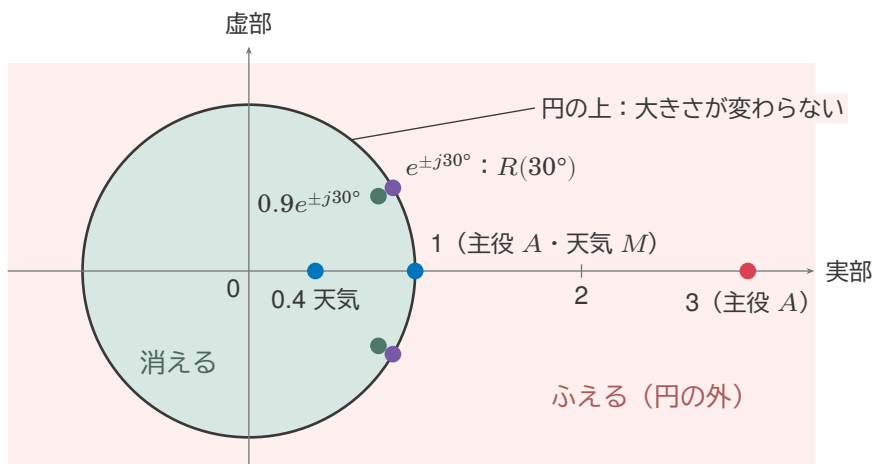


図6 固有値の地図。緑の円の中 ($|\lambda| < 1$) の部分は消え、外 ($|\lambda| > 1$) の部分はふえ、円の上 ($|\lambda| = 1$) の部分は大きさが変わらない。点の色は、それぞれの行列の固有値。

図6で、主役の行列は固有値3が円の外にあるのでふえ、天気の行列は1が円の上、0.4が円の中なので、1の部分だけが残ります。 $R(30^\circ)$ の2つの固有値は円の上で回り続け、 $0.9R(30^\circ)$ は円の中なので消えます。表とぴったり合っています。

8 オイラー法は、行列のくり返し

いよいよ、6-2のオイラー法を行列で見ます。6-14の2つの水そうでは、左の水位 h_1 、右の水位 h_2 [cm] が、次のルールで変わりました（時刻は分）。

$$\frac{dh_1}{dt} = -0.1(h_1 - h_2), \quad \frac{dh_2}{dt} = 0.1(h_1 - h_2)$$

右辺を h_1 と h_2 でまとめて、係数を行列にならべます（6-14の係数の表。7-8と同じ H ）。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \text{短く書くと } \dot{\vec{h}} = H\vec{h}$$

左辺の $\dot{\vec{h}}$ は、ベクトルの成分をそれぞれ微分したものです。7-8⑦で、この形の式の固有値は6-12の s と同じものだと学びました。ここからは、どんな行列でも使えるように、 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ と書いて進めます（水そうなら A が H 、 $\vec{x}$ が $\vec{h}$ ）。

オイラー法の1行「次の値=今の値+今の変わる速さ× Δt 」を、ベクトルのまま書きます。今の変わる速さは $A\vec{x}_n$ です。

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + (A\vec{x}_n) \Delta t$$

オイラー法の1行 (6-2)

$$\vec{x}_{n+1} = I\vec{x}_n + (A \Delta t) \vec{x}_n$$

$\vec{x}_n = I\vec{x}_n$ (7-3)。数 Δt は前に出せる

$$\vec{x}_{n+1} = (I + A \Delta t) \vec{x}_n$$

右から $\vec{x}_n$ でくくる

2行めで $\vec{x}_n$ を $I\vec{x}_n$ と書いたのは、くくったあとのかっこの中を、行列どうしのたし算にするためです。「 $1 + A \Delta t$ 」と書くと、数と行列のたし算になってしまい、意味がありません（まちがえやすいところ）。

オイラー法は、行列 $I + A \Delta t$ のくり返し

$$\vec{x}_{n+1} = (I + A \Delta t) \vec{x}_n$$

この本では、 $I + A \Delta t$ を「1歩の行列」とよぶことにします。オイラー法で表を何行も進めることは、1歩の行列を何回もかけることだったのです。

水そうで確かめる

$\Delta t = 1$ 分なら、1歩の行列は

$$I + H \times 1 = \begin{pmatrix} 1 + (-0.1) & 0 + 0.1 \\ 0 + 0.1 & 1 + (-0.1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

です。はじめの水位 (20, 0) にかけて、

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \times 20 + 0.1 \times 0 \\ 0.1 \times 20 + 0.9 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

もう一度かけると (16.4, 3.6) です。6-14 ③ の表計算と同じ数です。

この行列の固有ベクトルは、6-14 の「和」と「差」の向きです。(1, 1) にかけて (1, 1) のまま (固有値 1)、(1, -1) にかけて (0.8, -0.8) (固有値 0.8)。

水の合計は変わらず、水位の差は1分ごとに0.8倍になります。6-14で「表では差が毎分ちょうど0.8倍、ほんとうは約0.82倍」と書いたのは、このことでした。

Δt を大きくすると

1歩の行列の固有値0.8は、 $\Delta t = 1$ 分ときの数です。 Δt を変えると、差の倍率も変わります。 $\Delta t = 2.5$ 分なら、1歩の行列の1行めは $(1 - 0.25, 0.25)$ で、差は1歩ごとに $1 - 0.2 \times 2.5 = 0.5$ 倍。 $\Delta t = 7.5$ 分なら $1 - 0.2 \times 7.5 = -0.5$ 倍で、差の符号が毎回入れかわります。④の4つの形のどれになるかが、 Δt で決まるのです。

水位の差 $h_1 - h_2$ (cm)

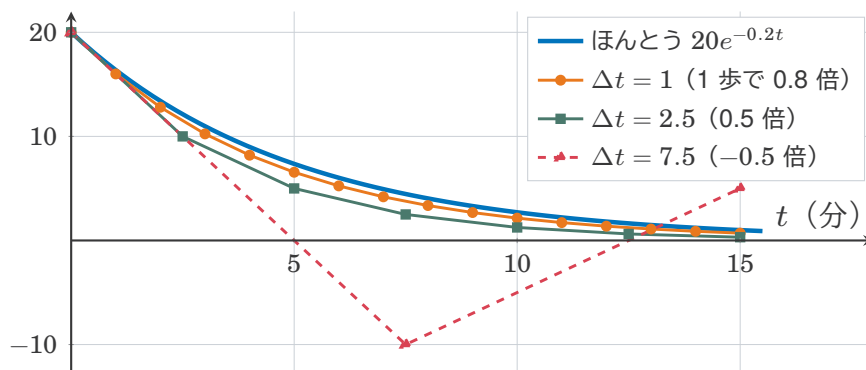


図7 6-14の水そうの水位の差を、3つの Δt のオイラー法で進めた。 $\Delta t = 7.5$ 分(赤)では差がマイナスになり、左右の水位が入れかわる(ほんとうはおこらない)。

1歩の行列の固有値は $1 + \lambda \Delta t$

0.8という数は、どこから来たのでしょうか。 A の固有ベクトル $\vec{v}$ (固有値 λ)に、1歩の行列をかけてみます。

$$(I + A \Delta t) \vec{v} = I\vec{v} + \Delta t A \vec{v} \quad \text{分けてかける (7-2)}$$

$$= \vec{v} + \Delta t \lambda \vec{v} \quad I\vec{v} = \vec{v}, A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$= (1 + \lambda \Delta t) \vec{v} \quad \vec{v} \text{ でくくる}$$

A の固有ベクトルは、そのまま 1 歩の行列の固有ベクトルで、固有値は $1 + \lambda \Delta t$ になります。水そうの H は、和の向きで $\lambda = 0$ 、差の向きで $\lambda = -0.2$ です (7-8 ③)。だから、1 歩の行列の固有値は $1 + 0 \times 1 = 1$ と $1 - 0.2 \times 1 = 0.8$ です。

ほんとうの答えでは、差は $e^{-0.2t}$ の形でへり、1 分ごとに $e^{-0.2} = 0.8187$ 倍になります (6-4・6-14)。オイラー法の 0.8 は、 $e^{-0.2}$ を $1 - 0.2$ でおきかえたものです。5-14・5-17 で学んだ「 e^x の $x = 0$ での接線は $y = 1 + x$ 」、つまり $e^x \approx 1 + x$ のおきかえです。

1 歩で、ほんとうは $e^{\lambda \Delta t}$ 倍
オイラー法では $1 + \lambda \Delta t$ 倍

接線は e^x のグラフの下にあるので、 $1 + x$ は e^x より少し小さくなります。オイラー法の水位の差が、ほんとうより少し速く小さくなったのは、そのためです。

こわれない条件

④で見たように、くり返しがふくらまないためには、1 歩の行列の固有値の大きさが 1 より小さい（またはちょうど 1）ことが必要です。オイラー法がこわれない条件は、

$$|1 + \lambda \Delta t| < 1$$

です（ちょうど 1 のときは、ふえも消えもしない境目）。冷めるお湯は $\lambda = -0.05$ (1×1 の行列) なので、 $1 + \lambda \Delta t = 1 - 0.05 \Delta t$ です。 Δt をふやしていくと、この数は数直線の上を左へ進んでいきます。

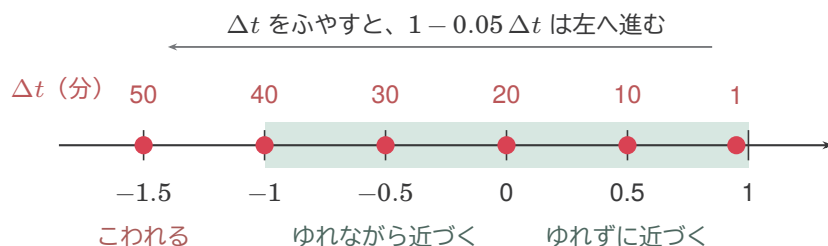


図8 冷めるお湯の1歩の数 $1 - 0.05 \Delta t$ 。赤い点の上の数は Δt [分]。緑の区間（-1 と 1 のあいだ）に入っていれば、こわれない。

$-1 < 1 - 0.05 \Delta t$ をとくと $\Delta t < 40$ 分。6-2 のせいかくに言うので書いた「こわれないのは $\Delta t < 40$ 分のとき」は、この条件だったのです。 $\Delta t = 20$ 分までは 0 以上なのでゆれず、20 分から 40 分のあいだは負の数なので、ゆれながら近づきます（④の4つの形）。

9 ばねがふくらむわけ：固有値の大きさ

❓ はてな？ のばねを、行列で見ます。5-15 のばね（ $\omega = 1$ 、 $\ddot{x} = -x$ ）を、6-14 ④ のように位置 x と速度 v の組にします。

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -x \quad \text{だから} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

この行列を A とします。1 行めの $(0, 1)$ は「 x の変わる速さは $0 \times x + 1 \times v$ 」、2 行めの $(-1, 0)$ は「 v の変わる速さは $-1 \times x + 0 \times v$ 」という意味です。

A の固有値

特性方程式 (7-8) を作ります。

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{ななめから } \lambda \text{ をひく (7-8)}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda) - 1 \times (-1) = \lambda^2 + 1 \quad ad - bc \text{ (7-4)}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{から} \quad \lambda = \pm j \quad \lambda^2 = -1 \text{ (6-8)}$$

6-12 で、ばね $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ の特性方程式は $s^2 + \omega^2 = 0$ 、 $s = \pm j\omega$ でした。
 $\omega = 1$ なら $s = \pm j$ で、同じです (7-8: 固有値は 6-12 の s と同じもの)。ほんとうの動きでは、1 歩ごとに $e^{\pm j\Delta t}$ 倍で、その大きさは 1 です (6-10: $|e^{j\theta}| = 1$)。だから、ほんとうのゆれは大きくも小さくもなりません。

ふつうのオイラー法の 1 歩の行列

オイラー法の 1 歩は、6-2 の表のとおり「 x は今の v で、 v は今の x で」進めます。

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t, \quad v_{n+1} = v_n - x_n \Delta t$$

係数をならべると、1 歩の行列は次のとおりです。やってみようの G です。
 $I + A \Delta t$ を計算しても、同じ行列になります。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

⑧から、この行列の固有値は $1 + \lambda \Delta t = 1 \pm j \Delta t$ です。その大きさは、6-9 の三平方の定理で

$$|1 \pm j \Delta t| = \sqrt{1^2 + \Delta t^2} = \sqrt{1 + \Delta t^2}$$

です。 Δt が 0 でなければ、これは**いつも 1 より大きい**。だから、⑦の地図では固有値は単位円の外にあり、ゆれは 1 歩ごとに少しずつふくらみます。

1.37 と 1.03 を出す

$\Delta t = 0.1$ なら、1 歩で $\sqrt{1 + 0.01} = \sqrt{1.01} = 1.005$ 倍です。ゆれの周期は $2\pi = 6.28$ 秒 ($\omega = 1$ 。4-8) なので、1 周は $6.28 \div 0.1 \approx 63$ 歩です。

$$(\sqrt{1.01})^{63} = 1.01^{31.5} \approx 1.37$$

【? はてな?】 の答え: 1.37 は、ふつうのオイラー法の 1 歩の行列 G の固有値の大きさ $\sqrt{1.01}$ を、1 周の歩数 (約 63) だけかけた数です。やってみようで見た「1 列ごとに約 1.005 倍」の 1.005 は、この $\sqrt{1.01}$ でした。

$\Delta t = 0.01$ なら、1 歩で $\sqrt{1.0001} = 1.00005$ 倍、1 周は約 628 歩なので、 $1.0001^{314} \approx 1.03$ 倍です。 Δt を $\frac{1}{10}$ にすると、ふくらみの「0.37」がおよそ $\frac{1}{10}$ の「0.03」になります（6-2 ⑤：1 次の方法）。

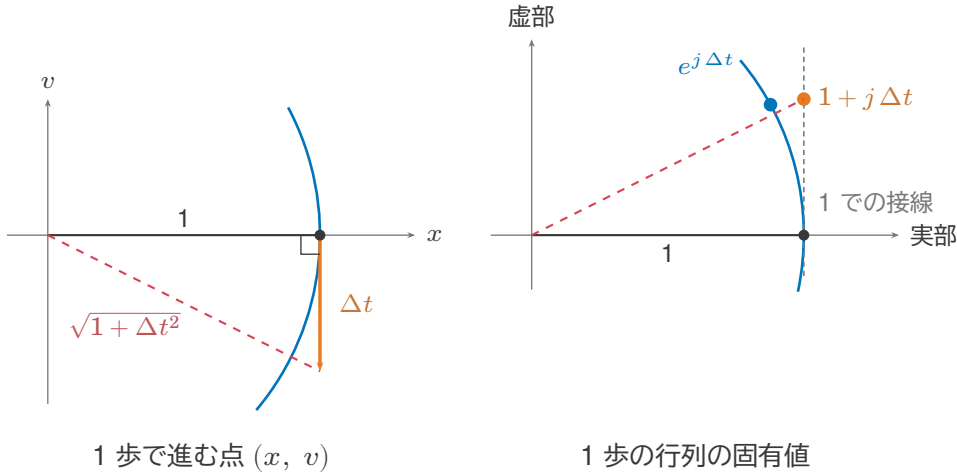


図 9 左：6-2 ⑩ の図。点 $(1, 0)$ から真下に Δt 進むので、新しい半径は $\sqrt{1 + \Delta t^2}$ 。右：オイラー法の固有値 $1 + j\Delta t$ （オレンジ）は、単位円の 1 での接線（点線）の上であり、円の外に出る。ほんとうの $e^{j\Delta t}$ （青）は円の上。どちらの図も、わかりやすいように $\Delta t = 0.5$ でかいた。

図 9 の左右は、同じ直角三角形です。6-2 では「接線の向きに進むので円の外へ出る」と考えました。行列で見ると、「1 歩の行列の固有値が、単位円の接線の上にあるので円の外へ出る」となります。⑧の「 e^x を接線 $1 + x$ でおきかえる」の、複素数の版です。

ほかの Δt でも計算して、表にします。

Δt	1 歩の倍率 $\sqrt{1 + \Delta t^2}$	1 周の歩数	1 周の倍率
0.2	1.0198	31.4	1.85
0.1	1.00499	62.8	1.37
0.05	1.00125	125.7	1.17
0.01	1.00005	628.3	1.03

表5 ふつうのオイラー法 ($\omega = 1$) のふくらみ。1 周の倍率は $(1 + \Delta t^2)^{\pi/\Delta t}$ で、小数第 3 位を四捨五入した。

Δt を小さくすると 1 に近づきますが、どんなに小さくしても 1 より大きいままです。

6-2 の主なばね ($\omega = 4$, $\Delta t = 0.02$) なら、 A の固有値は $\pm 4j$ 、1 歩の行列の固有値は $1 \pm 4j \times 0.02 = 1 \pm 0.08j$ 、大きさは $\sqrt{1.0064} = 1.0032$ です。6-2 ⑩ で三平方の定理から出した「1 歩で 1.0032 倍」と同じ数です。 ω がいくつでも、大きさは $\sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2}$ で、6-2 のもっと知りたいの式になります。

行列式で見る：面積が 1.01 倍

もう 1 つの見方です。ふつうのオイラー法の 1 歩の行列の行列式は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - \Delta t \times (-\Delta t) = 1 + \Delta t^2$$

です。7-4 で学んだように、行列式は面積の倍率でした。1 歩ごとに、ゆれの円の面積が $1 + \Delta t^2$ 倍 ($\Delta t = 0.1$ なら 1.01 倍) になるので、半径は $\sqrt{1 + \Delta t^2}$ 倍です。7-8 の「 $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ 」とも合います。 $\lambda_1 \lambda_2 = (1 + j \Delta t)(1 - j \Delta t) = 1 + \Delta t^2$ だからです (6-8：共役な数どうしの積は、大きさの 2 乗)。

速度を先に進めると、なぜふくらまない？

6-2 ⑪ の「速度を先に進めるオイラー法」も、1 歩の行列で書きます。先に v を新しくし、その新しい v で x を進めます。

$$v_{n+1} = v_n - x_n \Delta t \quad \text{速度を先に進める}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \Delta t \quad \text{新しい速度で位置を進める}$$

$$= x_n + (v_n - x_n \Delta t) \Delta t \quad \text{1 行めの } v_{n+1} \text{ を入れる}$$

$$= (1 - \Delta t^2) x_n + \Delta t v_n \quad x_n \text{ と } v_n \text{ でまとめる}$$

だから、1 歩の行列は

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta t^2 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

です。行列式を計算すると、

$$(1 - \Delta t^2) \times 1 - \Delta t \times (-\Delta t) = 1 - \Delta t^2 + \Delta t^2 = 1$$

ちょうど 1 です。面積を変えない行列なので、ゆれの大きさは 1 周してもほぼ同じです。固有値で言うと、2 つの固有値は共役な複素数の組 ($\Delta t = 0.1$ なら $0.995 \pm 0.0999j$) で、積 $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$ が行列式 1 に等しいので、 $|\lambda| = 1$ 。固有値は**単位円の上**にあります。6-2 で「順番を変えただけで、ゆれがふくらまなくなった」わけは、ここにありました。

せいかくに言うと

速度を先に進める方法でも、 Δt を大きくしすぎるとこわれます。 $\omega = 1$ では、固有値が複素数になるのは $\Delta t < 2$ のときで、そのとき $|\lambda| = 1$ です。 $\Delta t > 2$ では 2 つの固有値が実数になり、積は 1 のままなので、片方の大きさが 1 より大きくなります ($\Delta t = 2.5$ なら -0.25 と -4)。一般の ω では、条件は $\omega \Delta t < 2$ です。実際には、ずれを小さくするために、 Δt はこれよりずっと小さくとります (6-2: 周期の数十分の 1)。

10 Python で確かめる

ここまでの計算を、Python の numpy (2-19・7-1) で確かめます。まず、主役の行列を 5 回かけます。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1], [1, 2]]) # 主役の行列 (行ごとに書く)
x = np.array([1, 0])          # はじめの点
for n in range(5):             # 5 回くり返す
    x = A @ x                   # 漸化式  $x(n+1) = A x(n)$ 
    print(x)
print(np.linalg.matrix_power(A, 5)) # A の 5 乗
```

実行結果

```
[2 1]
[5 4]
[14 13]
[41 40]
[122 121]
[[122 121]
 [121 122]]
```

$A @ x$ が行列×ベクトル、 $\text{np.linalg.matrix_power}(A, 5)$ が A^5 です。最後の行列の 1 列めが (122, 121) で、 $A^5 \vec{x}_0$ と合います ($\vec{x}_0 = (1, 0)$ をかけると、1 列めが取り出されるから。7-2)。

つぎに、ばねの 1 歩の行列の固有値と、その大きさを出します。

Python

```
G = np.array([[1, 0.1], [-0.1, 1]]) # ふつうのオイラー法 ( $\Delta t=0.1$ )
lam = np.linalg.eigvals(G)          # 固有値
print(lam)
print(abs(lam))                      # 固有値の大きさ
print(abs(lam[0]) ** 63)              # 63 歩 (約 1 周)
G2 = np.array([[0.99, 0.1], [-0.1, 1]]) # 速度を先に進める方法
print(abs(np.linalg.eigvals(G2)))
```


実行結果

```
[1.+0.1j 1.-0.1j]
[1.00498756 1.00498756]
1.368117109470992
[1. 1.]
```

`np.linalg.eigvals` は固有値だけを出す命令、`abs` は大きさ（複素数なら 6-9 の絶対値）を出す命令です。Python では虚数単位を `j` と書きます（6-8）。1 歩で 1.005 倍、63 歩で 1.37 倍、速度を先に進める方法では大きさがちょうど 1 と、本文の計算と合いました。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

刻みを細かくした先： e^{At}

オイラー法で、時刻 t までを n 歩で進めると、1 歩は $\Delta t = \frac{t}{n}$ なので、

$$\vec{x}(t) \approx \left(I + A \frac{t}{n} \right)^n \vec{x}_0$$

です。1 × 1 の冷めるお湯（ $A = -0.05$ 、 $t = 10$ 分）なら $\left(1 - \frac{0.5}{n}\right)^n$ で、 $n = 10$ で 0.5987（2-18）、 $n = 1000$ で 0.60645 と、ほんとうの $e^{-0.5} = 0.60653$ に近づきます。5-14 の $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ と同じ形です。行列でも同じで、 n をふやすと $\left(I + A \frac{t}{n}\right)^n$ はある行列に近づきます。その行列を e^{At} （行列の指数関数）と書きます。ばね（ $\omega = 1$ ）で $t = 2\pi$ （1 周）とすると、 $n = 63$ では成分が 1.37 ほどの行列ですが、 $n = 630$ で 1.03 ほど、 $n = 6283$ で 1.003 ほどになり、単位行列 I に近づきます。1 周するとともにもどる、というほんとうの動きです。 e^{At} は、第 9 巻（9-11）で、制御の式を解く主役になります。

🔍 もっと知りたい ★★★★★

ダンパーがあっても、 Δt が大きいと

5-15・6-7 のばね (0.5 kg, 8 N/m、ダンパー $c = 0.4$) は、ほんとうはだんだん止まります。固有値は (7-8 ⑦) $\lambda = -0.4 \pm 3.98j$ で、大きさの2乗は $0.4^2 + 3.98^2 = 16$ です。ふつうのオイラー法の1歩の行列の固有値 $1 + \lambda \Delta t$ の大きさの2乗は、

$$|1 + \lambda \Delta t|^2 = (1 - 0.4 \Delta t)^2 + (3.98 \Delta t)^2 = 1 - 0.8 \Delta t + 16 \Delta t^2$$

です。 $\Delta t = 0.02$ なら 0.9904 (1 より小さい) で、計算でもゆれは消えます。 $\Delta t = 0.1$ なら 1.08 で、止まるはずのばねが計算では暴れだします。1 より小さくなる条件は $\Delta t < 0.8 \div 16 = 0.05$ です。

📖 専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

線形差分方程式 $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ の解は $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ である。 A が対角化可能ならば、固有値 λ_i 、固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ を用いて $\mathbf{x}_k = \sum_i c_i \lambda_i^k \mathbf{v}_i$ と書ける。 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ に前進オイラー法を適用すると $\mathbf{x}_{k+1} = (E + hA)\mathbf{x}_k$ となり、その安定条件は全ての固有値について $|1 + h\lambda_i| < 1$ である。

訳 「差分方程式」は漸化式。太字の $\mathbf{x}$ はこの本の $\vec{x}$ 、 k は n 。 $\sum_i$ は固有ベクトルの数だけたすこと ($c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$)。「前進オイラー法」はふつうのオイラー法、 h は Δt 、 E は単位行列 I 。

たいせつ

くり返し

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \text{ なら } \vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$$

行き先

$$A^n \vec{v} = \lambda^n \vec{v}。|\lambda| < 1 \text{ の部分は消え、} |\lambda| > 1 \text{ はふえる}$$

等比級数

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

オイラー法

$$\text{1 歩の行列 } I + A \Delta t、\text{固有値は } 1 + \lambda \Delta t$$

この章で出てきたことば

漸化式 1つ前の値から次の値を作るきまり。 $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ など。

マルコフ連鎖 次の状態が今の状態だけで、毎回同じ確率で決まるくり返し。

単位円 原点が中心の半径 1 の円。この中の固有値の部分は消える。

等比級数 毎回同じ数をかけてできる数の列（等比数列）を、限りなくたしたもの。

記号カード

初めて出た章 7-10

 A^n

読み方 エー・エヌじょう

意味 行列 A を n 回かけた行列。成分を n 乗したものではない。 $A^0 = I$

英語 A to the n

記号カード

初めて出た章 7-10

 $\vec{x}_n$

読み方 ベクトル・エックス・エヌ

意味 n 歩め（ n 回め）の状態を表すベクトル。6-2 の y_n のベクトル版

英語 x sub n

例題でたしかめよう

例題 1 倍々のくり返し

$x_{n+1} = -0.5x_n$ 、 $x_0 = 16$ のとき、 x_1 から x_4 を求めましょう。また、くり返すとどうなるかを答えましょう。

考え方 1 回ごとに -0.5 倍。ふるまいは a の大きさと符号で決まる (④)。

式 $x_1 = -0.5 \times 16 = -8$ 、 $x_2 = -0.5 \times (-8) = 4$

$x_3 = -0.5 \times 4 = -2$ 、 $x_4 = -0.5 \times (-2) = 1$

$|a| = 0.5 < 1$ なので 0 に近づき、 $a < 0$ なので符号が毎回入れかわる

答え -8 、 4 、 -2 、 1 。ゆれながら 0 に近づく

例題2 くり返しの合計：植木鉢

植木鉢に毎朝 50 mL の水をやり、土の水は 1 日で 0.6 倍になります。水をやった直後の量 y_n [mL] は $y_{n+1} = 0.6 y_n + 50$ 、 $y_1 = 50$ です。 y_4 と、落ち着く先を求めましょう。

考え方 落ち着く先は $50(1 + 0.6 + 0.6^2 + \dots)$ 。等比級数の式を使う(⑤)。

式 $y_2 = 0.6 \times 50 + 50 = 80$

$$y_3 = 0.6 \times 80 + 50 = 98$$

$$y_4 = 0.6 \times 98 + 50 = 108.8$$

$$\text{落ち着く先} : 50 \times \frac{1}{1-0.6} = 50 \times \frac{1}{0.4} = 125$$

答え $y_4 = 108.8$ mL、125 mL に落ち着く

じぶんでところ1

$x_{n+1} = -1.5 x_n$ 、 $x_0 = 4$ のとき、 x_1 から x_4 を求めましょう。また、くり返すとどうなるかを答えましょう。

じぶんでところ2

毎朝 30 mL の水をやり、土の水は 1 日で 0.8 倍になります。
 $y_{n+1} = 0.8 y_n + 30$ 、 $y_1 = 30$ です。 y_4 と、落ち着く先を求めましょう。

例題 3 天気の行列

晴れの日の次の日は 90% が晴れ・10% が雨、雨の日の次の日は 50% が晴れ・50% が雨の町があります。(1) 今日が雨のとき、3 日後に晴れる確率を求めましょう。(2) 落ち着く先を求めましょう。

考え方 M の 1 列めは $(0.9, 0.1)$ 、2 列めは $(0.5, 0.5)$ (②)。落ち着く先は M をかけても変わらない組。

式 (1) $\vec{p}_0 = (0, 1)$ から $\vec{p}_1 = (0.5, 0.5)$ (M の 2 列め)

$$\vec{p}_2 = (0.45 + 0.25, 0.05 + 0.25) = (0.7, 0.3)$$

$$\vec{p}_3 = (0.63 + 0.15, 0.07 + 0.15) = (0.78, 0.22)$$

$$(2) 0.9a + 0.5b = a \text{ から } 0.5b = 0.1a, a = 5b$$

$$a + b = 1 \text{ に代入して } 6b = 1, b = \frac{1}{6}, a = \frac{5}{6}$$

答え (1) 0.78。(2) 晴れ $\frac{5}{6}$ 、雨 $\frac{1}{6}$

例題 4 固有ベクトルに分けて A^n をかける

主役の行列 A (1 行め $(2, 1)$ 、2 行め $(1, 2)$) について、 $A^4 \vec{x}_0$ を求めましょう。ただし $\vec{x}_0 = (3, 1)$ です。

考え方 固有ベクトル $(1, 1)$ (固有値 3) と $(1, -1)$ (固有値 1) に分け、それぞれ λ^4 倍 (⑥)。

式 $(3, 1) = c_1(1, 1) + c_2(1, -1)$ とすると、 $c_1 + c_2 = 3$ 、 $c_1 - c_2 = 1$

$$2 \text{ つの式をたして } 2c_1 = 4, c_1 = 2, c_2 = 1$$

$$A^4 \vec{x}_0 = 2 \times 3^4 (1, 1) + 1 \times 1^4 (1, -1)$$

$$= 162 (1, 1) + (1, -1) = (163, 161)$$

答え $A^4 \vec{x}_0 = (163, 161)$

例題5 固有値で行き先を見分ける

行列 B の1行めは $(0.6, 0.2)$ 、2行めは $(0.2, 0.6)$ です。(1) B を $(1, 1)$ と $(1, -1)$ にかけて、固有値を求めましょう。(2) B を何回もかけると、点 $(1, 0)$ はどうなりますか。

考え方 $|\lambda| < 1$ の部分は消える (⑥の表)。消え方のおそいほうの向きが最後まで残る。

式 (1) $B(1, 1) = (0.6 + 0.2, 0.2 + 0.6) = (0.8, 0.8)$: 固有値 0.8

$B(1, -1) = (0.6 - 0.2, 0.2 - 0.6) = (0.4, -0.4)$: 固有値 0.4

(2) どちらも $|\lambda| < 1$ なので 0 に近づく。0.4 の部分のほうが速く消える

答え (1) 0.8 と 0.4。(2) $(1, 1)$ の向きにそろいながら、原点に近づく

じぶんでところ3

晴れの次の日は 70% が晴れ・30% が雨、雨の次の日は 60% が晴れ・40% が雨です。今日が晴れのとき、3日後に晴れる確率と、落ち着く先を求めましょう。

じぶんでところ4

主役の行列 A について、 $A^4 \vec{x}_0$ を求めましょう。ただし $\vec{x}_0 = (1, 3)$ です。

例題 6 水そうのオイラー法を行列で

6-14 の水そう (⑧の H) を、 $\Delta t = 2$ 分のオイラー法で進めます。(1) 1 歩の行列と、(2) その固有値を求めましょう。(3) はじめ $(20, 0)$ から 2 歩 (4 分後) の水位を求めましょう。

考え方 1 歩の行列は $I + H \Delta t$ 、固有値は $1 + \lambda \Delta t$ 。 H の固有値は 0 と -0.2 (⑧)。

式 (1) $I + 2H$ の 1 行めは $(1 - 0.2, 0.2) = (0.8, 0.2)$ 、2 行めは $(0.2, 0.8)$

(2) $1 + 0 \times 2 = 1$ ($(1, 1)$ の向き)、 $1 - 0.2 \times 2 = 0.6$ ($(1, -1)$ の向き)

(3) 1 歩め $(0.8 \times 20 + 0.2 \times 0, 0.2 \times 20 + 0.8 \times 0) = (16, 4)$

2 歩め $(0.8 \times 16 + 0.2 \times 4, 0.2 \times 16 + 0.8 \times 4) = (13.6, 6.4)$

答え (1) 上の行列。(2) 1 と 0.6。(3) 左 13.6 cm、右 6.4 cm

じぶんでこう 5

行列 C の 1 行めは $(1.1, 0.1)$ 、2 行めは $(0.1, 1.1)$ です。(1) $(1, 1)$ と $(1, -1)$ にかけて固有値を求めましょう。(2) 何回もかけると、点 $(1, 0)$ はどうなりますか。

じぶんでこう 6

6-14 の水そうを、 $\Delta t = 0.5$ 分のオイラー法で進めます。(1) 1 歩の行列と、(2) その固有値を求めましょう。(3) はじめ $(20, 0)$ から 4 歩 (2 分後) の水位を求めましょう ($0.9^4 = 0.6561$)。

例題7 こわれない Δt

お茶の温度が $\frac{dT}{dt} = -0.1(T - 20)$ (t は分) で冷めます (6-2 の例題)。オイラー法で、(1) ゆれずに近づく Δt 、(2) こわれない Δt を求めましょう。(3) $\Delta t = 15$ 分では、部屋との差は1歩で何倍ですか。

考え方 $\lambda = -0.1$ の 1×1 のくり返し。1歩の数は $1 - 0.1 \Delta t$ (⑧)。

式 (1) $1 - 0.1 \Delta t \geq 0$ から $0.1 \Delta t \leq 1$ 、 $\Delta t \leq 10$

(2) $-1 < 1 - 0.1 \Delta t$ から $0.1 \Delta t < 2$ 、 $\Delta t < 20$

(3) $1 - 0.1 \times 15 = 1 - 1.5 = -0.5$

答え (1) 10 分以下。(2) 20 分より短いとき。(3) -0.5 倍。ゆれながら部屋の温度に近づく

例題8 ばねのふくらみを固有値で

$m = 1 \text{ kg}$ 、 $k = 4 \text{ N/m}$ のばね ($\omega = 2$) を、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.1$ として計算します。(1) 位置と速度の組の行列 A の固有値、(2) 1 歩の行列の固有値とその大きさ、(3) 1 周期 (π 秒、約 31.4 歩) で何倍になるかを求めましょう ($1.04^{15.7} = 1.85$)。

考え方 A の 1 行めは $(0, 1)$ 、2 行めは $(-4, 0)$ ($\dot{v} = -4x$)。1 歩の行列の固有値は $1 + \lambda \Delta t$ (⑨)。

式 (1) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = 0$ から $\lambda = \pm 2j$

(2) $1 \pm 2j \times 0.1 = 1 \pm 0.2j$ 。大きさ $\sqrt{1 + 0.04} = \sqrt{1.04} \approx 1.020$

(3) $(\sqrt{1.04})^{31.4} = 1.04^{15.7} \approx 1.85$

答え (1) $\pm 2j$ 。(2) $1 \pm 0.2j$ 、大きさ約 1.020。(3) 約 1.85 倍

例題 9 速度を先に進める方法の 1 歩の行列

$\omega = 2$ のばね ($\dot{x} = v$, $\dot{v} = -4x$) を、速度を先に進めるオイラー法、 $\Delta t = 0.1$ で計算します。(1) 1 歩の行列 G 、(2) その行列式、(3) 固有値とその大きさを求めましょう。

考え方 先に v 、新しい v で x を進める (⑨)。固有値の積は行列式 (7-8)。

式 (1) $v_{n+1} = v_n - 0.4 x_n$

$$x_{n+1} = x_n + 0.1 (v_n - 0.4 x_n) = 0.96 x_n + 0.1 v_n$$

G の 1 行めは $(0.96, 0.1)$ 、2 行めは $(-0.4, 1)$

(2) $0.96 \times 1 - 0.1 \times (-0.4) = 1$ (3) $\lambda^2 - 1.96\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = (1.96 \pm \sqrt{-0.1584}) \div 2 = 0.98 \pm 0.199j$$

共役な組なので $|\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda} = \det G = 1$ 、 $|\lambda| = 1$

答え (1) 上の G 。(2) 1。(3) $0.98 \pm 0.199j$ 、大きさ 1 (ふくらまない)

じぶんでどう 7

コンデンサーの電圧が $\frac{dV}{dt} = \frac{10 - V}{2}$ (t は秒) で変わります (6-2 ⑧)。目標との差 $10 - V$ は $\lambda = -0.5$ の 1×1 のくり返しです。オイラー法で、(1) ゆれずに近づく Δt 、(2) こわれぬ Δt を求めましょう。(3) $\Delta t = 3$ s では差は 1 歩で何倍ですか。

じぶんでどう 8

$m = 1$ kg、 $k = 9$ N/m のばね ($\omega = 3$) を、ふつうのオイラー法で $\Delta t = 0.1$ として計算します。(1) A の固有値、(2) 1 歩の行列の固有値とその大きさ、(3) 1 周期 (約 20.9 歩) で何倍になるかを求めましょう ($1.09^{10.5} = 2.47$)。

例題 10 プログラムを読む

次のプログラムで表示される数を答えましょう。また、くり返しを続けると、 $y \div x$ は何に近づきますか。

Python

```
import numpy as np
B = np.array([[3, 1], [1, 3]])
x = np.array([1, 0])
for n in range(3):
    x = B @ x
    print(x)
```

考え方 $B @ x$ は行列×ベクトル。 B の固有値は、 $(1, 1)$ の向きで 4、 $(1, -1)$ の向きで 2。大きい 4 の向きにそろおう (⑥)。

式 1 回め $(3 \times 1 + 1 \times 0, 1 \times 1 + 3 \times 0) = (3, 1)$

2 回め $(3 \times 3 + 1 \times 1, 1 \times 3 + 3 \times 1) = (10, 6)$

3 回め $(3 \times 10 + 1 \times 6, 1 \times 10 + 3 \times 6) = (36, 28)$

答え $[3 \ 1]$ 、 $[10 \ 6]$ 、 $[36 \ 28]$ 。 $y \div x$ は 1 に近づく ($(1, 1)$ の向き)

じぶんでところ 9

$\omega = 3$ のばね ($\dot{x} = v$ 、 $\dot{v} = -9x$) を、速度を先に進めるオイラー法で $\Delta t = 0.1$ として計算します。1 歩の行列、その行列式、固有値の大きさを求めましょう。

じぶんでところ 10

次のプログラムで表示される数を答えましょう。また、 $y \div x$ は何に近づきますか。

Python

```
import numpy as np
B=np.array([[1,2],[2,1]])
x=np.array([1,0])
for n in range(3):
    x = B @ x
    print(x)
```

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

A^2 を成分の 2 乗にする

✗ 主役の行列の A^2 を、成分を 2 乗して 1 行め (4, 1) とする

○ $A^2 = AA$ 。行と列をかけて、1 行めは (5, 4)

A^2 は行列のかけ算 AA です (7-3)。Python の $A ** 2$ も成分ごとの 2 乗なので、 $A @ A$ を使います。

⚠ まちがえやすいところ

複素数の大きさを、たし算で出す

✗ $|1 + 0.1j| = 1 + 0.1 = 1.1$

○ $|1 + 0.1j| = \sqrt{1^2 + 0.1^2} = \sqrt{1.01} \approx 1.005$

大きさは原点からの距離なので、三平方の定理で求めます (6-9)。1.1 倍なら、ばねは 1 周で約 400 倍にもなり、6-2 と合いません。

⚠ まちがえやすいところ

負の固有値なら小さくなる、と思う

✗ 固有値が -1.5 で負の数だから、くり返すと小さくなる

○ 大きさ $|-1.5| = 1.5 > 1$ だから、ゆれながらふえる

ふえるか消えるかは、大きさ $|\lambda|$ で決まります (④)。負の符号は、向きが毎回入れかわることを表すだけです。

⚠ まちがえやすいところ

等比級数の式を、 $|x| \geq 1$ で使う

✗ $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$

○ $\frac{1}{1-x}$ が使えるのは $|x| < 1$ のときだけ

$|x| \geq 1$ では x^n が 0 に近づかないので、合計はどこにも落ち着きません (⑤のせいかくに言う)。

⚠ まちがえやすいところ

1 歩の行列で、 I を忘れる

✗ オイラー法の 1 歩は $\vec{x}_{n+1} = A \Delta t \vec{x}_n$

○ $\vec{x}_{n+1} = (I + A \Delta t) \vec{x}_n$

$A \Delta t \vec{x}_n$ は 1 歩で「変わる量」だけです。今の値 $\vec{x}_n = I \vec{x}_n$ をたすのを忘れないこと (⑧)。

⚠ まちがえやすいところ

天気行列の、行と列を取りちがえる

✗ 1 行めに「晴れの日からの移り方」(0.8, 0.2) を書く

○ 1 列めに「晴れの日からの移り方」を書く。各列の和が 1

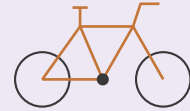
$M\vec{p}_n$ では、今日の晴れの確率 a_n は M の 1 列めにかかります (7-2)。

「どの列もたすと 1」で確かめましょう。

物理・工学ではこう使う

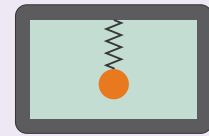
● シェアサイクルの自転車の数

貸し自転車の「1日に、どの置き場からどこへ何割が移るか」の表は、②の天気行列と同じ形です。落ち着く先を見れば、自転車がたまる置き場と足りなくなる置き場がわかり、運び直す計画に役立ちます。



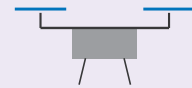
● ゲームの中の物理

ゲームの物の動きは、画面をかきかえるたびに（1秒に60回なら $\Delta t = \frac{1}{60}$ 秒）オイラー法で進めます。ばねが暴れださないよう、固有値が単位円の上にくる「速度を先に進める方法」がよく使われます（⑨）。



● ドローンや機械のデジタル制御

ドローンや機械の中のコンピュータは、センサーを読んでモーターへの命令を計算することを、短い時間ごとにくり返します。これは「次の状態＝行列×今の状態＋命令」の漸化式です。行列の固有値が単位円の中に入るように命令の決め方を選び、ゆれが消えるようにします（9-10）。



🔍 コラム マルコフと「次の文字」

②の「次の状態が今の状態だけで決まるくり返し」に名前を残したのは、ロシアの数学者マルコフ（1856～1922年）です。マルコフは1906年ころからこのくり返しを研究し、1913年には、プーシキンの詩『エフゲニー・オネーギン』のはじめの2万字を数えて、母音の次に母音が来る割合、子音の次に母音が来る割合などを調べたと伝えられています。「今の文字から次の文字の出やすさを決める」考えは、スマートフォンの予測入力などの遠い祖先です。



章末問題

7-10 のまとめ

基本



1 $x_{n+1} = -0.8x_n$ 、 $x_0 = 10$ のとき、 x_1 から x_4 を求め、くり返すとどうなるかを答えましょう(例題 1)。

2 植木鉢に毎朝 80 mL の水をやり、土の水は 1 日で 0.75 倍になります。 $y_{n+1} = 0.75y_n + 80$ 、 $y_1 = 80$ のとき、 y_4 と、落ち着く先を求めましょう(例題 2)。

3 晴れの次の日は 60 % が晴れ・40 % が雨、雨の次の日は 30 % が晴れ・70 % が雨です。今日が晴れのとき、2 日後に晴れる確率と、落ち着く先を求めましょう(例題 3)。

4 次のプログラムで表示される数を答えましょう(例題 10)。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 1], [0, 2]])
x = np.array([0, 1])
for n in range(3):
    x = A @ x
    print(x)
```

5 主役の行列 A について、 $A^3 \vec{x}_0$ を求めましょう。ただし $\vec{x}_0 = (2, 0)$ です(例題 4)。

6 6-14 の水そうを、 $\Delta t = 4$ 分のオイラー法で進めます。1 歩の行列と、その固有値を求め、はじめ $(20, 0)$ から 2 歩 (8 分後) の水位を求めましょう(例題 6)。

- 7** お湯の温度が $\frac{dT}{dt} = -0.2(T - 25)$ (t は分) で冷めます。オイラー法で、(1) ゆれずに近づく Δt 、(2) こわれない Δt を求めましょう。(3) $\Delta t = 7.5$ 分では、差は 1 歩で何倍ですか( **例題 7**)。

チャレンジ

- 8** 行列の 1 行めが $(0.7, 0.2)$ 、2 行めが $(0.2, 0.7)$ です。(1) $(1, 1)$ と $(1, -1)$ にかけて固有値を求めましょう。(2) 点 $(1, 0)$ に何回もかけるとどうなりますか( **例題 5**)。

- 9** $\omega = 1$ のばねを、ふつうのオイラー法、 $\Delta t = 0.02$ で計算します。1 歩の行列の固有値とその大きさ、1 周期 (約 314 歩) で何倍になるかを求めましょう ($1.0004^{157} = 1.065$) ( **例題 8**)。

- 10** $\omega = 1$ のばね ($\dot{x} = v$ 、 $\dot{v} = -x$) を、速度を先に進めるオイラー法で $\Delta t = 0.2$ として計算します。1 歩の行列、その行列式、固有値とその大きさを求めましょう( **例題 9**)。

ふりかえり できるようになったかな？

- ☐ 同じ行列を何回もかけて、点の向かう先を表計算と図で調べられる。
→ 390 ページ
- ☐ 倍々のくり返しと、等比級数の合計を計算できる。
→ 397 ページ
- ☐ 固有値の大きさで行き先を見分け、ばねがふくらむわけを説明できる。
→ 409 ページ



ミナ

表を何行も進めることは、行列を何回もかけることだった。行き先を決めるのは固有値の大きさ。次の 7-11 では、行列が働く現場を見に行こう。

第3部 固有値と行列の使いみち

★★★★~★★★★★

7-11 行列の使いみち

📖 道しるべ この章の前に 6-11 6-15 7-3 7-5 7-7 7-8 7-10
 この章の先に 8-3 9-10 9-11 9-12

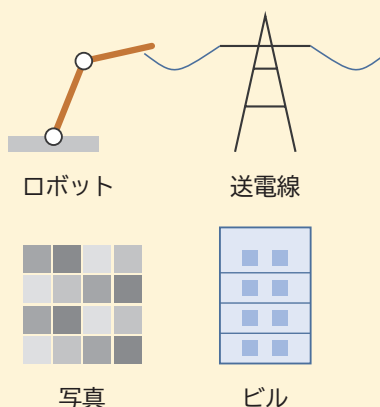
📌 この章でできるようになること

- ★★★ ロボット・電気回路・建物・画像・検索で、どの章の行列が働いているかを言える。
- ★★★★★ ばねの網と抵抗の網、箱をつないだ回路が、同じ形の行列で書けることを説明できる。
- ★★★★★ 逆運動学と長い電線（分布定数回路）を、「行列を何回も使う計算」として読める。

？ はてな？

工場のロボット、家のコンセントにつながる送電線、スマホの写真、地震に強いビル、インターネットの検索。どれも、たくさんの数を組にして、同じルールでいっせいに計算しています。

行列は、どこで、どんな仕事をしているのでしょうか。



🕒 思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 7-2** ヤコビ行列 J : 関節の角速度を入れると、手の速度が出てくる機械 ($\dot{\vec{p}} = J\dot{\vec{\theta}}$)。
- 7-3** 電気の箱の行列は、出口の組 (V_2, I_2) を入れると入口の組 (V_1, I_1) が出てくる。箱をつなぐと行列のかけ算。
- 7-4** 行列式が 0 の行列は、平らにつぶす (逆行列がない)。箱の行列の行列式は 1。
 $\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2$ 。
- 7-5** $A\vec{x} = \vec{b}$ は、 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ で解ける。コンピュータは消去法で解く。
- 7-5** 例題 8: 腕が ($30^\circ, 45^\circ$) のとき、 J^{-1} は 1 行め (0.0647, 0.2415)、2 行め (-0.3245, -0.3915) を $\det J = 0.0530$ でわったもの。ほしい手の速度にかけると、関節の角速度が出る。
- 7-10** 同じ行列を何回もかけると、大きさのいちばん大きい固有値の向きにそろう。
 $(I + A \frac{t}{n})^n$ は n を大きくすると e^{At} に近づく。
- 6-11** $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 、 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 。 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 。
 $\cosh 1 = 1.543$ 、 $\sinh 1 = 1.175$ 。

この章は**読みもの**です。例題や問題はありません。7-1～7-10 で学んだ行列が、本物の機械やしくみの中で、どんな仕事をしているかを読んでいきます。それぞれの場面で、「どの章の、どの道具か」を (7-5) のように書いておきます。読んでいて分からなくなったら、その章にもどって確かめましょう。全部を一度に分からなくても大丈夫です。気になった場面から読んでかまいません。

2 つの場面 (**ロボットの逆運動学と長い電線**) では、少しだけ計算をします。どちらも、7-10 の「同じ計算を何回もくり返す」考えが主役です。

場面	行列がしていること	使う章
ロボットの腕	手の位置・速さを出す。目標の位置へ近づける	7-2~7-7・7-10
電気回路・送電線	電流と電圧を一度に解く。箱をつなぐ	6-11・7-3~ 7-5・7-10
建物・橋・車	力とずれを解く。ゆれ方（モード）を見つける	7-5・7-8・7-9
画像・ゲーム	画素の表。点を回す・動かす	7-1・7-2・7-4・ 7-6・7-7
検索・データ	いちばん大事な向き（固有ベクトル）をさがす	7-8~7-10

表1 この章で読む場面と、使う章

ロボットを動かす

① 手はどこに、どんな速さで

4-7・7-6 の、2つの関節をもつロボットの腕を思い出しましょう。肩からひじまで $L_1 = 0.30 \text{ m}$ 、ひじから手先まで $L_2 = 0.25 \text{ m}$ 、肩の角 $\theta_1 = 30^\circ$ 、ひじの角 $\theta_2 = 45^\circ$ でした。

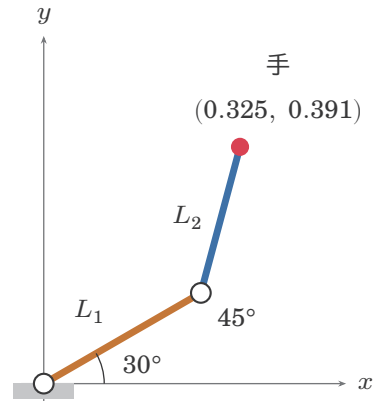
● **手の位置** 回転行列 (7-6) や同次変換行

列 $A(\theta, L)$ の積 (7-7) で、手は
(0.325, 0.391) (m)。

● **手の速さ** ヤコビ行列 J に関節の角速度

をかける (7-2)。 J の 1 行めは
(-0.391, -0.241)、2 行めは
(0.325, 0.065)。

● **動けない姿勢** $\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2$ が 0
になる、腕がのびきった姿勢 (特異姿勢。
7-4)。



ここまでは「関節の角がわかっているとき、手はどこか」という計算でした。これを**順運動学** (じゅんうんどうがく) といいます。工場で本当に必要なのは、その逆です。「この部品の上に手を持っていきたい。関節を何度にするべきか」。これを**逆運動学** (ぎゃくうんどうがく) といいます。

2 逆運動学：ヤコビ行列の逆行列で、少しずつ近づく

2つの関節の腕なら、4-7 で学んだように、余弦定理を使って角を一度に求められます。関節が6つある産業用ロボットの多くも、手首の3つの軸を1点で交わらせて、式で一度に解けるようにくふうしてあります。それでも、式で解けない形のロボットや、関節が7つ以上のロボット、手を道すじにそってなめらかに動かす制御では、次の「少しずつ近づける」方法が使われます。

考え方：今の姿勢の J で、1 歩ずつ

7-2 のヤコビ行列は、「関節の角を少し変えると、手がどれだけ動くか」を表していました。角の変化を $\Delta \vec{\theta}$ 、手の変化を $\Delta \vec{p}$ とすると、変化が小さいときは

$$\Delta \vec{p} \approx J \Delta \vec{\theta}$$

です ($\dot{\vec{p}} = J \dot{\vec{\theta}}$ の両辺に短い時間をかけたもの)。逆に、手を $\Delta \vec{p}$ だけ動かしたいなら、7-5 の逆行列を使って

$$\Delta \vec{\theta} = J^{-1} \Delta \vec{p}$$

関節の変え方 = ヤコビ行列の逆行列 × 手を動かしたい量

とすればよいはずですが。ここで、 $\Delta \vec{p}$ は「目標の位置 - 今の手の位置」(ずれ)です。

ただし、 J は今の姿勢での「手の速さの向き」なので、腕が大きく回ると合わなくなります。6-2 のオイラー法が「接線の向きに 1 歩」だったのと同じで、1 回ではぴったり目標に着きません。そこで、次の手順をくり返します。

- ① 今の角から、手の位置を計算する (順運動学。7-6・7-7)。
- ② ずれ $\Delta \vec{p} = \text{目標} - \text{今の手の位置}$ を出す。小さければ終わり。
- ③ 今の角で J を作り、 $\Delta \vec{\theta} = J^{-1} \Delta \vec{p}$ を解く (7-5)。
- ④ 角を $\Delta \vec{\theta}$ だけ変えて、①にもどる。

7-10 の漸化式と同じで、「今の角から次の角を作る」くり返しです。

数で確かめる

今の角 (30° , 45°)、手 (0.325, 0.391) から、目標 (0.20, 0.45) へ手を動かします。1 回めの計算です。

$$\Delta \vec{p} = (0.20 - 0.3245, 0.45 - 0.3915) \quad \text{② ずれ}$$

$$= (-0.1245, 0.0585) \quad \text{4 けたで計算}$$

$$0.0647 \times (-0.1245) + 0.2415 \times 0.0585 = 0.006073 \quad \text{③ } J^{-1} \text{ の 1 行め}$$

$$\Delta \theta_1 = 0.006073 \div 0.0530 \approx 0.115 \quad \text{det } J \text{ でわる}$$

$$-0.3245 \times (-0.1245) - 0.3915 \times 0.0585 = 0.017497 \quad \text{2 行め}$$

$$\Delta \theta_2 = 0.017497 \div 0.0530 \approx 0.330 \quad \text{[rad]}$$

度に直すと、 $\Delta\theta_1 \approx 6.6^\circ$ 、 $\Delta\theta_2 \approx 18.9^\circ$ です (rad から度へは $\times \frac{180}{\pi}$)。7-5 例題 8 では「ほしい手の速度」に J^{-1} をかけましたが、ここでは「ほしい手の動き (ずれ)」にかけています。角は $(36.6^\circ, 63.9^\circ)$ になります。これを④から①へもどしてくり返すと、次の表のようになりました。

回数	角 (θ_1, θ_2)	手の位置 (m)	ずれの長さ (m)
0	$(30^\circ, 45^\circ)$	$(0.325, 0.391)$	0.138
1	$(36.6^\circ, 63.9^\circ)$	$(0.196, 0.425)$	0.026
2	$(41.7^\circ, 54.0^\circ)$	$(0.199, 0.448)$	0.002
3	$(42.1^\circ, 53.1^\circ)$	$(0.200, 0.450)$	0.00001

表 2 ヤコビ行列の逆行列で、くり返し近づけた。ずれの長さは、ずれの矢印の長さ (三平方の定理)。

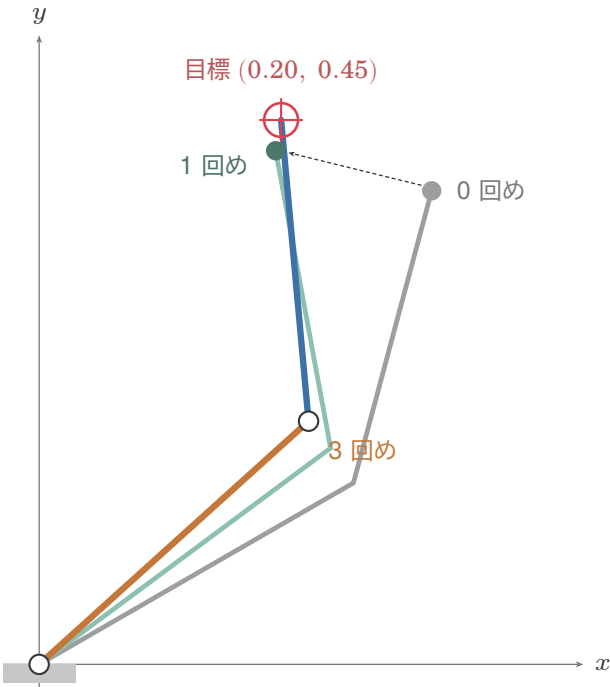


図 1 くり返すたびに、手 (先の点) が目標 (赤い十字) に近づく。灰色が 0 回め、緑が 1 回め、オレンジと青が 3 回め (ほぼ目標)。

1 回めで、ずれは 0.138 m から 0.026 m に、2 回めで 0.002 m に、3 回めで 0.00001 m (0.01 mm) になりました。目標に近づくほど、 J の「接線」がよ

く合うので、近づき方がどんどん速くなります。4-7 の余弦定理で求めた答え ($\theta_1 = 42.1^\circ$, $\theta_2 = 53.1^\circ$) と一致します。

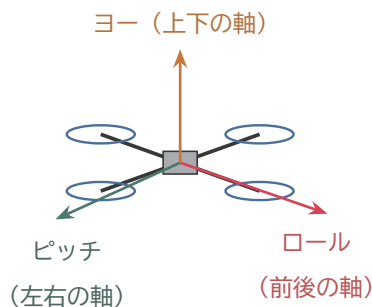
関節が6つでも、手順はまったく同じです。 J が 6×6 の行列になり、③で6つの文字の連立方程式を解くだけです(7-5の消去法)。ロボットの制御の計算機は、この計算を1秒に何百～何千回もくり返しながら、手を目標の道すじにそって動かしています。

せいかくに言うと

このくり返しは、大学の本ではニュートン・ラフソン法(多変数のニュートン法)の仲間として出てきます。うまくいくのは、目標がとどく所にあり、とちゅうで $\det J = 0$ の特異姿勢(7-4)を通らないときです。特異姿勢の近くでは J^{-1} の数がとても大きくなり、関節を急に大きく回す答えが出てしまいます。実際のロボットでは、1回に変える角に上限をつけたり、特異姿勢をさける道すじを選んだりします。 J の作り方(偏微分)は、第8巻の8-3で学びます。

③ ドローン・人工衛星・VR ゴーグルの向き

ドローンや人工衛星は、ジャイロセンサーで「機体がどの向きに、どれだけの速さで回っているか」を1秒に何百～何千回もはかり、3次元の回転行列(7-7)で機体の向きを更新しつづけます。ロール・ピッチ・ヨーの3つの角だけで向きを表すと、ピッチが $\pm 90^\circ$ になるとジンバルロック(7-7)が起きるので、宇宙船やドローンでは、4つの数で向きを表すクォータニオン(6-9)もよく使われます。



VR ゴーグルや3次元のゲームでは、物の点を「世界の座標」に置く 4×4 の行列と、カメラ(頭)から見た座標に直す行列をかけて、画面を作ります(7-7)。何万もの点に、1秒に何十回も同じ行列をかけるので、そのための専用の計算回

路（GPU）が使われています。電卓が $\sin \cdot \cos$ を計算するときにも、回転をくり返す CORDIC という方法が使われています（7-6 のコラム）。

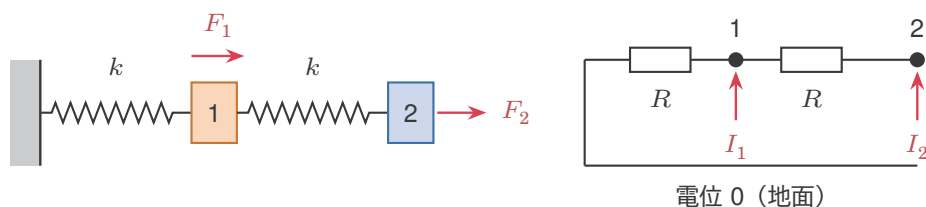
電気回路と送電線

4 ばねの網と、抵抗の網

7-2 の物理・工学ではこう使うで、かべにばね 2 本（ばね定数 100 N/m ）を直列につないだ「ばねの網」を見ました。点 1・点 2 のずれ u_1, u_2 [m] と、そこにかかる力 F_1, F_2 [N] の関係は、

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

でした。こんどは、電気で同じ形を作ります。



ばねの網：ずれ u と力 F

抵抗の網：電位 V と電流 I

図 2 左：かべとばね 2 本。右：電位 0 の線（地面）と抵抗 2 本。点 1・点 2 に、外から電流 I_1, I_2 を流しこむ。

抵抗 R [Ω] の電気の通りやすさを $G = \frac{1}{R}$ （単位 S、ジーメンズ）と書きます。オームの法則は「電流 = $G \times$ 電圧」です。点 1・点 2 の電位（地面からの電圧）を V_1, V_2 [V] とし、外から流しこむ電流を I_1, I_2 [A] とします。流しこんだ電流は、つながった抵抗を通して出ていきます（3-6 のきまり 1：合わさった電流はたし算）。

$I_1 = GV_1 + G(V_1 - V_2)$ 点 1 から地面へと、点 1 から点 2 へ

$I_2 = G(V_2 - V_1)$ 点 2 から点 1 へ

同じ文字でまとめて、係数を行列にならべると (7-1)、

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G & -G \\ -G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

ばねの網と**まったく同じ形の行列**です。 $G = 0.1\text{ S}$ ($R = 10\text{ }\Omega$)、 $V_1 = 1\text{ V}$ 、 $V_2 = 3\text{ V}$ なら、

$I_1 = 0.2 \times 1 - 0.1 \times 3 = -0.1\text{ A}, \quad I_2 = -0.1 \times 1 + 0.1 \times 3 = 0.2\text{ A}$

7-2 のばねの $F_1 = -1$ 、 $F_2 = 2$ と、数の並びまで同じです。

ばねの網	抵抗の網
ずれ u [m]	電位 V [V]
力 F [N]	流しこむ電流 I [A]
ばね定数 k [N/m]	通やすさ $G = \frac{1}{R}$ [S]

表 3 ばねの網と抵抗の網の対応。6-15 の相似の表 (力⇆ 電圧) とは組み方がちがう、もう 1 つの相似 (力⇆ 電流)。

6-15 の相似の表では、力を電圧に対応させました。ここでは力を電流に対応させています。どちらも正しい相似で、問題によって使いやすいほうを選びます。網の形 (どの点とどの点がつながっているか) が同じなら、行列も同じ形になるのです。電子回路のシミュレーター (7-5) は、何万もの点の電位を、この形の連立方程式 $K\vec{V} = \vec{I}$ で一度に求めています (物理 電-5)。トランジスタのように電流と電圧が比例しない部品があるときは、②と同じく、少しずつ直す連立方程式をくり返し解きます (物理 原-10)。

5 箱をつなぐ：四端子定数

7-3 では、入口 2 本・出口 2 本の線の「箱」を、 2×2 の行列で表しました。出口の電圧・電流の組を入ると、入口の組が出てくる行列です。

$$\text{直列の抵抗の箱} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{並列の抵抗の箱} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

箱をつなぐと、行列のかけ算になりました（入口側の箱を左に書く）。電気の本では、この 4 つの数を A 、 B 、 C 、 D と書いて**四端子定数**とよび、抵抗・コイル・コンデンサーだけの箱では、いつも $AD - BC = 1$ （7-4 の行列式が 1）になります。音を整える回路、雑音を取りのぞくフィルター、アンテナと機械をつなぐ回路などは、箱をいくつもつないで設計します。カメラのレンズの光線の行列（7-3・物理 波-12）も、同じ形の行列のかけ算でした。

6 長い電線は、小さな箱のくさり：分布定数回路

数百 km の送電線や、テレビのアンテナ線のように長い電線では、線そのものが抵抗やコイル・コンデンサーのはたらきを、全体にうすく広がった形でもっています。このような回路を**分布定数回路**（ぶんぷていすうかいろう）といいます。部品が 1 か所にまとまった、これまでの回路とのちがいです。

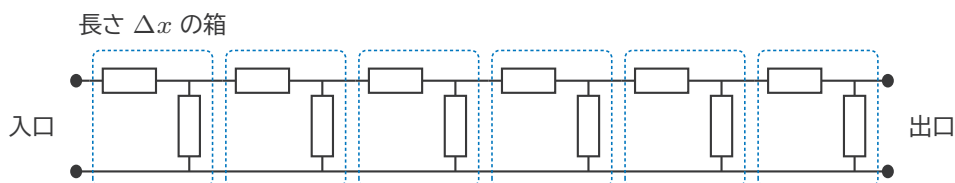


図 3 長い電線を、長さ Δx の小さな箱のくさりとする。1 つの箱は、上の線の抵抗（直列）と、2 本の線のあいだのもれ（並列）でできている。

数を簡単にした長い線で計算する

しくみを見るために、数を簡単にした線を考えます。上の線の抵抗が 1km あたり $r = 1\Omega$ 、2 本の線のあいだのもれ（電気の通りやすさ）が 1km あたり $g = 1\text{S}$ 、線の長さが 1km とします。これを n 個の小さな箱に分けると、1 つの箱の長さは $\Delta x = \frac{1}{n}\text{km}$ で、その箱は「直列の抵抗 $r\Delta x$ 」と「並列の通りやすさ $g\Delta x$ 」をつないだものです（7-3）。

$$\begin{pmatrix} 1 & r\Delta x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\Delta x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + rg\Delta x^2 & r\Delta x \\ g\Delta x & 1 \end{pmatrix}$$

線全体は、この小さな箱を n 個つないだものなので、この行列の n 乗です（7-3・7-10）。Python で計算すると、次のようになりました（小数第 3 位まで）。

箱の数 n	左上	右上	左下	行列式
10	1.601	1.173	1.173	1
100	1.549	1.175	1.175	1
1000	1.544	1.175	1.175	1
限りなく 多く	1.543	1.175	1.175	1

表 4 小さな箱を n 個つないだ行列の成分（右下は左上とほぼ同じ数に近づく）。

箱をこまかくしていくと、成分は 1.543 と 1.175 に近づきます。この 2 つの数に見覚えはありませんか。6-11 の $\cosh 1 = 1.543$ と $\sinh 1 = 1.175$ です。行列式は、どの n でもぴったり 1（7-4：箱の行列の行列式は 1 で、積の行列式は行列式の積）。限りなく細かくした先の行列でも、 $\cosh^2 1 - \sinh^2 1 = 1$ （6-11）です。

専門書の式

一般の長い線では、1 m あたりの直列の部分を z 、並列の部分を y として、長さ ℓ の線の行列は

$$\begin{pmatrix} \cosh \gamma \ell & Z_0 \sinh \gamma \ell \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{pmatrix} \quad \gamma = \sqrt{zy}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

になります。上の計算は $z = r = 1$ 、 $y = g = 1$ 、 $\ell = 1$ で、 $\gamma = 1$ 、 $Z_0 = 1$ の場合でした。 γ を**伝搬定数**（でんぱんていすう）、 Z_0 を**特性インピーダンス**（とくせいインピーダンス）といいます。テレビのアンテナ線（同軸ケーブル）に「75 Ω 」と書いてあるのは、この Z_0 のことです。

本物の送電線では、 z に 6-10 のコイルの $j\omega L$ 、 y にコンデンサーの $j\omega C$ が入るので、 γ は複素数になります。すると $\cosh \cdot \sinh$ が、6-10 の $e^{j\theta}$ のように「回る」形になり、電線の上を電圧の波が伝わっていくようすが表れます。くわしくは、物理シリーズの電磁気学（電-13）で学びます。

せいかくに言うと

「小さな箱を n 個つないで、 n を大きくする」は、7-10 のもっと知りたいの「 $(I + A \frac{t}{n})^n$ が e^{At} に近づく」と同じ形です。小さな箱の行列は、 Δx^2 の項を小さいとして省くと $I + M \Delta x$ （ M は 1 行め $(0, z)$ 、2 行め $(y, 0)$ の行列）と書けるので、長さ ℓ の線の行列は $e^{M\ell}$ です。 M の固有値は $\pm\sqrt{zy} = \pm\gamma$ で (7-8)、 $e^{\gamma\ell}$ と $e^{-\gamma\ell}$ の平均と差の半分が $\cosh \gamma\ell$ と $\sinh \gamma\ell$ です (6-11)。行列の指数関数 $e^{M\ell}$ は、第 9 巻 (9-11) でくわしく学びます。

建物・画像・データ

7 建物と橋：力とずれ、ゆれ方

橋やビルを設計するときは、建物を小さな部品に分けて、つながる点ごとに力のつり合いの式を立てます（有限要素法。7-5）。④のばねの網を何百万点にも広げたもので、 $K\vec{u} = \vec{F}$ の形の連立方程式を、7-5 の消去法の考えを使ったプログラムで解きます。 K は④と同じく、ほとんどの成分が 0 の大きな行列です（となりの点としかつながっていないから）。0 の所を計算しない工夫で、何百萬元の式も解けるのです。

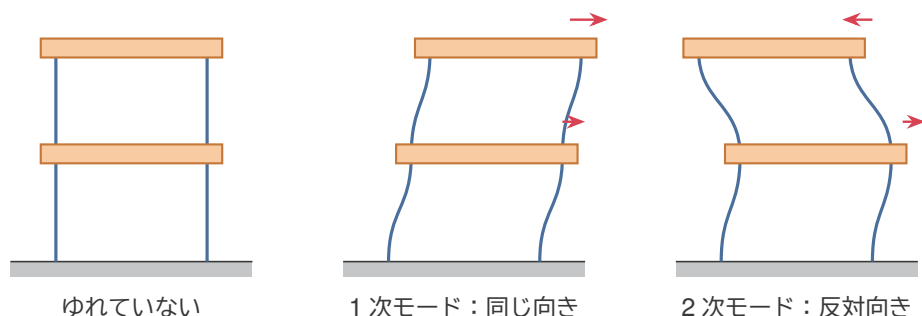


図4 2階建ての建物の2つの振動モード（固有ベクトル）。2つの床が同じ向きにゆれる形と、反対向きにゆれる形。7-8の台車2つの「いっしょ」「反対」と同じ。

地震や風でのゆれ方は、7-8・7-9の固有値と固有ベクトルで調べます。各階の重さと、階と階をつなぐ柱の強さから行列を作ると、固有ベクトルが「ゆれ方の形（モード）」、固有値が「ゆれやすい振動数」を教えてください。ロンドンのミレニアム・ブリッジが人の歩くリズムでゆれた話（7-8）、車のバウンスとピッチ（7-9）、タイヤのバランス（7-8）も、同じ道具です。機械の部品の主応力（7-8）は、ひずみゲージではかったのびから応力の行列を作り、その固有値として求めます。

8 画像とコンピュータグラフィックス

写真は、画素の明るさの数がたてと横に並んだ行列です（7-1）。全体を明るくするのは実数倍、2まいを重ねるのは和でした。写真を回すアプリは、画素の1つ1つに回転行列をかけ（7-6）、ゲームは何万もの点に 4×4 の行列をかけま

す (7-7)。見えない裏側の三角形は、 2×2 の行列式の符号で見分けてかかないようにしています (7-4)。

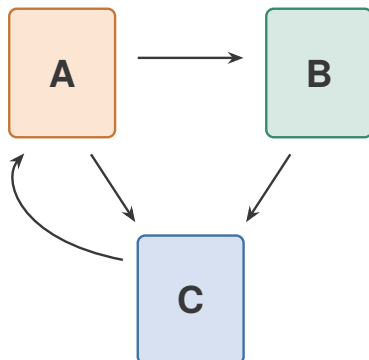
写真を小さなファイルにするときにも、行列が働いています。ふつうの写真 (JPEG という形式) は、画像を 8×8 画素の小さなブロックに分け、それぞれのブロックを「なめらかな部分」と「細かいもようの部分」に分けて表し直し、目で気づきにくい細かい部分の数を少なくして記録します。この「表し直し」は、 8×8 の行列のかけ算です (9-12 で読むフーリエの考えの親せき)。また、大きな行列を、いちばん大事な向きの組み合わせだけで近似する**特異値分解**という方法もあり、画像の圧縮やデータの整理に使われます (7-9 の対角化の親せき)。

20	60	140	200
40	120	200	240
90	180	230	250
150	220	250	255

4 × 4 画素の明るさ (0~255)

9 検索エンジンの順位：固有ベクトル

インターネットで検索すると、たくさんのページが順位をつけて表示されます。1998 年ころ、アメリカの大学院生だったブリンとページは、「大事なページからたくさんリンクされているページは大事」という考えで順位を決める方法を発表しました。**ページランク**とよばれる方法です。その中心は、7-10 の天気の行列と同じ「移り方の表」と、その固有ベクトルです。



3つのページ A・B・C のリンク (矢印)。A は B と C へ、B は C へ、C は A へリンクしている。

ページを読む人が、リンクを1つ選んでとなりのページへ移ることをくり返すとします。Aにいる人は、BかCへ半分ずつ移ります。Bにいる人はCへ、Cにいる人はAへ移ります。今いる確率の組 (a, b, c) は、7-10 ②の天気と同じように、移り方の表（各列の和が1）をかけて次の組になります。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

はじめ3つに $\frac{1}{3}$ ずついたとして、くり返しかけると（7-8 ④のべき乗法）、 $(0.333, 0.167, 0.5)$ 、 $(0.5, 0.167, 0.333)$ 、 $(0.333, 0.25, 0.417)$ 、…と、ゆれながら $(0.4, 0.2, 0.4)$ に近づきます。この組を行列にかけると、 $(0.4, 0.5 \times 0.4, 0.5 \times 0.4 + 0.2) = (0.4, 0.2, 0.4)$ と変わりません。**固有値1の固有ベクトル**です。AとCが同じくらい大事で、Bはその半分、という順位がつきました。

本物の検索エンジンでは、ページは何十億もあります。それでも、するのは「大きな行列を何回もかけて、固有値1の固有ベクトルを見つける」ことです（実際には、リンクと関係なくほかのページへ移る分もまぜて、くり返しが必ず落ち着くようにします）。7-10のくり返しの考えが、そのまま使われています。

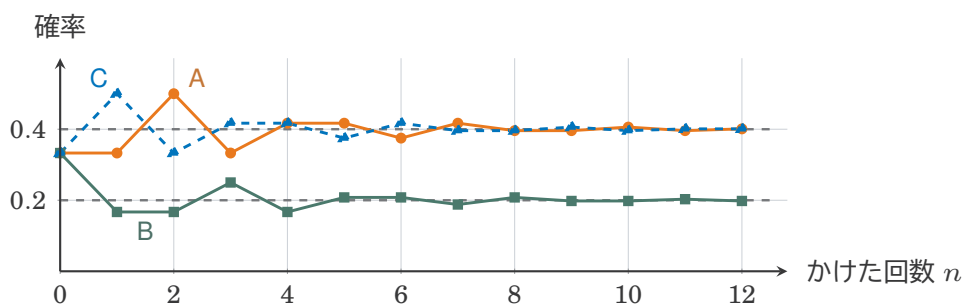


図5 A（オレンジ）・B（緑）・C（青の点線）にいる確率。ゆれながら、 $0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.4$ （灰色の点線）に落ち着く。固有値1以外の固有値は複素数（大きさ約0.71）なので、回りながら（ゆれながら）消えていく（7-10 ⑦）。

10 位置を決める：GPS とセンサー

スマートフォンの GPS は、高さ約 20 000 km の空を回る人工衛星から届く電波の時刻から、衛星までの距離を求めます。わからない数は、自分の位置 x 、 y 、 z と、スマートフォンの時計のずれの 4 つです。時計が 100 万分の 1 秒ずれるだけで、光の速さ（1 秒に約 30 万 km）では 300 m のずれになるので、時計のずれも答えの 1 つとして求めます。だから、4 つ以上の衛星が必要です。

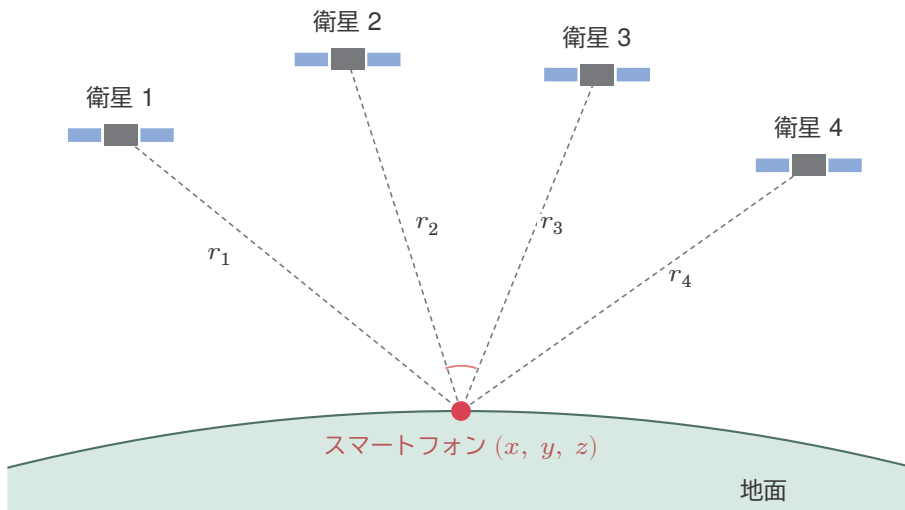


図 6 4 つの衛星までの距離 $r_1 \sim r_4$ (点線)。わからない数は、位置 x 、 y 、 z と時計のずれの 4 つなので、4 つの距離の式を連立させて求める。

距離の式には 2 乗が入るので、そのままでは連立 1 次方程式になりません。そこで、②の逆運動学と同じように、「近い位置を仮に決める → そこからの少しのずれについての連立 1 次方程式を解く (7-5) → 位置を直す」をくり返します。5 つ以上の衛星が見えるときは、式の数が多いので、7-5 の最小二乗法で、いちばんよく合う位置を求めます。

工場の温度センサーや圧力センサーも、はかった電圧から温度などを計算するための「目もりの直線」を、最小二乗法で決めておきます（センサーの校正。7-5）。ロボットのセンサーも、ビルのひずみゲージも、こうして目もりを合わせてから使われています。

11 データと人工知能

クラス全員の身長と体重のように、たくさんの人について、いくつもの量をはかったデータは、人を行・量を列とする大きな行列です。7-9 で見たように、ばらつきを表す対称な行列を対角化すると、データの「いちばん大事な向き」が固有ベクトルとして見つかります（主成分分析）。顔の写真の見分けや、工場の機械の調子の見守りに使われています。

	身長 (cm)	腕の長さ (cm)	体重 (kg)
1 人め	152	66	44
2 人め	160	70	50
3 人め	147	63	41
⋮	⋮	⋮	⋮

表5 データの行列の例（数は説明のためのもの）。人が行、はかった量が列。何百人・何十の量でも、1つの行列にまとめて計算する。

写真に写っている物を見分けたり、文章を作ったりする人工知能も、その計算の大部分は、たくさん数の組に行列をかけて、たし合わせることのくり返しです。何億もの数が入った行列をすばやくかけるために、ゲームの画面を作るのと同じ種類の計算回路（GPU）が使われています。

12 制御：第9巻へ

7-8 で、ばねやダンパーの動きを $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ と書き、固有値が6-12の s と同じものだと学びました。機械を思いどおりに動かすときは、これにモーターなどで加える力 $\vec{u}$ を足した

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

の形を使います。これを**状態方程式**といいます。

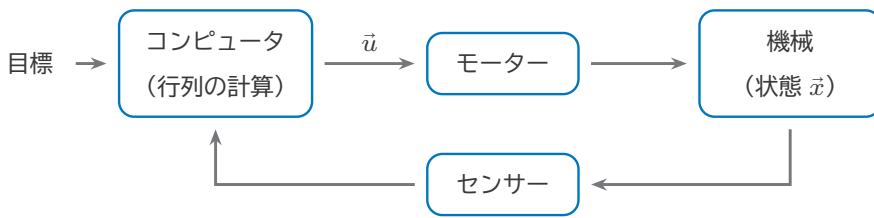


図7 機械を思いどおりに動かすしくみ（制御）。センサーではかった状態から、コンピュータが行列の計算で力 $\vec{u}$ を決め、モーターで機械を動かす。これを短い時間ごとにくり返す。

ドローンの姿勢、エレベーターの位置、エアコンの温度などを、この式で表し、固有値が「ゆれずに・こわれずに落ち着く」場所にくるように $\vec{u}$ の決め方を選びます。7-10 で見たように、コンピュータの中のくり返しでは、固有値の大きさが1より小さいことが条件でした。これらは、第9巻（9-10・9-11）の主役です。

📖 専門書をのぞいてみよう 線形代数の本の書き方

$m \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し、写像 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である。 $\mathbf{A}$ の列ベクトルが一次独立であるとき、 $\text{rank } \mathbf{A} = n$ である。正方行列 $\mathbf{A}$ が正則であるための必要十分条件は $|\mathbf{A}| \neq 0$ であり、このとき $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ と一意に定まる。 $\mathbf{E}$ は単位行列、 ${}^t\mathbf{A}$ は転置行列を表す。

【訳】 太字の $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ は、この本の細字の行列 A と矢印のベクトル $\vec{x}$ 。 $\mathbb{R}^n$ は「 n 個の実数の組の全体」。「写像」「線形写像」は7-2の「入れると出てくる機械」で、線形はまっすぐはまっすぐのまま。「列ベクトルが一次独立」は、どの列もほかの列の組み合わせで作れないこと（7-4：2本の列が平行でない）。「rank」（階数）は、本当に独立な式の数（7-5）。「正則」は逆行列があること、 $|\mathbf{A}|$ は行列式 $\det A$ （7-4）、「一意に定まる」は「ただ1つに決まる」。 $\mathbf{E}$ はこの本の I 、 ${}^t\mathbf{A}$ はこの本の A^T （7-1。 A' と書く本もある）。

もの	この本	専門書でよく見る書き方
行列	A	$\mathbf{A}$ 、 $[a_{ij}]$
ベクトル	$\vec{x}$ (たて書き)	$\mathbf{x}$ 、 $\boldsymbol{x}$
単位行列	I	E 、 $\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{1}$
転置	A^T	${}^tA$ 、 A' 、 $A^\top$
行列式	$\det A$	$ A $
固有値	λ	λ (制御の本では s も)
四端子定数の行列	数で書いた 2×2	$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{F}$ 行列

表 6 この本の記号と、専門書でよく見る記号の対応。専門書を読むときに見返そう。

この巻の道具と、働く場面

第 7 巻の 3 つの部の道具が、この章のどの場面で働いていたかを、表にまとめます。1 つの場面で、いくつもの道具がいっしょに働いていることがわかります。

場面	行列の計算 (7-1 ~7-5)	回転と座標 (7-6・7-7)	固有値とくり返し (7-8~7-10)
ロボット (①②)	●	●	●
ドローン・VR (③)	●	●	
回路・送電線 (④~⑥)	●		●
建物・橋 (⑦)	●	●	●
画像・ゲーム (⑧)	●	●	●
検索 (⑨)	●		●
GPS・データ (⑩⑪)	●		●
制御 (⑫)	●		●

表 7 ●は、その場面で使っている道具。「行列の計算」は、すべての場面の土台になっている。

この章で出てきたことば

順運動学・逆運動学 関節の角から手の位置を求めることと、手の位置から関節の角を求めること。

分布定数回路 抵抗やコイル・コンデンサーのはたらきが、線全体に広がっている回路。長い電線。

特性インピーダンス 長い線の性質を表す数 $Z_0 = \sqrt{z/y}$ 。アンテナ線の「75 Ω」など。

ページランク リンクの移り方の表の、固有値 1 の固有ベクトルでページの順位を決める方法。

ふりかえり できるようになったかな？

☐ ロボットの腕を、ヤコビ行列の逆行列で目標へ近づけるしくみを説明できる。 → 433 ページ

☐ ばねの網と抵抗の網、箱をつないだ回路を、行列で書ける。 → 437 ページ

☐ 長い電線が $\cosh \cdot \sinh$ の行列になるわけを、箱のくさりとして読める。 → 439 ページ



ソラ

表のまま計算する道具が、ロボットにも送電線にも検索にも入っていた。次の第8巻では、空間のあちこちに矢印がある「ベクトル場」を読みにいこう。

こたえ

「じぶんでこう」は **じ1**、章末問題は **1** のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

7-1

じ1 (1) 3行2列 (3×2 行列)。

(2) $c_{12} = -2$ 、 $c_{31} = 0$ 、 $c_{22} = 8$ 。

(3) 3行め2列め。 $c_{32} = 9$ 。

じ2 (1) 1行め (5, 6)、2行め (3, 2)。

(2) 1行め (-1, 4)、2行め (-5, -2)。

(3) 1行め (6, 2)、2行め (8, 4)。

(4) $3P$ は 1行め (6, 15)、2行め (-3, 0)。 Q をひいて、1行め (3, 14)、2行め (-7, -2)。

じ3 (1) $2 \times 4 + 5 \times 1 = 13$ 、

$1 \times 4 + 3 \times 1 = 7$ で (13, 7)。

(2) $-3 + (-4) = -7$ 、 $12 + 6 = 18$ で (-7, 18)。

じ4 (1) $1 \times 100 + 4 \times 50 = 300$ 、

$3 \times 100 + 2 \times 50 = 400$ 、

$0 \times 100 + 6 \times 50 = 300$ 。300円、400

円、300円。(2) 係数行列は 1行め

(2, 1, 0)、2行め (0, 1, 3)、3行め

(1, 0, 1)。(1, 2, 3) にかけて、

$2 + 2 + 0 = 4$ 、 $0 + 2 + 9 = 11$ 、

$1 + 0 + 3 = 4$ で、右辺と同じ。

じ5 (1) $2y = x + 4$ を $-x + 2y = 4$ にす

る。 A は 1行め (5, -1)、2行め

(-1, 2)、 $\vec{x} = (x, y)$ 、 $\vec{b} = (7, 4)$ 。

(2) A は 1行め (2, 0, 1)、2行め

(0, 1, 3)、3行め (1, -1, 0)、

$\vec{x} = (x, y, z)$ 、 $\vec{b} = (5, 11, -1)$ 。(答

えは (1) $x = 2$ 、 $y = 3$ 、(2) $x = 1$ 、 $y = 2$ 、 $z = 3$)

じ6 (1) 1行め (8, 2)、2行め (10, 16)

((1, 1) は $2 \times 4 + 0 \times 2 = 8$ 、(2, 2) は $1 \times 1 + 3 \times 5 = 16$)。(2) 3×2 と 2×4 はかけられて 3×4 。 2×3 と 2×3 はかけられない。

じ7 (2, 1) 成分は昼食のエネルギーで、
 $2 \times 156 + 1 \times 142 = 454 \text{ kcal}$ 。(1, 2) 成分は朝食のたんぱく質で、

$1.5 \times 2.5 + 0.5 \times 12.2 = 3.75 + 6.1 = 9.85 \text{ g}$ 。

じ8 (1) C^T は 1行め (6, 1, 0)、2行め (-2, 8, 9) の 2×3 行列。(2) イとウ (アは $a_{12} = 3$ 、 $a_{21} = 4$ でちがう)。

(3) $h_{21} = b$ が $h_{12} = 6$ と等しいので、 $b = 6$ 。

じ9 (1) $A \odot B$ は $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $A * B$ は $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

(2) =MMULT(A2:C4,D2:D4)。

1 (1) 3行2列 (3×2 行列)。

(2) $d_{21} = 0$ 、 $d_{12} = -3$ 、 $d_{31} = 8$ 。

2 $P + Q$ は 1行め (5, 1)、2行め

(0, 8)。 $P - Q$ は 1行め (3, -3)、2

行め (4, -2)。 $2P$ は 1行め (8, -2)、

2行め (4, 6)、 $3Q$ は 1行め (3, 6)、2

行め (-6, 15) で、 $2P - 3Q$ は 1行め

(5, -8)、2行め (10, -9)。

3 (1) (13, 16)。(2) (-10, -12)。

- 4 $3 \times 150 + 1 \times 40 = 490$ 、
 $0 \times 150 + 5 \times 40 = 200$ 、
 $2 \times 150 + 2 \times 40 = 380$ 。490 円、200 円、380 円。

- 5 (1) $x = 4y - 2$ を $x - 4y = -2$ にする。 A は 1 行め $(2, -3)$ 、2 行め $(1, -4)$ 、 $\vec{b} = (1, -2)$ 。(2) A は 1 行め $(1, 0, -1)$ 、2 行め $(0, 2, 1)$ 、3 行め $(1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (2, 7, 5)$ 。

- 6 (1) 1 行め $(5, 11)$ 、2 行め $(2, 8)$ 。
 (2) かけられて、 4×3 行列。

- 7 E^T は 1 行め $(1, -2)$ 、2 行め $(4, 3)$ 、3 行め $(0, 6)$ 。 F が対称になるのは $a = 3$ のとき。

- 8 食べた量の行列は 1 行め $(2, 0.5)$ 、2 行め $(1.5, 1)$ 。積は 1 行め $(383, 11.1)$ 、2 行め $(376, 15.95)$ 。朝食 383 kcal・11.1 g、夕食 376 kcal・15.95 g。

- 9 (1) A は 1 行め $(2, 1, 0)$ 、2 行め $(0, 2, 1)$ 、3 行め $(1, 0, 2)$ 、 $\vec{x} = (x, y, z)$ 、 $\vec{b} = (380, 280, 300)$ 。
 (2) $2 \times 140 + 1 \times 100 + 0 \times 80 = 380$ 、
 $0 \times 140 + 2 \times 100 + 1 \times 80 = 280$ 、
 $1 \times 140 + 0 \times 100 + 2 \times 80 = 300$
 で、右辺と同じ。

- 10 $A @ B$ は $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $B @ A$ は $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ で、同じではない（かける順で変わる）。 $A.T$ は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

7-2

- じ 1 1 行め $2 \times 4 + (-3) \times 2 = 2$ 、2 行め $1 \times 4 + 5 \times 2 = 14$ 。答えは $(2, 14)$ 。

- じ 2 1 行め $2 + 0 + 3 = 5$ 、2 行め $1 + 6 + 0 = 7$ 、3 行め $0 + 2 + 12 = 14$ 。答えは $(5, 7, 14)$ 。

- じ 3 $(x, y) \rightarrow (x, 2y)$ 。行き先は $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(1, 6)$ 、 $(0, 4)$ 。たて（高さ）だけが 2 倍にのびた家。

- じ 4 1 列め $(1, 2)$ 、2 列め $(4, -1)$ の行列。
 行で： $1 \times 3 + 4 \times 2 = 11$ 、
 $2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$ 。列で：
 $3(1, 2) + 2(4, -1) = (11, 4)$ 。点 $(11, 4)$ 。

- じ 5 $A(3\vec{u} - \vec{v}) = 3A\vec{u} - A\vec{v}$
 $= (3, 12) - (2, -1) = (1, 13)$ 。

- じ 6 (1) ひじ $(0, 0.30)$ 、手 $(0.25, 0.30)$ 。
 1 列め： $(0.25, 0.30)$ を 90° 回して $(-0.30, 0.25)$ 。2 列め：
 $\vec{EP} = (0.25, 0)$ を 90° 回して $(0, 0.25)$ 。 J は 1 行め -0.30 、0、2 行め 0.25 、 0.25 。
 (2) $-0.30 \times 0.5 + 0 = -0.15$ 、
 $0.25 \times 0.5 + 0.25 \times (-1.0) = -0.125$ 。手の速度は $(-0.15, -0.125)$ (m/s)。

- じ 7 $80 \times 0.8 + 30 \times 0.6 = 82$ 、
 $30 \times 0.8 + (-20) \times 0.6 = 12$ 。
 $\vec{t} = (82, 12)$ (MPa)。

- じ 8 $X = -0.5 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 0$ 、
 $Y = -0.5 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = -1$ 。
 紙の $(0, -1)$ 。

- 1 (1) $4 \times 3 + 1 \times (-1) = 11$ 、
 $-2 \times 3 + 3 \times (-1) = -9$ で $(11, -9)$ 。
 (2) $0.5 \times 4 + 2 \times 1.5 = 5$ 、
 $1 \times 4 + (-1) \times 1.5 = 2.5$ で $(5, 2.5)$ 。

- 2 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 。行き先は $(0, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(-2, -2)$ 、 $(-1, -3)$ 、

(0, -2)。原点のまわりに 180° 回った (さかさまで、左右も反対の) 家。

3 1 列め (2, -1)、2 列め (1, 3) の行列 (1 行め 2、1、2 行め -1、3)。

$$1(2, -1) + 2(1, 3) = (4, 5)。$$

4 $A(\vec{u} + 2\vec{v}) = (2, 0) + (2, 6) = (4, 6)。$
 $A(4\vec{u} - 3\vec{v}) = (8, 0) - (3, 9) = (5, -9)。$

5 1 行め $2 + 2 + 0 = 4$ 、2 行め $0 + 1 - 4 = -3$ 、3 行め $6 + 0 + 4 = 10$ 。答えは (4, -3, 10)。

6 $-0.391 \times 1.0 + (-0.241) \times (-0.5) = -0.2705、$
 $0.325 \times 1.0 + 0.065 \times (-0.5) = 0.2925$ 。手の速度は約 $(-0.27, 0.29)$ (m/s) (J の丸めのため、小数第 3 位は決めない)。

7 (2, 2, 4) : $X = -1 + 2 + 0 = 1、$
 $Y = -1 + 0 + 4 = 3$ で紙の (1, 3)。
(0, 3, 1) : $X = 0 + 3 + 0 = 3、$
 $Y = 0 + 0 + 1 = 1$ で紙の (3, 1)。

8 $80 \times 0.6 + 30 \times (-0.8) = 24、$
 $30 \times 0.6 + (-20) \times (-0.8) = 34。$
 $\vec{t} = (24, 34)$ (MPa)。

9 (1) ひじ (0.30, 0)、手 (0.55, 0)。1 列め (0, 0.55)、2 列め (0, 0.25)。 J は 1 行め 0、0、2 行め 0.55、0.25。
(2) $(0, 0.55 + 0.25) = (0, 0.80)$ (m/s)。(3) 手の速度の x 成分は、 J の 1 行めとの内積 $0 \times \dot{\theta}_1 + 0 \times \dot{\theta}_2$ で、いつも 0 だから (7-4 で学ぶ特異姿勢)。

10 $(x, y) \rightarrow (x + 0.2y, y)$ 。行き先は (0, 0)、(1, 5)、(2, 5)、(1.2, 1)、(3.2, 1)、(3, 0)。下の線は動かず、上ほど右へずれた、ななめの「L」。

11 $(x, y) \rightarrow (y, x)$ 。行き先は (0, 0)、(0, 2)、(2, 2)、(3, 1)、(2, 0)。直線 $y = x$ を折り目にして折り返した、横にねた家 (屋根が右を向く)。

7-3

じ 1 1 行め 1 列め $3 + 2 = 5$ 、1 行め 2 列め $-3 + 5 = 2$ 、2 行め 1 列め $0 + 4 = 4$ 、2 行め 2 列め $0 + 10 = 10$ 。答えは 1 行め 5、2、2 行め 4、10。

じ 2 AB は 1 行め 0、1、2 行め 1、0。 BA は 1 行め 0、-1、2 行め -1、0。
 $AB \neq BA$ 。

じ 3 積は (裏返し) $\times$ (ずらし) で、1 行め 1、1、2 行め 0、-1。行列で $(1 + 2, -2) = (3, -2)$ 。1 つずつ : ずらしで (3, 2)、裏返しで (3, -2)。

じ 4 H^2 は 1 行め 1、2、2 行め 0、1。 H^3 は 1 行め 1、3、2 行め 0、1。 H^n は右上が n で、 n 回ずらした (高さ y の点が ny だけ右へずれる) のと同じ。

じ 5 AB は 1 行め 2、1、2 行め 6、4。
 $(AB)C$ は 1 行め 3、2、2 行め 10、6。
 BC は 1 行め 3、2、2 行め 1、0。
 $A(BC)$ は 1 行め 3、2、2 行め 10、6。同じ。

じ 6 1 行め $1 + 0 + 6 = 7$ 、 $1 + 0 + 0 = 1$ 、 $0 + 0 + 2 = 2$ 。2 行め $2 + 0 + 0 = 2$ 、 $2 + 2 + 0 = 4$ 、 $0 + 1 + 0 = 1$ 。3 行め $0 + 0 + 3 = 3$ 、 $0 + 2 + 0 = 2$ 、 $0 + 1 + 1 = 2$ 。答えは 1 行め 7、1、2、2 行め 2、4、1、3 行め 3、2、2。

じ 7 (1) 直列 1Ω の行列 (1 行め 1、1、2 行め 0、1) $\times$ 並列 4Ω の行列 (1 行め 1、0、2 行め 0.25、1) = 1 行め 1.25、

1、2行め 0.25、1。

(2) $(1.25 \times 4, 0.25 \times 4)$ で 5V、1A。

(3) 1行め 1、1、2行め 0.25、1.25。

じ 8 左の 2 つで 1 行め 1.5、2、2 行め 0.25、1。3 つめをかけて 1 行め 1.5、5、2 行め 0.25、1.5。 $1.5 \times 1.5 - 5 \times 0.25 = 2.25 - 1.25 = 1$ 。

じ 9 $j\omega L = j300$ 、 $j\omega C = j0.03$ 。左上は $1 + j300 \times j0.03 = 1 - 9 = -8$ 。行列は 1 行め -8、 $j300$ 、2 行め $j0.03$ 、1。
 $V_2 = -\frac{1}{8}V_1$ で、 $\frac{1}{8}$ 倍。

1 (1) 1 行め $0 - 1 = -1$ 、 $4 - 1 = 3$ 。2 行め $0 + 3 = 3$ 、 $2 + 3 = 5$ 。(2) 1 行め $1 + 1 = 2$ 、 $2 - 2 = 0$ 。2 行め $4 + 0 = 4$ 、 $8 + 0 = 8$ 。

2 AB は 1 行め 0、1、2 行め 2、0。 BA は 1 行め 0、2、2 行め 1、0。
 $AB \neq BA$ 。

3 $S \times$ (裏返し) で、1 行め 2、0、2 行め 0、-1。行列で $(2, -1)$ 。1 つずつ：裏返しで $(1, -1)$ 、 S で $(2, -1)$ 。

4 A^2 は 1 行め 1、0、2 行め 2、1。 A^3 は 1 行め 1、0、2 行め 3、1。

5 (1) 1 行め 3、4、2 行め 0.5、1。
(2) $(3 \times 2, 0.5 \times 2)$ で 6V、1A。
(3) 1 行め 1、4、2 行め 0.5、3。

6 1 行め 5、1、2。2 行め 0、1、1。3 行め 1、2、1。

7 $j\omega L = j50$ 、 $j\omega C = j0.005$ 。左上 $1 + j50 \times j0.005 = 1 - 0.25 = 0.75$ 。行列は 1 行め 0.75、 $j50$ 、2 行め $j0.005$ 、1。 $V_2 = \frac{V_1}{0.75}$ で約 1.33 倍。
 ω がこの LC の共振の角周波数

$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000 \text{ rad/s}$ に近づいたため、出口の電圧が大きくなる。

8 (1) 先にすき間 (右)、あとでレンズ (左)。レンズの行列 (1 行め 1、0、2 行め -20、1) $\times$ すき間の行列 (1 行め 1、0.1、2 行め 0、1) = 1 行め 1、0.1、2 行め -20、-1。

(2) $y = 0.01 + 0.1 \times 0.1 = 0.02 \text{ m}$ 、
 $\theta = -20 \times 0.01 - 1 \times 0.1 = -0.3 \text{ rad}$ (軸のほうへ曲がる)。

9 $R_{90}R_{90}$ は 1 行め -1、0、2 行め 0、-1 で、 $(1, 0)$ は $(-1, 0)$ (左向き)。
 $R_{90} \times$ (右回り 90°) は 1 行め 1、0、2 行め 0、1 = I で、 $(1, 0)$ のまま (右向き。回転が打ち消しあう)。

10 左の 2 つで 1 行め 2.5、3、2 行め 0.5、1。3 つめをかけて 1 行め 2.5、5.5、2 行め 0.5、1.5。 $2.5 \times 1.5 - 5.5 \times 0.5 = 3.75 - 2.75 = 1$ 。

7-4

じ 1 長方形 $4 \times 4 = 16$ から、三角形 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 2 = 6$ 、三角形 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2 = 2$ 、長方形 $1 \times 2 \times 2 = 4$ をひいて $16 - 6 - 2 - 4 = 4$ 。行列式 $3 \times 2 - 1 \times 2 = 4$ と同じ。

じ 2 (1) $2 \times 1 - (-1) \times 3 = 5$ 。面積は 5 倍、裏返しにならない。
(2) $0 \times 3 - 2 \times 1 = -2$ 。面積は 2 倍、裏返しになる。

じ 3 $6k - 6 = 0$ より $k = 1$ 。1 列め (1, 2)、2 列め (3, 6) で平行。平面のすべての点が直線 $y = 2x$ の上へ行く。

【4】 (1) SA は 1 行め (4, 2)、2 行め (1, 2)。 $\det(SA) = 8 - 2 = 6$ 。
 $\det S \times \det A = 2 \times 3 = 6$ と同じ。

(2) $3^2 \times 1 = 9$ ($3B$ は 1 行め (3, 3)、2 行め (0, 3) で、 $9 - 0 = 9$)。

【5】 たす 3 つ : $1 \times 1 \times 1 = 1$ 、
 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 、 $1 \times 0 \times 0 = 0$ 。ひく
3 つ : $1 \times 1 \times 3 = 3$ 、 $1 \times 2 \times 0 = 0$ 、
 $2 \times 0 \times 1 = 0$ 。 $13 - 3 = 10$ 。

【6】 たす 3 つ $1 + 0 + 2k$ 、ひく 3 つ
 $2 + 1 + 0 = 3$ 。行列式 $2k - 2 = 0$ より
 $k = 1$ 。3 列め (2, 1, 1) = 1 列め
(1, 1, 1) の 2 倍 - 2 列め (0, 1, 1)。

【7】 (1) $0.40 \times 0.30 \times \sin 30^\circ$
 $= 0.12 \times 0.5 = 0.06$ 。(2) $\sin \theta_2 = 1$
の $\theta_2 = 90^\circ$ で、 $0.40 \times 0.30 = 0.12$ 。

【8】 (1) $-\sin 90^\circ = -1$ 。
(2) $-\sin 40^\circ = -0.643$ 。
 $2T \times 0.342 = 40$ より $T \approx 58.5 \text{ N}$ 。

【9】 (1) 1 行め (1.25, 1)、2 行め
(0.25, 1)。行列式 $1.25 - 0.25 = 1$ 。
(2) 行列は 1 行め (0.5, $j4$)、2 行め
($j0.125$, 1)。行列式
 $0.5 - j^2 \times 0.5 = 1$ 。

【1】 (1) $20 - 6 = 14$ 。
(2) $2 - 15 = -13$ 。(3) $4 - 6 = -2$ 。

【2】 長方形 $3 \times 5 = 15$ から、三角形
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 = 2$ 、三角形
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 \times 2 = 4$ 、長方形
 $1 \times 1 \times 2 = 2$ をひいて 7。行列式
 $8 - 1 = 7$ と同じ。

【3】 (1) 行列式 $6 - 2 = 4$ 。4 倍、裏返しに
ならない。(2) 行列式 $3 - 8 = -5$ 。5
倍、裏返しになる。

【4】 $12 - 6k = 0$ より $k = 2$ 。1 列め
(3, 6)、2 列め (2, 4) で平行。直線
 $y = 2x$ の上へ行く。

【5】 (1) AB は 1 行め (4, 3)、2 行め
(10, 7)。 $28 - 30 = -2$ 。
 $\det A \times \det B = (-2) \times 1 = -2$ と
同じ。(2) $9 \times (-2) = -18$ 。

【6】 (1) たす 3 つ : $1 + 16 + 0 = 17$ 。ひく
3 つ : $6 + 0 + 0 = 6$ 。 $17 - 6 = 11$ 。
(2) たす 3 つ :
 $1 \times 1 \times 0 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times (-3) \times (-1)$
 $= 0$ 。ひく 3 つ :
 $0 \times 1 \times 0 + 1 \times 1 \times (-1) + 0 \times (-3) \times 0$
 $= -1$ 。 $0 - (-1) = 1$ 。

【7】 つないだ箱の行列は 1 行め (4, 6)、2 行
め (0.5, 1) (1 行 1 列めは
 $1 + 6 \times 0.5 = 4$)。行列式 $4 - 3 = 1$ 。

【8】 行列は 1 行め (0.5, $j2$)、2 行め
($j0.25$, 1) (1 行 1 列めは
 $1 + j2 \times j0.25 = 0.5$)。行列式
 $0.5 - j2 \times j0.25 = 0.5 + 0.5 = 1$ 。

【9】 行列式 $-\sin 30^\circ = -0.5$ 。
 $2T \times 0.259 = 40$ より $T \approx 77 \text{ N}$ 。行
列式の大きさが 0.866 から 0.5 へ小さ
くなり、力は約 2 倍になった。

【10】 $\theta_2 = 30^\circ : 0.075 \times 0.5 = 0.0375$ 。
 $90^\circ : 0.075$ 。 $0^\circ : 0$ 。特異姿勢は
 $\theta_2 = 0^\circ$ (のびきった腕)。

7-5

【1】 (1) 行列式 1。逆行列は 1 行め
(1, -2)、2 行め (-2, 5)。(2) 行列式
5。逆行列は $\frac{1}{5}$ に 1 行め (3, -1)、2 行
め (-1, 2) をかけたもの。どちらも、
もとの行列にかけると I 。

【2】 行列式 $3 - 2 = 1$ 。 A^{-1} は 1 行め
(1, -2)、2 行め (-1, 3)。
 $x = 12 - 10 = 2$ 、 $y = -12 + 15 = 3$ 。

【3】 逆行列は $\frac{1}{5}$ に 1 行め (3, -2)、2 行め
(-2, 3) をかけたもの。
(1) $\frac{1}{5}(24 - 14, -16 + 21) = (2, 1)$ 。
 $I_1 = 2A$ 、 $I_2 = 1A$ 。
(2) $\frac{1}{5}(15, -10) = (3, -2)$ 。
 $I_1 = 3A$ 、 $I_2 = -2A$ 。

【4】 (ア) AB は 1 行め (3, 5)、2 行め
(1, 2)、行列式 1、 $(AB)^{-1}$ は 1 行め
(2, -5)、2 行め (-1, 3)。(イ) B^{-1}
は 1 行め (1, -1)、2 行め (0, 1)、 A^{-1}
は 1 行め (1, -2)、2 行め (-1, 3)、
 $B^{-1}A^{-1}$ は 1 行め (2, -5)、2 行め
(-1, 3)。同じ。

【5】 ②-①、③-2×① で 2 行め
(0, -1, -2 | -8)、3 行め
(0, -5, -1 | -13)。②×(-1) で
(0, 1, 2 | 8)。①-2×②、③+5×②
で 1 行め (1, 0, -3 | -8)、3 行め
(0, 0, 9 | 27)。③÷9 で $z = 3$ 。①+3
×③、②-2×③ で $x = 1$ 、 $y = 2$ 。

【6】 ②-2×① で (0, 1 | -2, 1)。①-3
×② で (1, 0 | 7, -3)。逆行列は 1 行
め (7, -3)、2 行め (-2, 1)。行列式
 $7 - 6 = 1$ の 3 つの手順と同じ。

【7】 (1) ②-2×① で (0, 0 | 0)。答えは
無数 ($y = 3x - 2$)。 (2) ②-2×① で
(0, 0 | -3)、「 $0 = -3$ 」。答えはない。

【8】 肩：
 $0.0647 \times (-0.1) \div 0.0530 \approx -0.122$ 。
ひじ：
 $-0.3245 \times (-0.1) \div 0.0530 \approx 0.612$ 。

肩を約 0.12 rad/s (右回り)、ひじを約
0.61 rad/s (左回り)。

【9】 x の和 15、 x^2 の和 55、 y の和 90.0、
 xy の和 290.0。正規方程式の行列は 1
行め (55, 15)、2 行め (15, 5)、右辺は
(290, 90)、行列式 $275 - 225 = 50$ 。
 $a = (5 \times 290 - 15 \times 90) \div 50 = 2$ 、
 $b = (-15 \times 290 + 55 \times 90) \div 50 = 12$ 。
 $y = 2x + 12$ (3-16 と同じ)。

【1】 (1) 行列式 1。逆行列は 1 行め
(1, -3)、2 行め (-1, 4)。(2) 行列式
8。逆行列は $\frac{1}{8}$ に 1 行め (3, -1)、2 行
め (-1, 3) をかけたもの。

【2】 行列式 $5 - 4 = 1$ 。 A^{-1} は 1 行め
(1, -2)、2 行め (-2, 5)。
 $x = 16 - 14 = 2$ 、 $y = -32 + 35 = 3$ 。

【3】 逆行列は $\frac{1}{21}$ に 1 行め (5, -2)、2 行め
(-2, 5) をかけたもの。
(1) $\frac{1}{21}(60 - 18, -24 + 45) = (2, 1)$ 。
(2) $\frac{1}{21}(105, -42) = (5, -2)$ 。

【4】 AB は 1 行め (3, 2)、2 行め (4, 3)、
行列式 1、 $(AB)^{-1}$ は 1 行め (3, -2)、
2 行め (-4, 3)。 B^{-1} は 1 行め
(1, -1)、2 行め (-1, 2)、 A^{-1} は 1 行
め (2, -1)、2 行め (-1, 1)、 $B^{-1}A^{-1}$
は 1 行め (3, -2)、2 行め (-4, 3)。

【5】 (1) ②-①、③-2×① で
(0, 1, -2 | -4)、(0, -3, -1 | -9)。
①-②、③+3×② で (1, 0, 3 | 10)、
(0, 0, -7 | -21)。③÷(-7) で $z = 3$ 。
 $x = 10 - 9 = 1$ 、 $y = -4 + 6 = 2$ 。
(2) 表は 1 行め (1, 1, 0 | 3)、2 行め
(0, 1, 1 | 5)、3 行め (1, 0, 1 | 4)。
③-① で (0, -1, 1 | 1)。③+② で

$(0, 0, 2 \mid 6)$ 、 $z = 3$ 。②から
 $y = 5 - 3 = 2$ 、①から $x = 3 - 2 = 1$ 。

6 1行め 1列めが 0 なので、①と②を入れかえて 1行め $(1, 1, 1 \mid 6)$ 、2行め $(0, 1, 2 \mid 8)$ 。③-①で
 $(0, 1, -1 \mid -1)$ 。①-②、③-②で
 $(1, 0, -1 \mid -2)$ 、 $(0, 0, -3 \mid -9)$ 。③
 $\div (-3)$ で $z = 3$ 。 $x = -2 + 3 = 1$ 、
 $y = 8 - 6 = 2$ 。

7 ②-2×①で $(0, 1 \mid -2, 1)$ 。①-2
 $\times$ ②で $(1, 0 \mid 5, -2)$ 。逆行列は 1行
め $(5, -2)$ 、2行め $(-2, 1)$ 。

8 ②-0.5×①で、2行めの左を 0 にす
る (例題 7 と同じ考え方)。
(1) $(1-1, 3-3 \mid 2-2) = (0, 0 \mid 0)$
で答えは無数 ($x = 2 - 3y$)。
(2) $(1-1, 3-3 \mid 1-2)$
 $= (0, 0 \mid -1)$ 、「 $0 = -1$ 」で答えは
ない。

9 (1) x の和 6、 x^2 の和 14、 y の和 12、
 xy の和 25。正規方程式の行列は 1行
め $(14, 6)$ 、2行め $(6, 4)$ 、右辺は
 $(25, 12)$ 、行列式 $56 - 36 = 20$ 。
 $a = (4 \times 25 - 6 \times 12) \div 20 = 1.4$ 、
 $b = (-6 \times 25 + 14 \times 12) \div 20 = 0.9$ 。
 $y = 1.4x + 0.9$ 。(2) x の和 3、 x^2 の
和 5、 y の和 9、 xy の和 12。正規方
程式の行列は 1行め $(5, 3)$ 、2行め
 $(3, 3)$ 、右辺は $(12, 9)$ 、行列式 6。
 $a = (3 \times 12 - 3 \times 9) \div 6 = 1.5$ 、
 $b = (-3 \times 12 + 5 \times 9) \div 6 = 1.5$ 。
 $y = 1.5x + 1.5$ 。ずれは 0.5、-1、0.5
で、和は 0。

10 (1) 肩: $0.0647 + 0.2415 = 0.3062$ 、
 $0.3062 \times 0.1 \div 0.0530 \approx 0.578$ 。ひ

じ: $-0.3245 - 0.3915 = -0.716$ 、
 $-0.716 \times 0.1 \div 0.0530 \approx -1.351$ 。

肩約 0.58 rad/s、ひじ約 -1.35 rad/s
 $((0.122, -0.612)$ と
 $(0.456, -0.739)$ の和とほぼ同じ)。

(2) 肩:
 $0.1607 \times 0.1 \div 0.0130 \approx 1.23$ 。ひじ:
 $-0.3107 \times 0.1 \div 0.0130 \approx -2.39$ 。
肩約 1.23 rad/s、ひじ約 -2.39 rad/s。

例題 8 $(0.46, -0.74)$ の約 2.7 倍・約
3.2 倍の速さがある。

11 行列は 1行め $(-0.707, 0.707)$ 、2行
め $(0.707, 0.707)$ 。行列式は
 $-0.5 - 0.5 = -1$ 。逆行列は、もとの行
列と同じ。 $T_1 = 70.7 \text{ N}$ 、 $T_2 = 70.7 \text{ N}$ 。

7-6

じ 1 $x = 0.866 \times 4 - 0.5 \times 2 = 3.464 - 1$
 $= 2.464$ 、 $y = 0.5 \times 4 + 0.866 \times 2$
 $= 2 + 1.732 = 3.732$ 。(2.464, 3.732)

じ 2 1行 1列
 $0.940 \times 0.766 - 0.342 \times 0.643$
 $= 0.7200 - 0.2199 = 0.5001$ 。1行 2
列 $-0.940 \times 0.643 - 0.342 \times 0.766$
 $= -0.6044 - 0.2620 = -0.8664$ 。2
行 1列
 $0.342 \times 0.766 + 0.940 \times 0.643$
 $= 0.8664$ 。2行 2列 0.5001。小数第 3
位までで、1行めが $(0.500, -0.866)$ 、
2行めが $(0.866, 0.500)$ で、 $R(60^\circ)$
と同じ

じ 3 (1) 1行 1列 $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 、1行 2列
 $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、2行 1列 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、2行
2列 $\frac{1}{2}$ 。 $R(60^\circ)$ 。(2) 1行 1列
 $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ 、1行 2列 $-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$ 、

2行1列 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 、2行2列 0。 R_{90} 。

(3) $30 \times n = 360$ より 12 回

【4】 O (0, 0)。A は $x = 0.5 \times 4 = 2$ 、
 $y = 0.866 \times 4 = 3.464$ で (2, 3.464)。

B は

$$x = 0.5 \times 4 - 0.866 \times 4 = -1.464,$$

$$y = 0.866 \times 4 + 0.5 \times 4 = 5.464 \text{ で}$$

$$(-1.464, 5.464)$$

【5】 (1) $ad - bc = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 。 $R(30^\circ)^{-1}$
の1行めは $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 、2行めは
 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ で、 $R(-30^\circ)$ と同 $R(30^\circ)^T$
とも同じ。

(2) $x = 0.866 \times 2.464 + 0.5 \times 3.732$
 $= 2.134 + 1.866 = 4.000$ 、
 $y = -0.5 \times 2.464 + 0.866 \times 3.732$
 $= -1.232 + 3.232 = 2.000$ 。(4, 2)

【6】 (1) 列の長さの2乗は
 $0.64 + 0.36 = 1$ 、内積
 $-0.48 + 0.48 = 0$ 、行列式
 $0.64 + 0.36 = 1$ 。回転行列で、
 $\tan \theta = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$ より約 36.9° 。
(2) 1列めの長さが2なのでちがう（横
に2倍・たてに0.5倍）。(3) 列の長さ
は1、内積0だが、行列式は
 $0 - 1 = -1$ なのでちがう（裏返し）

【7】 (1) 上の腕
 $(0.30 \times 0.70711, 0.30 \times 0.70711)$
 $= (0.21213, 0.21213)$ 。下の腕は
 $R(90^\circ)$ を $(0.25, 0)$ にかけて
 $(0, 0.25)$ 。たして約 $(0.212, 0.462)$
(m)。(2) 道具の矢印は
 $R(30^\circ + 45^\circ + 15^\circ) = R(90^\circ)$ を
 $(0.10, 0)$ にかけて $(0, 0.10)$ 。手
 $(0.325, 0.391)$ にたして
 $(0.325, 0.491)$ (m)

【8】 (1) $x' = 3.732$ 、 $y' = -2.464$ 。

$$x' = 0.5 \times 4 + 0.866 \times 2,$$

$$y' = -0.866 \times 4 + 0.5 \times 2.$$

$$(3.732, -2.464).$$

$$(2) F_{x'} = 0.342 \times (-19.6) \approx -6.70,$$

$$F_{y'} = 0.940 \times (-19.6) \approx -18.4.$$

$$(-6.70, -18.4) \text{ (N)}$$

【1】 (1) (0, 2)。

$$(2) (0.866 - 1.5, 0.5 + 2.598)$$

$$= (-0.634, 3.098).$$

$$(3) (1.414 - 1.414, 1.414 + 1.414)$$

 $= (0, 2.828)$

【2】 1行1列
 $0.966 \times 0.707 - 0.259 \times 0.707$
 $= 0.6830 - 0.1831 = 0.4999$ 。1行2
列 $-0.966 \times 0.707 - 0.259 \times 0.707$
 $= -0.8661$ 。2行1列 0.8661。2行2
列 0.4999。小数第3位までで、1行め
が $(0.500, -0.866)$ 、2行めが
 $(0.866, 0.500)$ で、 $R(60^\circ)$ と同じ

【3】 (1) 1行1列 $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ 、1行2列
 $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、2行1列 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、2行
2列 $-\frac{1}{2}$ 。 $R(120^\circ)$ 。

$$(2) 60 \times n = 360 \text{ より 6 回}$$

【4】 (1) $R(90^\circ)^{-1} = R(90^\circ)^T$ で、1行め
が $(0, 1)$ 、2行めが $(-1, 0)$ 。もとの点
は、 $x = 0 \times (-3) + 1 \times 5 = 5$ 、
 $y = -1 \times (-3) + 0 \times 5 = 3$ で $(5, 3)$ 。
(2) $R(45^\circ)^{-1} = R(45^\circ)^T$ で、1行めが
 $(0.707, 0.707)$ 、2行めが
 $(-0.707, 0.707)$ 。

$$x = 0.707 \times 2.828 = 2.000,$$

$$y = 0.707 \times 2.828 = 2.000. (2, 2)$$

【5】 R_{90} の1行めは $(0, -1)$ 、2行めは
 $(1, 0)$ 。O (0, 0)、A (0, 2)、B $(-1, 2)$

6 上の腕 $(0.40 \times 0.86603, 0.40 \times 0.5)$
 $= (0.34641, 0.20000)$ 。下の腕は
 $R(90^\circ)$ を $(0.30, 0)$ にかけて
 $(0, 0.30)$ 。手は約 $(0.346, 0.500)$ (m)

7 $F_{x'} = 0.707 \times (-9.8) \approx -6.93$ 、
 $F_{y'} = 0.707 \times (-9.8) \approx -6.93$ 。
 $(-6.93, -6.93)$ (N)

8 列の長さの2乗は
 $0.0784 + 0.9216 = 1$ 、内積
 $0.28 \times (-0.96) + 0.96 \times 0.28 = 0$ 、行
 列式 $0.0784 + 0.9216 = 1$ 。回転行列
 で、 $\tan \theta = \frac{0.96}{0.28} \approx 3.43$ より約 73.7°

9 あとからはたらく回転を左に書いて
 $R(45^\circ)R(30^\circ)$ 。1行1列
 $0.707 \times 0.866 - 0.707 \times 0.5$
 $= 0.6123 - 0.3535 = 0.2588$ 、1行2
 列 $-0.707 \times 0.5 - 0.707 \times 0.866$
 $= -0.9658$ 、2行1列
 $0.707 \times 0.866 + 0.707 \times 0.5$
 $= 0.9658$ 、2行2列
 $-0.3535 + 0.6123 = 0.2588$ 。1行め
 が $(0.259, -0.966)$ 、2行めが
 $(0.966, 0.259)$ で、 $R(75^\circ)$ と同じ

10 $R(-\theta)$ の1行めは $(\cos \theta, \sin \theta)$ 、2行
 めは $(-\sin \theta, \cos \theta)$ 。1行1列
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 、1行2列
 $\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta = 0$ 、2行1列
 $\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = 0$ 、2行2列
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。よって I

11 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0^\circ$ なので、道具の矢印
 は $R(0^\circ) = I$ をかけた $(0.10, 0)$ 。手
 $(0.325, 0.391)$ にたして
 $(0.425, 0.391)$ (m)。道具は x 軸と同
 じ向き (水平)

7-7

じ1 (1) $R_x(90^\circ)$ の行は $(1, 0, 0)$ 、
 $(0, 0, -1)$ 、 $(0, 1, 0)$ 。 $(1, -4, 2)$ 。

(2) $R_y(90^\circ)$ で $x = 4$ 、 $y = 2$ 、
 $z = -1$ 。 $(4, 2, -1)$

じ2 $R_x(90^\circ)R_y(90^\circ)\vec{e}_x$:
 $R_y(90^\circ)\vec{e}_x = (0, 0, -1)$ 、それに
 $R_x(90^\circ)$ をかけて $(0, 1, 0)$ 。
 $R_y(90^\circ)R_x(90^\circ)\vec{e}_x$:
 $R_x(90^\circ)\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ 、それに
 $R_y(90^\circ)$ をかけて $(0, 0, -1)$ 。ちがう

じ3 x 成分 $0.866 \times 0.5 = 0.433$ 、 y 成分
 $0.5 \times 0.5 = 0.25$ 、 z 成分
 $-(-0.866) = 0.866$ 。
 $(0.433, 0.25, 0.866)$ 。ロールは関係
 しない

じ4 (1) $\psi + \phi$ はどちらも 30° なので、同
 じ向き。(2) 30° と 60° でちがうので、
 ちがう向き

じ5 (1) $(4, 1, 1)$ にかけて $(2, 6, 1)$ 。点
 $(2, 6)$ 。(2) $(0, 3, 0)$ にかけて
 $(0, 3, 0)$ 。向きは $(0, 3)$ のまま

じ6 $A(45^\circ, 0.30)$ の1行めは
 $(0.707, -0.707, 0.212)$ 、2行めは
 $(0.707, 0.707, 0.212)$ 。 $A(45^\circ, 0.25)$
 の右の列は $(0.177, 0.177, 1)$ 。 x は
 0.707×0.177 がひき算で消えて
 0.212 。 y は $0.707 \times 0.177 = 0.125$
 が2つと 0.212 をたして、
 $0.250 + 0.212 = 0.462$ 。約
 $(0.212, 0.462)$ (m)

じ7 (1) $R_z(90^\circ)$ をかけて
 $(-5, 10, -30)$ 、 $\vec{d}$ をたして
 $(-5, 10, 0)$ (m)。
 (2) $\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d} = (-5, 10, -30)$ 。

$R_z(90^\circ)^T$ の行は $(0, 1, 0)$ 、
 $(-1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ なので
 $(10, 5, -30)$ (m)

- 1 (1) $(-1, 3, 2)$ 。(2) $(3, -2, 1)$ 。
 (3) $(2, 1, -3)$

- 2 $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ)\vec{e}_y$:
 $R_x(90^\circ)\vec{e}_y = (0, 0, 1)$ 、それに
 $R_z(90^\circ)$ をかけて $(0, 0, 1)$ 。
 $R_x(90^\circ)R_z(90^\circ)\vec{e}_y$:
 $R_z(90^\circ)\vec{e}_y = (-1, 0, 0)$ 、それに
 $R_x(90^\circ)$ をかけて $(-1, 0, 0)$ 。ちがう

- 3 x 成分 $\cos 90^\circ \times 0.707 = 0$ 、 y 成分
 $\sin 90^\circ \times 0.707 = 0.707$ 、 z 成分
 $-(-0.707) = 0.707$ 。
 $(0, 0.707, 0.707)$ 。左を向いて、機首
 を 45° 上げている

- 4 $\psi + \phi$ はどちらも 60° なので、同じ向
 き (ジンバルロック)

- 5 $A(90^\circ, 0.40)$ の 1 行めは $(0, -1, 0)$ 、
 2 行めは $(1, 0, 0.40)$ 。 $A(-90^\circ, 0.30)$
 の右の列は $(0, -0.30, 1)$ 。
 $x = -1 \times (-0.30) = 0.30$ 、 $y = 0.40$ 。
 手は $(0.30, 0.40)$ (m)

- 6 点は $(2, 3, 1)$ にかけて $(6, 2, 1)$ 、点
 $(6, 2)$ 。向きは $(2, 3, 0)$ にかけて
 $(2, 3, 0)$ のまま

- 7 ヨー 0° なので $R = I$ 。
 $(5, -2, -15) + (20, 10, 15)$
 $= (25, 8, 0)$ (m)

- 8 $R_x(90^\circ)\vec{e}_z = (0, -1, 0)$ 、それに
 $R_z(90^\circ)$ をかけて $(1, 0, 0)$ (①: 右)。
 $R_z(90^\circ)\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ 、それに
 $R_x(90^\circ)$ をかけて $(0, -1, 0)$ (②: 手
 前)。図と合っている

- 9 $\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d} = (10, 10, -30)$ 。 $R_z(90^\circ)^T$
 の行は $(0, 1, 0)$ 、 $(-1, 0, 0)$ 、
 $(0, 0, 1)$ なので $(10, -10, -30)$ 。 x
 が正で y が負なので、前の右側 (下に
 30 m)

- 10 x 成分 $0.707 \times 0.866 = 0.612$ 、 y 成
 分 0.612 、 z 成分 0.5 。長さの 2 乗
 $0.612^2 + 0.612^2 + 0.5^2$
 $= 0.375 + 0.375 + 0.25 = 1.000$

7-8

- 1 (1, 1) は $A\vec{v} = (4, 4)$ で固有値 4。
 $(1, -2)$ は $(1, -2)$ で固有値 1。 $(1, 2)$
 は $(5, 6)$ で、 $5 \div 1 = 5$ 、 $6 \div 2 = 3$ な
 ので固有ベクトルではない。

- 2 B は対角成分が -26 、ほかが 10 。
 $B(1, 1) = (-16, -16)$ で固有値 -16 、
 $B(1, -1) = (-36, 36)$ で固有値
 -36 。 $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$ 。

- 3 $(3, 2)$ 、 $(11, 10)$ 、 $(43, 42)$ 。 $y \div x$ は
 約 0.667 、 0.909 、 0.977 、倍率は 3、約
 3.67 、約 3.91 。固有ベクトル $(1, 1)$ 、
 固有値 4。

- 4 固有値 -1 の固有ベクトルは 1 列め
 $(-0.894, 0.447)$ を 0.447 でわった
 $(-2, 1)$ 、つまり $(2, -1)$ 。固有値 5 の
 固有ベクトルは 2 列め
 $(-0.707, -0.707)$ から $(1, 1)$ 。

- 5 $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ より
 $\lambda = 1, 6$ 。 $\lambda = 1: x + 2y = 0$ で
 $(2, -1)$ 。 $\lambda = 6: -4x + 2y = 0$ で
 $(1, 2)$ 。確かめ: $1 + 6 = 7 = 2 + 5$ 、
 $1 \times 6 = 6 = 2 \times 5 - 2 \times 2$ 。

- 6 A は 1 行め $(0, 1)$ 、2 行め $(-2, -3)$ 。
 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = -1, -2$ 。

-1 の固有ベクトル $(1, -1)$ 、-2 の固有ベクトル $(1, -2)$ 。6-12 の $2s^2 + 6s + 4 = 0$ の解も -1、-2。

【7】 A は 1 行め $(0, 1)$ 、2 行め $(-13, -4)$ 。 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ より $\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3j$ 。ゆれながら小さくなる (角振動数 3 rad/s 、 e^{-2t} でへる)。

【8】 $\lambda^2 - 30\lambda - 400 = 0$ より $(\lambda - 40)(\lambda + 10) = 0$ 、 $\lambda = 40, -10$ 。
 $40 : -10x - 20y = 0$ で $(2, -1)$ 。
 $-10 : 40x - 20y = 0$ で $(1, 2)$ 。内積 $2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$ で直交。

【1】 $(1, 1)$ は $A\vec{v} = (6, 6)$ で固有値 6。
 $(1, -2)$ は $(3, -6)$ で固有値 3。 $(1, 2)$ は $(7, 10)$ で、 $7 \div 1 = 7$ 、 $10 \div 2 = 5$ なので固有ベクトルではない。

【2】 $(1, 1)$ をかけると $(0, 0)$ なので固有値 0。 $(1, -1)$ をかけると $(-0.4, 0.4)$ なので固有値 -0.4。どちらも固有ベクトル。

【3】 B は対角成分が -68、ほかが 32。
 $B(1, 1) = (-36, -36)$ で固有値 -36、
 $B(1, -1) = (-100, 100)$ で固有値 -100。 $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ 。

【4】 $(5, 2)$ 、 $(27, 18)$ 、 $(153, 126)$ 。 $y \div x$ は 0.4、約 0.667、約 0.824、倍率は 5、5.4、約 5.67。固有ベクトル $(1, 1)$ 、固有値 6。

【5】 $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ より $\lambda = 5, 2$ 。 $5 : -x + y = 0$ で $(1, 1)$ 。 $2 : 2x + y = 0$ で $(1, -2)$ 。 $5 + 2 = 7 = 4 + 3$ 、 $5 \times 2 = 10 = 4 \times 3 - 1 \times 2$ 。

【6】 A は 1 行め $(0, 1)$ 、2 行め $(-4, -5)$ 。
 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ より $\lambda = -1, -4$ 。
-1 の固有ベクトル $(1, -1)$ 、-4 の固有ベクトル $(1, -4)$ 。 $s^2 + 5s + 4 = 0$ の解も -1、-4。

【7】 $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ より $\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = -3 \pm 4j$ 。ゆれながら小さくなる (角振動数 4 rad/s 、 e^{-3t} でへる)。

【8】 $\lambda^2 - 90\lambda + 1400 = 0$ より $(\lambda - 70)(\lambda - 20) = 0$ 、 $\lambda = 70, 20$ 。
 $70 : -10x + 20y = 0$ で $(2, 1)$ 。 $20 : 40x + 20y = 0$ で $(1, -2)$ 。内積 $2 - 2 = 0$ で直交。

【9】 固有値 5 の固有ベクトルは 1 列め $(0.707, 0.707)$ から $(1, 1)$ 。固有値 -1 の固有ベクトルは 2 列め $(-0.707, 0.707)$ から $(-1, 1)$ 、つまり $(1, -1)$ 。

【10】 $\lambda^2 - 2500 = 0$ より $\lambda = 50, -50$ 。
 $50 : -10x + 30y = 0$ で $(3, 1)$ 。
 $-50 : 90x + 30y = 0$ で $(1, -3)$ 。内積 $3 - 3 = 0$ で直交。

【11】 $\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$ より $\lambda = 8, 3$ 。 $8 : -x + 2y = 0$ で $(2, 1)$ 。 $3 : 4x + 2y = 0$ で $(1, -2)$ 。
 $8 + 3 = 11 = 7 + 4$ 、
 $8 \times 3 = 24 = 28 - 4$ 。内積 $2 - 2 = 0$ で直交。

7-9

【1】 $q_1 = 2, q_2 = 2$ 。のぼすと $3q_1 = 6$ 、 $q_2 = 2$ 。 $6(1, 1) + 2(1, -1) = (8, 4)$ 。
 $A(4, 0) = (8, 4)$ で同じ。

【2】 P は 1 列め $(2, 1)$ 、2 列め $(1, -2)$ 。

$$\det P = -5, P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$AP = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分が } 6 \text{ と } 1.$$

【3】 $AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$

$$R^T AR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 3 と 7 (固有値 3 の固有ベクトルが $(1, 1)$ 、7 が $(-1, 1)$).

【4】 $\sigma R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 80 & -10 \\ -40 & -20 \end{pmatrix}.$

$$R^T \sigma R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 40 と -10 . R は $\theta \approx -26.6^\circ$ の回転。

【5】 $q_1 = 0.03, q_2 = -0.03$.

$$q_1 = 0.03 \cos 4t, q_2 = -0.03 \cos 6t.$$

$$x_1 = 0.03 \cos 4t - 0.03 \cos 6t,$$

$$x_2 = 0.03 \cos 4t + 0.03 \cos 6t.$$

【6】 D^3 の対角成分は 64 と 8.

$$PD^3P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 72 & 56 \\ 56 & 72 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

36、ほか 28. A^2 は対角成分 10、ほか 6. AA^2 も対角成分 36、ほか 28.

【7】 (1) $\lambda = 3$ (重解). $A - 3I$ の行は $(0, 0)$ と $(1, 0)$ で、式は $x = 0$ だけ. 固有ベクトルは $(0, 1)$ の 1 本なので、できない. (2) $\lambda = 1, 3$. $\lambda = 1$ は $(1, 0)$ 、 $\lambda = 3$ は $-2x + 2y = 0$ で

$(1, 1)$. できる. P は 1 列め $(1, 0)$ 、2 列め $(1, 1)$ 、 D の対角成分は 1 と 3.

【1】 (1) $q_1 = 3, q_2 = -1$. のぼすと 9、 -1 . $9(1, 1) - 1(1, -1) = (8, 10)$.

$$A(2, 4) = (8, 10) \text{ で同じ.}$$

(2) $q_1 = 3, q_2 = 2$. のぼすと 9、2.

$$9(1, 1) + 2(1, -1) = (11, 7).$$

$$A(5, 1) = (11, 7) \text{ で同じ.}$$

【2】 P は 1 列め $(1, 1)$ 、2 列め $(1, -2)$.

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 6 と 3.

【3】 $AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$

$$R^T AR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 6 と 2.

【4】 $\sigma R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 140 & -20 \\ 70 & 40 \end{pmatrix}.$

$$R^T \sigma R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 70 と 20.

【5】 $q_1 = 0.02, q_2 = 0.02$.

$$q_1 = 0.02 \cos 6t, q_2 = 0.02 \cos 10t.$$

$$x_1 = 0.02 \cos 6t + 0.02 \cos 10t,$$

$$x_2 = 0.02 \cos 6t - 0.02 \cos 10t.$$

【6】 D^4 の対角成分は 81 と 1.

$$PD^4P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 82 & 80 \\ 80 & 82 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

41、ほか 40 (7-8④の $(41, 40)$ と同じ).

- 7 P は 1 列め $(2, -1)$ 、2 列め $(1, 1)$ 。

$$\det P = 3, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分が } -1 \text{ と } 5.$$

- 8 $q_1 = 0.03$ 、 $q_2 = 0.01$ 。

$$q_1 = 0.03 \cos 4t, q_2 = 0.01 \cos 6t.$$

$$x_1 = 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t,$$

$$x_2 = 0.03 \cos 4t - 0.01 \cos 6t.$$

- 9 (1) $\lambda = 4$ (重解)、固有ベクトルは

$(1, 0)$ だけなので、できない。

(2) $\lambda = 4$ は $(1, 0)$ 、 $\lambda = 2$ は

$2x + y = 0$ で $(1, -2)$ 。できる。 P は

1 列め $(1, 0)$ 、2 列め $(1, -2)$ 、 D の対

角成分は 4 と 2。(3) $\lambda = 3$ は $(1, 0)$ 、

$\lambda = 1$ は $2x + 2y = 0$ で $(1, -1)$ 。で

きる。 P は 1 列め $(1, 0)$ 、2 列め

$(1, -1)$ 、 D の対角成分は 3 と 1。

(4) $\lambda = 5$ (重解)、 $A - 5I$ の行は

$(0, 0)$ と $(2, 0)$ で、式は $x = 0$ だけ。

固有ベクトルは $(0, 1)$ の 1 本なので、

できない。

- 10 D^5 の対角成分は $4^5 = 1024$ と

$$2^5 = 32.$$

$$PD^5P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1056 & 992 \\ 992 & 1056 \end{pmatrix} \text{ で、}$$

対角成分 528、ほか 496。

11 $AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$

$$R^T AR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分}$$

が 4 と 8。固有値 4 の固有ベクトルは

$(1, 1)$ 、固有値 8 は $(-1, 1)$ 。

- 12 D^6 の対角成分は $3^6 = 729$ と 1。

$$PD^6P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 730 & 728 \\ 728 & 730 \end{pmatrix} \text{ で、対角成分 } 365、\text{ほか } 364.$$

7-10

- じ1 $-6, 9, -13.5, 20.25$ 。 $|a| = 1.5 > 1$ 、

$a < 0$ なので、ゆれながらふえる。

- じ2 $y_2 = 54, y_3 = 73.2, y_4 = 88.56 \text{ mL}$ 。

$$\text{落ち着く先 } 30 \times \frac{1}{1 - 0.8} = 150 \text{ mL}.$$

- じ3 $\vec{p}_1 = (0.7, 0.3), \vec{p}_2 = (0.67, 0.33)$ 、

$\vec{p}_3 = (0.667, 0.333)$ 。3 日後は 0.667。

$0.7a + 0.6b = a$ から $a = 2b$ 。晴れ

$\frac{2}{3}$ 、雨 $\frac{1}{3}$ 。

- じ4 $c_1 + c_2 = 1, c_1 - c_2 = 3$ から $c_1 = 2$ 、

$c_2 = -1$ 。 $A^4 \vec{x}_0$ は $162(1, 1)$ から

$(1, -1)$ をひいて、 $(161, 163)$ 。

- じ5 (1) 1.2 と 1.0。(2) 1.2 の部分がふ

え、 $(1, 1)$ の向きにそろいながら大きくなる。

- じ6 (1) 1 行め $(0.95, 0.05)$ 、2 行め

$(0.05, 0.95)$ 。(2) 1 と 0.9。(3) 和は

20、差は $20 \times 0.6561 = 13.122$ 。左

16.561 cm、右 3.439 cm。

- じ7 1 歩の数は $1 - 0.5 \Delta t$ 。(1) 2 s 以下。

(2) 4 s より短いとき。(3) -0.5 倍

(ゆれながら近づく)。

- じ8 (1) $\pm 3j$ 。(2) $1 \pm 0.3j$ 、大きさ

$$\sqrt{1.09} \approx 1.044. (3) 1.09^{10.5} \approx 2.47$$

倍。

- じ9 $v_{n+1} = -0.9x_n + v_n$ 、

$x_{n+1} = 0.91x_n + 0.1v_n$ 。1 行め

$(0.91, 0.1)$ 、2 行め $(-0.9, 1)$ 。行列式

- $0.91 + 0.09 = 1$ 。 $\lambda^2 - 1.91\lambda + 1 = 0$ から $\lambda = 0.955 \pm 0.297j$ 、大きさ 1。
- じ 10** [1 2]、[5 4]、[13 14]。固有値は 3 $((1, 1))$ と $-1 ((1, -1))$ で、大きさの大きい 3 が勝つので、 $y \div x$ は 1 に近づく。
- 1** $-8, 6.4, -5.12, 4.096$ 。
 $|a| = 0.8 < 1$ 、 $a < 0$ なので、ゆれながら 0 に近づく。
- 2** $y_2 = 140, y_3 = 185$ 、
 $y_4 = 218.75 \text{ mL}$ 。落ち着く先
 $80 \times \frac{1}{1 - 0.75} = 320 \text{ mL}$ 。
- 3** $\vec{p}_1 = (0.6, 0.4)$ 、 $\vec{p}_2 = (0.48, 0.52)$ 。
2 日後は 0.48。 $0.6a + 0.3b = a$ から
 $0.3b = 0.4a$ 、 $a : b = 3 : 4$ 。晴れ
 $\frac{3}{7}$ 、雨 $\frac{4}{7}$ 。
- 4** [1 2]、[3 4]、[7 8]。
- 5** $(2, 0) = (1, 1) + (1, -1)$ 。 $A^3 \vec{x}_0$ は
27 $(1, 1)$ と $(1, -1)$ の和で、
 $(28, 26)$ 。
- 6** 1 行め $(0.6, 0.4)$ 、2 行め $(0.4, 0.6)$ 。
固有値 1 と 0.2。1 歩め $(12, 8)$ 、2 歩め
 $(10.4, 9.6)$ 。左 10.4 cm、右 9.6 cm。
- 7** 1 歩の数は $1 - 0.2 \Delta t$ 。(1) 5 分以下。
(2) 10 分より短いとき。(3) -0.5 倍
(ゆれながら近づく)。
- 8** (1) 0.9 と 0.5。(2) どちらも $|\lambda| < 1$
なので、 $(1, 1)$ の向きにそろいながら原点に近づく。
- 9** 固有値 $1 \pm 0.02j$ 、大きさ
 $\sqrt{1.0004} \approx 1.0002$ 。1 周で
 $1.0004^{157} \approx 1.065$ 倍。
- 10** $v_{n+1} = -0.2x_n + v_n$ 、
 $x_{n+1} = 0.96x_n + 0.2v_n$ 。1 行め
 $(0.96, 0.2)$ 、2 行め $(-0.2, 1)$ 。行列式
 $0.96 + 0.04 = 1$ 。 $\lambda^2 - 1.96\lambda + 1 = 0$
から $\lambda = 0.98 \pm 0.199j$ 、大きさ 1。

記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

記号	読み方	意味	章
Δ	デルタ	変化量。この巻の Δt は、オイラー法の 1 歩の時間 (7-10)	2-3
θ	シータ	角の大きさ。回転行列 $R(\theta)$ の角、関節の角 $\theta_1 \cdot \theta_2$ 。7-7 ではピッチの角	4-2
$\cos \theta$ $\sin \theta$	コサイン・シータ、サイン・シータ	回転行列の成分。表計算や Python では、度をラジアンに直してから計算する (7-6)	4-6
ω	オメガ	角速度 [rad/s]。関節の角速度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ (7-2) や、台車の角振動数 (7-8)	4-8
$\vec{a}$	ベクトル・エー	向きと大きさをもつ量。この巻では、成分をたてに書く (7-1)	4-10
$\vec{e}_x, \vec{e}_y$	イー・エックス、イー・ワイ	$x \cdot y$ の向きの大きさ 1 の矢印 (物差しの矢印)。行列の 1 列めは $\vec{e}_x$ の行き先 (7-2)	4-11
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	エー・ドット・ビー	内積。行列の積の成分は、行と列の内積 (7-3)	4-12
$\vec{a} \times \vec{b}$	エー・クロス・ビー	外積。箱の体積 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ は、 3×3 の行列式 (7-4)	4-14
$\dot{x}, \ddot{x}$	エックス・ドット、エックス・ツードット	時間で 1 回・2 回微分。 $\dot{x}$ は成分をそれぞれ微分したもの (7-8)	5-5
Σ	シグマ	全部たす。積の成分 $\sum_k a_{ik} b_{kj}$ (7-1)	5-10
y_n	ワイ・エヌ	n 歩めの値。この巻の $\vec{x}_n$ は、そのベクトル版 (7-10)	6-2
j	ジェイ	虚数単位。 $R_{90} R_{90} = -I$ は、 $j^2 = -1$ と同じ (7-6)	6-8
$\bar{z}$	ゼット・バー	共役な複素数。共役な固有値の組では $\lambda \bar{\lambda} = \lambda ^2$ (7-10)	6-8

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
$ z $	ぜったいち・ゼット	複素数の大きさ。固有値の大きさ $ \lambda $ が、くり返しのふえ方を決める (7-10)	6-9
$e^{j\theta}$	イー・ジェイ・シータ	$\cos \theta + j \sin \theta$ 。かけると θ 回る。回転行列と同じ回転 (7-6・7-10)	6-10
$j\omega$	ジェイ・オメガ	コイルの箱の $j\omega L$ 、コンデンサーの箱の $j\omega C$ (7-3)	6-10
$\cosh x$	ハイパボリック・コサイン	送電線の箱の行列の成分 $\cosh \gamma \ell$ 、 $\sinh \gamma \ell$ (7-11)	6-11
s	エス	特性方程式の文字。状態の行列の固有値 λ と同じもの (7-8)	6-12
a_{ij}	エー・アイ・ジェイ	行列 A の i 行め j 列めの成分。下つきは行が先、列があと	7-1
A^T	エー・トランスポーズ	A の転置。行と列を入れかえた行列。 T 乗ではない	7-1
$A\vec{x}$	エー・エックス	行列 A に、ベクトル $\vec{x}$ を右からかけたもの。 $\vec{x}$ を入れると出てくるベクトル	7-2
$\dot{\theta}$	シータ・ドット	関節の角速度を並べたベクトル。点は時間微分 (5-5)。 $J\dot{\theta}$ は手の速度	7-2
AB	エー・ビー	行列の積。 B の変換のあとに A の変換をする (右が先)。ふつう $AB \neq BA$	7-3
I	アイ	単位行列。何もしない変換。 $AI = IA = A$ 。 E と書く本も多い	7-3
$\det A$	デターミナント・エー	行列 A の行列式。 2×2 なら $ad - bc$ 。面積・体積の倍率	7-4
$ A $	デターミナント・エー	行列式の、専門書での書き方。絶対値ではないので、マイナスにもなる	7-4
A^{-1}	エー・インバース	A の逆行列。 A を元にもどす行列。 $\frac{1}{A}$ とは書かない	7-5
$R(\theta)$	アール・シータ	原点のまわりに左回りに θ 回す回転行列。 $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$	7-6

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
R_{90}	アール・きゅうじゅう	90° 回す回転行列 $R(90^\circ)$ 。 $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 $R_{90}R_{90} = -I$ ($j^2 = -1$ と同じ)	7-6
$R_x R_y R_z$	アール・エックス、アール・ワイ、アール・ゼット	$x \cdot y \cdot z$ 軸のまわりに回す 3×3 の回転行列。回らない軸の行と列は 1 と 0	7-7
$\phi \theta \psi$	ファイ、シータ、プサイ	ロール・ピッチ・ヨーの角。 ϕ は、6-6 の初期位相の ϕ とは別のもの	7-7
λ	ラムダ	固有値。 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ の倍率。6-12 の特性方程式の s と同じもの	7-8
$\vec{v}$	ベクトル・ブイ	この章では固有ベクトルによく使う文字。 $\vec{0}$ はのぞく。何倍しても同じ固有ベクトル	7-8
D	ディー	対角行列。固有値を対角に並べたもの。 3-10 の判別式の D とは別	7-9
P	ピー	固有ベクトルを列に並べた行列。 $P^{-1}AP = D$ 。 $\vec{x} = P\vec{q}$ で軸を変える	7-9
A^n	エー・エヌじょう	行列 A を n 回かけた行列。成分を n 乗したものではない。 $A^0 = I$	7-10
$\vec{x}_n$	ベクトル・エックス・エヌ	n 歩め (n 回め) の状態を表すベクトル。6-2 の y_n のベクトル版	7-10

記号を書くときのちゅうい

手で書くと、ほかの記号とまぎれやすいものと、読みまちがえやすい書き方です。行列では、書く順番がそのまま意味になります。

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
a_{12}	a_{21}	1 行め 2 列め。行の番号が先（表計算の番地 B3 は列が先）(7-1)

つぎのページへつづく

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$A\vec{x}$	$\vec{x}A$	ベクトルは行列の右に、たてに書く。機械（行列）に右から入れる（7-1・7-2）
AB	BA	ふつう $AB \neq BA$ 。 $AB\vec{x}$ は右の B が先（先にする変換を右に書く）（7-3）
A^2	成分の 2 乗	$A^2 = AA$ 。主役の行列なら 1 行めは (5, 4)。成分の 2 乗 (4, 1) ではない（7-3・7-10）
A^T	A^T	立てた字の T。「T 乗」ではない。行と列を入れかえる（7-1）
$ A $	絶対値	行列式 $\det A$ の、専門書の書き方。マイナスにもなる（7-4）
$\det(2A)$	$2 \det A$	2×2 では $2^2 \det A$ 、 3×3 では $2^3 \det A$ 。 $\det(A+B)$ にはきまりがない（7-4）
A^{-1}	$\frac{1}{A}$	行列のわり算はない。 $A\vec{x} = \vec{b}$ なら $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ （左からかける）（7-5）
$(AB)^{-1}$	$A^{-1}B^{-1}$	$B^{-1}A^{-1}$ 。あとからしたことを先にもどす（くつ下とくつ）（7-5）
$R(\theta)$	$R(-\theta)$	1 行めは $(\cos \theta, -\sin \theta)$ 。 90° を入れ、 $(1, 0)$ が $(0, 1)$ へ行くか確かめる（7-6）
$R(\theta)^{-1}$	成分の逆数	$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$ （7-6）
$R_y(\theta)$	R_x 、 R_z の形	1 行めは $(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ 。 $\sin$ の符号が逆に見える（7-7）
$(x, y, 1)$	$(x, y, 0)$	同次座標。位置には 1、向き（速度など）には 0 をつける（7-7）
$A - \lambda I$	$A - \lambda$	λ は対角成分からだけひく。ほかの成分はそのまま（7-8）
$\vec{v}$	$\vec{0}$	固有ベクトルに $\vec{0}$ はふくめない。何倍しても（向きが逆でも）同じ固有ベクトル（7-8）

つぎのページへつづく

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$P^{-1}AP$	PAP^{-1}	$D = P^{-1}AP$ 。 P の列の順と、 D の対角成分の順をそろえる (7-9)
$ \lambda $	λ	ふえるか消えるかは大きさで決まる。 $ -1.5 = 1.5 > 1$ はふえる。 $ 1 + 0.1j = \sqrt{1.01}$ (7-10)
$I + A \Delta t$	$A \Delta t$	オイラー法の 1 歩の行列。今の値 $I\vec{x}_n$ をたすのを忘れない (7-10)
$V [\text{V}]$	$V (\text{V})$	記号と単位が並ぶときは、単位を $[\]$ でくくる。「電圧 $V [\text{V}]$ 」「抵抗 $R [\Omega]$ 」。点の座標・ベクトルの数の組やグラフの軸の単位は、「 $(0.325, 0.391) (\text{m})$ 」のように $()$ (7-3・7-11)

ギリシャ文字の読み方

この巻では、固有値 λ 、姿勢の角 $\phi \cdot \theta \cdot \psi$ など、ギリシャ文字がたくさん出てきます。大文字・小文字・読み方と、この巻での意味です（かっこの中は章）。

大	小	読み方	この巻での意味	大	小	読み方	この巻での意味
A	α	アルファ	回す角 (7-6)	N	ν	ニュー	—
B	β	ベータ	回す角 (7-6)	Ξ	ξ	クシー	—
Γ	γ	ガンマ	送電線の γ (7-11)	O	o	オミク ロン	—
Δ	δ	デルタ	Δt 、 Δx (7-10・7-11)	Π	π	パイ	円周率
E	ε	イプシ ロン	—	P	ρ	ロー	—
Z	ζ	ゼータ	(減衰比。6-7)	Σ	σ	シグマ	Σ は和、 σ は応力 (7-2)
H	η	イータ	—	T	τ	タウ	(時定数。6-4)
Θ	θ	シータ	回す角・関節の角、ピッチ (7-7)	Υ	v	ウプシ ロン	—
I	ι	イオタ	—	Φ	ϕ	ファイ	ロール (7-7)
K	κ	カッパ	—	X	χ	カイ	—
Λ	λ	ラムダ	固有値 (7-8)	Ψ	ψ	プサイ	ヨー (7-7)
M	μ	ミュー	マイクロ (μF)	Ω	ω	オメガ	角速度。 Ω はオーム

大文字が英語のアルファベットと同じ形の文字 (A、B、E など) は、記号としてはほとんど使いません。ロールの ϕ は、6-6 の初期位相の ϕ とは別のものです。 ϕ は φ と書くこともあります (4-15 の球座標の角は φ)。応力の行列は、物理の本では成分の σ_x と区別するために太字 σ で書きます (7-2)。

よく使う定数・単位・公式

1 この巻で使う単位

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係	章
長さ	m、cm、mm	$1\text{ m} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm}$	7-2
角	°（度）、rad（ラジアン）	$\pi\text{ rad} = 180^\circ$ 。表計算・Pythonの cos はラジアン	7-6
角速度	rad/s	関節の回る速さ $\dot{\theta}$ 。1 秒に回る角	7-2
速度	m/s	手の速度 $\dot{p} = J\dot{\theta}$	7-2
力・重さ	N（ニュートン）	3 つのばねの球 1 個の重さ 0.98 N	7-1 7-5
ばね定数	N/m	1 m のばすのに要る力	7-5 7-8
応力	MPa（メガパスカル）	$1\text{ MPa} = 1\text{ N/mm}^2$	7-2
電圧・電流	V（ボルト）、A（アンペア）	箱の入口の組 (V_1, I_1)、出口の組 (V_2, I_2)	7-3
抵抗	Ω （オーム）	$1\Omega = 1\text{ V/A}$ 。箱の行列の右上の単位	7-3
コンダクタンス	S（ジーメンズ）	$1\text{ S} = 1\text{ A/V}$ ($\frac{1}{\Omega}$)。箱の行列の左下、 $j\omega C$ の単位	7-3
インダクタンス・静電容量	H（ヘンリー）、F（ファラド）	$1\text{ mH} = 0.001\text{ H}$ 、 $1\mu\text{F} = 0.000001\text{ F}$	7-3
角周波数	rad/s	$\omega = 2\pi f$ (f は Hz)	7-3

2 よく使う数

名前	値	章
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.70710678… (numpy の固有ベクトル)	7-8
cosh 1、sinh 1	1.543、1.175 (送電線の箱の行列)	7-11
重力加速度 g	9.8 m/s ² (1.0 kg の荷物の重力 9.8 N)	7-6
掃き出し法の手間 (n 文字)	約 $\frac{n^3}{3}$ 回のかけ算 ($n = 100$ で約 33 万回)	7-5

回転行列に入る三角比の値 (4-6・7-6)

角 θ	0°	30°	45°	60°	90°
ラジアン	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
(小数)	1	0.866	0.707	0.5	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(小数)	0	0.5	0.707	0.866	1

行列の成分は、小数第 3 位まで書きます。途中で丸めたときの小さなちがいは、丸めのためです (7-2・7-6)。

この巻でくり返し使う場面と数

同じ場面は、どの章でも同じ数で計算しています。

場面	行列と数	章
くだもの屋	個数 $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 、値段 (りんご 120 円・みかん 60 円) で合計 420 円・300 円。お店 B (100 円・80 円) もならべ ると $N \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & 440 \\ 300 & 280 \end{pmatrix}$	7-1

つぎのページへつづく

場面	行列と数	章
3-6 の回路	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ 。行列式 12、 $I_1 = 2\text{ A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{ A}$	7-1 7-5
3 つの文字	$x + y + z = 9$ 、 $x - y = 1$ 、 $y - z = 1$ を掃き出し法で： $x = 4$ 、 $y = 3$ 、 $z = 2$	7-5
4-11 の看板	30° と 60° のひもで 100 N 。行列式 -1 、 $T_1 = 50\text{ N}$ 、 $T_2 = 86.6\text{ N}$ 。ひもが水平に近いと行列式は 0 に近く、力が 大きい	7-1 7-4 7-5
2 本の腕	$L_1 = 0.30\text{ m}$ 、 $L_2 = 0.25\text{ m}$ 、 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ 。手 $(0.325, 0.391)$ 。 $J = \begin{pmatrix} -0.391 & -0.241 \\ 0.325 & 0.065 \end{pmatrix}$ 、 $\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2 = 0.0530$	7-2 7-4 7-6 7-7
電気の箱	直列 2Ω $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、並列 2Ω $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ 。直列が入口側で $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ 、逆の順で $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$ 。行列式はどちらも 1	7-3 7-4
3 つのばね	$k = 100\text{ N/m}$ 、球の重さ 0.98 N 。のび $u_1 = 0.0294\text{ m}$ 、 $u_2 = 0.0490\text{ m}$ 、 $u_3 = 0.0588\text{ m}$	7-1 7-5
2 つの台車	$m = 1\text{ kg}$ 、 $k = 100\text{ N/m}$ 、 $K = 10\text{ N/m}$ 。 $B = \begin{pmatrix} -110 & 10 \\ 10 & -110 \end{pmatrix}$ 、固有値 -100 ・ -120 、 $\omega = 10 \cdot$ 10.95 rad/s 。固有ベクトル $(1, 1)$ (いっしょ)・ $(1, -1)$ (反対)	7-1 7-8 7-9
2 つの水そう	$H = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}$ 、固有値 0 (合計は一定)・ -0.2 (差 は $e^{-0.2t}$)。 $\Delta t = 1$ 分の 1 歩の行列の固有値は 1 と 0.8	7-8 7-10

つぎのページへつづく

場面	行列と数	章
3-10 の式 と、ばね	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値 $-1, -2$ 。 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ は $-1 \pm 2j$ 。 $0.5 \text{ kg} \cdot 8 \text{ N/m} \cdot c = 0.4$ の $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{pmatrix}$ は $-0.4 \pm 3.980j$	7-8
応力	$\begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix}$ [MPa]。固有値（主応力） $88.31 \cdot -28.31$ 、 固有ベクトル $(1, 0.277) \cdot (1, -3.61)$	7-2 7-8
天気	$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ （どの列もたすと 1）。固有値 $1 \cdot 0.4$ 、 落ち着く先は晴れ $\frac{2}{3}$ 、雨 $\frac{1}{3}$	7-10
冷めるお湯	部屋 20°C 、はじめ 80°C 。差は 1 歩で $1 - 0.05 \Delta t$ 倍。 $\Delta t = 1$ 分で 10 分後 55.92°C 。 $\Delta t = 30$ 分で -0.5 倍（ゆ れる）。こわれないのは $\Delta t < 40$ 分	7-10
ばねのオイ ラー法	$\omega = 1$ 。ふつうの方法の 1 歩の行列 $\begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix}$ 、固有値 $1 \pm j\Delta t$ 。1 周で 1.37 倍（ $\Delta t = 0.1$ ） $\cdot 1.03$ 倍（0.01）。速 度を先に進める方法は行列式 1、 $ \lambda = 1$	7-10
最小二乗法	3-16 のデータ 7 点。正規方程式 $\begin{pmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136.2 \\ 31.5 \end{pmatrix}$ 、 $y = 1.489x + 0.032$	7-5

主役の行列の 6 つの顔

この巻の主役の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を、章ごとにちがう目で見ました (7-0 の表の答え合わせ)。

章	見る目	計算と、わかったこと
7-2	形を変える機械	家のかど $(2, 0) \rightarrow (4, 2)$ 、 $(2, 2) \rightarrow (6, 6)$ 、 $(1, 3) \rightarrow (5, 7)$ 。1 列め $(2, 1)$ は $\vec{e}_x$ の行き先、2 列め $(1, 2)$ は $\vec{e}_y$ の行き先
7-4	面積が何倍になるか	$\det A = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$ 。正方形 1 つが面積 3 の平行四辺形に
7-5	元にもどす機械	$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 。かけると I
7-8	向きが変わらない矢印	固有値 3 と 1。固有ベクトル $(1, 1)$ と $(1, -1)$ (直交する)
7-9	のびるだけに分ける	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ 。 $q_1 = \frac{x+y}{2}$ が 3 倍、 $q_2 = \frac{x-y}{2}$ は 1 倍
7-10	何回もかける	$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 、 $A^5 = \begin{pmatrix} 122 & 121 \\ 121 & 122 \end{pmatrix}$ (成分は $\frac{3^5 \pm 1}{2}$)。点は $(1, 1)$ の向きにそろう

3 行列の計算の公式

公式・きまり	式	章
行列と成分	$m \times n$ 行列は m 行 n 列。 a_{ij} は i 行め j 列めの成分	7-1
和・実数倍	成分ごと。 $k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ 。たせるのは同じ大きさどうし	7-1

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
行列×ベクトル	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ (行ごとに、ベクトルとの内積)	7-1
		7-2
列の意味	1 列めは $\vec{e}_x$ の行き先、2 列めは $\vec{e}_y$ の行き先	7-2
線形	$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ 、 $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$ 。原点は動かない (ずらす変換は 7-7 の同次座標で)	7-2
行列×行列	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ 。(i, j) 成分は、左の i 行めと右の j 列めの内積	7-1
		7-3
大きさ	$(m \text{ 行 } n \text{ 列}) \times (n \text{ 行 } p \text{ 列}) = (m \text{ 行 } p \text{ 列})$ 。内側の数	7-1
	がちがうと、かけられない	7-3
積の意味	$AB\vec{x} = A(B\vec{x})$ 。右の B が先、左の A があと	7-3
積のきまり	ふつう $AB \neq BA$ 。(AB)C = A(BC)。	7-3
	$AI = IA = A$	
転置	A^T は行と列を入れかえる。 $A^T = A$ なら対称。	7-1
	$(AB)^T = B^T A^T$	7-3
単位行列・零行列	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (何もしない変換)、O はすべて 0	7-1
		7-3
連立方程式	$2x + 3y = 420$ 、 $2x + y = 300$ なら $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix}$ 。 $A\vec{x} = \vec{b}$ (A は係数行列)	7-1

電気の箱の行列（四端子定数）（7-3・7-4・7-11）

箱の行列は「出口の組 (V_2, I_2) を入れると、入口の組 (V_1, I_1) が出てくる」向きです。箱をつなぐときは、入口側の箱を左から順にかけます。電気の本では、この 4 つの数を $A \cdot B \cdot C \cdot D$ とよびます。

直列の抵抗 R	並列の抵抗 R	直列のコイル L	並列のコンデンサー C
$\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$

どの箱も、行列式は 1 です。つないだ箱の行列式も $1 \times 1 = 1$ です（7-4）。

コイルの箱のあとに コンデンサーの箱（7-3）	$\begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$
長い送電線（7-11）	$\begin{pmatrix} \cosh \gamma \ell & Z_0 \sinh \gamma \ell \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{pmatrix}$ $\gamma = \sqrt{zy}, Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$

4 行列式と逆行列の公式

公式・きまり	式	章
2×2 の行列式	$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ （ななめにかけてひく）	7-4
意味	面積の倍率。マイナスは裏返し。0 なら 2 つの列が平行で、平らにつぶれる	7-4
積と数倍	$\det(AB) = \det A \times \det B$ 。 2×2 では $\det(kA) = k^2 \det A$	7-4
3×3 の行列式	3 本の矢印 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を列に並べると、 $a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$ （サラスの方法。 3×3 だけ）。体積の倍率	7-4

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
連立方程式と行列式	$\det A \neq 0$ なら答えは 1 つ。 $\det A = 0$ なら、答えがな いか、無数にある	7-4 7-5
ロボットの腕	$\det J = L_1 L_2 \sin \theta_2$ 。0 になる姿勢（腕がのびきる）が 特異姿勢	7-4
逆行列	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}。$ $A^{-1}A = AA^{-1} = I$	7-5
逆行列の作り方	①左上と右下を入れかえる ②右上と左下にマイナスをつける ③行列式でわる 作ったら、かけて I になるか確かめる	7-5
連立方程式の 答え	$A\vec{x} = \vec{b}$ の答えは $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ （左からかける）	7-5
順番	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	7-5
掃き出し法	係数と右辺を並べた表に、3 つの操作をして左を I にす る。右の列が答え ①ある行に、0 でない数をかける ②ある行から、ほかの行の何倍かをひく ③2 つの行を入れかえる	7-5
最小二乗法	正規方程式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ （ずれの矢印が、列のつくる 面に直角）	7-5

5 回転と座標の変換の公式

公式・きまり	式	章
回転行列	$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ （原点のまわりに左回りに θ ）。1 列め $= \vec{e}_x$ の行き先	7-6

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
90° 回す	$R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ 。 $R_{90}R_{90} = -I$	7-6
つなぐ	$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ (中に加法定理)。 $R(30^\circ)R(45^\circ) = R(75^\circ)$	7-6
もどす	$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^\top = R(-\theta)$	7-6
軸を回して見る	軸を θ 回して見ると $\vec{x}' = R(\theta)^\top \vec{x}$ (点は逆に回ったように見える)	7-6
2 本の腕	$\vec{p} = R(\theta_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} + R(\theta_1)R(\theta_2) \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}$	7-6
姿勢の角	$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ (ヨー ψ ・ピッチ θ ・ロール ϕ)。右から先にはたらく	7-7
機首の向き	R の 1 列め $(\cos \psi \cos \theta, \sin \psi \cos \theta, -\sin \theta)$	7-7
逆の回転	$R^{-1} = R^\top = R_x(-\phi)R_y(-\theta)R_z(-\psi)$ (順番も符号も逆)	7-7
同次変換行列	$A(\theta, L) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & L \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & L \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。左上が ³ 回転、 右の列が ³ 移動	7-7
腕をつなぐ	$T = A(\theta_1, L_1)A(\theta_2, L_2)$ (根もとが ³ 左)。 T の右の列が ³ 手の位置	7-7
3 次元	4×4 の $\begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (左上の R は 3×3 、右上の $\vec{p}$ は ³ たての 3 つ)	7-7
座標の変換	$\vec{p}_{\text{地面}} = R\vec{p}_{\text{機体}} + \vec{d}$, $\vec{p}_{\text{機体}} = R^\top(\vec{p}_{\text{地面}} - \vec{d})$	7-7

3 本の軸のまわりの回転 (7-7. 回らない軸の行と列は「1 と 0」)

x 軸のまわりに ϕ 回す (ロール)	$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$
y 軸のまわりに θ 回す (ピッチ)	$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$
z 軸のまわりに ψ 回す (ヨー)	$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

R_y だけ、 $\sin$ の符号が逆に見えます。 y 軸のまわりの+は「 z を x のほうへ」回すからです。 $\theta = 90^\circ$ を入れ、3 列めが (1, 0, 0) になるかで確かめます (7-7)。

6 固有値・対角化・くり返しの公式

公式・きまり	式	章
固有値・固有ベクトル	$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$)。かけても向きが変わらない矢印 $\vec{v}$ と、その倍率 λ	7-8
特性方程式	$\det(A - \lambda I) = 0$ 。2 × 2 なら λ の 2 次方程式	7-8
求め方	①対角成分から λ をひいた $A - \lambda I$ を作る ② $\det(A - \lambda I) = 0$ を解いて、固有値を出す ③固有値を 1 つずつ $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ に入れ、 x と y の関係を出す ④簡単な $\vec{v}$ を答え、 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をかけて確かめる	7-8
確かめの式	$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$, $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$	7-8
振動モード	$\ddot{x} = Bx$ では、形は固有ベクトル、固有値は $-\omega^2$ 。 $\omega = \sqrt{-\lambda}$	7-8
6-12 の s	$\dot{x} = Ax$ に $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ を入れると $A\vec{v} = s\vec{v}$ 。 s は固有値	7-8
対称な行列	固有値は実数、固有ベクトルは直交する	7-8

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
軸を変えて見る	$\vec{x} = P\vec{q}$, $\vec{q} = P^{-1}\vec{x}$ (P は固有ベクトルを列に並べた行列)	7-9
対角化	$P^{-1}AP = D$, $A = PDP^{-1}$ (D は固有値を対角に並べた行列)。固有ベクトルが 2 本あるときだけ	7-9
対称な行列の対角化	長さを 1 にした固有ベクトルの回転行列 R で $R^T AR = D$	7-9
何回もかける	$A^n = PD^n P^{-1}$ 。 D^n は対角成分を n 乗するだけ	7-9 7-10
くり返し	$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ なら $\vec{x}_n = A^n\vec{x}_0$ 。 $A^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$	7-10
等比級数	$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ ($ x < 1$ のときだけ)	7-10
複素数の固有値	$\lambda = re^{j\theta}$ なら $\lambda^n = r^n e^{jn\theta}$ (大きさ r^n 、回る角 $n\theta$)	7-10
オイラー法	1 歩の行列 $\vec{x}_{n+1} = (I + A\Delta t)\vec{x}_n$ 。固有値は $1 + \lambda\Delta t$ (ほんとうは $e^{\lambda\Delta t}$)。こわれない条件 $ 1 + \lambda\Delta t < 1$	7-10

固有値で、動きがわかる (7-8・7-10)

微分方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ (7-8)		くり返し $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ (7-10)	
固有値の実部で決まる		固有値の大きさ $ \lambda $ で決まる	
負の実数	ゆれずに小さくなる	$ \lambda < 1$	0 に近づく (消える)
0	変わらない	$\lambda = 1$	その向きの部分が残る
正の実数	どんどん大きくなる	$ \lambda > 1$	ふえていく
複素数 (実部が負)	ゆれながら小さくなる	負の実数	向きが毎回入れかわる
複素数 (実部が 0)	同じ大きさでゆれ続ける	複素数	回りながら (大きさは $ \lambda ^n$)

何回もかけると、大きさ $|\lambda|$ がいちばん大きい固有値の固有ベクトルの向きにそろいます (べき乗法。

7-8・7-10)。第 9 巻の制御では、固有値が全部「左半分」(実部が負)にあるように機械を作ります。

7 表計算・Python の使い方

表計算の行列は A2 から（1 行めは見出し）、ベクトルはそのすぐ右の列、答えはさらにその右の列に置きます（7-1 の型）。

すること	書き方（例）	意味・答え	章
行列×ベクトル （表計算）	=MMULT(A2:B3,C2:C3)	D2:D3 に出る （左の範囲、右の範囲 の順）	7-1
行列×行列 （表計算）	=MMULT(A2:B3,C2:D3)	E2:F3 に出る	7-1
転置	=TRANSPOSE(A2:B3)	行と列を入れかえる	7-1
行列式	=MDETERM(A2:B3)	主役の行列なら 3	7-4
逆行列で解く （表計算）	=MMULT(MINVERSE(A2:B3),C2:C3)	3-6 の回路なら 2、 0.5	7-5
最小二乗法	=LINEST(B2:B8,A2:A8)	1.4893、0.0321 （ y の範囲が先）	7-5
回転行列	=COS(RADIANS(F2)) =-SIN(RADIANS(F2))	F2 に角（度）	7-6
$P^{-1}AP$	=MMULT(MMULT(MINVERSE(A2:B3), C2:D3),A2:B3)	P は A2:B3、 A は C2:D3	7-9
行列を作る （Python）	import numpy as np A = np.array([[2, 1], [1, 2]])	1 行ずつ [] でく くる	7-1
積	A @ x、A @ B	* は成分ごとの積	7-1
転置・単位行列	A.T、np.eye(2)		7-1
行列式	np.linalg.det(A)	3（2.999… と出る）	7-4
逆行列	np.linalg.inv(A)		7-5
連立方程式	np.linalg.solve(A, b)	$A\vec{x} = \vec{b}$ の $\vec{x}$	7-5

つぎのページへつづく

すること	書き方（例）	意味・答え	章
最小二乗法	<code>np.linalg.lstsq(A, y, rcond=None)[0]</code>	a, b	7-5
度をラジアンに	<code>np.radians(30)</code>	<code>np.cos</code> はラジアン	7-6
固有値と固有ベクトル	<code>w, V = np.linalg.eig(A)</code>	w に固有値 V の列に固有ベクトル	7-8
固有値だけ・大きさ	<code>abs(np.linalg.eigvals(G))</code>	大きさ $ \lambda $	7-10
n 乗	<code>np.linalg.matrix_power(A, 5)</code>	$A ** 5$ は成分ごと	7-10

- 表計算の確定のしかた：新しい Excel (Microsoft 365) や Google スプレッドシートでは、答えの左上のセルに式を入れて Enter を押すと、答えが自動で広がります。広がらないソフト（古い Excel や LibreOffice）では、先に答えのマス全部をえらんでから式を入れ、Ctrl + Shift + Enter で確定します（7-1）。
- 大きさが合わないときや、範囲に空いたセルがあるときは #VALUE!、行列式が 0 で逆行列がないときは #NUM! と出ます。Python では LinAlgError: Singular matrix と出ます（7-1・7-5）。
- 2.9999999999999996 は、2 進法で計算したときのごくわずかなずれです。行列式は 3 です。round(np.linalg.det(A), 6) で 3.0 になります（7-4）。
- 3.+0.j は「虚部が 0 の複素数」で、3 のことです。numpy 2.0 より新しい版では、固有値はいつも複素数の形で出ます（7-8）。
- numpy の固有ベクトルは列（たて）に並び、長さが 1 にそろえてあります。 $0.70710678 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ です。向きが反対でも、同じ直線の上なら同じ固有ベクトルです（7-8）。
- ベクトルは np.array([120, 60]) と横に書き、表示も [420 300] と横 1 行ですが、中身は数学のたて書きの列ベクトルと同じです（7-1）。

プログラムのひな形 (7-5・7-8)

上は 3-6 の回路の連立方程式 (行列式と、solve の答え $I_1 = 2\text{ A}$ 、 $I_2 = 0.5\text{ A}$)。下は主役の行列の固有値と固有ベクトル (v の 1 列めが固有値 3 の組)。左がプログラム、右が実行結果です。数を入れかえれば、ほかの行列にも使えます。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[4, 2],
              [2, 4]])
b = np.array([9, 6])
print(np.linalg.det(A))
x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)
```

実行結果

```
12.0
[2.  0.5]
```

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 1],
              [1, 2]])
w, V = np.linalg.eig(A)
print(w)
print(V)
```

実行結果

```
[3.+0.j 1.+0.j]
[[ 0.70710678+0.j -0.70710678+0.j]
 [ 0.70710678+0.j  0.70710678+0.j]]
```

8 専門書の書き方との対応

大学の本では、同じものを別の記号やことばで書きます。各章の「専門書をのぞいてみよう」で読みかえたものを集めました。

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
太字の $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{x}$	細字の行列 A 、矢印のベクトル $\vec{x}$	7-2 7-11
$A = (a_{ij})$	成分が a_{ij} の行列 A	7-1
${}^tA$	転置 A^T	7-1 7-6

つぎのページへつづく

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
E	単位行列 I	7-1 7-5
$ A $ 、 $ A - \lambda E $	行列式 $\det A$ 、 $\det(A - \lambda I)$	7-4 7-8
写像、線形写像、一次変換	行列をかける変換（入れると出てくる機械）	7-2 7-6
$\mathbb{R}^2$ 、 $\mathbb{R}^n$	2 つの数の組（平面の点）全部、 n 個の実数の組の全体	7-2 7-11
n 次正方行列	たて・横 n 個ずつの行列	7-8
零ベクトル	$\vec{0}$	7-8
標準基底 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$	物差しの矢印 $\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y$	7-2
固有方程式	特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$	7-8
正則	逆行列がある	7-5
ガウスの消去法	掃き出し法	7-5
主応力、主方向	応力の行列の固有値、固有ベクトルの向き	7-8
一次独立（2 本のとき）	平行でない	7-9
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$	固有値を対角に並べた対角行列 D	7-9
直交行列	回転（や裏返し）の行列。 $R^T = R^{-1}$	7-9
二端子対回路、縦続接続	入口 2 本・出口 2 本の箱、箱をくさりのようにつなぐこと	7-3
四端子定数 A 、 B 、 C 、 D ($\mathbf{F}$ 行列)	箱の行列の 4 つの数（行列の名前ではない）	7-3
${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ 、 ${}^0\mathbf{T}_n$	1 本の腕の $A(\theta_i, L_i)$ 、つないだ全体の T	7-7
ZYX オイラー角	$R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ の順の姿勢の角	7-7
差分方程式、前進オイラー法の h	漸化式、ふつうのオイラー法の Δt	7-10

できるようになったことチェック表

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、次の巻に進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
7-1	数の表を行列として読み、成分 a_{ij} を言える。和・差・実数倍を計算できる。	26	☐	☐
	行列×ベクトル・行列×行列を、行と列をなぞって計算できる。	31	☐	☐
	連立方程式を $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書き、表計算や Python で確かめられる。	33	☐	☐
7-2	行列×ベクトルを、行と列をなぞって計算できる。	69	☐	☐
	列（物差しの矢印の行き先）から、絵の変わり方を読みとり、行き先から行列を作る。	72	☐	☐
	ヤコビ行列や応力の行列を、「入れると出てくる機械」として計算できる。	81	☐	☐
7-3	行列×行列を、行と列の内積で計算できる。	109	☐	☐
	変換をつなぐと積になり、順番で結果が変わることを説明できる。	110	☐	☐
	電気の箱をつないだ回路を、行列の積で計算できる。	114	☐	☐
7-4	方眼で面積を数え、 $ad - bc$ で行列式を計算できる。	143	☐	☐
	行列式のマイナス（裏返し）と 0（平らにつぶれる）の意味がわかる。	147	☐	☐
	3×3 の行列式をサラスの方法で計算し、工学の行列式を読める。	152	☐	☐
7-5	2×2 の逆行列を作って確かめ、 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ で連立方程式を解ける。	188	☐	☐
	掃き出し法で、3 つの文字の連立方程式と逆行列を求められる。	201	☐	☐
	正規方程式 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ で、最小二乗法の直線を求められる。	210	☐	☐
7-6	回転行列 $R(\theta)$ を作り、点や図形を回せる。	241	☐	☐
	$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ と $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T$ を使える。	248	☐	☐
	軸を回して点や力を見たり、腕の手の位置を求めたりできる。	253	☐	☐
7-7	3 本の軸のまわりの回転を $R_x \cdot R_y \cdot R_z$ で表し、点を回せる。	280	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
	ロール・ピッチ・ヨーから機首の向きを求め、順番で向きが変わることを説明できる。	285	☐	☐
	同次変換行列で、腕の手の位置やカメラで見た物の位置を求められる。	289	☐	☐
7-8	行列をかけても向きが変わらない矢印を、図と表計算でさがせる。	316	☐	☐
	$A\vec{v}$ を計算して固有ベクトルを確かめ、振動モードが固有ベクトルだと説明できる。	320	☐	☐
	特性方程式で固有値と固有ベクトルを求め、6-12 の s と同じものだと確かめられる。	328	☐	☐
7-9	固有ベクトルの物差しで見ると「のびるだけ」になることを、図で説明できる。	357	☐	☐
	P と D を作り、 $P^{-1}AP = D$ を計算で確かめられる。	360	☐	☐
	対角化で A^n を計算したり、台車の式をモードの座標でほどいたりできる。	367	☐	☐
7-10	同じ行列を何回もかけて、点の向かう先を表計算と図で調べられる。	390	☐	☐
	倍々のくり返しと、等比級数の合計を計算できる。	397	☐	☐
	固有値の大きさで行き先を見分け、ばねがふくらむわけを説明できる。	409	☐	☐
7-11	ロボットの腕を、ヤコビ行列の逆行列で目標へ近づけるしくみを説明できる。	433	☐	☐
	ばねの網と抵抗の網、箱をつないだ回路を、行列で書ける。	437	☐	☐
	長い電線が $\cosh \cdot \sinh$ の行列になるわけを、箱のくさりとして読める。	439	☐	☐

つぎの巻へ

たくさんの数を、表のまま計算する道具がそろいました。第8巻「空間に広がる量」では、空間のどの点にも矢印がある量を、微分と積分で読みときます。7-2 のヤコビ行列と 7-4 の行列式が、その入口です。

8-3 全微分：少し動いたときの変化

ななめに少し進むと、高さはどれだけ変わる？

使う道具 ヤコビ行列 J と行列 $\times$ ベクトル (7-2)。

8-4 いちばん急な向き：勾配 grad

ボールが転がる向きは、等高線と直角

使う道具 行と列の内積 (7-3)。内積が 0 なら直角。

8-5 ベクトル場

空間の点ごとに、矢印を 1 本ずつ

使う道具 3 次元の回転と座標の変換 (7-7)。

8-6 面や立体でたし合わせる：重積分

厚さがちがう板の重さを求める

使う道具 行列式は面積の倍率 (7-4)。ヤコビ行列の行列式も使う。

8-10 うず：回転 rot

小さな風車を置くと、回るかな？

使う道具 外積 (4-14) と、 3×3 の行列式 (7-4)。

8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式

金属の棒に熱が広がるようすを、表計算で再現する

使う道具 1 歩の行列のくり返しと、こわれない条件 (7-10)。

この巻の道具は、この先でこう使う

第7巻の章と、その道具を使う第8巻から先の章です（章のはじめの「道しるべ」の「この巻の先に」から集めました）。

この巻の章	この道具を使う章
7-2 行列×ベクトル：形を変える機械	8-3 全微分：少し動いたときの変化
7-3 行列×行列：変換をつなぐ	8-4 いちばん急な向き：勾配 grad
7-4 行列式：面積が何倍になるか	8-3 全微分：少し動いたときの変化 8-6 面や立体でたし合わせる：重積分
7-5 逆行列で連立方程式を解く	9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式
7-7 3次元の回転と座標の変換	8-5 ベクトル場
7-8 固有値と固有ベクトル：向きの変わらない方向	9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 9-11 行列の指数関数と固有値
7-9 対角化：まっすぐな方向に分けて考える	9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 9-11 行列の指数関数と固有値
7-10 行列のくり返し：漸化式とオイラー法を行列で	8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式 9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 9-11 行列の指数関数と固有値
7-11 行列の使いみち	8-3 全微分：少し動いたときの変化 9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 9-11 行列の指数関数と固有値 9-12 フーリエとラプラスの使いみち



デルタ

第7巻の行列は、第8巻・第9巻・物理シリーズでずっと使うよ。自信のない章を見なおしてから、第8巻へ進もう！

さくいん

数字はページです。その語がはじめて出てくるページや、くわしく説明しているページをのせています。

あ

一次変換	77
オイラー角	285

か

回転行列	243
基底	365
逆運動学	433
逆行列	192
行列	11, 27
行列式	145
結合法則	113
固有値	318
固有ベクトル	318

さ

座標の変換	254
サラスの方法	154
軸を変えて見る	361
ジンバルロック	289
正規方程式	213
正則	194
成分（行列の）	28
積（行列の）	106
漸化式	390
線形写像	77

た

対角化	364
対角行列	360

単位円（固有値の）	404
単位行列	43, 113
直交行列	252
転置	40
同次座標	290
同次変換行列	291
等比級数	400
等比数列	399
特異姿勢	160
特性インピーダンス	441
特性方程式	330

は

掃き出し法	202
分布定数回路	439
ページランク	443
べき乗法	325
変換	72

ま

マルコフ連鎖	393
--------------	-----

や

ヤコビ行列	84
余因子展開	156
四端子定数	117

ら

列ベクトル	29
ロール・ピッチ・ヨー	278

物理を理解するための数学 第7巻

まとめて計算する

編者	「物理を理解するための数学」編集委員会
委員長	小学校長（まとめ役）
委員	数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・ 半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、 特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭
デザイン	ユニバーサルデザイン担当委員
挿絵	イラスト担当委員
版	第1版（第14回編集委員会） 2026年10月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

第7巻 まとめて計算する 行列

この巻で学ぶこと

- 第1部 行列の計算 (7-1~7-5)
- 第2部 回転と座標の変換 (7-6~7-7)
- 第3部 固有値と行列の使いみち (7-8~7-11)

全9巻のならび

- 1 かぞえる・はかる
- 2 数と量のことば
- 3 関数とデータ きまりを見つける
- 4 形と向き 図形・三角関数・ベクトル
- 5 変化をつかむ 微分と積分
- 6 未来を計算する 微分方程式と複素数
- 7 まとめて計算する 行列
- 8 空間に広がる量 ベクトル解析
- 9 波と変化を読みとく フーリエ解析とラプラス変換

たくさんの数を、表
のまま計算しよう

