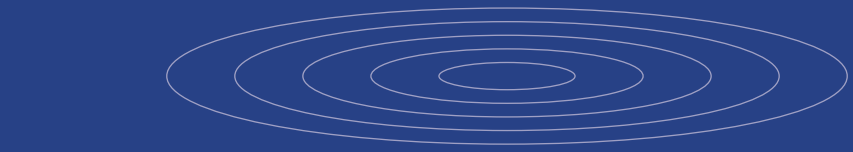
物理を理解するための数学

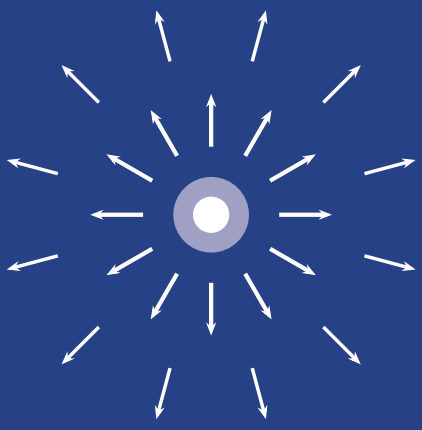
第8巻

空間に広がる量

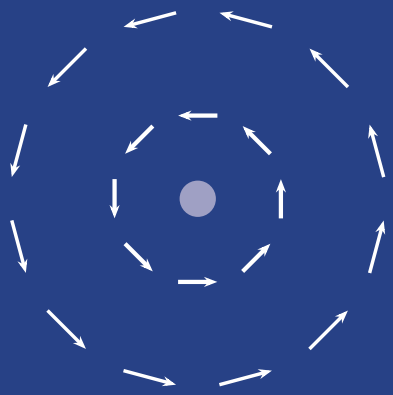
ベクトル解析

空間に広がる量を、矢印で読みとこう





div



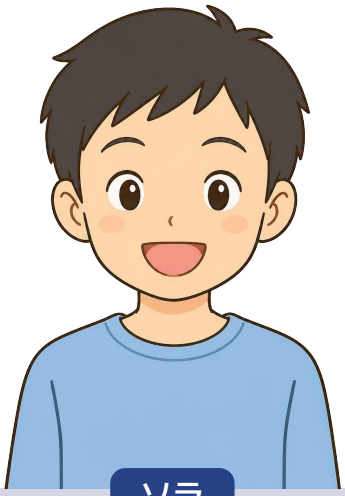
rot

1 2 3 4 5 6 7 8 9

全 9 巻　物理を理解するための数学

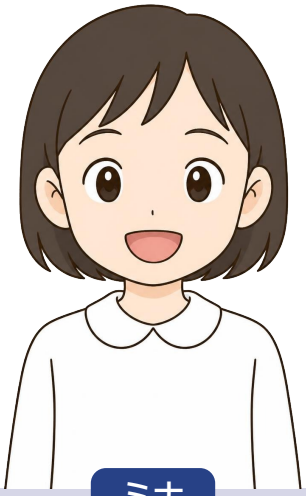
「物理を理解するための数学」編集委員会 編

いっしょに学ぶなかま



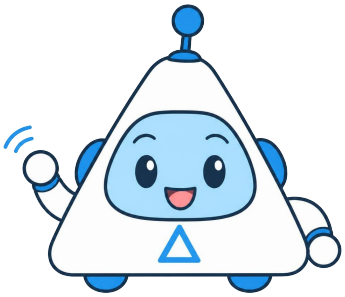
ソラ

「なぜ？」と聞くのが
大好き。
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。
手を動かして考える。



デルタ

計算と記録がとくいな
ロボット。名前は
「変化」を表す
記号Δから。

こまったら、3 人のことばをヒントにしよう。

物理を理解するための数学

第 8 巻

空間に広がる量

ベクトル解析

空間に広がる量を、矢印で読みとこう

7 本の路線が、この本を通っています

「物理を理解するための数学」編集委員会編

もくじ　第 8 巻　空間に広がる量

△＝路線（P.4・5）　★☆☆☆☆＝内容の高さ（★は必ず、☆の所まで）　P.8 ＝ 8 ページ

序章　空間のどこにも矢印がある　★★★☆☆　P.8
天気図の風も、磁石のまわりも矢印でいっぱい

第 1 部　たくさんの変数の微分　P.28

8-1　地図と等高線：2 つ以上の変数の関数　★★★★☆　P.30
場所を決めると、高さが 1 つ決まる

8-2　偏微分：ほかを止めて 1 つだけ動かす　★★★★☆　P.64
東へ進むときの坂と、北へ進むときの坂

8-3　全微分：少し動いたときの変化　★★★★★　P.100
ななめに少し進むと、高さはどれだけ変わる？

8-4　いちばん急な向き：勾配 grad　★★★★★　P.138
ボールが転がる向きは、等高線と直角

第 2 部　ベクトル場と積分　P.174

8-5　ベクトル場　★★★★☆　P.176
空間の点ごとに、矢印を 1 本ずつ

8-6　面や立体でたし合わせる：重積分　★★★★★　P.202
厚さがちがう板の重さを求める

8-7　道にそってたす：線積分　★★★★★　P.252
遠回りすると、仕事は変わる？

8-8　面を通りぬける量：面積分と流束　★★★★★　P.294
あみの向きで、通りぬける水の量が変わる

第 3 部　発散と回転　P.348

8-9　わき出しと吸いこみ：発散 div　★★★★★　P.350
小さな箱から、どれだけ出ていく？

8-10 うず：回転 rot ★★★★★ P.396
小さな風車を置くと、回るかな？

8-11 中と外をつなぐ：ガウスの定理とストークスの定理 ★★★★★ P.440
中のわき出しを全部たすと、外へ出る量になる

8-12 ならす働き：ラプラシアン ★★★★★ P.492
まわりの平均との差が、変化を決める

第 4 部 偏微分方程式 P.530

8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式 ★★★★★ P.532
金属の棒に熱が広がるようすを、表計算で再現する

8-14 div と rot で書かれた式を読もう [読みもの] ★★★★★ P.572
電気と磁気の 4 つの式を、「わき出し」と「うず」で読む

こたえ P.590　記号カード P.606　よく使う定数・単位・公式 P.612
できるようになったことチェック表 P.629　つぎの巻へ P.632　さくいん P.634

この本の路線図

この本の章は、7 本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるかを確かめよう。

①変化　ひき算→傾き→微分

この巻の駅：8-1、8-2、8-3、8-4、8-12、8-13

②たし合わせ　かけ算→面積→積分

この巻の駅：8-6、8-7、8-8、8-11

③倍々　累乗→指数→ e

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

④回転と波　角→ sin →複素数

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

⑤表　九九の表→行列

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

⑥矢印　向き→ベクトル→場

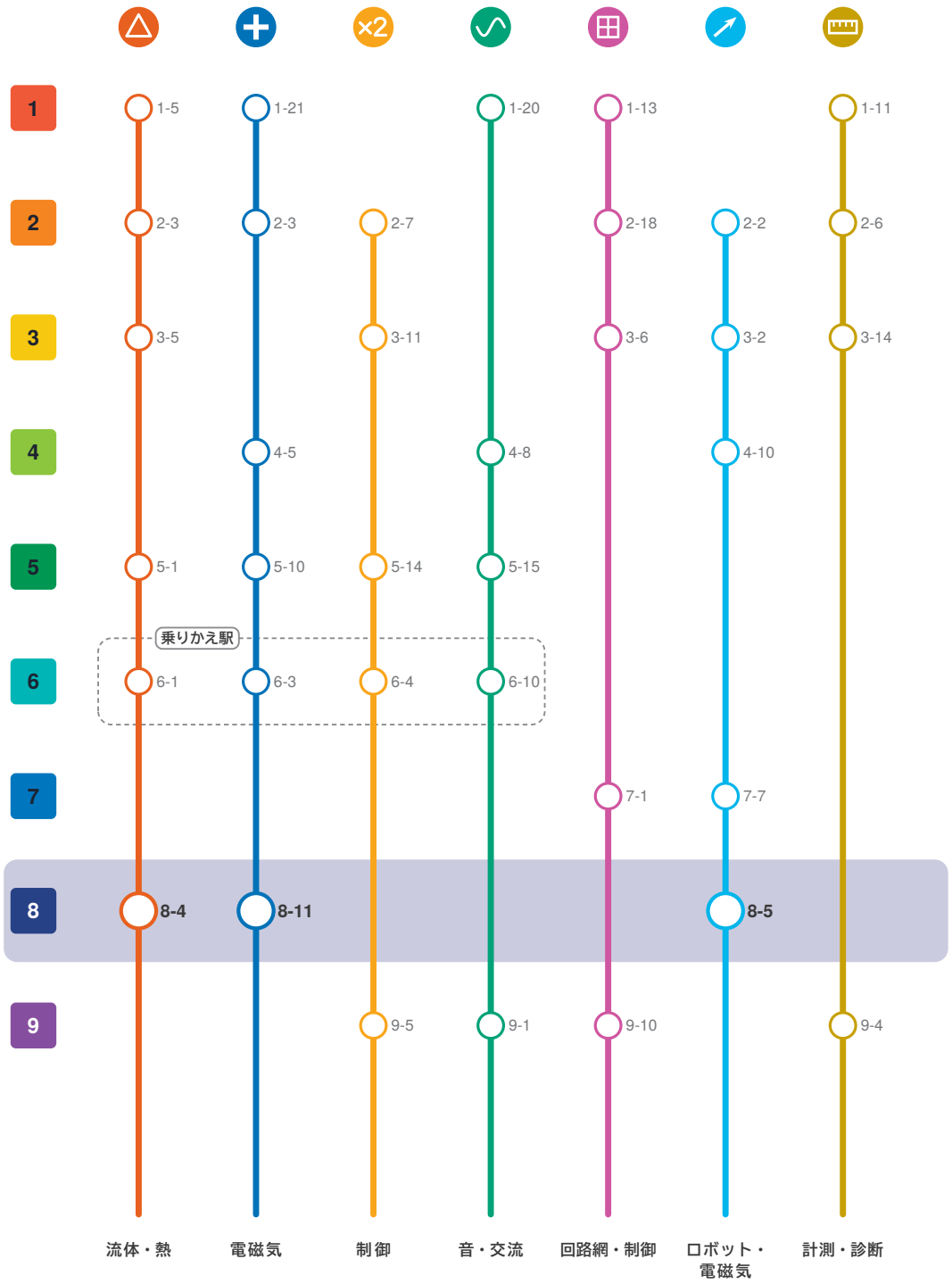
この巻の駅：8-5、8-9、8-10、8-14

⑦はかる　目もり→誤差→統計

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

全９巻の路線図

下へ行くほど先の巻。色の帯がこの巻です。

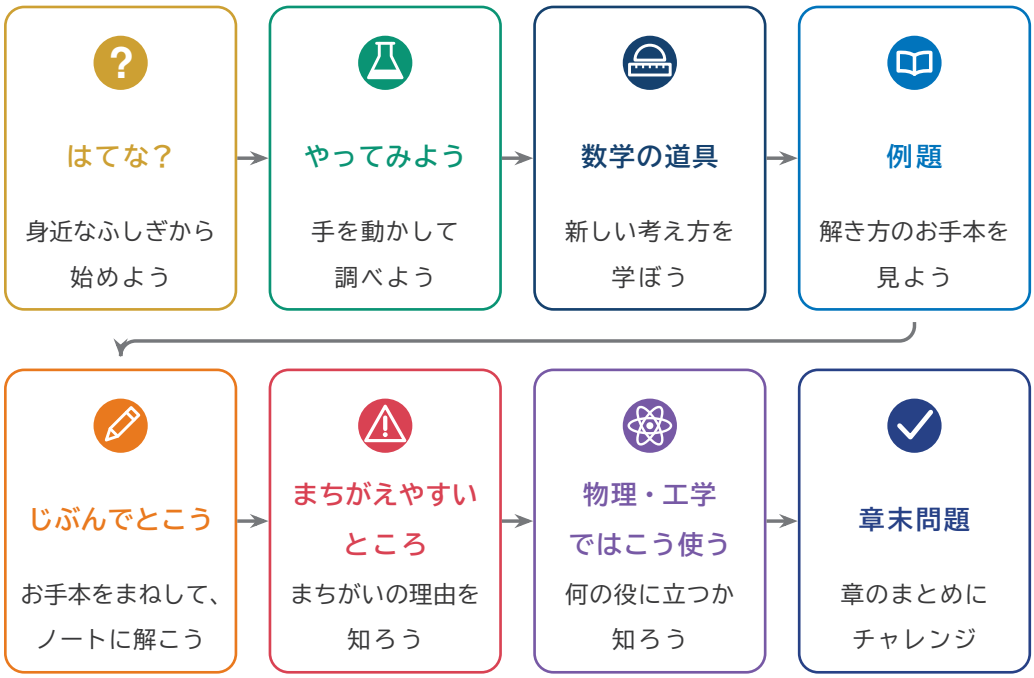


終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第 6 巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

❶ 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

❷ 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

道しるべ　この章の前に 1-14 2-2　この章の先に 3-5 5-9

前に読んでおくとよい章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

❸ ★は「どこまで登るか」のしるし

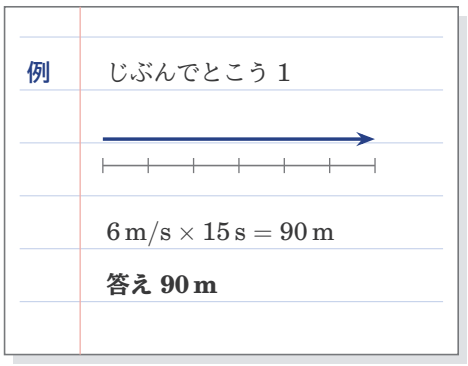
章と小見出しには★がついています。★の数は、内容の高さ。山登りにたとえると、★１つは「はじめの一歩」、★５つは「頂上」です。

白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登る」というしるし。自分の読める★まで読んで、先へ進んでもだいじょうぶ。

❹ ノートを１冊用意しよう

「じぶんでとこう」と章末問題は、ノートに解きます。本には書きこまないので、何度でもやり直せます。

問題の番号を書き、図をかいてから式を書こう。答えには単位をつけます。



❺ この本の３つのやくそく

1. 数には、いつも単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
2. 式を書く前に、表や図をかいて考えよう。
3. くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。

問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

第 8 巻　空間に広がる量

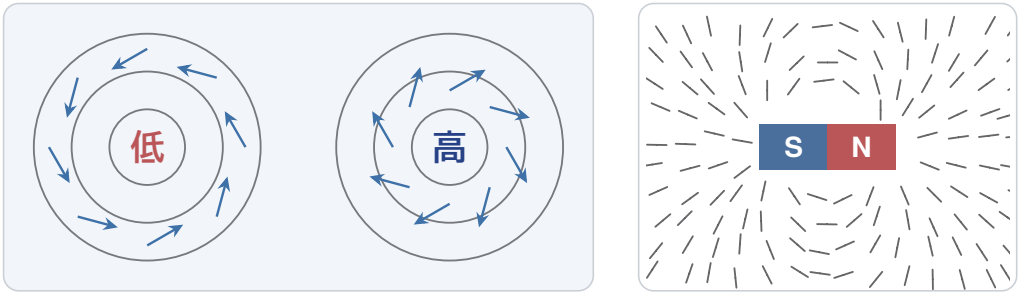
★★★

序章

空間のどこにも矢印がある

テレビやスマホの天気予報では、日本の地図の上に、たくさんの矢印が並んだ画面を見ることがあります。矢印は、その場所に吹いている風の向きと強さです。地図のどの場所にも、矢印が 1 本ずつかいてあります。

理科の実験で、棒磁石の上に紙をしいて、砂鉄をまいたことがあるでしょう。紙を軽くたたくと、砂鉄は細い線になって並び、N 極から S 極へ向かう模様ができます。この模様も、紙のどの場所でも「向き」が 1 つ決まっています。



天気図の風（北半球）　　棒磁石のまわりの砂鉄

図 1　左：低気圧と高気圧のまわりの風（青い矢印）と等圧線（黒い円）。右：棒磁石のまわりに並んだ砂鉄。どちらも、場所ごとに向きが 1 つ決まっている。

風の矢印も、砂鉄の並ぶ向きも、目には見えない「空気の流れ」や「磁石の力」を、場所ごとの矢印で表したものです。

? はてな？

天気図の風の矢印と、磁石のまわりの砂鉄の模様。どちらも「場所ごとに矢印が 1 本」あります。

この矢印の地図から、何が読みとれるかな？ 低気圧の中心や、高気圧の中心の場所は、矢印だけからわかるかな？

この巻の主役は、このような「**場所ごとに決まる量**」です。場所ごとに数が 1 つ決まるもの（気温・高さ）と、場所ごとに矢印が 1 本決まるもの（風・磁石の力）があります。序章では、まず自分で「場所ごとの量」の表を作ってみます。そのあとで、この巻の地図と約束を見ていきます。大学の内容の巻ですが、1 回で分からなくても大丈夫です。図と数の表で手を動かせば、かならずわかるようになります。

やってみよう　気温の地図と、風の地図を作ろう

用意するもの　温度計（1 つでよい）、メジャー、細い棒（わりばしなど）の先に 20 cm ほどのすずらんテープをつけたもの、扇風機かエアコン

1. 部屋の床を、たて・横 1 m ごとのマスに分けて、方眼の地図をノートにかく。窓のある側を地図の上にする。
2. マスのまん中、床から 1 m の高さで気温をはかり、地図のマスに数を書く（温度計は、同じ場所に 2 分ほど置いてから読む）。
3. 扇風機（エアコン）をつける。同じマスで、すずらんテープの棒を床から 1 m の高さにかざし、テープがなびく向きを矢印でかく。強くなびくほど、長い矢印にする。
4. 2 つの地図をくらべよう。マスの中に書いたものは、どうちがうかな？

次の図は、冬の朝に、窓のある部屋で、エアコン（暖房）をつけてはかった例です。左の地図のマスには**数が 1 つ**、右の地図のマスには**矢印が 1 本**入っています。

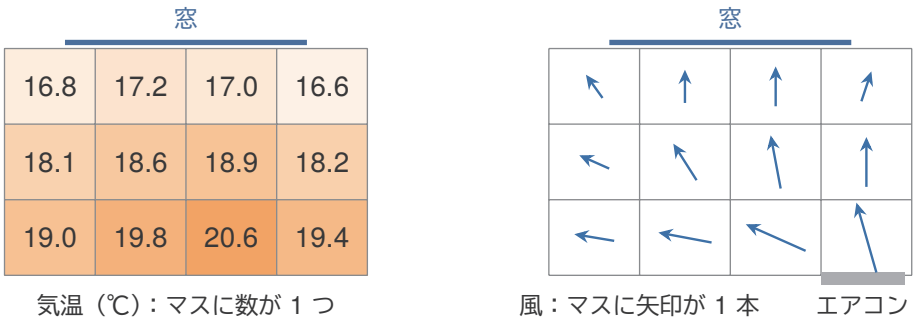


図 2　はかった例。左は気温（オレンジがこいほど暖かい）、右はすずらんテープがなびいた向き（矢印が長いほど強い）。エアコンは右下のかべの上のほうにある。

左の地図からは、窓に近い所ほど気温が低いことが読みとれます。右の地図からは、エアコンの風が上（窓のほう）へ向かい、左へ回っていくようすが読みとれます。マスの大きさを小さくしていくと、部屋の中の**すべての場所**に、数や矢印が決まっていると考えられます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 3-2　場所は、2 つの数の組（座標）$(x,\ y)$ で表せる。
- 3-5　グラフの傾きは「変化の速さ」。地図の等高線の間がせまい所ほど、坂は急。「東へ進むときと北へ進むときの傾きは、8-2 で学びます」。
- 4-10　向きと大きさをもつ量がベクトル（矢印 $\vec{F}$）。大きさだけで決まる量がスカラー。
- 4-13　空間の点は 3 つの数 $(x,\ y,\ z)$ で表せる。3 次元のベクトルの成分も 3 つ。
- 5-10　曲がった形の面積は、細い長方形に分けてたし、細かくした先の値（定積分）で求める。
- 7-7　座標の軸を回しても、矢印そのものは変わらない。成分の値だけが変わる。

場所ごとに決まる量

1 場所で決まる数と、場所で決まる矢印

やってみようの 2 つの地図のように、身のまわりには、「場所を決めると、何かが 1 つ決まる」量がたくさんあります。決まるものが数 1 つか、矢印 1 本かで、2 つの仲間に分けられます。

場所を決めると、数が 1 つ決まる	場所を決めると、矢印が 1 本決まる
山の高さ（標高）、気温、気圧	風の速さと向き（風速）
部屋の中の温度、水の深さ	川・管の水の流れの速さと向き
電位（電気の高さ）、明るさ	電場（電気の力）、磁場（磁石の力）
ものの密度（$1\,\mathrm{m}^3$ あたりの質量）	熱の流れ、重力

表 1　場所で決まる量の、2 つの仲間

場所ごとに数が 1 つ決まっている量を**スカラー場**（スカラーば）、場所ごとに矢印が 1 本決まっている量を**ベクトル場**（ベクトルば）といいます。「場」は、「場所ごとに決まっている量の全体」という意味のことばです。スカラーとベクトルは、4-10 で学んだことばです（大きさだけの量と、向きと大きさをもつ量）。

スカラー場は、場所を入れると数が 1 つ出てくる「入り口が 2 つ（または 3 つ）の関数」です。地図の上なら、東へ x〔m〕、北へ y〔m〕の場所を入れると、高さ h〔m〕が出てきます。8-1 で、この関数を地図の等高線と表で見ていきます。ベクトル場は、場所を入れると矢印が出てくる関数です。8-5 で、矢印の図にかいて見ていきます。

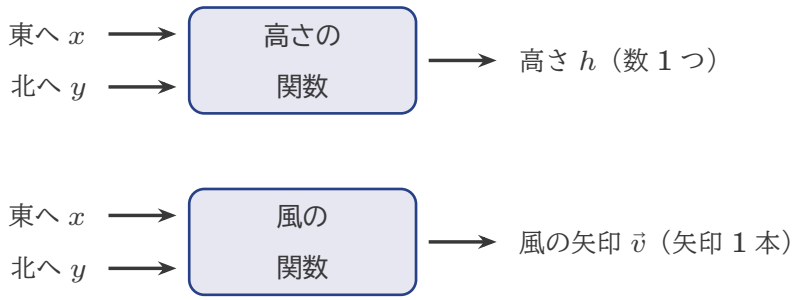


図 3　場所を入れると、数が 1 つ出てくる関数（上）と、矢印が 1 本出てくる関数（下）。3-3 の「入れると出てくる箱」の、入り口が 2 つになったもの。

② 矢印が、空間のすべての点に

第 4 巻では、1 本の矢印（ベクトル）を、たし算したり、内積・外積を計算したりしました。第 7 巻では、矢印を行列でのばしたり、回したりしました。どちらも、考えていた矢印は 1 本か 2 本でした。

この巻では、**空間のすべての点に、矢印が 1 本ずつ**ある場面を考えます。部屋の空気なら、床の近くにも、天井の近くにも、部屋のまん中にも、風の矢印があります。点の場所は 3 つの数 $(x,\ y,\ z)$ で表せるので（4-13）、矢印は 3 つの数を入れると決まる関数です。矢印の成分も 3 つあるので、ベクトル場は「3 つの数を入れると、3 つの数が出てくる関数」です。

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) = (F_x(x,\ y,\ z),\ F_y(x,\ y,\ z),\ F_z(x,\ y,\ z))$$

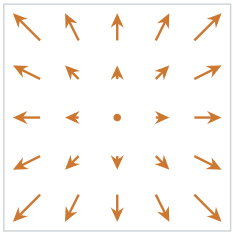
たとえば、$F_x(x,\ y,\ z)$ は、「点 $(x,\ y,\ z)$ にある矢印の、x の向きの成分」です。いまは、この式の形を覚えなくてもだいじょうぶです。8-5 で、まず平面（成分が 2 つ）でていねいに見てから、3 次元に広げます。

③ 矢印の地図から読みとれること

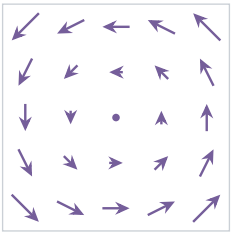
？はてな？の答え

図 1 の左の天気図では、低気圧のまわりの風が、左回りにうずを巻きながら中心へ吹きこんでいます。高気圧からは、右回りに外へ吹き出しています。右の砂

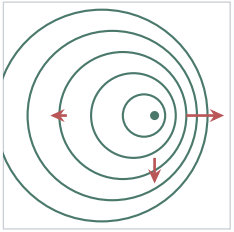
鉄は、N 極から出て、まわりこんで S 極へ入る線に並んでいます。矢印の地図から、とくに次の 3 つのことが読みとれます。



わき出す所
矢印が外へ広がる
（8-9 発散 div）



うずを巻く所
矢印がぐるりと回る
（8-10 回転 rot）



等高線がつまった所
急な向きに長い矢印
（8-4 勾配）

図 4　矢印の地図から読みとれる 3 つのこと。「等高線がつまった所」の絵は、頂上（緑の点）が右によった山の等高線。赤い矢印はボールの転がる向き（勾配 grad の反対の向き）で、線の間がせまい右ほど坂が急で、矢印が長い。

1. **矢印がわき出す所・吸いこまれる所**：高気圧の中心（空気が上からおりてきて、まわりへ広がる）や、プラスの電気をもったもの（電気の力の線がわき出す）、水をそそぐ口のまわり。8-9 で、「小さな箱から出ていく量」として数で表します（発散）。
2. **矢印がうずを巻く所**：低気圧や台風の中心。8-10 で、「小さな風車が回るかどうか」として数で表します（回転）。
3. **いちばん急な向き**：天気図の等圧線（気圧の等高線）のつまった所では、気圧の差が大きく、風が強くなります。8-4 で、「坂がいちばん急な向き」の矢印として表します（勾配）。

ただし、電荷や水をそそぐ口のように、矢印がわき出す・吸いこまれる「点」を見つけるには、矢印をよく見るだけでなく、まわりを囲んで出入りを数える方法が要ります。それが、8-9 と 8-11 の道具です。砂鉄の線は、N 極から出て S 極へ入るように見えますが、じつは磁石の中を通ってひとまわりし、輪になっています。磁石の力の矢印には、わき出しも吸いこみもありません（N 極だけの磁石はない。8-9・8-14）。

せいかくに言うと

天気図の風は、等圧線と直角に（気圧の高い所から低い所へまっすぐ）は吹きません。地球が回っているため、北半球では、動く空気は進む向きの右へそらされます（4-14 のコラム、コリオリの力）。そのため、上空の風は等圧線にほぼ平行に吹き、地上の風は、地面とのまさつで少し低気圧のほうへ曲がって、等圧線をななめに横切ります。図 1 の矢印は、この地上の風のようすをかいたものです。8-4 では、まず「気圧の傾きが空気を押す力」を、等圧線と直角な矢印として求めます。

コラム　天気予報のコンピュータは、何を計算している？

天気予報のコンピュータは、地球をつつむ空気を、たて・横・高さに細かいマス（格子）に分けています。マスの 1 つ 1 つに、気温・気圧・水蒸気の量という「数」と、風という「矢印」を持たせます。つまり、空気を、この章で見た「スカラー場」と「ベクトル場」として、数の表にしているのです。

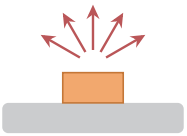
そして、「となりのマスとの気圧の差で、風がどう変わるか」「風に運ばれて、気温や水蒸気がどう動くか」を表す式を使って、少し先の時刻のマスの値を計算します。これを何千回もくり返して、明日やあさっての天気図を作ります。この計算に使う式は、場所と時間の両方で変わる量の式（偏微分方程式）です。8-13 では、同じ考え方で、金属の棒に熱が広がるようすを表計算で計算します。

4 ベクトル解析が働く場面

場所ごとの数や矢印を計算する道具は、身のまわりの製品を作るときに、毎日のように使われています。この巻で、次のような場面に何回も出会います。

8-4・8-13

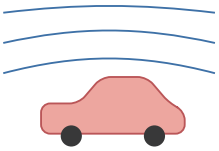
スマホの熱をにがす



熱い部品から、熱がどの向きにどれだけ流れるか（温度の勾配）を計算する。

8-5・8-14

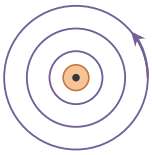
車のまわりの風



空気の流れの矢印を計算して、風の力が小さい形をさがす。

8-10・8-11

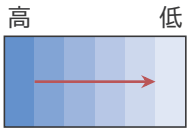
モーターと発電機



電流のまわりにできる磁場のうず（回転）で、回る力や電気を生み出す。

8-4・8-12

半導体の中の電気



電気の高さ（電位）の地図から、電子を動かす電場を計算する。

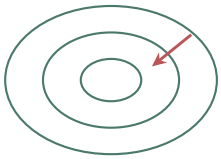
図 5　この巻の道具が働く 4 つの場面。「モーターと発電機」の絵は、紙の面から手前へ流れる電流（まん中の点）のまわりの磁場。

この巻の地図

5 4 つの部

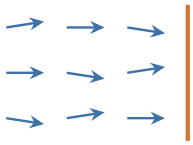
第 8 巻は、4 つの部に分かれています。どの章も大学（工学部の 1〜2 年）で学ぶ内容です。★★★★★の章は、「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」の 3 段に分けてあり、「ここまでで十分」の旗の所まで読めば、その章のゴールです（第 6 巻・第 7 巻と同じ）。

第 1 部　たくさんの変数の微分　8-1〜8-4



・場所で決まる高さを、地図の等高線と表で読む（8-1）。
・1 つだけ動かしたときの変わり方（偏微分 8-2）、ななめに少し動いたときの変化（全微分 8-3）。
・いちばん急な向きの矢印（勾配 grad 8-4）。

第 2 部　ベクトル場と積分　8-5〜8-8

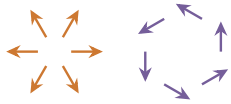


・場所ごとの矢印（ベクトル場 8-5）。
・面や立体でたす（重積分 8-6）。道にそってたす（線積分 8-7）。
・面を通りぬける量をたす（面積分 8-8）。

図 6　第 8 巻の 4 つの部（その 1）。第 1 部と第 2 部では、微分と積分の道具を作る。

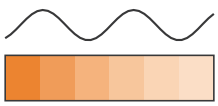
第 1 部で作る「1 つだけ動かして変わり方を見る」道具（偏微分）は、第 3 部の発散・回転の計算にそのまま使います。第 2 部で作る「タイルに分けてたす」道具（積分）は、第 3 部の 2 つの定理で、発散・回転とつながります。

第 3 部　発散と回転　8-9〜8-12



・わき出し（発散 div 8-9）と、うず（回転 rot 8-10）。
・中のわき出しと外へ出る量をつなぐ定理（8-11）。
・まわりの平均との差（ラプラシアン 8-12）。

第 4 部　偏微分方程式　8-13〜8-14



・棒に広がる熱、弦を伝わる波の式を、表計算で解く（8-13）。
・電気と磁気の 4 つの式・流れの式を、「わき出し」と「うず」のことばで読む（8-14）。

図 7　第 8 巻の 4 つの部（その 2）。第 3 部と第 4 部では、作った道具を組み合わせて、物理の式を読む。

第 4 部では、それまでの道具を全部使って、熱や波や電気の式を読みます。8-14 を読み終えると、電気と磁気の基本の式（マクスウェル方程式）が、「どこでわき出し、どこでうずを巻くか」を述べた式として読めるようになります。

この巻の約束：積分の「名前」と、実際にすること

6 記号は「操作の名前」。計算は、ふつうの定積分で

第 5 巻の定積分は、細い長方形に分けてたし、細かくした先の値でした。この巻では、たし合わせる場所が**面・立体・道・曲がった面**に広がり、新しい積分の記号が出てきます。

名前（記号）	ふつうの定積分に直すと
$\iint_D f\,\mathrm{d}A$　$\iiint_V f\,\mathrm{d}V$	場所を 2 つ（3 つ）の数で表し、定積分を 2 回（3 回）（8-6）
$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	道を 1 つの数で表し、定積分を 1 回（8-7）
$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$	面を 2 つの数で表し、重積分に（8-8）
$\oint_C$　$\oiint_S$	上と同じ。◯は「閉じている」という印（8-7・8-8・8-11）

表 2　積分の名前と、ふつうの定積分に直した形（くわしくは、それぞれの章で）

これらの記号は、どれも「**タイルに分けて、1 枚ずつ量をかけて、たし合わせ、タイルを細かくした先**」という**操作の名前**です。記号を見ただけでは、まだ計算できません。実際の値は、場所を数で表して、第 5 巻の**ふつうの定積分**（のくり返し）に直して求めます。$\int$ の数は場所を表す数の数（道は 1 つ、面は 2 つ、立体は 3 つ）、◯は円の形ではなく「1 周する・すっぽりつつむ」という印です。この巻では、点線の枠を「名前」、実線の枠を「ふつうの定積分」の印にします（8-6 の板の重さ）。

$$\underbrace{\iint_D \sigma\,\mathrm{d}A}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^2 (10+5x+2y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}}$$

どう直すかは、面や道の形によって場合ごとにちがいます。そこで、積分の章（8-6・8-7・8-8・8-11）では、どの積分も次の 3 つの段で考え、「こんなときは、

こうする」という**場合分けの表**と**流れ図**を置きます。巻末の「積分の地図」に、全部の場合をまとめます。

①名前の段　何を・どこで・1 枚の量は何か、を記号から読む。

②直す段　場所を数で表し、範囲を決めて、ふつうの定積分を 1〜3 回計算する。

③楽をする段　楽な道（対称性・分ける・定理・表計算）をさがす。閉じた面や道は、答えが変わらない範囲で、計算が楽な形に取りかえてよい（8-11）。②の計算を始める前に確かめる。

この巻の主役

7 主役の山

この巻の前半には、主役の山が出てきます。頂上の高さは 100 m で、頂上から東へ x〔m〕、北へ y〔m〕の所の高さ h〔m〕が、次の式で決まる山です。

$$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$$

たとえば、頂上から東へ 30 m、北へ 20 m の点 $(30,\ 20)$ の高さは、$x = 30$、$y = 20$ を入れて

$$h = 100 - 0.01 \times 30^2 - 0.02 \times 20^2 = 100 - 9 - 8 = 83$$

なので、83 m です。$0.01x^2$ と $0.02y^2$ は「頂上からはなれるほど、どれだけ低くなるか」を表します。y^2 の前の数のほうが大きいので、北や南へ進むほうが、東や西へ進むより早く低くなります（北の坂のほうが急）。

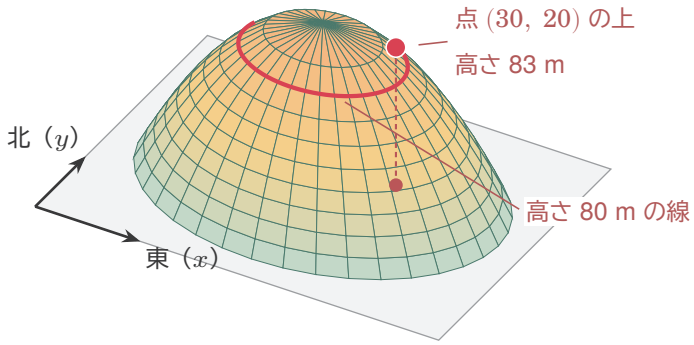


図 8　主役の山を、南東の空から見下ろした図（鳥かん図）。横の輪は 10 m ごとの高さの線。赤い輪は高さ 80 m の線。点線は、山の中をかくれて通る線。

この 1 つの山を、章ごとにちがう目で見ていきます。

章	見る目	主役の山の点 $(30,\ 20)$ では
8-1	地図と等高線	高さ 83 m。等高線はだ円になる
8-2	東の坂・北の坂	東へ 1 m で約 0.6 m、北へ約 0.8 m 下がる
8-3	ななめに少し動く	東と北へ 1 m ずつで、約 1.4 m 下がる
8-4	いちばん急な向き	等高線に直角な向きがいちばん急（坂は 1）。頂上への向きとは少しずれる
8-6	山の体積	山全体の土の量は、約 $1.11 \times 10^6\ \mathrm{m}^3$
8-7	登る仕事	50 kg の人が登る仕事は、どの道でも 8330 J
8-12	まわりとの差	どこでも「まわりの平均より高い」（山の形）

表 3　主役の山の、章ごとの顔（くわしくは、それぞれの章で）

8 主役の 6 つの場

この巻の後半には、平面の上の 6 つのベクトル場が、主役として何回も出てきます。どれも、点 $(x,\ y)$ に矢印 $\vec{F} = (F_x,\ F_y)$ を 1 本ずつ置いたものです。

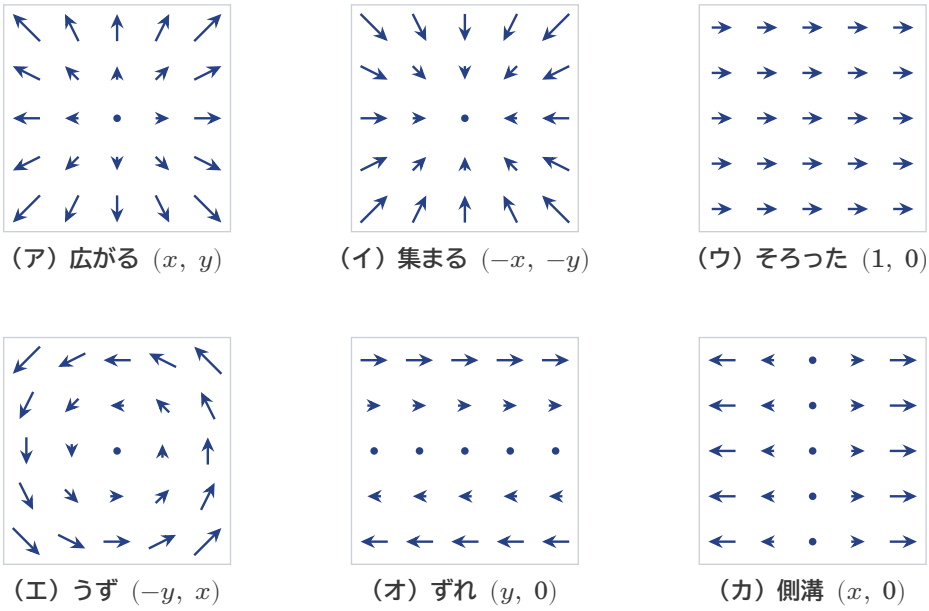


図 9　主役の 6 つの場（矢印の長さは縮めてかいた）。8-5 で絵にし、8-7・8-9・8-10・8-11 で同じ場を使う。

「うず」の場 $(-y,\ x)$ と、それによく似た $(y,\ x)$ は、物理シリーズ第 1 巻（力学）の仕事の章（力-4）にも出てきます。どちらも同じように回っているように見えますが、8-7 では、遠回りすると仕事が変わるかどうかで、2 つがまったくちがう場であることを見ます。

9 物理の本は、もうこの巻の道具を使っている

物理シリーズ第 1 巻（力学）では、この巻の道具を、章の番号を書いて先に使っています。この巻を読むと、物理の本のその場所が「わかって」読めるようになります。

物理	そこで使っていること	この巻の道具	章
力-4	力は、位置エネルギーが下がる向きに働く	勾配 $\mathrm{grad}\, U$	8-4
力-4	遠回りすると仕事が変わる力・変わらない力	線積分、回転	8-7・8-10
力-6	回しにくさ（慣性モーメント）	重積分	8-6
力-7	関節を少し回すと、手はどれだけ動く？	ヤコビ行列 J	8-3
力-12	水の圧力・浮力	勾配・ガウスの定理	8-4・8-11
力-13	流れこむ水と流れ出る水	面積分・発散	8-8・8-9
力-15	ねばりの力は「まわりの平均との差」	ラプラシアン ∇^2	8-12

表 4　物理シリーズ第 1 巻で、この巻の道具を使っている所（一部）

逆に、この巻の例題や「物理・工学ではこう使う」には、物理の本と同じ場面・同じ数を使っています（ロボットの腕の長さ、仕事の道 A・道 B など）。どちらから読んでも、同じ場面に出会えるようにしてあります。

⑩ くり返し出てくる場面

主役の山と 6 つの場のほかにも、この巻では、同じ場面を、同じ数のまま、いくつもの章で使います。前の章で計算した答えが、あとの章で「別の方法でも同じになる」ことを確かめられるようにするためです。

場面	どんな場面か	出てくる章
ロボットの腕	2 つの関節の腕（第 7 巻 7-2・物理 力-7 と同じ長さ）	8-3
厚さがちがう板	場所で厚さが変わる板の重さ	8-6
池	水がわき出す口と、吸いこまれる口がある池	8-5・8-9・8-11
管の流れ	水道管の中の、まん中ほど速い流れ	8-6・8-8
かべ・金属の棒	6-3 の熱が伝わるかべ。熱が広がる棒	8-4・8-12・8-13
点電荷・電流・地球	電気の力・磁石の力・重力の矢印	8-5・8-8・8-11・8-14

表 5　この巻でくり返し出てくる場面

表計算と Python

11 2 次元の表は、地図になる

場所ごとに決まる量は、数がとてもたくさんあります。そこで、この巻では、表計算（2-18）と Python（2-19）をたくさん使います。表計算の表は、たて・横にマスが並んでいるので、**そのまま地図**として使えます。この巻では、A 列に北への距離 y、1 行めに東への距離 x を入れ、北が上になるように並べます（くわしくは 8-1）。

B2　=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2

	A	B	C	D	E	F	G
1	$y \diagdown x$	0	10	20	30	40	50
2	40	68	67	64	59	52	43
3	30	82	81	78	73	66	57
4	20	92	91	88	83	76	67
5	10	98	97	94	89	82	73
6	0	100	99	96	91	84	75

表 6　主役の山の高さ（m）を表計算で地図にしたもの。黄色のマス E4 が、点 $(30,\ 20)$ の高さ 83 m。

Python では、numpy で同じ表を作り、matplotlib という道具で、等高線の図（contour）や矢印の図（quiver）をかきます。この巻に出てくるプログラムは短いものばかりで、図はどれも本の形にかき直して並べてあります。

Python

```
import numpy as np                  # 数の表の道具 numpy を np として使う
x = np.arange(0, 60, 10)            # 東へ 0, 10, …, 50（60 は入らない）
y = np.arange(40, -10, -10)         # 北へ 40, 30, …, 0（北を上に）
X, Y = np.meshgrid(x, y)            # マスごとの x の表と y の表
H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2     # マスごとの高さ（B2 の式と同じ）
print(H)
```

実行結果

```
[[ 68.  67.  64.  59.  52.  43.]
 [ 82.  81.  78.  73.  66.  57.]
 [ 92.  91.  88.  83.  76.  67.]
 [ 98.  97.  94.  89.  82.  73.]
 [100.  99.  96.  91.  84.  75.]]
```

実行結果の表は、表計算の表とまったく同じ並びです。68. の「.」は、小数（68.0）として計算したという印です。

コラム　ベクトル解析の記号は、だれが作った？

この巻で学ぶ数学を、大学では「**ベクトル解析**」とよびます。場所ごとの矢印を微分したり積分したりする道具です。

19 世紀の中ごろ、電気と磁気の研究が進み、場所ごとの矢印を計算する方法が必要になりました。はじめは、ハミルトンが考えた「四元数」という数を使って計算していました。19 世紀の終わりごろ、アメリカのギブズと、イギリスのヘビサイドが、それぞれ別に、四元数から使いやすい部分だけをとり出して、今のベクトル解析の形にまとめました。1901 年に、ギブズの講義をもとにしたウィルソンの本が出て、今使われている記号やことばの多くが、このころに決まりました。

8-4 で出てくる逆三角の記号 ∇ は「ナブラ」と読みます。1870 年 11 月 10 日に、イギリスのロバートソン・スミスが、物理学者テイトへの手紙の中で、この形が古代のたて琴（ギリシャ語で nabla）に似ていることから、この名前を提案したと伝えられています。

この巻で出会う新しい記号

第 8 巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくてもだいじょうぶです。どの記号も、使う前に、数の例と図でていねいに説明します（記号カードは巻末にも並べてあります）。

記号	読み方	ひとことで言うと	章
$f(x,\ y)$	エフ・エックス・ワイ	2 つの数を入れると決まる数	8-1
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	ラウンド・ディー・エフ・ラウンド・ディー・エックス	ほかを止めて、x だけ動かした変わり方（偏微分）	8-2
$\mathrm{d}f$、J	ディー・エフ、ジェイ	少し動いたときの変化（全微分）、ヤコビ行列	8-3
$\operatorname{grad} f$、∇	グラディエント、ナブラ	いちばん急な向きの矢印（勾配）	8-4
$\vec{F}(x,\ y,\ z)$	エフ	場所ごとの矢印（ベクトル場）	8-5
$\iint_D$、$\iiint_V$	重積分、3 重積分	面・立体のタイルでたす	8-6
$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$、$\oint_C$	線積分	道にそってたす。○は閉じた道	8-7
$\vec{n}\,\mathrm{d}S$、$\oiint_S$	エヌ・ディー・エス	向きのついた面のタイル。○は閉じた面	8-8
$\operatorname{div}\vec{F}$	ダイバージェンス	わき出しの量（発散）	8-9
$\operatorname{rot}\vec{F}$	ローテーション	うずの強さ（回転）	8-10
$\nabla^2 f$	ナブラ 2 乗	まわりの平均との差（ラプラシアン）	8-12
$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$	ディー・ティー・ディー・ティー	流れといっしょに動いて見た変化	8-13

表 7　この巻で出会う記号（くわしくはそれぞれの章で）

この巻では、ベクトルは第 4 巻・第 7 巻と同じく、矢印つきの文字（$\vec{F}$）で書きます。大学の本では、太字（$\mathbf{F}$）で書くことが多いので、それぞれの章の「専門書をのぞいてみよう」と、8-14 で見くらべます。

この巻が通る路線と終点

第 8 巻を通る路線は 3 本です。3 本とも、この巻に**終点**があります。ここまで小学校から乗ってきた路線が、この巻でゴールに着き、物理の世界（流体・熱・電磁気・ロボット）へつながります。

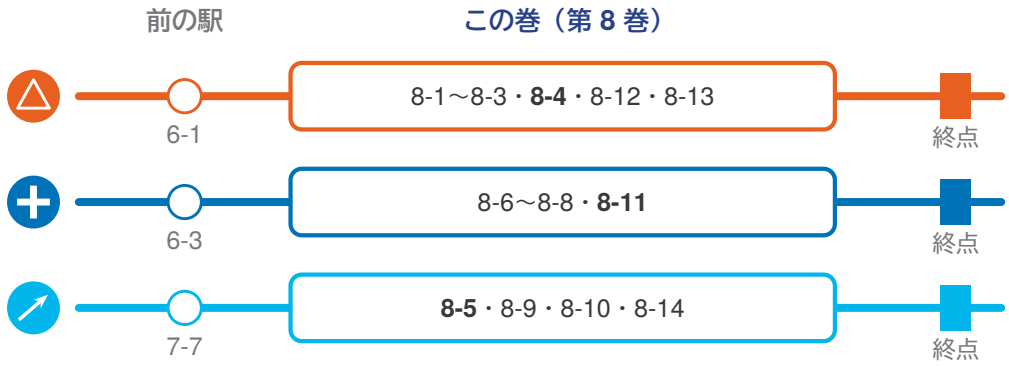


図 10　第 8 巻を通る 3 本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字が終点の駅）。右はしの四角が終点の印。終点は、その路線の大きな目的地。終点のあとの駅（8-12 など）は、終点で作った道具を使う駅。

	路線	大きな駅のつながり
△	変化	傾き（3-5）→ 微分（5-1）→ 微分方程式（6-1）→ **勾配**（8-4、終点）
＋	たし合わせ	細かく分けてたす（4-5）→ 定積分（5-10）→ 積分で解く（6-3）→ **ガウスの定理**（8-11、終点）
↗	矢印	座標（3-2）→ ベクトル（4-10）→ 3 次元の回転（7-7）→ **ベクトル場**（8-5、終点）

表 8　3 本の路線の、大きな駅

どの路線も、第 1 巻・第 2 巻の章から始まっています（変化は 1-5「ひき算」、たし合わせは 1-21「広さ」、矢印は 2-2「数直線」）。

この巻の読み方

ソラ

第 8 巻は、大学 2 年までの内容なんだね。∂ とか ∇ とか、見たことのない記号がいっぱい。

ミナ

でも、地図の等高線や、天気図の風の矢印なら、見たことがあるよ。それを数で読むんだって。

デルタ

そのとおり。1 回読んで分からなくても、だいじょうぶ。図をかいて、数の表で手を動かせば、かならずわかるよ。

① 成分で書いてから記号に

記号 grad・div・rot だけで考えず、まず成分で 1 つずつ書きます。

- x の成分、y の成分を 1 行ずつ。
- 記号の式のあとには、主役の山や主役の場の数で 1 回確かめる。

② 図と数の表の 2 通りで

初めての考えは、図と数の表の 2 通りで見せます。

- 等高線・矢印・タイルの図を見る。
- 同じことを、表計算のマスの数で確かめる。

③ 名前と、実際にすること

積分の記号は「操作の名前」です。

- 名前の段・直す段・楽をする段の 3 つで考える。
- 場合分けの表で「この場合はこう直す」を見つける。

④ ★ 5 の章は 3 段

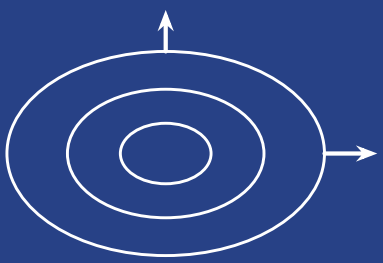
大学の内容の章は、3 つの段に分けてあります。

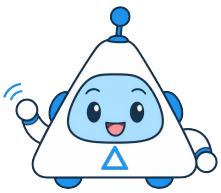
- 「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」。
- 「ここまでで十分」の旗まで読めば、その章のゴール。

第８巻　第１部

1 たくさんの変数の微分

- 山の地図から、坂の急さを読みとれる？
- 東へ進むときと北へ進むときで、坂の急さはちがう？
- ボールは、どの向きに転がり出す？





場所を決めると高さや温度が１つ決まる関数を、地図の等高線で見るよ。１つの向きだけに動いたときの変わり方（偏微分）を集めると、いちばん急な向きが矢印でわかるよ。

この部で学ぶこと

8-1 地図と等高線：2 つ以上の変数の関数 ★★★★☆ P.30

場所を決めると、高さが 1 つ決まる

8-2 偏微分：ほかを止めて 1 つだけ動かす ★★★★☆ P.64

東へ進むときの坂と、北へ進むときの坂

8-3 全微分：少し動いたときの変化 ★★★★★ P.100

ななめに少し進むと、高さはどれだけ変わる？

8-4 いちばん急な向き：勾配 grad ★★★★★ P.138

ボールが転がる向きは、等高線と直角

この部を読むと…

2 つ以上の変数の関数を等高線と表で読み、偏微分・全微分・勾配を計算できるようになります。ロボットのヤコビ行列（第 7 巻）の作り方もここでわかります。

第 1 部　たくさんの変数の微分

★★★★

8-1 地図と等高線：2 つ以上の変数の関数

道しるべ　この章の前に 3-2 3-3 3-5 3-9 4-8 4-13 8-0
この章の先に 8-2 8-3 8-4 8-5 8-6 8-12

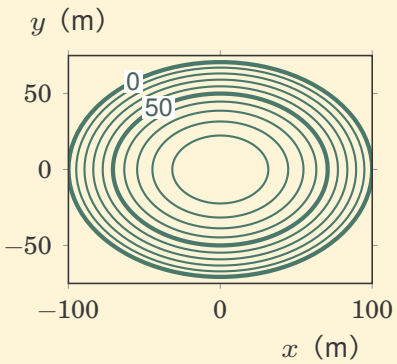
この章でできるようになること

- ★★★ 地図の等高線や天気図の等圧線から、高い所・低い所・急な所を読みとれる。
- ★★★★ 2 つの変数の関数を、表・鳥かん図・等高線の 3 通りで表し、表計算と Python で作れる。
- ★★★★ 等高線の式と切り口の関数を求め、3 つの変数の関数の等値面を説明できる。

はてな？

この地図は、ある山を真上から見たものです。緑の線は、同じ高さの所を結んだ線（等高線）で、10 m ごとにかいてあります。

この線だけから、山の形がわかるかな？ 頂上はどこかな？ 東へ進むのと北へ進むのとでは、どちらの坂が急かな？



国土地理院のウェブ地図（地理院地図）で、地図の上の 1 点を選ぶと、その場所の標高（海面からの高さ）が出てきます。場所を 1 つ決めると、高さが 1 つ決まるのです。

場所は、「東へ何 m、北へ何 m」の 2 つの数で決まります（3-2 の座標）。ですから、山の高さは、**2 つの数を入れると 1 つの数が出てくる関数**です。第 3 巻から第 6 巻までの関数は、入れる数が 1 つでした。この章では、入れる数が 2 つ以上の関数を、地図の等高線・表・式で見ていきます。初めは記号が多く見えますが、1 回で分からなくても大丈夫です。地図を指でなぞり、表に数を書きこみながら進みましょう。

やってみよう　等高線の地図を読もう

はてな？ の地図（この章の主役の山）を使います。地図の右が東、上が北です。いちばん内側の輪の中が頂上（100 m）です。

1. いちばん外側の太い線（0 m）と、もう 1 本の太い線（50 m）を、指でなぞろう。
2. 頂上から東へまっすぐ進みながら、線を数えよう。何本めの線が 0 m の線かな？ 北へまっすぐ進むときは？
3. 東へ進むときと北へ進むときで、頂上から 0 m の線までの長さをくらべよう。どちらが短いかな？
4. できれば、地理院地図で家の近くの山を開き、線がつまった所と、まばらな所をさがそう。

②では、東へ進んでも北へ進んでも、10 本めの線が 0 m の線です。頂上の 100 m から、90 m、80 m、…と 10 m ずつ下がって、10 本めで 0 m になるからです。③では、0 m の線までの長さが、東へは 100 m、北へは約 71 m です。同じ 100 m 下がるのに、北へ進むほうが短い長さで下がります。北の坂のほうが急なのです。

1

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

3-3　関数は「入れると出てくる」ルール。表・グラフ・式は、同じことを言っている。

3-2　場所は、2 つの数の組（座標）$(x,\ y)$ で表せる。

3-5　傾き＝$\dfrac{\text{高さの変化}}{\text{横の長さ}}$。地図の等高線の間がせまい所ほど、坂は急。2 万 5 千分の 1 の地図では、等高線は 10 m ごと。

3-9　$y = ax^2 + q$ のグラフは放物線。a が負なら、上が山の形になる。

4-8　円を横に a 倍、たてに b 倍にのばした形がだ円。式は $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$。

4-13　空間の点は 3 つの数 $(x,\ y,\ z)$ で表せる。原点からの距離は $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

数学の道具

目でわかる　地図で見る　★★★

1 場所を決めると、高さが 1 つ決まる

この章の主役の山（8-0）を、もう一度見ます。頂上から東へ x〔m〕、北へ y〔m〕の所の高さ h〔m〕は、次の式で決まります。

$$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$$

頂上から西や南の所は、x や y を負の数にします（3-2 の座標と同じ）。たとえば、頂上から東へ 30 m、北へ 20 m の所は、$x = 30$、$y = 20$ を入れて、

$$h = 100 - 0.01 \times 30^2 - 0.02 \times 20^2 = 100 - 9 - 8 = 83$$

で、高さ 83 m です。この式は、東と北の 2 つの数を入れると、高さという 1 つの数が出てくる「箱」です（3-3 の「入れると出てくる」ルールの、入り口が 2 つになったもの）。

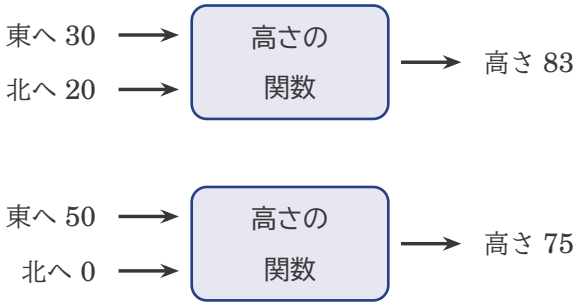


図 1 入り口が 2 つの「高さの関数」。東へ 50 m、北へ 0 m の所は、
$100 - 0.01 \times 50^2 - 0.02 \times 0^2 = 100 - 25 = 75$ で 75 m。

$0.01x^2$ は、「東や西へはなれると、どれだけ低くなるか」を表す部分です。x を 2 乗しているので、$x = 30$ でも $x = -30$ でも同じ 9 だけ低くなります。頂上から東へ行っても西へ行っても、同じ距離なら同じだけ下がる、ということです。$0.02y^2$ も同じように、北や南へはなれた分です。0.02 のほうが 0.01 より大きいので、同じ距離はなれたとき、北や南へ行くほうが 2 倍下がります。

② 等高線：同じ高さの点を結んだ線

山を、高さ 80 m の水平な面で切ることを考えます。たとえば、山のまわりに水を入れて、水面を 80 m まで上げたとします。すると、水面から上には、山の頂上の部分だけが島のように出ます。このときの水ぎわの線は、高さがちょうど 80 m の所を結んだ線です。

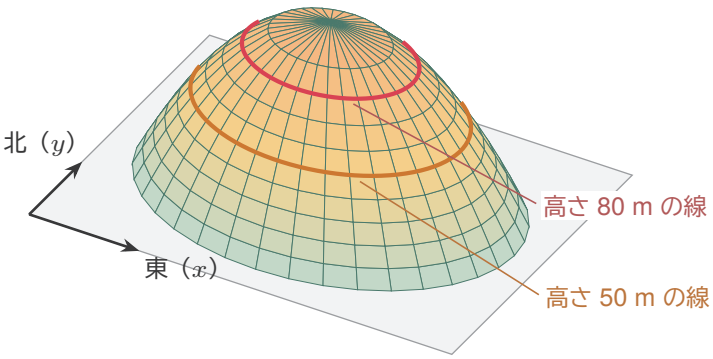


図 2 主役の山の鳥かん図（南東の空から見下ろした図）。山の面の横の輪が、10 m ごとの「同じ高さの線」。赤は 80 m、オレンジは 50 m。

図 2 のように、同じ高さの線を、山の面の上に 10 m ごとにかきます。それを真上から見て紙にうつしたのが、次の地図です。このように、**同じ高さの点を結んだ線**を**等高線**（とうこうせん）といいます。また、山を空の高い所からななめに見下ろした図 2 のような図を**鳥かん図**（ちょうかんず）といいます。鳥が空から見下ろした図、という意味です。

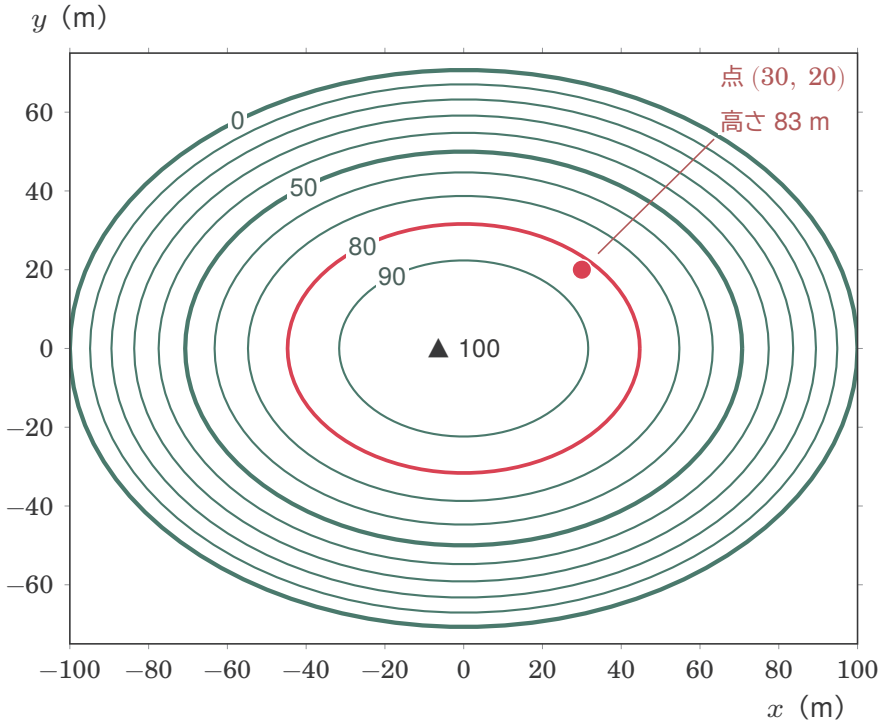


図 3　主役の山の等高線の地図。10 m ごとの線と、50 m ごとの太い線。赤い線が 80 m。点 (30, 20) は 80 m と 90 m の線の間にある。

等高線には、次のきまりがあります。

1　同じ線の上は、どこも同じ高さ。

赤い線の上は、どこも 80 m です。点 (30, 20) は 80 m の線と 90 m の線の間にあるので、高さは 80〜90 m のどこかです（計算すると 83 m）。

2　高さのちがう線は、交わらない。

1 つの場所の高さは 1 つだけです。もし 80 m の線と 90 m の線が交わったら、その点の高さが 2 つになってしまいます。

③ 線は、ぐるりと 1 周して閉じる。

山のまわりを、同じ高さのまま歩いていくと、もとの場所にもどります。地図のはしで切れているときは、地図の外で閉じています。

④ 線の間の高さの差は、地図ごとに決まっている。

主役の山の地図は 10 m ごとです。国土地理院の 2 万 5 千分の 1 の地形図も、10 m ごとに細い線（主曲線）、50 m ごとに太い線（計曲線）をかいています。太い線は、数えやすくするための目印です。

> **せいかくに言うと**
>
> ②の「交わらない」は、高さのちがう線どうしのことです。峠（とうげ）のように、ある向きには下がり、別の向きには上がる所では、峠と同じ高さの 1 本の線が、峠の点で×の形に交わることがあります（8-4 のもっと知りたい）。また、頂上の 100 m の「線」は、1 つの点だけになります。

③ 線の間かくと、坂の急さ

3-5 では、「地図の等高線の間がせまい所ほど、坂は急です」と学びました。同じ 10 m を、短い横の長さで上がる（下がる）からです。主役の山で、確かめてみます。

頂上から真東へ進むときと、真北へ進むときの高さの変わり方を、グラフにします。真東へ進むときは $y = 0$ なので $h = 100 - 0.01x^2$、真北へ進むときは $x = 0$ なので $h = 100 - 0.02y^2$ です。どちらも、3-9 の放物線（上が山の形）です。

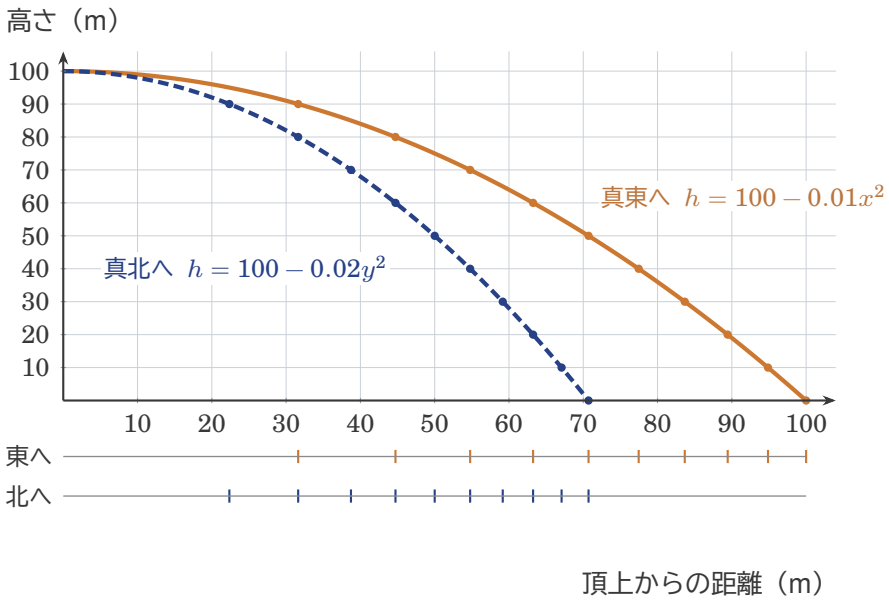


図 4　真東へ進むとき（オレンジの線）と真北へ進むとき（紺の点線）の高さ。点は 10 m ごとの等高線をこえる所。下の 2 本の目もりは、地図の上の等高線の位置。北へ進むほうが、目もりがつまっている。

図 4 の下の 2 本の目もりは、地図 3 を真東・真北にたどったときに等高線をこえる位置です。北へ進むほうが、目もりの間がせまくなっています。グラフでも、紺の点線のほうが急に下がっています。80 m の線から 70 m の線までを数で比べると、次のようになります。

進む向き	80 m の線までの距離	70 m の線までの距離	平均の傾き
真東へ	44.72 m	54.77 m	$\dfrac{10}{10.05} \approx 0.99$
真北へ	31.62 m	38.73 m	$\dfrac{10}{7.11} \approx 1.41$

表 1　80 m の線と 70 m の線の間の、平均の傾き（3-5：高さの変化÷横の長さ）。距離は⑧で求める式から計算した。

東へは 10.05 m 進んで 10 m 下がり、北へは 7.11 m 進むだけで 10 m 下がります。傾きは、北へ進むほうが約 1.4 倍大きい、つまり急です。

はてな？の答え

等高線だけから、山の形がわかります。頂上は、いちばん内側の輪の中です（▲の所、100 m）。坂が急なのは、線がつまっている所です。主役の山では、東や西へ進むより、北や南へ進むほうが急です。また、どちらの向きでも、頂上の近くでは線の間が広く（ゆるやか）、ふもとに近いほど線がつまります（急）。図 4 の目もりでも、右へ行くほど間がせまくなっています。

コラム　地図は、本当に数の表になっている

国土地理院は、日本の地面を 5 m や 10 m の四角いマスに分けて、マスごとの標高を並べた数の表（数値標高モデル）を公開しています。地図アプリの 3 次元の表示や、地理院地図で選んだ点の標高は、このような数の表をもとにしています。

地図の等高線は、この数の表から、「同じ高さの所を結ぶ」という計算でかくことができます。次の手でわかるの段では、主役の山について、同じことを表計算でやってみます。

手でわかる　表で作る　★★★★

4 表計算で、地図を作る

高さの式を、表計算に入れて、地図のような表を作ります。表計算の表は、たて・横にマスが並んでいるので、そのまま地図として使えます（8-0）。

1. 1 行めに、東への距離 x を入れる。B1 に 0、C1 に 10、…、G1 に 50。
2. A 列に、北への距離 y を入れる。A2 に 40、A3 に 30、…、A6 に 0。**北が上になるように、大きい順**に入れる。
3. B2 に、高さの式 `=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2` を入れる（^ は累乗の記号で、`B$1^2` は x^2）。
4. B2 を、B2 から G6 までの全部のマスにコピーする。

B2　=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2

	A	B	C	D	E	F	G
1	$y \diagdown x$	0	10	20	30	40	50
2	40	68	67	64	59	52	43
3	30	82	81	78	73	66	57
4	20	92	91	88	83	76	67
5	10	98	97	94	89	82	73
6	0	100	99	96	91	84	75

表 2　主役の山の高さ（m）の表。1 行め（オレンジ）が東への距離 x、A 列（緑）が北への距離 y。黄色のマス E4（$x = 30$、$y = 20$）が 83 m。

③の式の $ は、2-18 で学んだ「ここは動かさない」という印です。B$1 は、行の番号 1 の前に $ があるので、どこへコピーしても「1 行めの x」を読みます。$A2 は、列の文字 A の前に $ があるので、どこへコピーしても「A 列の y」を読みます。この 2 つのおかげで、どのマスでも「そのマスの真上の x と、真横の y」で高さが計算されます。たとえば E4 にコピーされた式は =100-0.01*E$1^2-0.02*$A4^2 で、E1 の 30 と A4 の 20 を使って、83 になります。

表の右下（$x = 50$、$y = 0$）は 75 で、図 1 の下の箱と同じです。表では**上が北**なので、行の番号が大きいほど南になります。ここだけは、ふつうの地図と同じ向きにするためのきまりです。

色分けすると、等高線が見えてくる

表を広げて、東は 100 m、北は 70 m まで計算し、マスを高さ 10 m ごとに色分けします。高い所ほど、こい色にします。

$y \setminus x$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
70	2	1	−	−	−	−	−	−	−	−	−
60	28	27	24	19	12	3	−	−	−	−	−
50	50	49	46	41	34	25	14	1	−	−	−
40	68	67	64	59	52	43	32	19	4	−	−
30	82	81	78	73	66	57	46	33	18	1	−
20	92	91	88	83	76	67	56	43	28	11	−
10	98	97	94	89	82	73	62	49	34	17	−
0	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0

図 5 東 100 m・北 70 m までの表を、10 m ごとに色分けしたもの（高いほどこい色）。色の境目が、ほぼ等高線になる。「−」は高さが 0 より小さくなるマス（山の外）。

色の境目をたどると、図 3 の地図の右上の部分（東と北の 4 分の 1）と同じ形が見えてきます。表と等高線の地図は、同じ山を、ちがう形で表したものなのです。

5 表から、等高線の場所を見つもる

表のマスは 10 m ごとなので、等高線がマスとマスの間のどこを通るかは、表には直接書いてありません。そこで、となりのマスの数から見つもります。

4 行め（$y = 20$）を見ると、$x = 30$ で 83、$x = 40$ で 76 です。80 m の等高線は、この 2 つのマスの間を通ります。x が 30 から 40 へ 10 m 進む間に、高さは $83 - 76 = 7$ 下がります。80 m まで下がるのは、$83 - 80 = 3$ 下がった所です。間をまっすぐ下がると考えると、

$$x \approx 30 + 10 \times \frac{3}{7} \approx 30 + 4.3 = 34.3$$

です。7 下がるのに 10 m かかるので、3 下がるには $10 \times 3 \div 7$〔m〕かかる、という比の計算です。

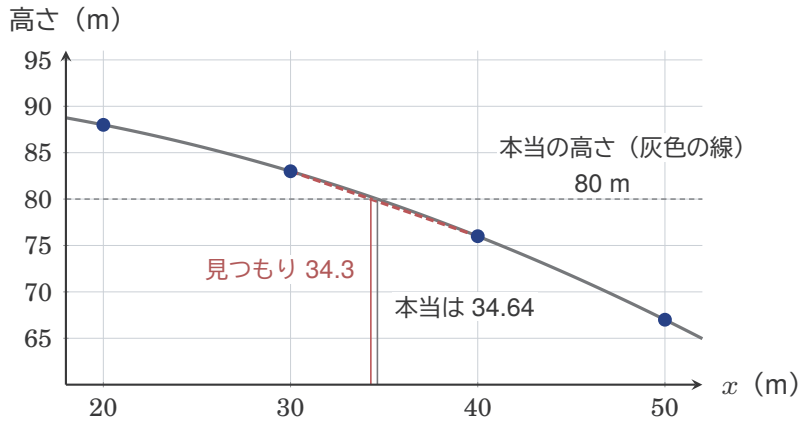


図 6　表の 4 行め（$y = 20$）の高さ（紺の点）。80 m になる所を、30 と 40 の間をまっすぐ結んで見つもると 34.3 m（赤い点線）。本当の高さの線（灰色）で求めると 34.64 m。

本当の位置は、⑧で式から求めると $x = \sqrt{1200} \approx 34.64$ です。見つもりとのちがいは 0.4 m ほどで、マスの大きさ 10 m にくらべると小さいことがわかります。マスを小さくすると、見つもりは本当の位置にもっと近づきます。地図アプリや Python は、このような見つもりを、すべてのマスの間でして、等高線をかいています。

6 Python で、表と等高線を作る

同じ表を Python で作ります。numpy の `meshgrid` は、「マスごとの x の表」と「マスごとの y の表」を作る道具です。この 2 つの表に、高さの式をそのまま書くと、すべてのマスの高さが一度に計算されます。

Python

```
import numpy as np                  # 数の表の道具 numpy を np として使う
x = np.arange(0, 60, 10)            # 東へ 0, 10, …, 50（60 は入らない）
y = np.arange(40, -10, -10)         # 北へ 40, 30, …, 0（北を上に）
X, Y = np.meshgrid(x, y)            # マスごとの x の表と y の表
H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2     # マスごとの高さ（B2 の式と同じ）
print(H)
print(H[2, 3])                      # 上から 2 行め・左から 3 列め（0 から）
```

実行結果

```
[[ 68.  67.  64.  59.  52.  43.]
 [ 82.  81.  78.  73.  66.  57.]
 [ 92.  91.  88.  83.  76.  67.]
 [ 98.  97.  94.  89.  82.  73.]
 [100.  99.  96.  91.  84.  75.]]
83.0
```

表 2 と同じ数が、同じ並びで出てきました。68. の「.」は、小数（68.0）として計算したという印です。y を 40 から -10 ずつにしたのは、表計算と同じく北を上にするためです。H[2, 3] は、上から数えて 2 行め、左から数えて 3 列めのマスです。Python は 0 から数えるので、上から 3 つめの行（$y = 20$）、左から 4 つめの列（$x = 30$）で、83 になります。

等高線の図は、matplotlib という道具の contour でかきます。

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt  # 図をかく道具を plt として使う
x = np.linspace(-100, 100, 201)  # 1 m ごとに 201 個
y = np.linspace(75, -75, 151)    # 北が先。1 m ごとに 151 個
X, Y = np.meshgrid(x, y)
H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2
# 0, 10, …, 90 m の等高線をかき、線に高さの数字をつける
c = plt.contour(X, Y, H, levels=range(0, 100, 10))
plt.clabel(c)
plt.gca().set_aspect('equal')   # 東西と南北の 1 m を同じ長さに
plt.show()
```

実行すると、図 3 と同じ形の等高線の図が出てきます（この本の図は、Python で出した図を本の形にかき直したものです）。levels=range(0, 100, 10) は「0 から 10 m ごとに、100 の手前（90）まで」という意味です。np.linspace

は、はじめの数から終わりの数までを、両はしをふくめて等しく分けた数を作ります。(-100, 100, 201) なら、-100 から 100 までの 201 個（1 m ごと）です。set_aspect('equal') を忘れると、東西と南北の 1 m の長さがちがってかかれ、等高線の形がゆがんで見えます。

ここまでで十分

等高線の地図を読み、表計算や Python で高さの表と等高線を作れれば十分です。この先は、式で等高線の形を確かめます。

∂ 式でわかる 式で見る ★★★★

7 2 つの変数の関数

ここまで見てきた「高さ」のように、2 つの数 x、y を決めると、1 つの数が決まるきまりを、**2 つの変数の関数**（2 変数関数）といいます。関数の名前を f とするとき、x、y を入れて出てくる数を

$$f(x,\ y)$$

と書き、「エフ・エックス・ワイ」と読みます。1 つの変数の関数 $f(x)$ (3-3) の、かっこの中が 2 つになった形です。主役の山の高さを h という名前の関数にすると、

$$h(x,\ y) = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$$

です。$h(30,\ 20)$ は「$x = 30$、$y = 20$ を入れたときの値」で、$h(30,\ 20) = 83$ です。

かっこの中の**順番**には意味があります。この本では、1 つめが東への距離 x、2 つめが北への距離 y です。たとえば $h(20,\ 30)$ は、東へ 20 m、北へ 30 m の所なので、

$$h(20,\ 30) = 100 - 0.01 \times 20^2 - 0.02 \times 30^2 = 100 - 4 - 18 = 78$$

で、$h(30,\ 20) = 83$ とはちがいます。表 2 では、D3（$x = 20$ の列、$y = 30$ の行）が 78 です。

同じように考えて、場所を決めると気温や気圧が 1 つ決まるのも、2 つの変数の関数です（8-0 のスカラー場）。2 つの変数の関数は、次の 4 通りで表せます。3-3 で「表・グラフ・式は、同じことを言っている」と学んだのと同じです。

表し方	主役の山では	何がわかりやすいか
式	$h(x,\ y) = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$	どの場所でも計算できる
表	表 2（表計算・Python）	マスごとの数
鳥かん図	図 2	山全体の形
等高線の地図	図 3	高さと、急な所

表 3　2 つの変数の関数の、4 通りの表し方

8 等高線の式は、だ円

等高線を式で表します。高さ 80 m の等高線は、「$h(x,\ y) = 80$ になる点 $(x,\ y)$ を全部集めた線」です。式を変形して、どんな形か調べます。

$$100 - 0.01x^2 - 0.02y^2 = 80$$

高さが 80 の点の式

$$0.01x^2 + 0.02y^2 = 20$$

移項した（両辺に $0.01x^2 + 0.02y^2 - 80$ をたした）

$$\frac{x^2}{2000} + \frac{y^2}{1000} = 1$$

両辺を 20 でわった（$0.01 \div 20 = 1 \div 2000$）

$$\left(\frac{x}{44.72}\right)^2 + \left(\frac{y}{31.62}\right)^2 = 1$$

$\sqrt{2000} \approx 44.72$、$\sqrt{1000} \approx 31.62$

最後の式は、4-8 のだ円の式で、$a = 44.72$、$b = 31.62$ のものです。高さ 80 m の等高線は、東西に半径 44.72 m、南北に半径 31.62 m のだ円です。

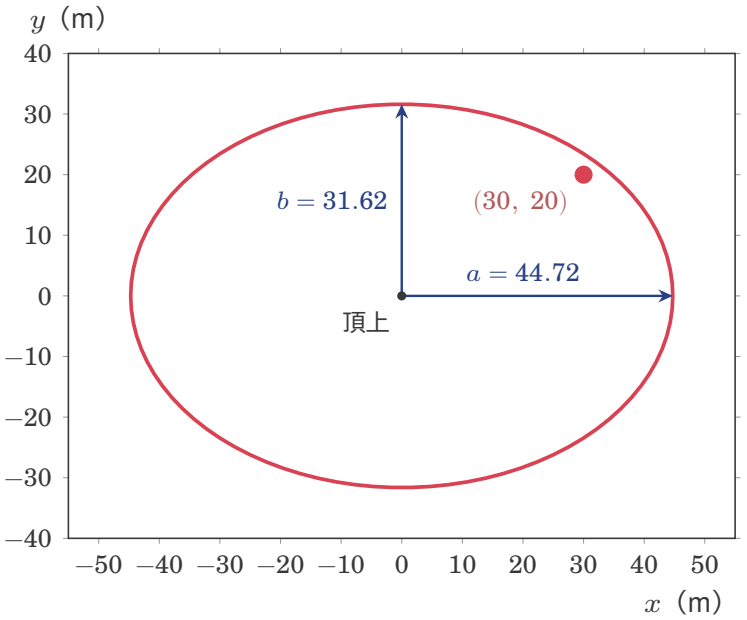


図 7　高さ 80 m の等高線（赤）は、東西の半径 44.72 m、南北の半径 31.62 m のだ円。点 $(30,\ 20)$ は、だ円の内側（80 m より高い所）にある。

ほかの高さ c でも、同じように変形できます。$0.01x^2 + 0.02y^2 = 100 - c$ を $100 - c$ でわると、

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \qquad a = \sqrt{\frac{100-c}{0.01}}, \quad b = \sqrt{\frac{100-c}{0.02}}$$

となります。c が小さい（低い）ほど $100 - c$ が大きくなり、だ円は大きくなります。どの高さでも $b \div a = \sqrt{0.01 \div 0.02} \approx 0.707$ なので、等高線は、同じ形のだ円が大きさだけを変えて並んだものです。

高さ c（m）	90	80	70	60	50
東西の半径 a（m）	31.62	44.72	54.77	63.25	70.71
南北の半径 b（m）	22.36	31.62	38.73	44.72	50.00

表 4　等高線のだ円の半径。8-1 の表の数（44.72、54.77 など）は、ここから求めた。

点 $(30,\ 20)$ が 80 m の線の内側にあることも、式で確かめられます。$x = 30$、$y = 20$ を入れると、

$$0.01 \times 30^2 + 0.02 \times 20^2 = 9 + 8 = 17$$

で、20 より小さいので、だ円の式の左辺は $17 \div 20 = 0.85$ で、1 より小さくなります。だ円の内側は、頂上に近い、高い側です。

❾ 切り口：1 つを止めると、ふつうの関数

2 つの変数のうち 1 つを決まった数に止めると、残りは 1 つの変数の関数になります。たとえば、北へ 20 m の所（$y = 20$）を、東西にまっすぐ歩くことを考えます。y に 20 を入れると、

$$h(x,\ 20) = 100 - 0.01x^2 - 0.02 \times 20^2 = 92 - 0.01x^2$$

で、x だけの関数になります。3-9 の放物線 $y = ax^2 + q$ で、$a = -0.01$、$q = 92$ の形です。山を、$y = 20$ のたての面で切ったときの切り口の形です。

同じように、東へ 30 m の所（$x = 30$）を南北に歩くときは、

$$h(30,\ y) = 100 - 0.01 \times 30^2 - 0.02y^2 = 91 - 0.02y^2$$

です。止めた文字は、ただの数としてあつかいます。

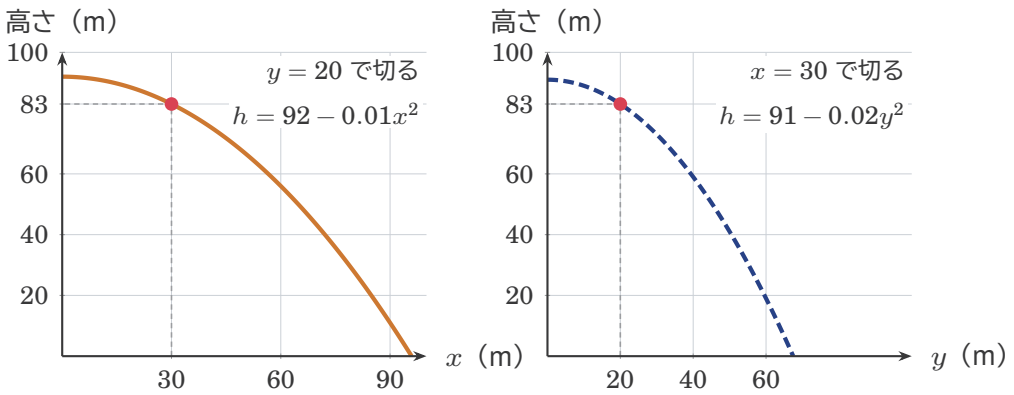


図 8 2 つの切り口。横軸が x のグラフは北へ 20 m の所を東西に、横軸が y のグラフは東へ 30 m の所を南北に切ったもの。どちらも、点 $(30,\ 20)$ の上の 83 m（赤い点）を通る。

2 つの切り口は、どちらも点 $(30,\ 20)$ の上（高さ 83）を通ります。東西に切ったグラフ（横軸が x）の傾きは「その点から東へ進むときの坂」、南北に切ったグラフ（横軸が y）の傾きは「北へ進むときの坂」です。この 2 つの傾きを、

それぞれ微分（第 5 巻）で求めるのが、次の 8-2 の偏微分です。「1 つを止めて、もう 1 つだけ動かす」が、8-2 の合いことばになります。

⑩ 3 つの変数の関数と、等値面

部屋の中の温度は、床の上の場所 $(x,\ y)$ だけでなく、床からの高さ z でも変わります。暖房をつけた部屋では、暖かい空気が上へ上がるので、天井の近くほど暖かくなります。このような量は、3 つの数 $(x,\ y,\ z)$ を入れると 1 つの数が出てくる、**3 つの変数の関数** $T(x,\ y,\ z)$ です。

たとえば、ある部屋の温度〔℃〕が、高さ z〔m〕だけで決まって、

$$T(x,\ y,\ z) = 18 + 2z$$

だったとします。床（$z = 0$）は 18 ℃、高さ 1 m で 20 ℃、天井（$z = 2.5$）で 23 ℃ です。$2z$ の 2 は、「1 m 上がるごとに 2 ℃ 上がる」という意味です。

2 つの変数の関数では、同じ高さの点を結ぶと「線」（等高線）になりました。3 つの変数の関数で、同じ値の点を全部集めると、「面」になります。これを**等値面**（とうちめん）といいます。この部屋で 20 ℃ の点は、$18 + 2z = 20$ から $z = 1$ の所なので、20 ℃ の等値面は「床から 1 m の高さの水平な面」です。

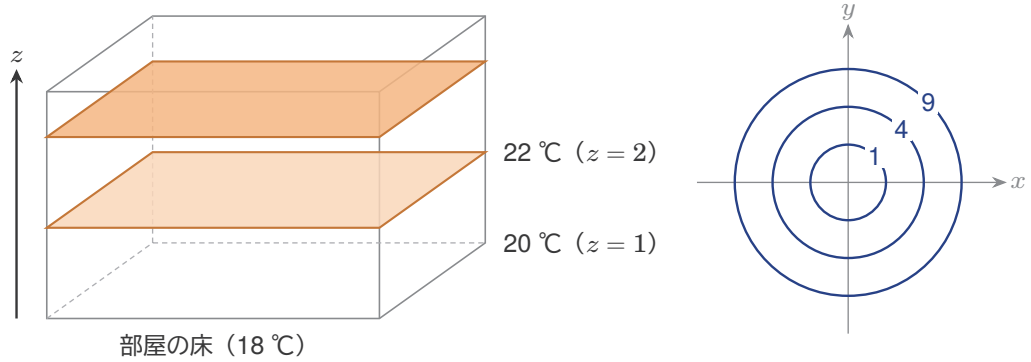


図 9　左：$T = 18 + 2z$ の部屋の、20 ℃ と 22 ℃ の等値面（水平な面）。右：$f = x^2 + y^2 + z^2$ の、$f = 1 \cdot 4 \cdot 9$ の等値面（半径 1・2・3 の球）を、$z = 0$ の面で切った切り口。

等値面が水平な面にならない関数もあります。たとえば、

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$$

は、4-13 で学んだ「原点からの距離の 2 乗」です。$f = 4$ の等値面は、原点からの距離の 2 乗が 4、つまり距離が 2 の点を全部集めたものなので、**半径 2 の球の面**です。小さな電球のまわりの明るさや、小さな電荷のまわりの電位（8-4）も、中心からの距離だけで決まるので、等値面は球になります。

せいかくに言うと

「関数」というときは、**入れる数の組を 1 つ決めると、出てくる数がちょうど 1 つに決まる**ことが大事です。主役の山の式は、どんな $(x,\ y)$ でも計算できますが、山の外（h が負になる所）では、式の値は「地面より下の深さ」のような意味のない数になります。そこでこの章では、主役の山を、高さ 0 の線（東西に 100 m、南北に約 70.71 m のだ円）の内側だけで考えています。このように、関数に入れてよい数の組の範囲を、関数の**定義域**といいます（3-3 と同じことば）。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f と実数 c に対し、$\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$ を f の等高線（level curve）といい、3 変数関数 $F(x,y,z)$ に対し、$\{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = c\}$ を等位面（level surface）という。関数 $z = f(x,y)$ のグラフは、xyz 空間内の曲面である。

訳 「$\mathbb{R}^2$」は、2 つの数の組 $(x,\ y)$ を全部集めたもの（平面）。「$\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$」は「$f(x,\ y) = c$ になる点 $(x,\ y)$ を全部集めたもの」と読む。等値面を「等位面」とよぶ本もある。英語の level は「高さの水準」。「グラフは曲面」は、この章の鳥かん図のこと。

たいせつ

2 つの変数の関数と等高線

・2 つの数 $(x,\ y)$ を入れると 1 つの数が出てくるきまりを、2 つの変数の関数 $f(x,\ y)$ という。かっこの中は順番が大事（この本では東が先）。

・同じ値の点を結んだ線が等高線。式 $f(x,\ y) = c$ で表せる。高さのちがう線は交わらない。線がつまった所ほど急。

・1 つの変数を止めると、ふつうの 1 つの変数の関数（切り口）になる。

・3 つの変数の関数 $T(x,\ y,\ z)$ では、同じ値の点の集まりは面（等値面）になる。

この章で出てきたことば

2 つの変数の関数　2 つの数を入れると、1 つの数が出てくるきまり。$f(x,\ y)$ と書く。

等高線　同じ高さ（同じ値）の点を結んだ線。天気図の等圧線、気温の等温線も同じ仲間。

鳥かん図　高い所からななめに見下ろした図。2 つの変数の関数のグラフ（曲面）。

切り口　1 つの変数を止めてできる、1 つの変数の関数。山をたての面で切った形。

3 つの変数の関数・等値面　3 つの数で 1 つの数が決まるきまり。同じ値の点の集まり（面）が等値面。

定義域　関数に入れてよい数（数の組）の範囲。

記号カード　初めて出た章 **8-1**

$f(x, y)$

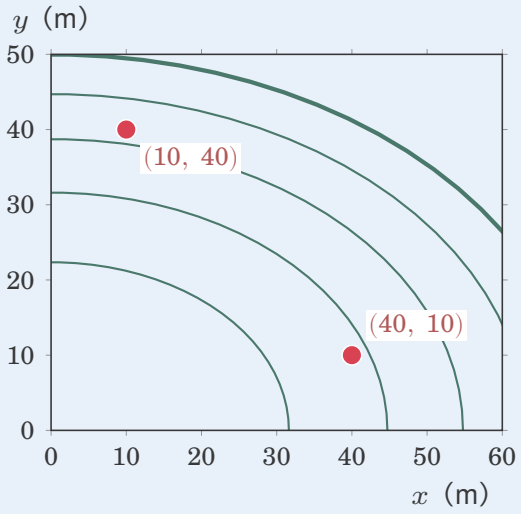
読み方　エフ・エックス・ワイ
意味　2 つの数 x、y を入れたときに出てくる数（2 つの変数の関数）。順番が大事
英語　function of two variables

例題でたしかめよう

例題 1　2 つの変数の関数の値

主役の山 $h(x,\ y) = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ で、$h(40,\ 10)$ と $h(10,\ 40)$ を求め、どちらの場所が高いか答えましょう。

考え方　かっこの 1 つめが x（東）、2 つめが y（北）。それぞれ式に入れる。



式　$h(40,\ 10) = 100 - 0.01 \times 40^2 - 0.02 \times 10^2$

$= 100 - 16 - 2 = 82$

$h(10,\ 40) = 100 - 0.01 \times 10^2 - 0.02 \times 40^2$

$= 100 - 1 - 32 = 67$

答え　$h(40,\ 10) = 82$、$h(10,\ 40) = 67$。東へ 40 m・北へ 10 m の所のほうが高い

じぶんでとこう 1

主役の山で、$h(50,\ 20)$ と $h(20,\ 50)$ を求め、どちらの場所が高いか答えましょう。

例題 2　表計算の式をコピーする

表 2 のように、B2 に `=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2` と入れて、G6 までコピーしました。F5 に入っている式と、F5 の値を答えましょう。

考え方　$ がついた所（1 行め・A 列）は動かず、ついていない所だけがずれる。

	A	B	C	D	E	F	G
1						40	
2						↓	
3							
4							
5	10	→	→	→	→	?	
6							

F5 は、真上の F1（x）と真横の A5（y）を使う

式　F5 の列は F なので、`B$1` は `F$1`（F1 は 40）

行は 5 なので、`$A2` は `$A5`（A5 は 10）

$$100 - 0.01 \times 40^2 - 0.02 \times 10^2 = 100 - 16 - 2 = 82$$

答え　`=100-0.01*F$1^2-0.02*$A5^2`、値は 82

じぶんでとこう 2

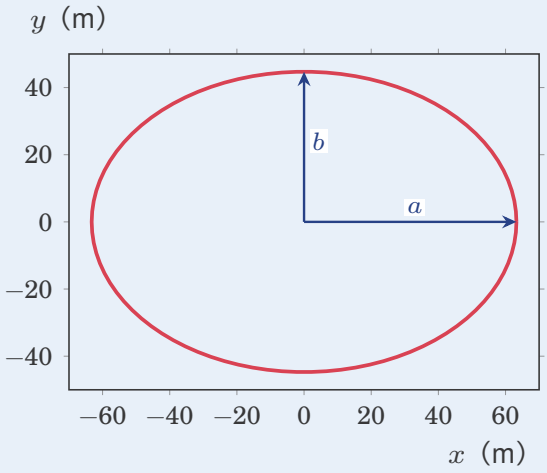
同じ表で、D3 に入っている式と、D3 の値を答えましょう。

例題 3　等高線の式とだ円の半径

主役の山の、高さ 60 m の等高線の式を、次のだ円の形に変形し、東西の半径 a と南北の半径 b を求めましょう（小数第 2 位まで）。

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

考え方　⑧の手順。$h=60$ とおいて移項し、右辺が 1 になるようにわる。



式　$100-0.01x^2-0.02y^2=60$

$0.01x^2+0.02y^2=40$　（移項した）

$\dfrac{x^2}{4000}+\dfrac{y^2}{2000}=1$　（両辺を 40 でわった）

$a=\sqrt{4000}\approx 63.25$、$b=\sqrt{2000}\approx 44.72$

答え　東西の半径 63.25 m、南北の半径 44.72 m（$a=63.25$、$b=44.72$ のだ円）

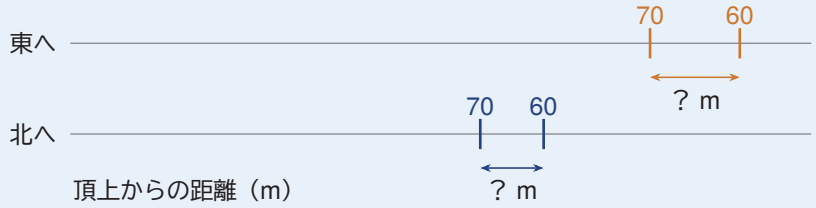
じぶんでとこう 3

主役の山の、高さ 90 m の等高線の式を、例題 3 と同じだ円の形に変形し、東西の半径 a と南北の半径 b を求めましょう（小数第 2 位まで）。

例題 4　等高線の間かくから、坂の急さを比べる

主役の山で、70 m の等高線から 60 m の等高線までの平均の傾きを、真東へ進むときと真北へ進むときで求め、どちらが急か答えましょう。半径は表の値（70 m：$a = 54.77$、$b = 38.73$。60 m：$a = 63.25$、$b = 44.72$）を使います。

考え方　傾き＝高さの変化÷横の長さ（3-5）。高さの変化は、どちらも 10 m。



式　東：横の長さ $63.25 - 54.77 = 8.48$、傾き $10 \div 8.48 \approx 1.18$

北：横の長さ $44.72 - 38.73 = 5.99$、傾き $10 \div 5.99 \approx 1.67$

答え　東は約 1.18、北は約 1.67。北へ進むほうが急

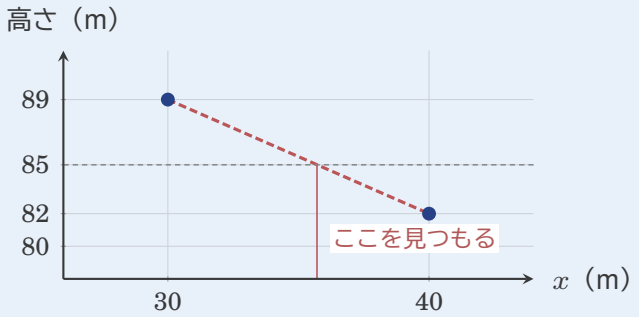
じぶんでとこう 4

主役の山で、90 m の等高線から 80 m の等高線までの平均の傾きを、真東へ進むときと真北へ進むときで求め、どちらが急か答えましょう（90 m：$a = 31.62$、$b = 22.36$。80 m：$a = 44.72$、$b = 31.62$）。

例題 5　表から等高線の場所を見つもる

表 2 の 5 行め（$y = 10$）で、85 m の等高線が通る x を、となりのマスの間をまっすぐ結んで見つもりましょう（小数第 1 位まで）。また、式から求めた本当の値 $\sqrt{1300} \approx 36.06$ とくらべましょう。

考え方　⑤の手順。85 をはさむ 2 つのマスをさがし、比で見つもる。



式　$x = 30$ で 89、$x = 40$ で 82 なので、この間を通る

10 m で $89 - 82 = 7$ 下がる。85 までは $89 - 85 = 4$ 下がる

$$x \approx 30 + 10 \times \frac{4}{7} \approx 30 + 5.7 = 35.7$$

答え　約 35.7 m。本当の値 36.06 m とのちがいは約 0.4 m

じぶんでとこう 5

表 2 の 3 行め（$y = 30$）で、70 m の等高線が通る x を見つもりましょう（小数第 1 位まで）。また、本当の値 $\sqrt{1200} \approx 34.64$ とくらべましょう。

例題 6　切り口の関数

主役の山について、次の問いに答えましょう。

（1）北へ 10 m の所（$y = 10$）で東西に切った切り口の式を求め、その上で高さが 82 m になる x（$x > 0$）を求めましょう。

（2）東へ 20 m の所（$x = 20$）で南北に切った切り口の式を求め、その上で高さが 78 m になる y（$y > 0$）を求めましょう。

考え方　⑨の手順。止めた文字に数を入れると、残りの文字だけの式になる。

式　（1）$h(x,\ 10) = 100 - 0.01x^2 - 0.02 \times 10^2 = 98 - 0.01x^2$

$98 - 0.01x^2 = 82$ から $0.01x^2 = 16$、$x^2 = 1600$、$x = 40$

（2）$h(20,\ y) = 100 - 0.01 \times 20^2 - 0.02y^2 = 96 - 0.02y^2$

$96 - 0.02y^2 = 78$ から $0.02y^2 = 18$、$y^2 = 900$、$y = 30$

答え　（1）$h = 98 - 0.01x^2$、$x = 40$

（2）$h = 96 - 0.02y^2$、$y = 30$

じぶんでとこう 6

主役の山について、（1）$y = 30$ で切った切り口の式と、高さが 66 m になる x（$x > 0$）、（2）$x = 40$ で切った切り口の式と、高さが 66 m になる y（$y > 0$）を求めましょう。

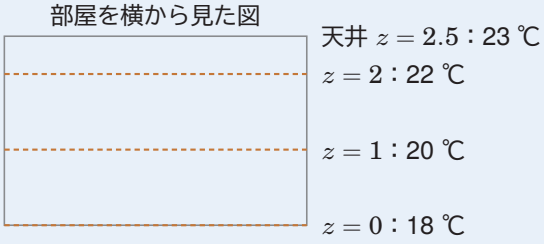
例題 7　3 つの変数の関数と等値面

次の問いに答えましょう。

(1) 部屋の温度が $T(x,\ y,\ z) = 18 + 2z$（℃、z は床からの高さ〔m〕）のとき、高さ 1.5 m の温度と、22 ℃ の等値面を答えましょう。

(2) $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$ の、$f = 4$ の等値面はどんな形ですか。

考え方　⑩の考え。等値面は「その値になる点を全部集めたもの」。



式　(1) $T = 18 + 2 \times 1.5 = 21$。$18 + 2z = 22$ から $z = 2$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ は「原点からの距離の 2 乗が 4」、距離は 2

答え　(1) 21 ℃。22 ℃ の等値面は、床から 2 m の高さの水平な面

(2) 原点を中心とする、半径 2 の球の面

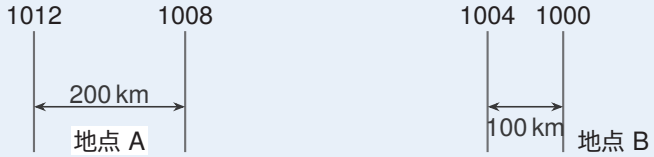
じぶんでとこう 7

(1) 部屋の温度が $T = 17 + 2.5z$〔℃〕のとき、高さ 2 m の温度と、20 ℃ の等値面を答えましょう。(2) $f = x^2 + y^2 + z^2$ の、$f = 25$ の等値面はどんな形ですか。

例題 8　天気図の等圧線の間かく

天気図の等圧線は 4 hPa ごとにかいてあります。地点 A では、となりの等圧線までの距離が 200 km、地点 B では 100 km でした。それぞれ、100 km あたり気圧が何 hPa 変わるかを求め、風が強くなりやすいのはどちらか答えましょう。

考え方　等圧線は、気圧の等高線。線の間がせまいほど、気圧の変わり方（傾き）が大きい。



式　A：$4 \div 200 \times 100 = 2$（hPa）

B：$4 \div 100 \times 100 = 4$（hPa）

答え　A は 2 hPa、B は 4 hPa。気圧の変わり方が大きい B のほうが、風が強くなりやすい

じぶんでとこう 8

4 hPa ごとの等圧線で、地点 C では間が 250 km、地点 D では 125 km でした。100 km あたりの気圧の変化を求め、風が強くなりやすいのはどちらか答えましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① かっこの中の順番を入れかえる

✕ $h(20,\ 30)$ は、東へ 30 m、北へ 20 m の所の高さだから 83。

○ $h(20,\ 30)$ は、東へ 20 m、北へ 30 m の所。$100 - 4 - 18 = 78$。

かっこの 1 つめが x（東）、2 つめが y（北）です。主役の山は東西と南北で形がちがうので、入れかえると値が変わります。

まちがえやすいところ

② 等高線が交わると思う

✕ 80 m の線と 90 m の線が、ある点で交わっている地図をかく。

○ 高さのちがう等高線は、交わらない。

1 つの場所の高さは 1 つだけなので、高さのちがう 2 本の線が同じ点を通ることはありません（峠の点で、同じ高さの線が×の形になることは、せいかくに言うとを見る）。

⚠ まちがえやすいところ

③ 何 m ごとの線かを見ないで比べる

✕　線の間が同じ 5 mm だから、2 つの地図の坂の急さは同じ。

○　10 m ごとの地図と 20 m ごとの地図では、同じ間かくでも、20 m ごとのほうが 2 倍急。

坂の急さは「高さの差÷横の長さ」です。地図の縮尺（3-5）と、線が何 m ごとかの両方を確かめます。

⚠ まちがえやすいところ

④ 鳥かん図の見かけで判断する

✕　鳥かん図で、手前の坂が大きく見えるから、手前が急。

○　急さは、等高線の間かくか、式で比べる。

鳥かん図は、見る向きによって、同じ坂でも急に見えたりゆるやかに見えたりします。図 2 は南東から見た図ですが、本当に急なのは北と南の坂です。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 表の行の番号を北の向きと思う

✕　表 2 で、行の番号が大きい 6 行めのほうが北。

○　北を上に並べたので、行の番号が大きいほど南。6 行めは $y = 0$。

表計算の行の番号は下へふえますが、この本の表では、地図と同じく北を上にしています。A 列の y の数を見て確かめます。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $ をつけ忘れる

✕ B2 に `=100-0.01*B1^2-0.02*A2^2` と入れて、C3 にコピーする。

○ `=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2` と入れてからコピーする。

$ がないと、C3 では C2 と B3 を読んでしまい、x と y ではなく、ほかのマスの高さを使って計算してしまいます。

物理・工学ではこう使う

天気図：等圧線は気圧の等高線

天気図の線（等圧線）は、地上の気圧が同じ所を結んだ線で、気圧の等高線です。気象庁の天気図では、4 hPa ごとに細い線、20 hPa ごとに太い線でかいてあります。等圧線がつまった所ほど、気圧の変わり方が大きく、空気を押す力が強いので、風が強くなります（8-4）。

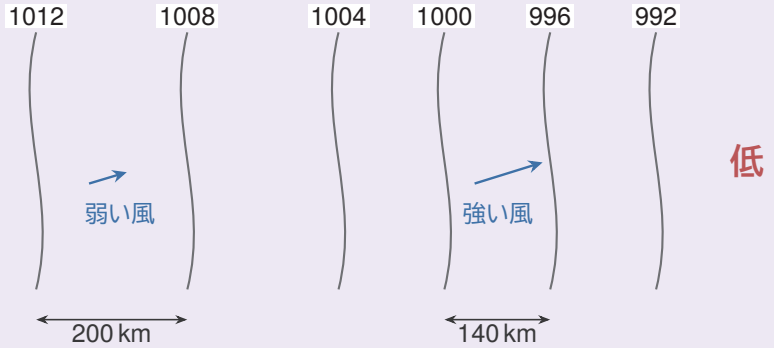


図 10 等圧線（4 hPa ごと）と風。右の低気圧に近いほど線がつまり、風が強い。

物理・工学ではこう使う

サーモグラフィー：温度の地図

物の表面から出る赤外線の強さを、たくさんの小さな受光部（画素）ではかると、表面の温度の地図ができます。これがサーモグラフィー（熱画像）で、2 つの変数の関数 $T(x,\ y)$ を、色分けした表として見せる機械です。電子回路の基板で、熱くなりすぎた部品をさがすのに使われます。

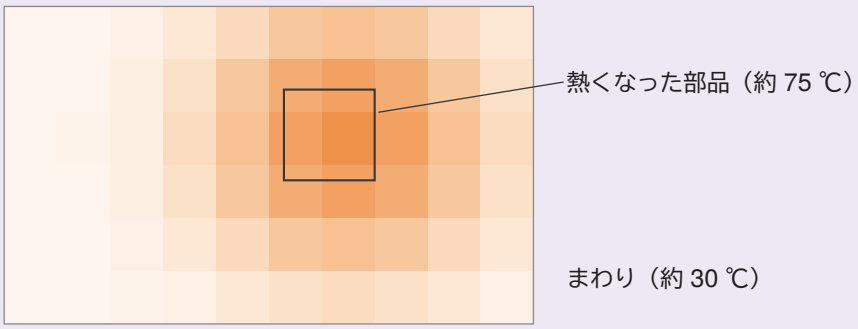


図 11　基板のサーモグラフィーのようす（模式図）。マスごとの温度を色で表した表。

コラム　等高線をかくのは、なぜ 10 m ごと？

2 万 5 千分の 1 の地図では、地図の上の 1 mm が本当の 25 m です。等高線を 10 m ごとにかくと、平均の傾きが 1（45°）の坂でも、線の間は地図の上で $10\,\mathrm{m} \div 25 = 0.4\,\mathrm{mm}$ になります。これより細かくかくと、線がくっついて読めなくなります。地図の縮尺に合わせて、読める間かくを決めているのです。5 万分の 1 の地図では、等高線は 20 m ごとです。

物理・工学ではこう使う

ダムの水ぎわは等高線

ダムに水をためると、水面は水平になるので、水ぎわの線は、水面と同じ高さの等高線になります。ダムを作る前に、地形図の等高線から、どこまで水がくるか、どれだけの水がためられるかを計算します（体積は 8-6）。

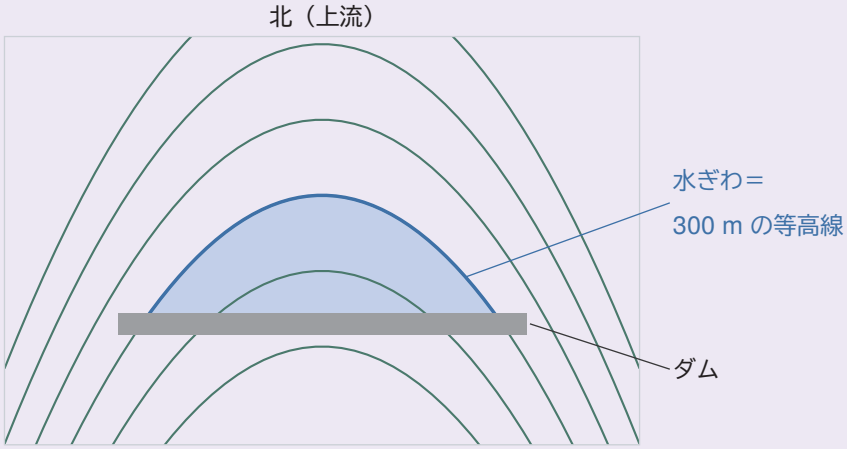


図 12 谷をせき止めたダム（模式図）。緑の線は 20 m ごとの等高線。水面の高さを 300 m にすると、水がたまるのは 300 m の等高線より低い所（青）。

もっと知りたい ★★★★

等高線の地図から、山の体積を見つもる

高さ c の等高線のだ円の面積は、だ円の面積の公式 πab（a、b は⑧の半径）から、約 $222.1 \times (100 - c)$〔$\mathrm{m^2}$〕です。山を厚さ 10 m の板に切り分け、1 枚の体積を「下の等高線の面積× 10 m」とすると、合計は $10 \times 222.1 \times 550 \approx 1\,221\,600$ で少し大きめ、「上の等高線の面積 × 10 m」とすると $10 \times 222.1 \times 450 \approx 999\,500$ で少し小さめです。2 つの平均は約 $1.11 \times 10^6\ \mathrm{m^3}$ で、8-6 で重積分を使って求める値とよく合います。

章末問題

8-1 のまとめ

基本 ★★★★

1 主役の山で、(1) $h(30,\ 40)$ と $h(40,\ 30)$、(2) $h(60,\ 10)$ と $h(10,\ 60)$ を求め、それぞれどちらの場所が高いか答えましょう（例題 1）。

2 表 2 で、E2 に入っている式と、E2 の値を答えましょう（例題 2）。

3 主役の山の、高さ 70 m の等高線の式をだ円の形に変形し、東西の半径と南北の半径を求めましょう（小数第 2 位まで）（例題 3）。

4 主役の山で、60 m の等高線から 50 m の等高線までの平均の傾きを、真東と真北で求め、どちらが急か答えましょう（60 m：$a = 63.25$、$b = 44.72$。50 m：$a = 70.71$、$b = 50.00$）（例題 4）。

5 表 2 の 4 行め（$y = 20$）で、90 m の等高線が通る x を、となりのマスの間をまっすぐ結んで見つもりましょう（小数第 1 位まで）。本当の値は $\sqrt{200} \approx 14.14$ です（例題 5）。

6 4 hPa ごとの等圧線で、地点 E では間が 160 km、地点 F では 80 km でした。100 km あたりの気圧の変化を求め、風が強くなりやすいのはどちらか答えましょう（例題 8）。

7 主役の山で、$h(60,\ 10)$ と $h(10,\ 60)$ を求め、どちらの場所が高いか答えましょう（例題 1）。

8 主役の山で、50 m の等高線から 40 m の等高線までの平均の傾きを、真東と真北で求め、どちらが急か答えましょう（50 m：$a = 70.71$、$b = 50.00$。40 m：$a = 77.46$、$b = 54.77$）（例題 4）。

9 表 2 の 2 行め（$y = 40$）で、60 m の等高線が通る x を見つもりましょう（小数第 1 位まで）。本当の値は $\sqrt{800} \approx 28.28$ です（例題 5）。

チャレンジ ★★★★★

10 主役の山について、（1）$y = 40$ で切った切り口の式と、高さが 59 m になる x（$x > 0$）、（2）$x = 10$ で切った切り口の式と、高さが 67 m になる y（$y > 0$）を求めましょう（例題 6）。

11 （1）部屋の温度が $T = 19 + 1.5z$〔℃〕のとき、高さ 2 m の温度と、20.5 ℃の等値面を答えましょう。（2）$f = x^2 + y^2 + z^2$ の、$f = 16$ の等値面はどんな形ですか（例題 7）。

12 別の山の高さが $g(x,\ y) = 80 - 0.005x^2 - 0.02y^2$〔m〕で表されます。高さ 60 m の等高線をだ円の形に変形し、東西の半径と南北の半径を求めましょう（小数第 2 位まで）。また、この山は、主役の山とくらべて東西に長いか、南北に長いかを答えましょう（例題 3）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 地図の等高線や天気図の等圧線から、高い所・低い所・急な所を読みとれる。 → 35 ページ
- ☐ 2 つの変数の関数を、表・鳥かん図・等高線の 3 通りで表し、表計算と Python で作れる。 → 37 ページ
- ☐ 等高線の式と切り口の関数を求め、3 つの変数の関数の等値面を説明できる。 → 43 ページ

ソラ

切り口の坂が、東と北で別々にわかれば、山のどの向きの坂もわかりそう。次の章で確かめよう。

第 1 部　たくさんの変数の微分

★★★★

8-2 偏微分：ほかを止めて 1 つだけ動かす

道しるべ　この章の前に 3-5 5-3 5-4 5-6 5-15 8-1
この章の先に 8-3 8-4 8-6 8-9

この章でできるようになること

- ★★★ 等高線の地図や数の表から、東へ進むときの坂と北へ進むときの坂を、別々に読みとれる。
- ★★★★ ほかの文字を止めて 1 つの文字で微分する「偏微分」を計算し、点での値の意味を言える。
- ★★★★ 2 回の偏微分を計算して順番によらないことを確かめ、3 つの変数の量や物理の式に使える。

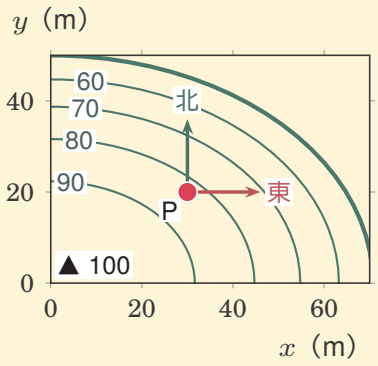
はてな？

8-1 の主役の山

$h(x,\ y) = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$

の、点 P(30, 20) に立っています。x は東へ、y は北へはかった長さ（m）で、高さ h も m です。P の高さは 83 m です。

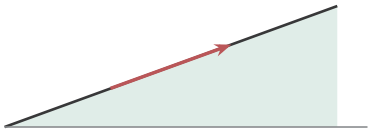
P から**東へ 1 m** 進むと、高さは何 m 変わるでしょう。**北へ 1 m** 進むときはどうでしょう。どちらの向きのほうが、坂は急でしょう。



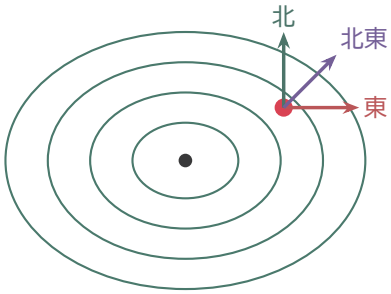
主役の山の、頂上（左下のかど）から北東の部分の等高線（10 m ごと。太い線は 50 m）

3-5 では、グラフの傾きが「変化の速さ」だと学びました。そして、地図の等高線を見て、「山では、進む向きによって坂の急さがちがう」ことにも気づきました。3-5 で約束した「東へ進むときと北へ進むときの傾き」を、この章で求めます。

道が 1 本なら、坂の急さは 1 つの数で言えました（第 5 巻の微分）。でも、山の斜面には、東にも、北にも、ななめにも進めます。向きがたくさんあって、どこから手をつければよいのでしょう。



道が 1 本：坂の急さは 1 つの数
（傾き＝上がった高さ÷進んだ長さ）



山の斜面：向きで坂の急さがちがう

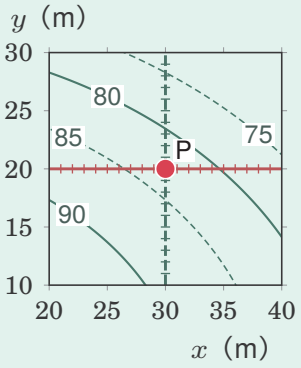
図 1 道が 1 本なら坂は 1 つ（左）。山の斜面では、東・北・北東…と、向きによって坂の急さがちがう（右。黒い点が頂上、線は等高線）。

この章のアイデアは、とても簡単です。**ほかを止めて、1 つだけ動かす**。北には動かずに、東へだけ進む。東には動かずに、北へだけ進む。そうすれば、どちらも「道が 1 本」の場合と同じになり、第 5 巻の微分がそのまま使えます。理科の実験で「調べたい条件だけを変えて、ほかの条件はそろえる」のと同じ考え方です。

★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、地図と表のひき算だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回でわからなくても大丈夫です。表の差で見積もれれば、先の章は読めます。

やってみよう　等高線から、東の坂と北の坂を読もう

P のまわりを大きくした地図です。実線の等高線は 10 m ごと、点線は 5 m ごとです。赤と緑の線の目もりは 1 m ごとです。



1. P を通る東西の線（赤）が、85 m と 80 m の等高線と交わる点の x を読もう。
2. 2 つの点の間の長さで、高さの差 5 m をわろう（東へ進むと下がるので、マイナスをつける）。これが東の坂。
3. P を通る南北の線（緑）でも、同じようにして北の坂を求めよう。
4. どちらの坂が急かな？

①の赤い線（$y = 20$）は、85 m の等高線と $x \approx 26.5$ で、80 m の等高線と $x \approx 34.6$ で交わります。間の長さは約 8.1 m です。8.1 m 東へ進むあいだに 5 m 下がるので、1 m あたりでは

$$-\frac{5}{8.1} \approx -0.62$$

です。③の緑の線（$x = 30$）は、$y \approx 17.3$ と $y \approx 23.5$ で交わり、間は約 6.2 m です。

$$-\frac{5}{6.2} \approx -0.81$$

北の坂のほうが急です（読みとりの小さなずれは気にしなくてよい）。**北のほうが、等高線の間がせまい**からです（3-5）。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-5 傾き＝（上がった高さ）÷（進んだ横の長さ）。下がるときはマイナス。等高線の間がせまい所ほど、坂は急。

8-1 主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$〔m〕。$x$ は東、y は北（m）。y を 1 つの数に止めて切ると、切り口は放物線。表計算の表では、1 行めに東の x、A 列に北の y を並べ、北を上にする。

5-3 微分係数 $f'(a)$：a から少し進んだ点までの傾きで、進む長さを 0 にかぎりなく近づけた先の値。接線の傾き。

5-4 $(x^n)' = nx^{n-1}$。数（定数）を微分すると 0。数をかけた式は、数を外に出して微分する。

5-6 積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$。合成関数の微分：中身の微分をかける（歯車をつなぐとかけ算）。

5-14 $(e^{ax})' = ae^{ax}$（a は数）。

5-15 $(\sin x)' = \cos x$、$(\cos x)' = -\sin x$（角はラジアン）。

数学の道具

目でわかる 山を、2 つの向きに切る ★★★

1 東西に切る・南北に切る

主役の山を、P を通る 2 枚の板で切ってみます。1 枚は東西の向きの板（$y = 20$ の板）、もう 1 枚は南北の向きの板（$x = 30$ の板）です。図 2 の赤と緑の線が、板で切った切り口です。

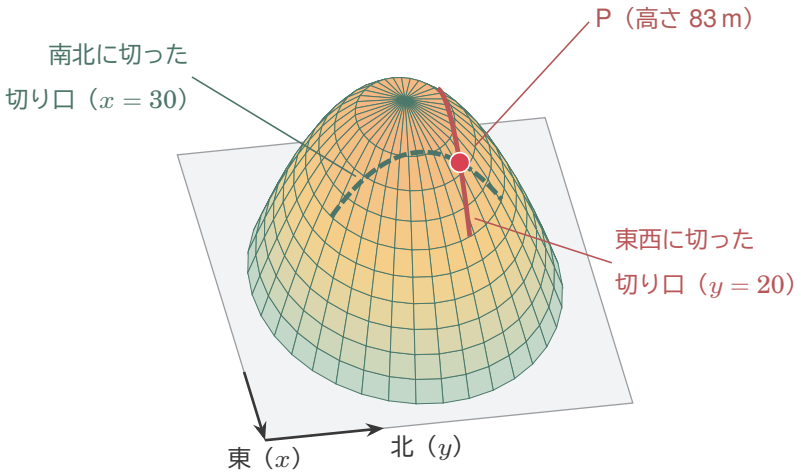


図 2　主役の山を東の空から見た図に、P を通る 2 枚の板で切った切り口をかいた。赤の線は東西の板（$y = 20$）の切り口、緑の点線は南北の板（$x = 30$）の切り口（赤の線は、山の向こう側にかくれる所をかいていない）。

東西の板の上では、y はずっと 20 です。$y = 20$ を山の式に入れると、x だけの関数になります。

$$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$$ 主役の山の式

$$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02 \times 20^2$$ 東西の板の上では $y = 20$ に止まっている

$$h = 100 - 0.01x^2 - 8$$ $0.02 \times 400 = 8$

$$h = 92 - 0.01x^2$$ 東西の切り口の式（放物線）

南北の板の上では、x がずっと 30 なので、同じようにして y だけの関数になります。

$$h = 100 - 0.01 \times 30^2 - 0.02y^2$$ 南北の板の上では $x = 30$ に止まっている

$$h = 91 - 0.02y^2$$ $0.01 \times 900 = 9$。南北の切り口の式

どちらの切り口も、変わる文字が 1 つだけの関数です。1 つの文字の関数なら、第 5 巻の微分で、P での傾き（接線の傾き）が求められます。

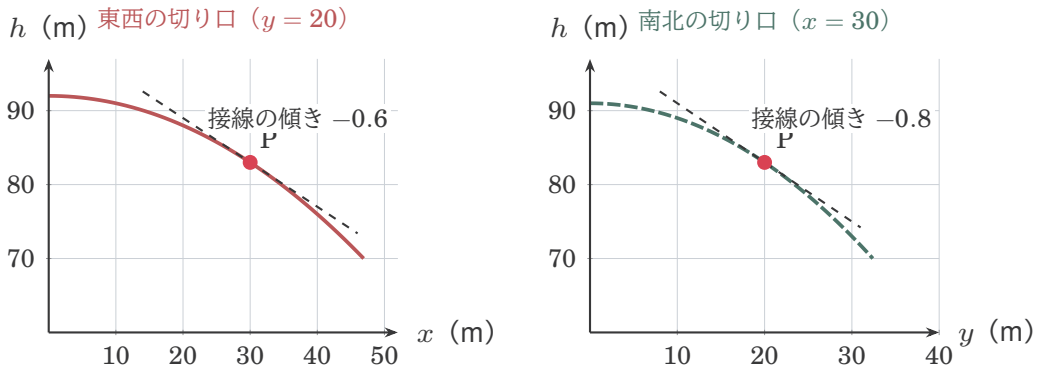


図 3　2 つの切り口のグラフ。黒い点線は P での接線。東西の切り口の傾きは −0.6、南北の切り口の傾きは −0.8（⑥で計算する）。

図 3 で、P での接線を見ると、南北の切り口のほうが、接線が急に下がっています。山の形は 1 つでも、**切る向きによって、ちがう放物線が出てくる**のです。だから坂の急さも、向きによってちがいます。

② 等高線の間かくで、2 つの坂を読む

やってみようでは、地図の上で、P を通る東西の線と南北の線にそって、等高線の間かくを読みました。東西の線にそって読むことは、東西の板で山を切ることと同じです。線の上では $y = 20$ のまま、x だけが変わるからです。

進む線	85 m の等高線	80 m の等高線	坂（1 m あたり）
東西（$y = 20$）	$x = 26.5$	$x = 34.6$	$-5 \div 8.1 \approx -0.62$
南北（$x = 30$）	$y = 17.3$	$y = 23.5$	$-5 \div 6.2 \approx -0.81$

表 1　やってみようの読みとり。2 本の等高線の間の、平均の坂（5-1 の平均の速さと同じ考え）。

この表の坂は、85 m から 80 m までの「平均の坂」です（5-1 の平均の速さ）。P の「その場所の坂」を知るには、進む長さをもっと短くしていきます。それが次の「手でわかる」の段です。

コラム　山の地図と「東の坂」「北の坂」

国土地理院の地形図では、等高線はふつう 10 m ごと（2 万 5 千分の 1 の地図）にかかれています。登山の人は、等高線のつまり方を見て、どこが急な登りかを読みとります。でも、地図の上で読めるのは、いつも「ある線にそった坂」です。東西の線にそって読めば東の坂、南北の線にそって読めば北の坂。この章で学ぶ偏微分は、この「線にそった坂」に名前をつけ、式で計算できるようにしたものです。8-4 では、2 つの坂を組み合わせて、どの向きがいちばん急かを求めます。

手でわかる　表の差で、坂を見積もる　★★★★

3 表の行にそって差、列にそって差

8-1 では、山の高さを表計算の表にしました。列（よこ）が東の x、行（たて）が北の y です。地図と同じように、北を上にするため、上の行ほど y が大きくなるように並べます。P のまわりを 1 m ごとに計算した表が、次の表です。

D4　`=100-0.01*D$1^2-0.02*$A4^2`

	A	B	C	D	E	F
1	$y \diagdown x$	28	29	30	31	32
2	22	82.48	81.91	81.32	80.71	80.08
3	21	83.34	82.77	82.18	81.57	80.94
4	20	84.16	83.59	83.00	82.39	81.76
5	19	84.94	84.37	83.78	83.17	82.54
6	18	85.68	85.11	84.52	83.91	83.28

表 2　主役の山の高さ（m）の表。1 行めに x、A 列に y を入れ、B2 に `=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2` と入れて表全体にコピーした（$ は、コピーしても 1 行め・A 列を指したままにする印）。数式バーは P$(30,\ 20)$ のマス D4（黄色）の式。

北を上にしたので、行の番号が大きいほど南になります。この表で、P（D4、黄色）から東へ 1 m 進むことは、**同じ行の右どなり**（E4、オレンジ）へ動くことです。北へ 1 m 進むことは、**同じ列の上どなり**（D3、緑）へ動くことです。表計算なら、東の差は `=E4-D4`、北の差は `=D3-D4` と入れます。

$$82.39 - 83.00 = -0.61$$ 東へ 1 m：同じ行の右どなり − P

$$82.18 - 83.00 = -0.82$$ 北へ 1 m：同じ列の上どなり − P

東へ 1 m 進むと約 0.61 m、北へ 1 m 進むと約 0.82 m 下がります。等高線から読んだ −0.62、−0.81 とほぼ同じです。**？はてな？**の答えは、まず「ちょうど 1 m 進むと、東は 0.61 m、北は 0.82 m 下がる。北のほうが急」です。

大事なのは、**行にそって動くときは y が止まっていて、列にそって動くときは x が止まっている**ことです。表の上で「行にそって差をとる」「列にそって差をとる」ことが、「ほかを止めて 1 つだけ動かす」ことなのです。

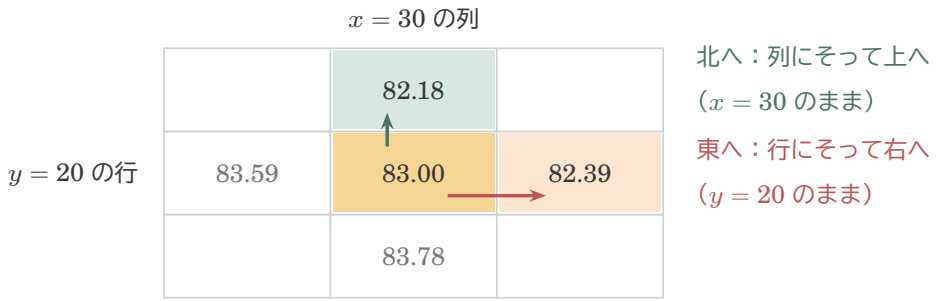


図 4 表の上の「東へ」と「北へ」。東へ動くと x だけが変わり、北へ動くと y だけが変わる。

4 進む長さを短くすると、ある値に近づく

1 m 進んだ差 −0.61 は、P から 1 m 先までの平均の坂です。5-2 で、時間をどんどん短くして瞬間の速さを求めたように、進む長さ Δx を短くしていきます。東の坂は「高さの差 ÷ Δx」、北の坂は「高さの差 ÷ Δy」で、1 m あたりにそろえます。

進む長さ（m）	東の坂 $\dfrac{h(30+\Delta x,\ 20)-83}{\Delta x}$	北の坂 $\dfrac{h(30,\ 20+\Delta y)-83}{\Delta y}$
1	−0.61	−0.82
0.1	−0.601	−0.802
0.01	−0.6001	−0.8002
0.001	−0.60001	−0.80002

表 3　進む長さを $\frac{1}{10}$ ずつにしたときの坂（表計算で、1 行めの x や A 列の y の間かくを細かくして計算した）。

東の坂は −0.6 に、北の坂は −0.8 に、かぎりなく近づいていきます。これが、**P という 1 つの点での**東の坂と北の坂です。❓はてな？の答えは、「P での東の坂は −0.6、北の坂は −0.8。東へ 1 m で約 0.6 m、北へ 1 m で約 0.8 m 下がる。北のほうが急」となります。

両どなりの差で見積もると

表の 1 m ごとの数だけでも、もっとよい見積もりができます。右どなりと左どなりの差を、間の長さ 2 m でわるのです。P をまん中にはさむので、片側だけの差よりも、P での坂に近くなります。

$$\frac{82.39-83.59}{2}=-0.60$$　　東：右どなり−左どなり、を 2 でわる

$$\frac{82.18-83.78}{2}=-0.80$$　　北：上どなり−下どなり、を 2 でわる

主役の山では、両どなりの差は、ちょうど −0.6 と −0.8 になります。山の式が 2 乗までの式（2 次式）なので、右どなりの高さにも左どなりの高さにも、同じ $-0.01\Delta x^2$ の分が入っていて、ひき算で消えるからです（⑥の計算で確かめられる）。

5 坂の地図：坂そのものが、場所で変わる

坂は P だけでなく、山のどこでも求められます。両どなりの差のやり方で、山のあちこちの東の坂と北の坂を計算して、表にしました（x、y は 20 m・15 m ごと）。

東の坂

$y \diagdown x$	−40	−20	0	20	40
30	0.8	0.4	0	−0.4	−0.8
15	0.8	0.4	0	−0.4	−0.8
0	0.8	0.4	0	−0.4	−0.8
−15	0.8	0.4	0	−0.4	−0.8
−30	0.8	0.4	0	−0.4	−0.8

北の坂

$y \diagdown x$	−40	−20	0	20	40
30	−1.2	−1.2	−1.2	−1.2	−1.2
15	−0.6	−0.6	−0.6	−0.6	−0.6
0	0	0	0	0	0
−15	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
−30	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2

表 4 主役の山の、場所ごとの東の坂（左）と北の坂（右）。両どなりの差を 2 でわって求めた。

表から、次のことがわかります。

1. **坂は、場所によってちがう。**山の西側（$x < 0$）では、東の坂がプラスです。西側から東へ進むと、頂上に近づくので、上り坂になるからです。東側（$x > 0$）ではマイナス（下り坂）です。
2. **東の坂は x だけで決まり、x に -0.02 をかけた値になっている。**$x = 20$ なら -0.4、$x = 40$ なら -0.8 です。北へ動いても（同じ列なら）変わりません。
3. **北の坂は y だけで決まり、y に -0.04 をかけた値になっている。**
4. **頂上 $(0,\ 0)$ では、どちらの坂も 0。**頂上は平らです（5-7 の「いちばん高い点では、傾きが 0」と同じ）。

1 つの点の坂は 1 つの数ですが、山全体で見ると、**坂そのものが、場所 $(x,\ y)$ で決まる関数**になっています。②と③の「きまり」は、次の段で、式から作れることを確かめます。

Python で、表の差をとる

表の差は、Python でも計算できます。表全体を一度に計算し、行にそった差と列にそった差を、まとめてとります。

Python

```
import numpy as np
np.set_printoptions(precision=2, suppress=True)  # 小数第 2 位まで表示
x = np.arange(28, 33)              # 東へ 28〜32 m
y = np.arange(22, 17, -1)          # 北から南へ 22〜18 m（地図と同じ向き）
X, Y = np.meshgrid(x, y)           # マスごとの x と y の表
H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2  # 主役の山の高さの表
east = H[:, 1:] - H[:, :-1]        # 右どなり－自分（行にそって差）
north = H[:-1, :] - H[1:, :]       # 上どなり－自分（列にそって差）
print(H[2, 2])                     # 3 行め 3 列め：(30, 20) の高さ
print(east[2])                     # y=20 の行の、東へ 1 m の差
print(north[:, 2])                 # x=30 の列の、北へ 1 m の差
```

実行結果

```
83.0
[-0.57 -0.59 -0.61 -0.63]
[-0.86 -0.82 -0.78 -0.74]
```

`np.meshgrid` は、表のマスごとに、そのマスの x と y を並べた 2 つの表を作る関数です（8-1）。`H[:, 1:]` は「全部の行の、2 列めから右」、`H[:, :-1]` は「全部の行の、いちばん右の列を除いたもの」です。2 つをひくと、どのマスでも「右どなり－自分」になります。Python では、行と列の番号を 0 から数えるので、`H[2, 2]` が表の 3 行め 3 列め、つまり P です。

2 行めの 4 つの数は、$y = 20$ の行で、x が 28 から 29、29 から 30、30 から 31、31 から 32 へ進んだときの差です。P から東へ進む差は、3 つめの -0.61 です。3 行めの 4 つの数は、$x = 30$ の列で、上から順に y が 21 から 22、20 から 21、19 から 20、18 から 19 へ北に進んだときの差です。P から北へ進む差は、2 つめの -0.82 です。どちらも、表で求めた値と同じです。

ここまでで十分

表の「行にそった差」「列にそった差」で、東の坂と北の坂を見積もれれば、8-3〜8-4 の「目でわかる」「手でわかる」の段は読めます。この先は、坂を式でぴったり求めます。

∂ 式でわかる ほかを止めて、1 つだけ微分する ★★★★

6 偏微分：止めた文字は、数と同じ

①で、東西の切り口の式 $h = 92 - 0.01x^2$ を作りました。これを x で微分すると（5-4）、

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -0.02x$$

です。P（$x = 30$）では $-0.02 \times 30 = -0.6$ になり、表で近づいた値と同じです。

でも、$y = 20$ のときだけでなく、どの y のときにも使える式がほしいのです。そこで、y を 20 と決めずに、**文字のまま止めておきます**。y は「止まっている、何かの数」です。

東の坂を、式で作る

進む長さ Δx を使って、P$(x,\ y)$ から東へ Δx 進んだときの平均の坂を、1 行ずつ計算します（5-3 と同じやり方）。y は両方の点で同じ値です。

$h(x+\Delta x,\ y) = 100 - 0.01(x+\Delta x)^2 - 0.02y^2$	東へ Δx 進んだ点（y はそのまま）
$h(x,\ y) = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$	もとの点
差 $= -0.01(x+\Delta x)^2 + 0.01x^2$	上の式－下の式。100 と $-0.02y^2$ は消える
差 $= -0.01(2x\Delta x + \Delta x^2)$	かっこの 2 乗を開いた
$\dfrac{\text{差}}{\Delta x} = -0.02x - 0.01\Delta x$	Δx でわった（1 m あたりの平均の坂）

Δx を 0 にかぎりなく近づけると、$-0.01\Delta x$ は 0 に近づくので、東の坂は $-0.02x$ です。表の②の「きまり」と同じです。$\Delta x = 1$ のときは $-0.02 \times 30 - 0.01 = -0.61$ で、③の表の値とも合います。

3 行めで、$-0.02y^2$ が消えたことに注目しましょう。y が止まっているので、$-0.02y^2$ は、進む前も後も同じ数です。**止まっている文字だけの部分は、ひき算で消える**のです。つまり、ふつうの数と同じで、微分すると 0 になります。

名前と記号

このように、**ほかの文字を止めて、1 つの文字だけを動かして微分する**ことを、**偏微分**（へんびぶん）といいます。「偏」は「かたよる」という意味で、1 つの向きにだけかたよって動かす微分、ということです。

h を x で偏微分したものを、次のように書きます。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x,\ y) - h(x,\ y)}{\Delta x} \qquad (y \text{ は止めておく})$$

∂ は、d を丸めた形の文字で、「ラウンドディー」（丸い d）と読みます。「デル」「パーシャル」と読む人もいて、どれでもかまいません。$\dfrac{\partial h}{\partial x}$ は「ラウンドディー

エイチ、ラウンドディー エックス」と読みます。y で偏微分したものは $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ で、こんどは x を止めておきます。

主役の山では、どちらも同じやり方で計算できます。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -0.02x$$

y を止めて、x で微分（$-0.02y^2$ は数と同じで、微分すると 0）

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -0.04y$$

x を止めて、y で微分（$-0.01x^2$ は数と同じで、微分すると 0）

$-0.02y^2$ を y で微分すると、$-0.02 \times 2y = -0.04y$ です（5-4）。⑤の坂の地図の③の「きまり」と同じになりました。

点での値

点 $(a,\ b)$ での偏微分の値は、$x = a$、$y = b$ を入れて求めます。この本では、$\dfrac{\partial h}{\partial x}(30,\ 20)$ のように、うしろに点を書きます。

$$\frac{\partial h}{\partial x}(30,\ 20) = -0.02 \times 30 = -0.6, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(30,\ 20) = -0.04 \times 20 = -0.8$$

❓はてな？の答えを、式でも確かめられました。**東の坂は -0.6、北の坂は -0.8** です。「P から東へ少し進むと、進んだ長さの 0.6 倍だけ下がり、北へ少し進むと 0.8 倍だけ下がる」という意味です。-0.6 や -0.8 の単位は「m ÷ m」で、1 m 進むあたりに何 m 上がるか、です。

どうして d ではなく ∂ なのか

第 5 巻の $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は、y が x だけで決まるときの書き方でした。h は x と y の 2 つで決まります。もし $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ と書くと、「x が動くあいだ、y はどうしているのか」がわかりません。y も一緒に動いているかもしれないからです（その場合は 8-3 で学びます）。そこで、**「ほかは止めている」という約束がついた微分**を、別の文字 ∂ で書いて区別するのです。

書き方	使うとき	例
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	y が x だけで決まる（変数が 1 つ）	$y = x^2$ なら $2x$
$\dfrac{\partial h}{\partial x}$	h が 2 つ以上の変数で決まり、x だけを動かす	$h = x^2 y$ なら $2xy$

表 5　d と ∂ の使い分け。

コラム　∂ の記号は、だれが使いはじめた？

丸い d の形の記号 ∂ は、18 世紀のフランスで、コンドルセ（1770 年の論文）やルジャンドル（1786 年の論文）が使いはじめたと伝えられています。ルジャンドルは「まぎらわしさをさけるために」偏微分を $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ と書くことにしましたが、のちにこの記号を使うのをやめてしまいました。この記号を広めたのは、ドイツの数学者ヤコビです。1841 年の論文で、偏微分を ∂ で書くことを決めて使いました。その論文は、8-3 で学ぶ「ヤコビアン」（たくさんの偏微分を並べた表の行列式）の研究でした（7-4 のコラム）。いま世界中の工学の本で使われている ∂ は、ヤコビ行列と同じ論文から広まったのです。

せいかくに言うと

「偏微分」ということばは、「偏微分する」（する操作）にも、「偏微分したもの」（できた関数 $\dfrac{\partial h}{\partial x}$）にも使います。できた関数のほうを、とくに**偏導関数**（へんどうかんすう）ともよびます（5-4 の導関数と同じ）。また、点 $(a,\ b)$ での値を偏微分係数とよぶこともあります。極限 lim が 1 つの値に決まらない（とがった所などの）点では、偏微分はできません。この章の関数は、どこでも偏微分できます。

7 偏微分の計算

偏微分の計算に、新しい公式はいりません。**止めた文字を、ふつうの数（たとえば 3）だと思って、第 5 巻の微分をするだけ**です。いくつかの形で、1 行ずつ見ていきます。

止めた文字がかかっている項

$f(x,\ y) = x^2y$ を x で偏微分します。y を止めるので、x^2y は「x^2 に数 y をかけたもの」です。$3x^2$ を微分すると $3 \times 2x$ になるように、数 y は外に出したままです。

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = y \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)$$ y は止めた数なので、外に出す（5-4）

$$= y \times 2x = 2xy$$ x^2 を微分した

こんどは y で偏微分します。x を止めるので、x^2 が数です。x^2y は「数 x^2 に y をかけたもの」です。

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x^2 \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y)$$ x^2 は止めた数なので、外に出す

$$= x^2 \times 1 = x^2$$ y を y で微分すると 1

同じ式でも、どの文字で偏微分するかで、答えがまったくちがいます。たとえば、x と y がかけ算になった xy なら、$\dfrac{\partial}{\partial x}(xy) = y$、$\dfrac{\partial}{\partial y}(xy) = x$ です。

項がいくつもある式

$f = 3x^2y + 2y^3$ を、1 つの項ずつ偏微分して、たします（5-4：たし算の微分は、項ごとに微分してたす）。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y \times 2x + 0 = 6xy$$ $3x^2y$ は $3y$ が数。$2y^3$ は全体が数なので 0

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \times 1 + 2 \times 3y^2 = 3x^2 + 6y^2$$ $3x^2y$ は $3x^2$ が数。$2y^3$ は $6y^2$

e と sin が入った式

$f = e^{-x}\sin y$ では、x で偏微分するとき $\sin y$ が数、y で偏微分するとき e^{-x} が数です。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^{-x})' \times \sin y = -e^{-x}\sin y \qquad (e^{ax})' = ae^{ax} \text{ で } a = -1 \text{（5-14）}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \times (\sin y)' = e^{-x}\cos y \qquad (\sin y)' = \cos y \text{（5-15）}$$

2 つの関数の「積」でも、片方が止めた文字だけの式なら、積の微分（5-6）を使う必要はありません。止めた文字だけの式は、ただの数だからです。

合成関数：中身の偏微分をかける

$f = \sin(2x + 3y)$ では、sin の中身 $u = 2x + 3y$ が x と y の両方で変わります。5-6 の合成関数の微分（歯車）を使います。x で偏微分するとき、y は止まっているので、中身 $u = 2x + 3y$ を x で微分すると 2 です（$3y$ は数）。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(2x + 3y) \times \frac{\partial u}{\partial x}$$

外側の sin を微分して、中身の偏微分をかける

$$= \cos(2x + 3y) \times 2 = 2\cos(2x + 3y)$$

$u = 2x + 3y$ を x で偏微分すると 2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(2x + 3y) \times 3 = 3\cos(2x + 3y)$$

u を y で偏微分すると 3

外側の微分 $\cos(2x + 3y)$ は、どちらでも同じです。ちがうのは、中身の偏微分（2 か 3 か）だけです。

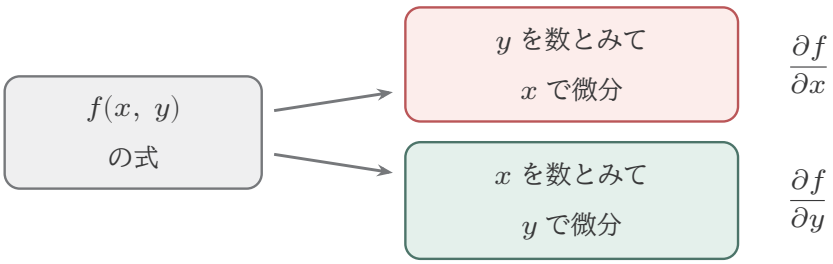


図 5 偏微分の計算は、2 つに分かれる道。どちらの道でも、止めた文字はふつうの数と同じにあつかう。

8 2 回の偏微分と、その順番

第 5 巻（5-5）で、2 回微分すると、グラフの曲がり方（上に出っぱっているか、下にへこんでいるか）がわかりました。偏微分も 2 回できます。主役の山で、まず東の坂 $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x$ を、もう一度 x で偏微分します。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-0.02x) = -0.02$$

これを短く $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ と書きます（5-5 の $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ と同じ書き方）。-0.02 は、「東へ 1 m 進むごとに、東の坂が 0.02 ずつ下がる」という意味です。③の表で、$y = 20$ の行の東の差は -0.57、-0.59、-0.61、-0.63 と、0.02 ずつ下がっていました。東西の切り口が上に出っぱった放物線（∩の形）であることを表しています。同じように、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -0.04$ です。

ちがう文字で、続けて偏微分する

東の坂を、こんどは y で偏微分することもできます。「北へ進むと、東の坂はどう変わるか」です。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-0.02x) = 0$$

$-0.02x$ には y が入っていないので、y で偏微分すると 0 です。⑤の坂の地図で、東の坂は北へ動いても変わりませんでした。これを短く、分母に 2 つの文字を並べて $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}$ と書きます。反対の順の $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-0.04y) = 0$ は、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}$ です。主役の山では、どちらも 0 でした。

2 つの順番の答えは、いつも同じ

主役の山では、たまたまどちらも 0 だったのでしょうか。$f = x^2y$ で調べます。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

x で偏微分してから、y で偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$$

y で偏微分してから、x で偏微分

途中の式（$2xy$ と x^2）はちがうのに、最後はどちらも $2x$ になりました。表でも確かめます。点 $(1,\ 2)$ のまわりで、$\Delta x = \Delta y = 0.1$ の 4 つのマスの値です。

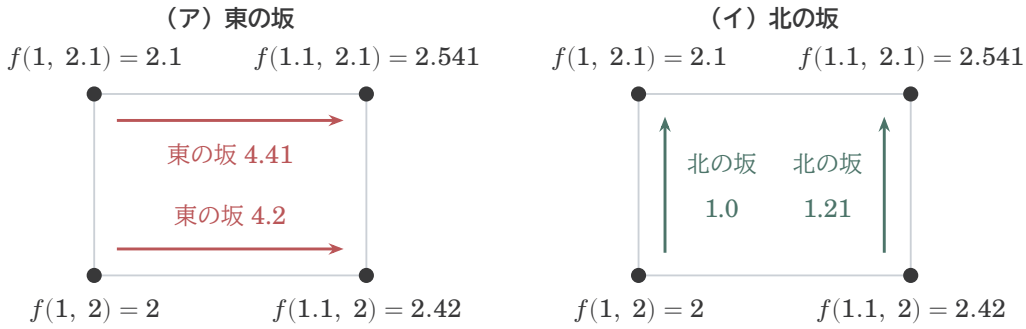


図 6　$f = x^2y$ の、4 つの角の値。（ア）下の辺と上の辺で東の坂を求めた。（イ）左の辺と右の辺で北の坂を求めた（どちらも差を 0.1 でわった）。

$$\frac{4.41 - 4.2}{0.1} = 2.1$$

東の坂が、北へ 0.1 進むとどれだけ変わるか（図 6 の（ア））

$$\frac{1.21 - 1.0}{0.1} = 2.1$$

北の坂が、東へ 0.1 進むとどれだけ変わるか（図 6 の（イ））

どちらも 2.1 です。0.1 をもっと小さくすると、どちらも 2（点 $(1,\ 2)$ での $2x$ の値）に近づきます（0.01 なら 2.01）。

なぜ同じになるのでしょう。4 つの角の値を、それぞれ右上 A、左上 B、右下 C、左下 D とします。（ア）の計算は、「（上の東の坂）－（下の東の坂）」を 0.1 でわったもので、

$$\frac{1}{0.1}\left(\frac{A-B}{0.1}-\frac{C-D}{0.1}\right)=\frac{A-B-C+D}{0.1^2}$$

です。（イ）の計算は、「（右の北の坂）－（左の北の坂）」を 0.1 でわったもので、

$$\frac{1}{0.1}\left(\frac{A-C}{0.1}-\frac{B-D}{0.1}\right)=\frac{A-C-B+D}{0.1^2}$$

です。分子は、どちらも**右上－左上－右下＋左下**で、まったく同じ式です。4 つの角の値の、たす・ひくの組み合わせが同じなので、順番を変えても同じ答えになるのです。数で確かめると $2.541-2.1-2.42+2=0.021$、$0.021\div 0.01=2.1$ です。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$ （偏微分の順番を入れかえても同じ）

だから、2 回の偏微分では、計算しやすい順番を選んでかまいません。

> **せいかくに言うと**
>
> 順番を入れかえても同じになるのは、2 回の偏微分が、場所について切れ目なくなめらかに変わるときです（「連続」という）。工学で出てくる関数は、ほとんどこの条件を満たしています。条件を満たさない、特別に作った関数では、順番によって答えがちがうこともあります。この性質は、数学者の名前から、シュワルツの定理（クレローの定理）とよばれます。4 つの角の考え方は、その証明の出発点です。

⑨ 3 つの変数：部屋の温度と、水の中の圧力

量が 3 つの変数で決まるときも、同じです。**2 つを止めて、1 つだけ動かします。**

ストーブのある部屋の温度

ストーブのある部屋の温度 T〔℃〕が、場所 $(x,\ y,\ z)$（m）で、次のように表されるとします。x はストーブから遠ざかる向き、y は横の向き、z は床からの高さです。

$$T(x,\ y,\ z) = 22 - 0.5x + 1.5z$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -0.5$$

y、z を止める。ストーブから 1 m はなれると、0.5 ℃ 下がる

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

x、z を止める。横に動いても変わらない

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 1.5$$

x、y を止める。1 m 高くなると、1.5 ℃ 上がる

単位は、どれも「℃ ÷ m」、つまり ℃/m です。**偏微分の単位は、（出てくる量の単位）÷（動かした量の単位）**です。$\dfrac{\partial T}{\partial z}$ がプラスなのは、あたたかい空気が上に集まるからです。

水の中の圧力（物理 力-12）

静かな水の中の圧力 p〔Pa〕を考えます。水面を $z = 0$ とし、z は上向きにはかります（水の中は $z < 0$）。水の密度 $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$、重力の加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$、水面の大気圧を p_0 とすると、

$$p = p_0 - \rho g z$$

です（深さ $-z$ の所では、上にある水の重さの分だけ圧力が大きい）。偏微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -1000 \times 9.8 = -9800$$

単位は Pa/m です。水平にどちらへ動いても、圧力は変わりません。上へ 1 m 動くと 9800 Pa 下がり、下へ 1 m もぐると 9800 Pa 上がります。物理第 1 巻

の力-12 で「$\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$、$\dfrac{\partial p}{\partial y}=0$、$\dfrac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$ です（8-2 の偏微分）」と書いたのは、このことです。

もっと知りたい ★★★★

場所と時間の関数：ロープを伝わる波

ロープの片方のはしをゆらすと、波が伝わっていきます。ロープの各点の高さ y〔m〕は、場所 x〔m〕と時刻 t〔s〕の 2 つで決まります。右へ進む波 $y(x,\ t)=0.2\sin(x-2t)$ で考えます。ここでも「ほかを止めて 1 つだけ動かす」です。

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0.2\cos(x-2t)$$

t を止める：ある瞬間の写真で見た、ロープの傾き

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-0.4\cos(x-2t)$$

x を止める：1 つの点が、上下に動く速度

$x=\pi$（約 3.14 m）、$t=0$ では、傾きは $0.2\cos\pi=-0.2$、速度は $-0.4\cos\pi=0.4$ で、上向きに 0.4 m/s です。図 7 で、$t=0$ の写真（青）と、0.25 秒後の写真（オレンジの点線）をくらべると、$x=\pi$ の点が上がっていることがわかります。波の形は右へ動いていますが、ロープの点そのものは、上下に動くだけです。

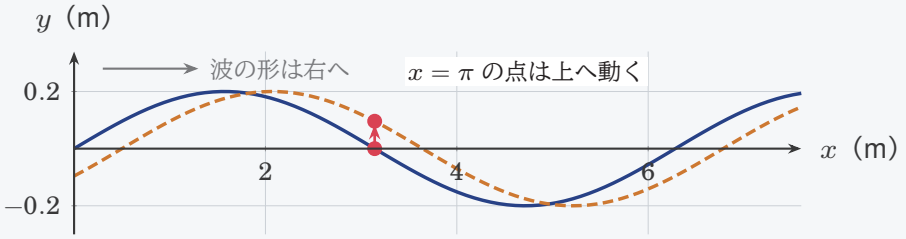


図 7 ロープの波。青が $t=0$ の形、オレンジの点線が 0.25 秒後の形。赤い点は $x=\pi$ の点。

熱が伝わる棒の温度 $T(x,\ t)$ のように、場所と時刻で変わる量のきまりを偏微分で書いた式を**偏微分方程式**といい、8-13 で学びます（6-1 の予告）。

専門書をのぞいてみよう　微分積分の教科書ふうの書き方

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ において、y を固定して x の関数とみたとき、点 $(a,\ b)$ で微分可能ならば、その微分係数を f の点 $(a,\ b)$ における x に関する偏微分係数といい、$f_x(a,\ b)$ または $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)$ で表す。$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ条件については…

訳　「固定して」は「止めて」。f_x は $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ の短い書き方で、多くの専門書が使う（z_x、$\partial_x f$ と書く本もある）。この本では、矢印の x 成分 F_x とまぎれるので使わない。f_{xy} は「x で偏微分してから y で偏微分」（左から順）で、この本の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$。順番によらないので、ふつうは区別しなくてよい。

たいせつ

偏微分	ほかの文字を止めて、1 つの文字だけを動かして微分する
記号	$\dfrac{\partial f}{\partial x}$（$y$ を止める）、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$（$x$ を止める）
計算	止めた文字は、ふつうの数と同じにあつかう
表では	行にそった差÷間かく（東）、列にそった差÷間かく（北）
2 回	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$（順番によらない）
単位	（出てくる量の単位）÷（動かした量の単位）

この章で出てきたことば

偏微分　2 つ以上の変数の関数で、ほかの変数を止めて、1 つの変数だけを動かして微分すること。また、そうしてできた関数。

偏導関数　偏微分してできた関数。主役の山の $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x$ など。

2 回の偏微分　偏微分した関数を、もう一度偏微分したもの。順番を入れかえても同じ。

記号カード 初めて出た章 8-2

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

読み方 ラウンドディー エフ ラウンドディー エックス
意味 偏微分。ほかの変数を止めて、x だけ動かしたときの変化の割合
英語 partial derivative

記号カード 初めて出た章 8-2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

読み方 ラウンドディー 2 乗 エフ、ラウンドディーエックス ラウンドディーワイ
意味 2 回の偏微分。順番によらない
英語 second partial derivative

例題でたしかめよう

例題 1　表の差で、偏微分を見積もる

主役の山の、点 $(40,\ 10)$ のまわりの高さ（m）の表です（列が x、行が y）。

$y \diagdown x$	39	40	41
11	82.37	81.58	80.77
10	82.79	82.00	81.19
9	83.17	82.38	81.57

（1）右どなり・上どなりとの差で、$(40,\ 10)$ の東の坂と北の坂を見積もりましょう。

（2）両どなりの差を 2 でわって、見積もりましょう。

考え方 東は同じ行（$y = 10$）を右へ、北は同じ列（$x = 40$）を上へ。表の間かくは 1 m。

式 （1）東：$81.19 - 82.00 = -0.81$。北：$81.58 - 82.00 = -0.42$

（2）東：$(81.19 - 82.79) \div 2 = -1.60 \div 2 = -0.80$

北：$(81.58 - 82.38) \div 2 = -0.80 \div 2 = -0.40$

答え （1）東 -0.81、北 -0.42。（2）東 -0.80、北 -0.40

式で求めると、次のようになり、（2）と同じです。

$$\frac{\partial h}{\partial x}(40,\ 10) = -0.02 \times 40 = -0.8, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(40,\ 10) = -0.04 \times 10 = -0.4$$

じぶんでとこう 1

主役の山の、点 $(10,\ 30)$ のまわりの高さ（m）の表です。(1) 右どなり・上どなりとの差で、(2) 両どなりの差を 2 でわって、$(10,\ 30)$ の東の坂と北の坂を見積もりましょう。

$y \diagdown x$	9	10	11
31	79.97	79.78	79.57
30	81.19	81.00	80.79
29	82.37	82.18	81.97

例題 2　多項式の偏微分

$f(x,\ y) = 3x^2y + 2y^3$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めましょう。

考え方　項ごとに偏微分する。止めた文字は数と同じ。止めた文字だけの項は 0。

式　$\dfrac{\partial f}{\partial x}$：$y$ を止める。$3x^2y$ は $3y$ が数なので $3y \times 2x = 6xy$

$2y^3$ は x が入っていないので、数と同じで 0

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$：$x$ を止める。$3x^2y$ は $3x^2$ が数なので $3x^2 \times 1 = 3x^2$

$2y^3$ は $2 \times 3y^2 = 6y^2$

答え　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6xy$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6y^2$

じぶんでとこう 2

$f(x,\ y) = x^3 - 4xy^2 + 5y$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めましょう。

例題 3　主役の山の、点での坂

主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の、点 $(-20,\ 10)$ での $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ を求め、その意味を言いましょう。

考え方　⑥の偏導関数 $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.04y$ に、$x = -20$、$y = 10$ を入れる。符号がプラスなら上り、マイナスなら下り。

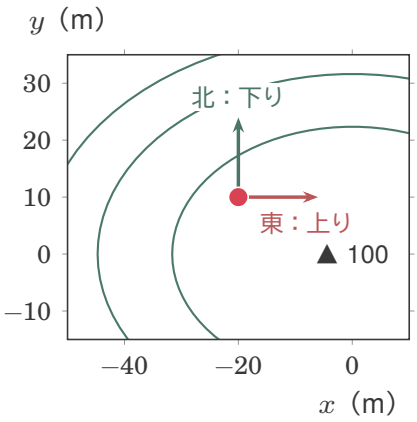
式　$\dfrac{\partial h}{\partial x}(-20,\ 10) = -0.02 \times (-20) = 0.4$

$\dfrac{\partial h}{\partial y}(-20,\ 10) = -0.04 \times 10 = -0.4$

答え　$\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0.4$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.4$。東へ少し進むと、進んだ長さの 0.4 倍上がり（上り坂）、北へ少し進むと 0.4 倍下がる（下り坂）。

$(-20,\ 10)$ は頂上の西にあります。だから、東へ進むと頂上に近づき、上り坂になります。北へ進むと頂上から遠ざかるので、下り坂です。

東の坂と北の坂の大きさは、どちらも 0.4 で同じです。この点では、東へ進んでも北へ進んでも、同じ急さで、上るか下るかだけがちがうのです。



じぶんでとこう 3

主役の山の、点 $(20,\ -30)$ での $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ を求め、その意味を言いましょう。また、東へ進むときと北へ進むときでは、どちらの坂が急ですか。

例題 4　e・sin と合成関数

次の関数を、x と y で偏微分しましょう。

(1)　$f = e^{-x}\sin y$　　(2)　$g = \sin(2x+3y)$

考え方　(1) 片方が止めた文字だけの式なら、それは数。(2) 中身 $2x+3y$ の偏微分をかける（5-6）。

式　(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = (e^{-x})'\sin y = -e^{-x}\sin y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}(\sin y)' = e^{-x}\cos y$

(2)　$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \cos(2x+3y)\times 2 = 2\cos(2x+3y)$

$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \cos(2x+3y)\times 3 = 3\cos(2x+3y)$

答え　(1)　$-e^{-x}\sin y$、$e^{-x}\cos y$。(2)　$2\cos(2x+3y)$、$3\cos(2x+3y)$

例題 5　3 つの変数の偏微分

$f(x,\ y,\ z) = xy^2z^3$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$、$\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を求め、点 $(1,\ 2,\ 1)$ での値を計算しましょう。

考え方　2 つの文字を止めて、残りの 1 つで微分する。

式　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$（$y^2z^3$ が数）、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\times 2y\times z^3 = 2xyz^3$（$xz^3$ が数）

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy^2\times 3z^2 = 3xy^2z^2$（$xy^2$ が数）

点 $(1,\ 2,\ 1)$：$2^2\times 1^3 = 4$、$2\times 1\times 2\times 1^3 = 4$、$3\times 1\times 2^2\times 1^2 = 12$

答え　y^2z^3、$2xyz^3$、$3xy^2z^2$。点 $(1,\ 2,\ 1)$ では 4、4、12

じぶんでとこう 4

次の関数を、x と y で偏微分しましょう。

(1) $f = e^{-2x}\sin y$

(2) $g = \sin(3x + y)$

じぶんでとこう 5

次の関数の、3 つの偏微分を求め、点 $(1,\ 3,\ 2)$ での値を計算しましょう。

$f(x,\ y,\ z) = x^2yz + z^2$

例題 6　2 回の偏微分と、その順番

次の関数の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求め、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ が等しいことを確かめましょう。

(1) $f = x^3y^2$　　(2) $f = e^{2x}\sin y$

考え方　まず 1 回ずつ偏微分し、それをもう一度偏微分する。2 つの順番で計算してくらべる。

式　(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$

$\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) = 6x^2y$、$\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^3y) = 6x^2y$（同じ）

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}\sin y$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}\cos y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x}\sin y$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{2x}\sin y$（$(\cos y)' = -\sin y$）

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2e^{2x}\sin y) = 2e^{2x}\cos y$、$\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{2x}\cos y) = 2e^{2x}\cos y$（同じ）

答え　(1) $6xy^2$、$2x^3$、2 つの順番はどちらも $6x^2y$。(2) $4e^{2x}\sin y$、$-e^{2x}\sin y$、どちらも $2e^{2x}\cos y$

じぶんでとこう 6

次の関数の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求め、2 つの順番の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ が等しいことを確かめましょう。

(1) $f = x^2y^4$　　(2) $f = e^{3x}\cos y$

例題 7　物理の式を偏微分する

(1) 抵抗 R〔Ω〕に電圧 V〔V〕をかけたときの電力は $P = \dfrac{V^2}{R}$〔W〕です。$V = 12$、$R = 6$ での $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ と $\dfrac{\partial P}{\partial R}$ を求め、意味を言いましょう。

(2) 水の中の圧力 $p = p_0 - 9800z$〔Pa〕(z は上向き、m) で、10 m もぐると圧力は何 Pa 上がりますか。

考え方　(1) $\dfrac{V^2}{R} = V^2 \times R^{-1}$ と見る。V で偏微分するときは R^{-1} が数、R で偏微分するときは V^2 が数。(2) $\dfrac{\partial p}{\partial z}$ は一定なので、それに z の変化をかける。

式　(1) $\dfrac{\partial P}{\partial V} = \dfrac{2V}{R} = \dfrac{2\times 12}{6} = 4$

$\dfrac{\partial P}{\partial R} = V^2 \times (-R^{-2}) = -\dfrac{V^2}{R^2} = -\dfrac{144}{36} = -4$

(2) $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -9800$。もぐると z は -10 変わるので

$-9800 \times (-10) = 98\,000$

答え　(1) $\dfrac{\partial P}{\partial V} = 4\,\mathrm{W/V}$：$R$ はそのままで電圧を 1 V 上げると、電力は約 4 W ふえる。$\dfrac{\partial P}{\partial R} = -4\,\mathrm{W/\Omega}$：電圧はそのままで抵抗を 1 Ω ふやすと、約 4 W へる。(2) 98 000 Pa 上がる

$(R^{-1})' = -R^{-2}$ は、5-4 の $(x^n)' = nx^{n-1}$ で $n = -1$ としたものです。いまの電力は $\dfrac{144}{6} = 24\,\mathrm{W}$ です。

じぶんでとこう 7

（1）質量 m〔kg〕、速さ v〔m/s〕の物の運動エネルギーは $K=\frac{1}{2}mv^2$〔J〕です。$m=2$、$v=3$ での $\frac{\partial K}{\partial m}$ と $\frac{\partial K}{\partial v}$ を求めましょう。

（2）部屋の温度 $T=22-0.5x+1.5z$〔℃〕（z は高さ、m）で、2 m 高い所へ動くと、温度は何℃上がりますか。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

止めた文字まで微分する

× $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)=2xy+x^2$

○ $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)=2xy$

x で偏微分するとき、y は止まった数です。$3x^2$ の微分が $6x$ になるのと同じで、y は外に出したまま。積の微分のように y まで微分してはいけません。

まちがえやすいところ

止めた文字だけの項を残す

× $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x+y^2$

○ $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x$

x で偏微分するとき、y^2 はただの数です。数を微分すると 0 です（5-4）。⑥の東の坂で、$-0.02y^2$ がひき算で消えたことを思い出しましょう。

⚠ まちがえやすいところ

d と ∂ をまぜる

✕　$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ で、$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -0.02x$

○　$\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x$

h は x と y の 2 つの変数の関数なので、「y を止めた」ことがわかる ∂ で書きます。切り口の式 $h = 92 - 0.01x^2$ のように、変数が 1 つになった式なら d でかまいません。

⚠ まちがえやすいところ

どの点での値か

✕　主役の山の東の坂は -0.6

○　点 $(30,\ 20)$ での東の坂は -0.6。東の坂は $-0.02x$ で、場所で変わる偏微分の値は、点ごとに決まります。⑤の坂の地図のように、$x = -20$ では $+0.4$（上り坂）です。値を答えるときは、どの点の値かを必ず書きましょう。

⚠ まちがえやすいところ

中身の偏微分をかけ忘れる

✕　$\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(2x + 3y) = \cos(2x + 3y)$

○　$\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(2x + 3y) = 2\cos(2x + 3y)$

sin の中身 $2x + 3y$ も x で変わるので、中身を x で偏微分した 2 をかけます（5-6 の合成関数の微分）。y で偏微分するときにかけるのは 3 です。

⚠ まちがえやすいところ

2 回の偏微分を 2 乗とまちがえる

✕ $f = x^2y$ で、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2xy)^2 = 4x^2y^2$

○ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の「2」は、2 回偏微分するという印です。1 回めの答えを 2 乗するのではありません（5-5 の $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ と同じ）。

⚠ まちがえやすいところ

表の差の向き

✕ 北の坂を、表の「下どなり－自分」で求める

○ 北の坂は「上どなり－自分」（地図と同じく、上が北）

この章の表は、北を上にして、上の行ほど y が大きくなるように並べています。下どなりとひくと、南へ進んだ差になり、符号が逆になります。表を作るときは、どちらが北かを必ず確かめましょう。

コラム　理科の実験と「ほかを止める」

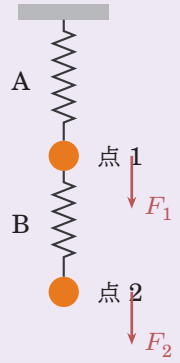
小学 5 年の理科では、ふりこが 1 往復する時間を、ふりこの長さ・おもりの重さ・ふれはばを **1 つずつ変えて**調べました。調べたい条件だけを変え、ほかの条件はそろえておく実験です。もし長さと重さをいっしょに変えたら、時間が変わったのがどちらのせいなのか、わからなくなってしまいます。偏微分は、この「1 つずつ変えて調べる」を、式の上で行う方法です。そして 8-3 では、いくつもの条件が同時に変わったときの変化も、1 つずつ調べた結果（偏微分）をたし合わせれば求められることを学びます。

物理・工学ではこう使う

● **水の圧力と、水面が平らなわけ（物理 力-12）**
静かな水の中では、⑨のように横の偏微分は 0、$\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ です。同じ深さなら、どこでも同じ圧力です。ダムのかべは、深い所ほど大きな圧力を受けるので、下ほど厚く作られています。つながった容器（連通管）で水面の高さがそろうのも、横の圧力に差があると水が流れて差をなくすからです。

深いほど大きく押す

● **ばねの「のび」を、エネルギーの偏微分で求める（物理 力-11）**
天井から、ばね A（$k_A = 100\,\mathrm{N/m}$）、点 1、ばね B（$k_B = 50\,\mathrm{N/m}$）、点 2 の順につるし、点 1 に $F_1 = 2\,\mathrm{N}$、点 2 に $F_2 = 1\,\mathrm{N}$ の力を下向きにかけます。ばね A は $F_1 + F_2$、ばね B は F_2 の力で引かれます。ばねにたまるエネルギーは、のび $x = \dfrac{F}{k}$ を $\dfrac{1}{2}kx^2$（5-12）に入れて $\dfrac{F^2}{2k}$ なので、全体では



$$U = \frac{(F_1 + F_2)^2}{2k_A} + \frac{F_2^2}{2k_B}$$

です。F_2 を止めて F_1 で偏微分すると $\dfrac{F_1 + F_2}{k_A} = \dfrac{3}{100} = 0.03\,\mathrm{m}$、$F_1$ を止めて F_2 で偏微分すると $\dfrac{F_1 + F_2}{k_A} + \dfrac{F_2}{k_B} = 0.03 + 0.02 = 0.05\,\mathrm{m}$ です。これは、点 1 と点 2 が下がる長さ（ばね A ののび、ばね A と B ののびの和）とぴったり同じです。「ほかの力を止めて 1 つの力で偏微分すると、その力の点の動きになる」。これが物理 力-11 の**カスティリアーノの定理**で、橋のはりや骨組みのたわみを計算するのに使われます。

物理・工学ではこう使う

● トランジスタの「増幅する力」

スマホやパソコンの中には、トランジスタ（MOSFET）という部品が何十億個も入っています。トランジスタを流れる電流 I_D は、ゲートという入口の電圧 V_{GS} と、出口側の電圧 V_{DS} の 2 つで決まる、2 つの変数の関数です。V_{DS} を止めて V_{GS} で偏微分した $\dfrac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}$ を**相互コンダクタンス**といい、入口の電圧の小さな変化を、どれだけ大きな電流の変化にできるか（増幅する力）を表します。

● 写真の輪郭を見つける

デジタル写真は、小さな点（画素）の明るさ I を並べた表です。明るさは場所 $(x,\ y)$ で決まる、2 つの変数の関数です。③と同じように、表の行にそって「右どなり－自分」の差をとると、物のふち（明るさが急に変わる所）でだけ大きな数になります。これは $\dfrac{\partial I}{\partial x}$ を表の差で見積もったものです。列にそって差をとれば $\dfrac{\partial I}{\partial y}$ です。カメラのピント合わせや、自動車が道路の白線を見つける計算などに、この考え方が使われています。

20	20	20	200	200
0	0	180	0	

上の数：明るさ

下の数：右どなり－自分

● 設計の「感度」：条件を 1 つずつ変える

機械や電気回路を設計するときは、「この寸法（抵抗の値、電圧）を少し変えたら、性能はどれだけ変わるか」を調べます。ほかの条件を止めて 1 つだけ変えたときの変わり方、つまり偏微分を**感度**といいます。例題 7 の $\dfrac{\partial P}{\partial V} = 4\,\mathrm{W/V}$ も感度です。感度の大きい部品ほど、ていねいに作ります。いくつもの条件が同時にずれたときは、8-3 で考えます。

章末問題

8-2 のまとめ

基本 ★★★★

1 主役の山の、点 $(20,\ -10)$ のまわりの高さ (m) の表です (列が x、行が y)。(1) 右どなり・上どなりとの差で、(2) 両どなりの差を 2 でわって、$(20,\ -10)$ の東の坂と北の坂を見積もりましょう。

$y \diagdown x$	19	20	21
-9	94.77	94.38	93.97
-10	94.39	94.00	93.59
-11	93.97	93.58	93.17

2 $f(x,\ y) = 2x^3y - 5xy^2 + y$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めましょう。

3 主役の山の、点 $(-10,\ -20)$ での $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ を求め、東へ進むときと北へ進むときの坂の意味を言いましょう。

4 次の関数を、x と y で偏微分しましょう。

(1) $f = e^{-3x}\sin y$　　(2) $g = \sin(x + 5y)$

5 $f = x^4y^3$ の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求め、2 つの順番の 2 回の偏微分が等しいことを確かめましょう。

6 $f(x,\ y,\ z) = x^3yz^2$ について、3 つの偏微分を求め、点 $(1,\ 1,\ 2)$ での値を計算しましょう。

7 電力 $P = \dfrac{V^2}{R}$ 〔W〕で、$V = 100$、$R = 20$ のときの $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ と $\dfrac{\partial P}{\partial R}$ を求め、意味を言いましょう。

チャレンジ ★★★★★

8 別の山 $h = 60 - 0.01x^2 - 0.01xy - 0.02y^2$〔m〕の、点 $(10,\ 10)$ での高さ、東の坂、北の坂を求めましょう。東と北では、どちらが急ですか。

9 $f = x^2e^{3y}$ の $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ と、2 つの順番の 2 回の偏微分を求めましょう。

10 海水の中の圧力は $p = p_0 - 1030 \times 9.8 \times z$〔Pa〕（$z$ は上向き、m。海水の密度を $1030\,\mathrm{kg/m^3}$ とした）です。$\dfrac{\partial p}{\partial x}$、$\dfrac{\partial p}{\partial y}$、$\dfrac{\partial p}{\partial z}$ を求め、5 m もぐると圧力が何 Pa 上がるかを答えましょう。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 等高線や数の表から、東の坂と北の坂を別々に読みとれる。
  → 70 ページ
- ☐ ほかを止めて 1 つだけ動かす偏微分を計算し、点での値の意味を言える。
  → 75 ページ
- ☐ 2 回の偏微分を計算して順番によらないことを確かめ、3 つの変数の量に使える。
  → 81 ページ

ミナ

東の坂と北の坂が別々にわかったね。8-3 では、ななめに進んだときの変わり方を、この 2 つの坂から組み立てるよ。

第 1 部　たくさんの変数の微分

★★★★★

8-3 全微分：少し動いたときの変化

道しるべ　この章の前に 3-14 4-9 5-6 5-8 5-17 7-2 7-4 7-11 8-2
この章の先に 8-4 8-6 8-7 8-13

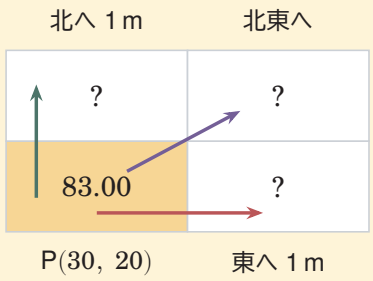
この章でできるようになること

- ★★★ ななめに少し進んだときの変化を、東の変化と北の変化のたし算で見積もれる。
- ★★★★ 全微分で、近似の値と、はかった値のずれ（誤差）の伝わり方を計算できる。
- ★★★★★ 連鎖律と、偏微分を並べたヤコビ行列を使って、ロボットの手の動きや面積の倍率（ヤコビアン）を求められる。

はてな？

8-2 で、主役の山の $\mathrm{P}(30,\ 20)$ では、東の坂が -0.6、北の坂が -0.8 だとわかりました。

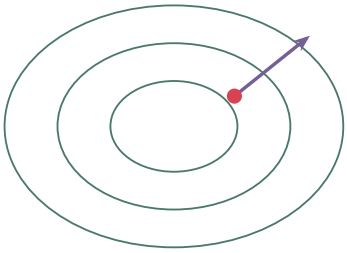
では、P から**東へ 1 m、北へ 1 m**、つまり北東へななめに進むと、高さはどれだけ変わるでしょう。2 つの坂から、計算で予想できるでしょうか。



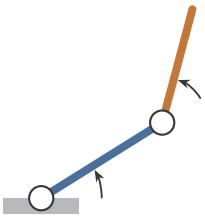
東の坂 -0.6、北の坂 -0.8。北東のマスは？

8-2 では、「ほかを止めて 1 つだけ動かす」ことで、東の坂と北の坂を別々に求めました。でも、本当に山を歩くときは、東と北に同時に進むことがほとんどで

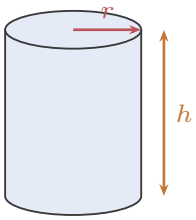
す。ロボットの腕は、肩とひじが同時に回ります。工場ではかる部品の長さは、たての長さも横の長さも、同時に少しずつずれています。



山道を、東と北に
同時に進む



肩とひじが
同時に回る



半径も高さも
少しずつずれる

図 1　いくつもの量が、同時に少しずつ変わる場面。

やってみよう　ななめのマスへの変化を、表で調べよう

8-2 の主役の山の表から、P のまわりの 4 マスだけを取り出します（1 行めに東の x、A 列に北の y。北が上）。

1. P（B3）から東へ 1 マス（C3）。差 =C3-B3 を求めよう。
2. C3 から北へ 1 マス（C2）。差 =C2-C3 を求めて、①とたそう。
3. P から北東のマス（C2）への差 =C2-B3 を、②とくらべよう。
4. 東の坂 −0.6 と北の坂 −0.8 の和 −1.4 とも、くらべよう。

	A	B	C
1	$y \diagdown x$	30	31
2	21	82.18	81.57
3	20	83.00	82.39

B2 に `=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2` を入れ、C3 までコピー（8-2 と同じ式）。P は B3（黄）。

①は $82.39 - 83.00 = -0.61$、②は $81.57 - 82.39 = -0.82$ で、たすと -1.43 です。③の北東のマスとの差も、$81.57 - 83.00 = -1.43$ で、②とまったく同じです。④の -1.4 とは、0.03 しかちがいません。

この章では、**いくつもの量が同時に少しずつ変わったとき**の変化を、8-2 の偏微分を組み合わせて求めます。答えは、とても簡単な「たし算」です。そのたし算から、第 7 巻で約束した「ヤコビ行列の作り方」も出てきます。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、8-2 の偏微分と、たし算・かけ算だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 8-2　偏微分：ほかを止めて 1 つだけ動かして微分する。主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の $\mathrm{P}(30,\ 20)$ では、東の坂 -0.6、北の坂 -0.8。
- 5-8　短い時間（少しの変化）なら、変化はかけ算で近似できる：$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$。
- 5-6　合成関数の微分：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$（歯車をつなぐと、回る速さはかけ算）。
- 7-2　ロボットの腕 $L_1 = 0.30\,\mathrm{m}$、$L_2 = 0.25\,\mathrm{m}$、30°・45°：手の速度 $\dot{\vec{p}} = J\dot{\vec{\theta}}$。1 列めは肩だけ、2 列めはひじだけを回したときの手の速度。
- 7-4　行列式は面積の倍率。ロボットの $\det J = 0.0530$。
- 3-14　標準偏差：はかった値のばらつきを 1 つの数で表したもの。

数学の道具

目でわかる　ななめの動きを、東と北に分ける　★★★

1 ななめに進むのは、東へ進んでから北へ進むのと同じ

P から北東のマスへ、ななめにまっすぐ進んでも、東へ 1 マス進んでから北へ 1 マス進んでも、最後に着く場所は同じです。高さは場所だけで決まるので、**着いた場所の高さは、どの道を通っても同じ**です。だから、ななめの変化は、階段のように「東への変化」と「北への変化」に分けて、たし算すればよいのです。

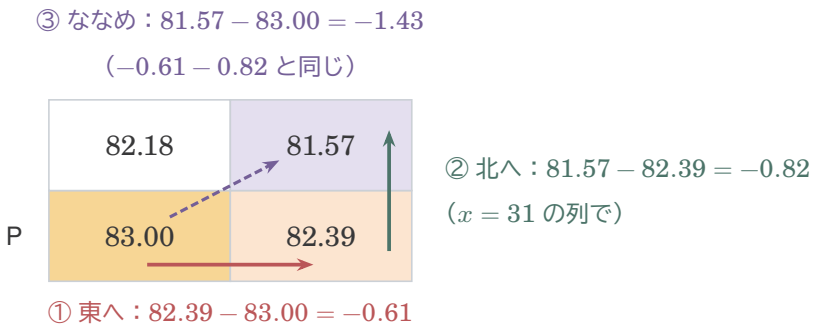


図 2 表の 4 つのマス。ななめの変化（むらさきの点線）は、東への変化（赤）と北への変化（緑）のたし算に、ぴったり等しい。

つぎに、①と②のそれぞれを、8-2 の坂で見積もります。8-2 で学んだように、東へ 1 m 進んだときの変化は「東の坂× 1 m」でだいたい求められます（5-8 の「少しならかけ算」）。北へも同じです。

$$\text{東への変化} \approx -0.6 \times 1 = -0.6$$

東の坂×東へ進んだ長さ（本当は −0.61）

$$\text{北への変化} \approx -0.8 \times 1 = -0.8$$

北の坂×北へ進んだ長さ（本当は −0.82）

$$\text{ななめの変化} \approx -0.6 + (-0.8) = -1.4$$

2 つをたす（本当は −1.43）

❓はてな？の答えは、「**東の坂×東へ進んだ長さ＋北の坂×北へ進んだ長さ**で、およそ −1.4。つまり約 1.4 m 下がる（本当は 1.43 m）」です。

少しずれる、2 つのわけ

本当の値 −1.43 と、0.03 だけちがいます。わけは 2 つあります。1 つめは、坂が P からはなれると少しずつ変わることです（8-2 の坂の地図）。1 m 進むあいだに、東の坂は −0.6 から −0.62 に変わっていきます。2 つめは、②の北への 1 歩は、P の列（$x = 30$）ではなく、東へ 1 マス進んだ列（$x = 31$）で歩いていることです。どちらも、進む長さを短くすれば、小さくなります（③で確かめます）。

② 山の面を、小さな平らな板とみる

地球は丸いのに、校庭は平らに見えます。同じように、曲がった山の面も、P のすぐ近くだけを見れば、**平らな板**とみなせます。その板のかたむきは、東の坂と北の坂の 2 つで決まります。

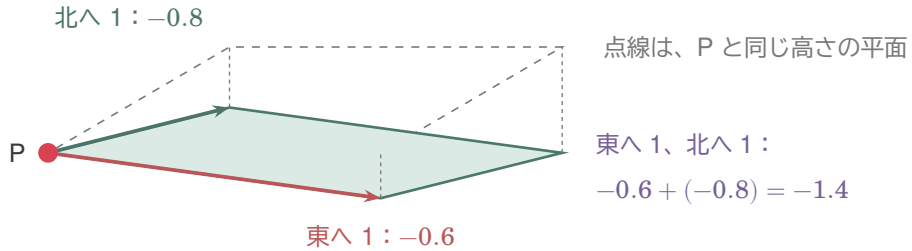


図 3　P の近くの、平らな板（緑）。板の上では、東へ 1 と北へ 1 の変化をたすと、北東のかどの変化に「ちょうど」なる（板の各辺はまっすぐだから）。

平らな板の上では、東へ進むと、進んだ長さに比例して下がり（傾き -0.6）、北へ進むと比例して下がります（傾き -0.8）。東へ Δx、北へ Δy 進んだときの変化は、

$$\Delta h = -0.6\,\Delta x + (-0.8)\,\Delta y$$

で、**板の上ならぴったり**です。本物の山の面は少し曲がっているので、板とのずれの分だけ、少しずれます。でも、P に近い所ほど、山の面と板はよく重なります。

この板を、P での**接平面**（せっへいめん）といいます。第 5 巻で、曲線にいちばんよくそう直線を「接線」とよびました（5-3）。接線の 2 次元版が、接平面です。

手でわかる　近似の当たりと、誤差の伝わり方　★★★★

③ 進む長さを短くすると、近似はどんどん当たる

東にも北にも同じ長さ d だけ進み、「東の坂× d ＋北の坂× d」の予想と、本当の変化をくらべます。表計算でも Python でも計算できます。ここでは Python で、d を 1、0.1、0.01 と短くしてみます。

Python

```
def h(x, y):                          # 主役の山の高さ（m）
    return 100 - 0.01*x**2 - 0.02*y**2
for d in [1, 0.1, 0.01]:              # 東へも北へも d m 進む
    approx = -0.6*d + (-0.8)*d        # 東の坂× d ＋ 北の坂× d
    real = h(30 + d, 20 + d) - h(30, 20)   # 本当の変化
    gap = real - approx               # ずれ
    print(d, round(approx, 6), round(real, 6), round(gap, 6))
```

実行結果

```
1 -1.4 -1.43 -0.03
0.1 -0.14 -0.1403 -0.0003
0.01 -0.014 -0.014003 -3e-06
```

def は、自分で関数を作る書き方で、h(30, 20) とすると高さ 83 が返ってきます（3-3 の「入れると出てくる」）。round(…, 6) は小数第 6 位までに丸める命令です。-3e-06 は -3×10^{-6}、つまり -0.000003 のことです。

進む長さ d（m）	予想（2 つの坂）	本当の変化	ずれ
1	-1.4	-1.43	-0.03
0.1	-0.14	-0.1403	-0.0003
0.01	-0.014	-0.014003	-0.000003

表 1　d を $\frac{1}{10}$ にすると、予想と本当の変化は $\frac{1}{10}$ に、ずれは $\frac{1}{100}$ になる。

表の大事な点は、**ずれのへり方**です。d を $\frac{1}{10}$ にすると、変化そのものは $\frac{1}{10}$ になりますが、ずれは $\frac{1}{100}$ になります。ずれは d の 2 乗に比例して、ずっと速く小さくなるのです。だから、少しの変化なら、「坂×進んだ長さ」のたし算で、ほとんどぴったり求められます。

ほかの向きでも

東と北の進み方を変えても、同じたし算で予想できます（1 m ずつ。西や南へ進むときは、進んだ長さをマイナスにする）。

進み方 $(\Delta x,\ \Delta y)$	予想 $-0.6\,\Delta x - 0.8\,\Delta y$	本当の変化
北東 $(1,\ 1)$	$-0.6 - 0.8 = -1.4$	-1.43
南東 $(1,\ -1)$	$-0.6 + 0.8 = 0.2$	0.17
北西 $(-1,\ 1)$	$0.6 - 0.8 = -0.2$	-0.23
南西 $(-1,\ -1)$	$0.6 + 0.8 = 1.4$	1.37

表 2　4 つのななめの向き。南東へ進むと少し上がり、南西へ進むといちばん上がる（頂上 $(0,\ 0)$ は南西のほう）。

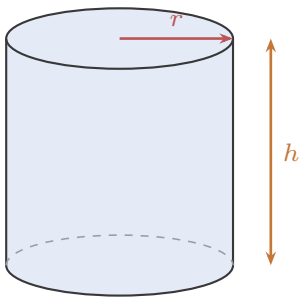
どの向きでも、ずれは -0.03 です。主役の山の式では、ずれをきちんと計算すると、次のようになります（もっと知りたいで確かめます）。

$$\text{ずれ} = -0.01\,\Delta x^2 - 0.02\,\Delta y^2$$

ずれは、Δx、Δy の 2 乗の大きさしかないのです。

4 はかった値のずれは、どう伝わるか

いくつもの量が同時に少しずつ変わる、身近な例が「はかった値のずれ（誤差）」です。円柱の形をした容器の体積を、半径と高さをはかって求めます。



半径 $r = 5.0\,\text{cm}$（ずれ 0.05 cm、1 %）

高さ $h = 20.0\,\text{cm}$（ずれ 0.2 cm、1 %）

体積 $V = \pi r^2 h$ は、何 % ずれる？

図 4　半径も高さも、1 % ずつ大きくはかってしまったとき、体積はどれだけずれるか。

体積は $V = \pi r^2 h = \pi \times 5.0^2 \times 20.0 \approx 1570.8\,\mathrm{cm}^3$ です。半径と高さを、それぞれ「ほかを止めて」少し変えたときの変わり方（8-2 の偏微分、感度）を先に求めます。

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h = 2\pi \times 5.0 \times 20.0 \approx 628.3$$

h を止めて r で偏微分（cm^2）

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2 = \pi \times 5.0^2 \approx 78.54$$

r を止めて h で偏微分（cm^2）

$$\Delta V \approx 628.3 \times 0.05 + 78.54 \times 0.2$$

①と同じ：感度×ずれ、を 2 つたす

$$\Delta V \approx 31.42 + 15.71 = 47.13$$

体積のずれ（cm^3）

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{47.13}{1570.8} \approx 0.030$$

もとの体積でわる（3.0 %）

半径と高さを両方 1 % 大きくして、本当に計算してみます。

$$\pi \times 5.05^2 \times 20.2 \approx 1618.4\,\mathrm{cm}^3$$

ずれは $47.6\,\mathrm{cm}^3$（3.03 %）で、予想とよく合っています。

ずれの向きの組み合わせ

半径も高さも、大きくずれることも小さくずれることもあります。4 つの組み合わせを表計算で計算してみます（A 列に半径、B 列に高さ、C 列に `=PI()*A2^2*B2`）。

半径（cm）	高さ（cm）	体積（cm³）	ずれの割合
5.05（+1％）	20.2（+1％）	1618.4	+3.03％
5.05（+1％）	19.8（−1％）	1586.3	+0.99％
4.95（−1％）	20.2（+1％）	1554.9	−1.01％
4.95（−1％）	19.8（−1％）	1524.1	−2.97％

表 3　もとの体積は 1570.8 cm³。いちばん大きいずれは、2 つとも同じ向きにずれたとき（約 ±3％）。向きがちがうと、打ち消し合って約 1％ になる。

全微分の式 $2\dfrac{\Delta r}{r}+\dfrac{\Delta h}{h}$ でも、$2\times1+1=3$、$2\times1-1=1$、$-2+1=-1$、$-2-1=-3$（％）と、表とほぼ同じ値が出ます。

割合で書くと、もっと簡単

いまの計算を、文字のまま $V=\pi r^2h$ でわってみます。

$$\Delta V \approx 2\pi rh\,\Delta r+\pi r^2\,\Delta h$$　感度×ずれ、を 2 つたす

$$\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{2\pi rh\,\Delta r}{\pi r^2h}+\frac{\pi r^2\,\Delta h}{\pi r^2h}$$　両辺を $V=\pi r^2h$ でわる

$$\frac{\Delta V}{V}\approx 2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}$$　約分した

$\dfrac{\Delta r}{r}$ は「半径のずれの割合」（1％）、$\dfrac{\Delta h}{h}$ は「高さのずれの割合」（1％）です。体積のずれの割合は $2\times1+1=3$（％）。**2 乗で効く半径は、ずれも 2 倍に効く**のです。だから、円柱の体積を正確に求めたいときは、高さより半径をていねいにはかります。

もっと知りたい ★★★★

ずれが「ばらつき」のときは、2 乗してたしてから √

いまの 3％ は、半径も高さも「同じ向きに」最大までずれたときの、いちばん大きなずれです。何回もはかったときのばらつき（3-14 の標準偏差）のように、ずれの向きがでたらめなら、ずれがたまたま打ち消し合う

こともあります。そのときは、それぞれの割合を 2 乗してたしてから$\sqrt{\ }$をとると、全体のばらつきの割合になることが知られています。円柱なら$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\approx 2.24$（%）です。理科の実験や工場の検査で「誤差の伝わり方」として使われます（くわしい理由は、大学の統計の本で）。

ここまでで十分

ななめの変化を「東の坂×東へ進んだ長さ＋北の坂×北へ進んだ長さ」で見積もり、誤差の伝わり方を計算できれば十分です。この先は、このたし算を式で書き、ロボットの腕に使います。

∂ 式でわかる 全微分・連鎖律・ヤコビ行列 ★★★★★

5 全微分：小さな変化のたし算を、式で書く

①〜④で使ったたし算を、どんな関数にも使える形で書きます。第 5 巻（5-8）では、ほんの少しの変化を $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ と書き、$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$ と表しました。2 つの変数 x、y で決まる $f(x,\,y)$ では、x が $\mathrm{d}x$、y が $\mathrm{d}y$ だけ同時に変わったときの f の変化を、次のように書きます。

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

これを f の**全微分**（ぜんびぶん）といいます。「全」は、すべての変数を同時に動かす、という意味です。8-2 の偏微分は「1 つだけ動かす」、全微分は「全部動かす」です。

式の読み方を、1 つずつ確かめます。

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ は、x だけを $\mathrm{d}x$ 動かしたときの f の変化（東の坂×東へ進んだ長さ）。

❷ $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ は、y だけを $\mathrm{d}y$ 動かしたときの f の変化（北の坂×北へ進んだ長さ）。

❸ 2 つを同時に動かしたときの変化は、2 つのたし算（①の階段、②の平らな板）。

主役の山なら、$\mathrm{d}h = -0.02x\,\mathrm{d}x - 0.04y\,\mathrm{d}y$ で、P では $\mathrm{d}h = -0.6\,\mathrm{d}x - 0.8\,\mathrm{d}y$ です。$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 1$ を入れると -1.4 です。

また、P での接平面（②の板）の式は、高さを z として、

$$z = 83 - 0.6(x - 30) - 0.8(y - 20)$$

です。P から $(x - 30,\ y - 20)$ だけ進んだときの高さを、全微分のたし算で書いたものです。

変数が 3 つでも

3 つの変数の関数 $f(x,\ y,\ z)$ なら、項が 1 つふえるだけです。

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

> **せいかくに言うと**
>
> $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ を「ほんの少しの変化」と読むとき、全微分の式は「$\Delta f \approx \cdots$」という近似の式です。くわしくは、Δf と $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ のずれが、進んだ距離 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ よりも速く 0 に近づくとき、f は「全微分できる」といいます（③の表で、ずれは距離の 2 乗の速さで 0 に近づいた）。偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が場所について切れ目なく変わる関数（この本で出てくる関数はすべてそう）は、全微分できます。

❻ 連鎖律：道を歩くときの、高さの変わる速さ

ソラさんが、主役の山の $\mathrm{P}(30,\ 20)$ から、頂上 $(0,\ 0)$ へまっすぐ歩きます。1 分に、西へ 3 m、南へ 2 m 進む速さです。出発してから t 分後の場所は、

$$x = 30 - 3t, \qquad y = 20 - 2t$$

です。ソラさんの高さは、1 分あたり何 m の速さで変わっていくでしょう。

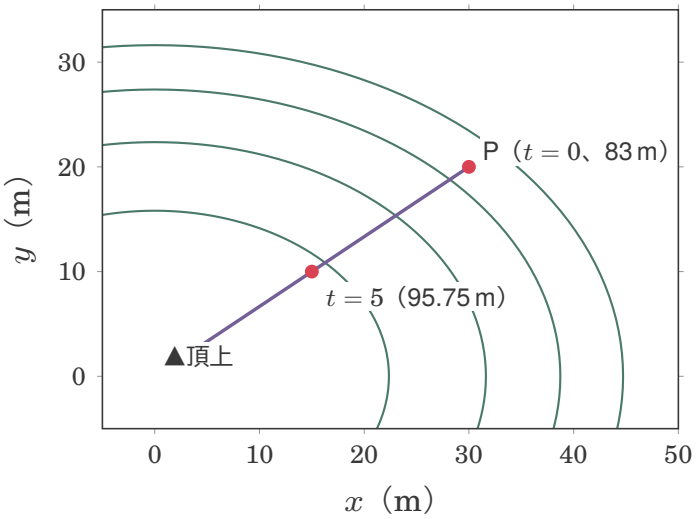


図 5 ソラさんの歩く道（むらさき）。線は 5 m ごとの等高線。頂上に近づくほど等高線の間が広がり、坂はゆるくなる。

時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに、x は $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$、$y$ は $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ だけ変わります（5-8）。これを全微分の式に入れて、両辺を $\mathrm{d}t$ でわります。

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

全微分

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ を、$\mathrm{d}t$ のあいだの変化で書いた

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

両辺を $\mathrm{d}t$ でわった

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

これを**連鎖律**（れんさりつ）といいます（英語で chain rule）。5-6 の合成関数の微分（歯車をつなぐとかけ算）が、2 組になったものです。t から x を通って h へ行く歯車と、t から y を通って h へ行く歯車の、2 つの道の分をたします。

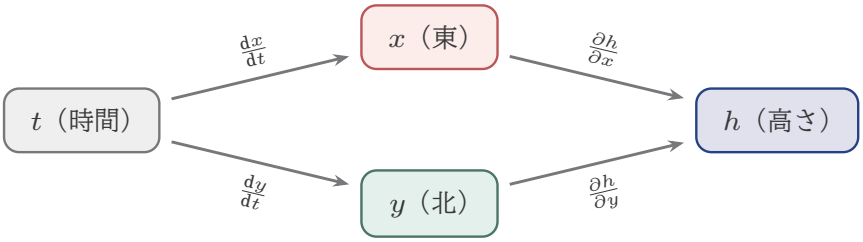


図 6　連鎖律の 2 つの道。上の道は「$\frac{dx}{dt} \times \frac{\partial h}{\partial x}$」、下の道は「$\frac{dy}{dt} \times \frac{\partial h}{\partial y}$」。道ごとにかけて、2 つの道をたす。

ソラさんの場合、$\dfrac{dx}{dt} = -3$、$\dfrac{dy}{dt} = -2$ です。出発のとき（$t = 0$、P）は、

$$\frac{dh}{dt} = (-0.6) \times (-3) + (-0.8) \times (-2)$$　　P での 2 つの坂と、2 つの速さ

$$= 1.8 + 1.6 = 3.4$$　　1 分に 3.4 m 上がる

確かめに、x、y を山の式に入れてから、t で微分します（5-6）。

$$h = 100 - 0.01(30 - 3t)^2 - 0.02(20 - 2t)^2$$　　t だけの式になった

$$\frac{dh}{dt} = 0.06(30 - 3t) + 0.08(20 - 2t)$$　　合成関数の微分（中身の微分 -3、-2 をかけた）

$t = 0$ で $0.06 \times 30 + 0.08 \times 20 = 3.4$　　連鎖律と同じ

2 通りで同じ答えになりました。連鎖律を使えば、式を入れて展開しなくても、坂と速さのかけ算だけで計算できます。頂上に近づくと坂がゆるくなるので、5 分後（$x = 15$、$y = 10$）には $0.06 \times 15 + 0.08 \times 10 = 1.7$ で、1 分に 1.7 m と、半分になります。

せいかくに言うと

x、y が、t 1 つではなく、2 つの変数 u、v で決まるときは、v を止めて u で偏微分した形で、同じ式が成り立ちます。

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

これも連鎖律とよびます。8-6 や 8-12 で、座標を取りかえる（x、y を極座標 r、θ で書く）ときに使います。

❼ ヤコビ行列：偏微分を並べた行列

第 7 巻（7-2）と物理第 1 巻（力-7）で使った、2 つの関節のロボットの腕を考えます。肩の角を θ_1、ひじの角を θ_2 とすると、手の位置 $(x,\ y)$ は次の式で決まります（4-7・物理 力-7 の順運動学）。

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2), \qquad y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

x も y も、θ_1 と θ_2 の 2 つの変数の関数です。7-2 で「8-3 で学ぶ」と約束した作り方で、x と y をそれぞれ偏微分します。角はラジアンではかります（5-15：sin の微分が cos になるのは、ラジアンのとき）。

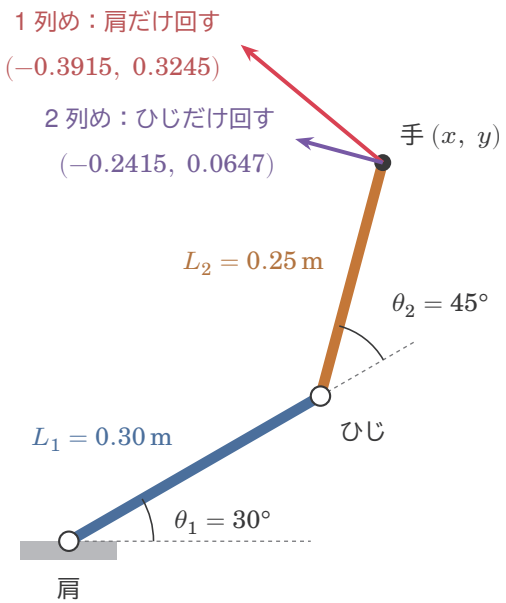


図 7　2 つの関節のロボットの腕（7-2・物理 力-7 と同じ数）。手から出る赤の矢印は肩だけを、紫の矢印はひじだけを 1 ラジアンあたり回したときの手の動き（ヤコビ行列の 2 つの列）。

4 つの偏微分

$\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ と書きます。θ_2 を止めて θ_1 で偏微分するとき、θ_{12} の中身を θ_1 で偏微分すると 1 です（合成関数の微分）。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin\theta_{12}$$

θ_2 を止める。$(\cos u)' = -\sin u$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -L_2 \sin\theta_{12}$$

θ_1 を止める。$L_1 \cos\theta_1$ は数なので 0

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_{12}$$

θ_2 を止める。$(\sin u)' = \cos u$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = L_2 \cos\theta_{12}$$

θ_1 を止める。$L_1 \sin\theta_1$ は数なので 0

全微分を、行列で書く

肩を $\mathrm{d}\theta_1$、ひじを $\mathrm{d}\theta_2$ だけ同時に少し回すと、手の位置の変化は全微分です。

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \theta_1}\mathrm{d}\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2}\mathrm{d}\theta_2, \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \theta_1}\mathrm{d}\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2}\mathrm{d}\theta_2$$

2 つの式は、7-1・7-2 の「行列×ベクトル」の形そのものです。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \mathrm{d}\theta_1 \\ \mathrm{d}\theta_2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$$

この、**偏微分を並べた行列** J が、7-2・物理 力-7 の**ヤコビ行列**です。**行は出てくる量**（1 行めが x、2 行めが y）、**列は動かす量**（1 列めが θ_1、2 列めが θ_2）です。1 列めは「肩だけを回したときの手の動き」、2 列めは「ひじだけを回したときの手の動き」で、7-2 の言い方と同じです。

同じ数が出るか、確かめる

$\theta_1 = 30°$、$\theta_2 = 45°$（$\theta_{12} = 75°$）を入れます。$\sin 30° = 0.5$、$\cos 30° = 0.8660$、$\sin 75° = 0.9659$、$\cos 75° = 0.2588$ です。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -0.30 \times 0.5 - 0.25 \times 0.9659 = -0.3915 \qquad \text{1 行め 1 列め}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -0.25 \times 0.9659 = -0.2415 \qquad \text{1 行め 2 列め}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 0.30 \times 0.8660 + 0.25 \times 0.2588 = 0.3245 \qquad \text{2 行め 1 列め}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0.25 \times 0.2588 = 0.0647 \qquad \text{2 行め 2 列め}$$

$$J = \begin{pmatrix} -0.3915 & -0.2415 \\ 0.3245 & 0.0647 \end{pmatrix}$$

7-2 で「手の位置の矢印を 90° 回す」方法で作った J、物理 力-7 の J と、ぴったり同じです。7-2 では図（円運動の速度）から、ここでは式（偏微分）から作りました。2 通りの作り方で、同じ行列が出てきたのです。

7-2 の約束：「2 つの変化はたし算になる」

7-2 のせいかくに言うとでは、「2 つの関節の角の小さな変化による手の小さな動きは、たし算で合わさる。このことを微分を使ってきちんと確かめるのが 8-3」と約束しました。いま作った $\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$ は、全微分の式（たし算）そのものです。これで約束が果たせました。両辺を時間 $\mathrm{d}t$ でわれば、7-2・物理 力-7 の $\dot{\vec{p}} = J\dot{\vec{\theta}}$（手の速度＝ J ×関節の角速度）になります（⑥の連鎖律と同じ）。

数でも確かめます。肩もひじも $0.01\,\mathrm{rad}$（約 $0.57°$）回すと、

$$J\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3915 \times 0.01 + (-0.2415) \times 0.01 \\ 0.3245 \times 0.01 + 0.0647 \times 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00633 \\ 0.00389 \end{pmatrix}$$

です。順運動学の式で本当に計算した手の動きは $(-0.00636,\ 0.00384)$（m）で、よく合っています。

Python

```
import numpy as np
L1, L2 = 0.30, 0.25                  # うでの長さ（m）
t1, t2 = np.radians(30), np.radians(45)   # 肩とひじの角（rad）
s1, c1 = np.sin(t1), np.cos(t1)
s12, c12 = np.sin(t1 + t2), np.cos(t1 + t2)
J = np.array([[-L1*s1 - L2*s12, -L2*s12],   # 1 行め：x の偏微分
              [ L1*c1 + L2*c12,  L2*c12]])  # 2 行め：y の偏微分
print(J.round(4))                    # ヤコビ行列（小数第 4 位まで）
print(round(np.linalg.det(J), 4))  # ヤコビアン（⑧）
print(J @ np.array([0.01, 0.01]))  # 両方を少し回したとき
```

実行結果

```
[[-0.3915 -0.2415]
 [ 0.3245  0.0647]]
0.053
[-0.00632963  0.00389217]
```

`np.radians` は度をラジアンに直す関数です（6-9）。`0.053` は 0.0530 のことです（最後の 0 は表示されない）。7-11 の逆運動学（ニュートン・ラフソン法）では、この J を、腕の角が変わるたびに計算し直して使います。

⑧ ヤコビアン：小さな面積の倍率

7-4 で、行列式は「面積が何倍になるか」を表すと学びました。ヤコビ行列の行列式は、何の面積の倍率でしょう。

角の組 $(\theta_1,\ \theta_2)$ を、たて横の方眼の上の点と考えます。小さな長方形（横 $\mathrm{d}\theta_1$、たて $\mathrm{d}\theta_2$）の中の角の組で腕を動かすと、手は、J の 1 列めを $\mathrm{d}\theta_1$ 倍した矢印と、2 列めを $\mathrm{d}\theta_2$ 倍した矢印がつくる、小さな平行四辺形の中を動きます（全微分 $\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$）。

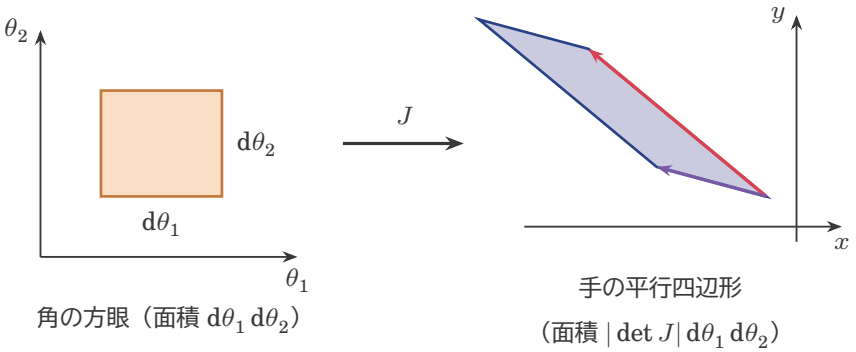


図 8　角の方眼の小さな長方形（左）は、手の場所では、J の 2 つの列（赤と紫、図では大きく引きのばした）がつくる平行四辺形（右）にうつる。

7-4 のとおり、2 本の列がつくる平行四辺形の面積は、もとの長方形の面積の $|\det J|$ 倍です。

$$\text{手が動ける小さな面積} \approx |\det J| \times d\theta_1\, d\theta_2$$

ヤコビ行列の行列式 $\det J$ を**ヤコビアン**といいます。ヤコビアンは、「動かす量の小さな面積が、出てくる量の小さな面積の何倍になるか」の倍率です。

ロボットでは、次のとおりです。

$$\det J = (-0.3915) \times 0.0647 - (-0.2415) \times 0.3245 = 0.0530$$

肩とひじを 0.01 rad ずつの範囲で動かすと、手が動く範囲の面積は、次のとおりです。

$$0.0530 \times 0.01 \times 0.01 = 5.30 \times 10^{-6}\ (\mathrm{m^2})$$

約 5.3 $\mathrm{mm^2}$ です（4 つのかどを本当に計算して面積を求めると 5.33×10^{-6} $\mathrm{m^2}$）。

文字のまま計算すると、$\det J = L_1 L_2 \sin\theta_2$ になります（加法定理 4-9 を使う。例題 6）。物理 力-7 で見たとおり、ひじがのびきって θ_2 が 0 に近づくと、ヤコビアンは 0 に近づき、手の平行四辺形はつぶれます（7-4 の特異姿勢）。

極座標のヤコビアンは r

平面の点を、原点からの距離 r と角 θ で表す極座標（4-15）でも、同じように考えます。

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

1 行め（x を r、θ で偏微分）

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

2 行め（y を r、θ で偏微分）

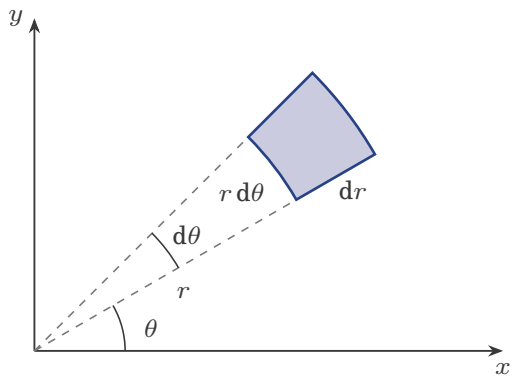
$$\det J = \cos\theta \times r\cos\theta - (-r\sin\theta) \times \sin\theta$$

たすきにかけてひく（7-4）

$$\det J = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$（4-8）

ヤコビアンは r です。だから、r を $\mathrm{d}r$、θ を $\mathrm{d}\theta$ だけ変えてできる小さなタイルの面積は、$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ です。



たて $\mathrm{d}r$、横 $r\,\mathrm{d}\theta$ のほぼ長方形

面積 $\approx r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

図 9　極座標の小さなタイル。外へ $\mathrm{d}r$、回る向きに弧の長さ $r\,\mathrm{d}\theta$（4-2 のおうぎ形の弧）。外側のタイルほど、同じ $\mathrm{d}\theta$ でも横が長い。

図 9 でも、タイルは、たてが $\mathrm{d}r$、横が弧の長さ $r\,\mathrm{d}\theta$ の、ほぼ長方形です。図で考えても、ヤコビアンで考えても、面積は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ です。この r が、8-6 の重積分で、円や球の面積・体積を求めるときに大事な役目をします（r を忘れると、

円の面積が正しく出ない）。7-4 のコラムで「曲がった座標での積分にもヤコビアンが出てくる（8-3）」と約束したのは、このことです。

もっと知りたい ★★★★★

2 つの変数のテイラー展開

③のずれ -0.03 も、5-17 のテイラー展開を 2 変数にすると、2 回の偏微分（8-2）を使って書けます。

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + (2\text{ 次の項})$$

$$(2\text{ 次の項}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right)$$

主役の山では、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -0.02$、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} = 0$、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -0.04$ なので、かっこの中の分は $\dfrac{1}{2}(-0.02\Delta x^2 - 0.04\Delta y^2) = -0.01\Delta x^2 - 0.02\Delta y^2$ です。$\Delta x = \Delta y = 1$ なら -0.03 で、$-1.4 - 0.03 = -1.43$ と、本当の値にぴったり合います（主役の山は 2 次式なので、ここで終わり）。

専門書をのぞいてみよう 熱力学の教科書ふうの書き方

内部エネルギー U は状態量であり、T と V の関数として $\mathrm{d}U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$ と表される。$\mathrm{d}U$ は完全微分であるが、熱 δQ と仕事 δW は完全微分ではない。変数変換 $(u,\ v) \to (x,\ y)$ のヤコビアンを $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ と書く。

訳 右下の V は「止めておく量」（例題 9）。「状態量」は、いまの状態だけで決まる量で、その小さな変化は全微分 $\mathrm{d}U$ になる（完全微分）。熱や仕事は、状態の変え方（道すじ）で値が変わるので、全微分ではない印に δ を使う（8-7、物理熱-2）。$\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ は、この本の $\det J$。

もっと知りたい ★★★★★

全微分になっているかを見分ける

$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ は、$f = xy$ の全微分 $\mathrm{d}f$ です（$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$）。一方、$y\,\mathrm{d}x$ だけでは、どんな f の全微分にもなりません。もし $\mathrm{d}f = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ なら、$M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$、$N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ なので、8-2 の「2 回の偏微分は順番によらない」から、次の式が成り立つはずだからです。

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$y\,\mathrm{d}x$ では $M = y$、$N = 0$ で、$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$、$\dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$ なので、成り立ちません。全微分なら、小さな変化を道にそってたした合計は「はじめとおわりの f の差」になり、道によりません。全微分でなければ、道で変わります。物理 力-4 の $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ の仕事 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ は道によらず、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の仕事は道で変わったのは、このためです（8-7・8-10 でくわしく）。

たいせつ

全微分	$\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$（1 つずつの変化をたす）
誤差	$\dfrac{\Delta V}{V} \approx 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta h}{h}$（$V = \pi r^2 h$ のとき）
連鎖律	$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$（道ごとにかけて、たす）
ヤコビ行列	偏微分を並べた行列（行＝出てくる量、列＝動かす量）
行列で	$\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$（全微分を行列×ベクトルで）
ヤコビアン	$\det J$ ＝小さな面積の倍率。極座標では r（タイル $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$）

この章で出てきたことば

全微分　すべての変数を同時に少し動かしたときの変化 $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$。

接平面　曲がった面の 1 点のすぐ近くで、面にいちばんよくそう平らな面。接線の 2 次元版。

連鎖律　変数が別の変数で決まるときの微分のきまり。道ごとにかけて、たす。

ヤコビ行列　出てくる量を動かす量で偏微分して並べた行列。行が出てくる量、列が動かす量。

ヤコビアン　ヤコビ行列の行列式。小さな面積（体積）が何倍になるか。

記号カード　初めて出た章 8-3

$\mathrm{d}f$

読み方　ディー エフ
意味　全微分。x、y を同時に少し動かしたときの f の変化
英語　total differential

記号カード　初めて出た章 8-3

$\det J$

読み方　デターミナント ジェイ
意味　ヤコビアン。ヤコビ行列の行列式で、小さな面積の倍率
英語　Jacobian

コラム　ものさしでも「ずれの伝わり方」

長方形の紙の面積 $S = ab$ を、ものさしではかって求めます。たて $a = 10.0\,\mathrm{cm}$、横 $b = 20.0\,\mathrm{cm}$ で、どちらも $0.1\,\mathrm{cm}$ までしか読めないとします。ずれの割合は、たてが 1 %、横が 0.5 % です。全微分 $\mathrm{d}S = b\,\mathrm{d}a + a\,\mathrm{d}b$ を $S = ab$ でわると、$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}b}{b}$ なので、面積のずれは、いちばん大きくて $1 + 0.5 = 1.5$（%）です。同じ $0.1\,\mathrm{cm}$ のずれでも、**短い辺のほうが、割合では大きく効く**のです。理科の実験で「はかりにくい小さな量ほど、ていねいにはかる」のは、このためです。

例題でたしかめよう

例題 1　全微分で、高さの変化を見積もる

主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の $\mathrm{P}(30,\ 20)$ から、東へ $0.5\,\mathrm{m}$、南へ $0.3\,\mathrm{m}$ 進みます。高さの変化を全微分で見積もり、本当の変化とくらべましょう。

考え方　2 つの変数が同時に変わるので、全微分 $\mathrm{d}h = \dfrac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y$ に、P での坂と $\mathrm{d}x = 0.5$、$\mathrm{d}y = -0.3$（南はマイナス）を入れる。

式　P での坂：$\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.6$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.8$

$$\mathrm{d}h = (-0.6) \times 0.5 + (-0.8) \times (-0.3) = -0.30 + 0.24 = -0.06$$

本当：$h(30.5,\ 19.7) = 100 - 9.3025 - 7.7618 = 82.9357$、差は -0.0643

答え　約 $0.06\,\mathrm{m}$ 下がる（本当は $0.0643\,\mathrm{m}$）

例題 2　全微分の式を作って使う

$f(x,\ y) = x^2 y$ の全微分を求め、$(2,\ 3)$ から x が 0.01 ふえ、y が 0.02 へったときの f の変化を見積もりましょう。

考え方　まず 2 つの偏微分を求め、全微分の式に入れる。

式　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ なので、$\mathrm{d}f = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$(2,\ 3)$ では $\mathrm{d}f = 12\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}f = 12 \times 0.01 + 4 \times (-0.02) = 0.12 - 0.08 = 0.04$$

本当：$2.01^2 \times 2.98 - 2^2 \times 3 = 12.0395 - 12 = 0.0395$

答え　$\mathrm{d}f = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$。変化は約 0.04（本当は 0.0395）

じぶんでとこう 1

主役の山の点 $(10,\ 30)$ から、東へ 1 m、北へ 0.5 m 進みます。高さの変化を全微分で見積もり、本当の変化とくらべましょう。

じぶんでとこう 2

$f(x,\ y) = xy^3$ の全微分を求め、$(1,\ 2)$ から x が 0.02、y が 0.01 ふえたときの f の変化を見積もりましょう。

例題 3　誤差の伝わり方（かけ算の式）

円柱の体積 $V = \pi r^2 h$ で、半径を 2 %、高さを 3 % 大きくはかってしまいました。体積は、約何 % 大きく計算されますか。

考え方　かけ算の式なので、全微分を V でわって、ずれの割合の式にする（④）。

式　$\mathrm{d}V = 2\pi rh\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h$

両辺を $V = \pi r^2 h$ でわると、$\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = 2\dfrac{\mathrm{d}r}{r} + \dfrac{\mathrm{d}h}{h}$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = 2 \times 2 + 3 = 7\ (\%)$

答え　約 7 % 大きくなる

本当に計算すると $1.02^2 \times 1.03 = 1.0716$ で、7.16 % です。

例題 4　誤差の伝わり方（わり算の式）

電力 $P = \dfrac{V^2}{R}$ で、電圧 V のはかり方に ±1 %、抵抗 R に ±2 % のずれがありえます。電力のずれは、いちばん大きくて何 % ですか。

考え方　わり算の式では、わる量は、割合の式でマイナスになる。いちばん大きいずれは、2 つのずれが同じ向きに効くとき。

式　$\mathrm{d}P = \dfrac{2V}{R}\mathrm{d}V - \dfrac{V^2}{R^2}\mathrm{d}R$

両辺を $P = \dfrac{V^2}{R}$ でわると、$\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = 2\dfrac{\mathrm{d}V}{V} - \dfrac{\mathrm{d}R}{R}$

いちばん大きいのは、V が +1 %、R が −2 % のとき：

$2 \times 1 - (-2) = 4$（%）

答え　いちばん大きくて約 4 %

$V = 12\,\mathrm{V}$、$R = 6\,\Omega$ で本当に計算すると、$12.12^2 \div 5.88 = 24.98$〔W〕で、もとの 24 W より 4.1 % 大きくなります。

じぶんでとこう 3

円すいの体積 $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ で、半径が 2 %、高さが 1 % 大きくずれているとき、体積は約何 % ずれますか。

じぶんでとこう 4

密度 $\rho = \dfrac{m}{V}$ で、質量 m に ±0.5 %、体積 V に ±1 % のずれがありえます。密度のずれは、いちばん大きくて何 % ですか。

例題 5　連鎖律で、高さの変わる速さ

主役の山の上を、$x = 30 - 3t$、$y = 20 - 2t$（t は分）と歩きます。$t = 5$ のときの、高さの変わる速さ $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ を、連鎖律で求めましょう。

考え方　場所が時間で変わるので、連鎖律 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。坂はその時刻の場所で求める。

式　$t = 5$ の場所：$x = 30 - 15 = 15$、$y = 20 - 10 = 10$

坂：$\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02 \times 15 = -0.3$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.04 \times 10 = -0.4$

速さ：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = (-0.3) \times (-3) + (-0.4) \times (-2) = 0.9 + 0.8 = 1.7$$

答え　1 分に約 1.7 m の速さで上がる

じぶんでとこう 5

主役の山の上を、$x = 10 + 2t$、$y = 30 - 3t$（t は分）と歩きます。$t = 0$ のときの高さの変わる速さを、連鎖律で求めましょう。

例題 5 の道を、時刻ごとに表にしてみます（高さは山の式に入れて、速さは連鎖律で求めた）。

時刻 t（分）	0	5	10
場所 $(x,\ y)$（m）	$(30,\ 20)$	$(15,\ 10)$	$(0,\ 0)$
高さ h（m）	83	95.75	100
高さの変わる速さ（m/分）	3.4	1.7	0

表 4　頂上に近づくほど坂がゆるくなり、上がる速さはへっていく。頂上（$t = 10$）では 0。

例題 6　ロボットのヤコビ行列を作る

2 つの関節のロボットの腕について、次の問いに答えましょう。

(1) $L_1 = 0.30\,\mathrm{m}$、$L_2 = 0.25\,\mathrm{m}$、$\theta_1 = 0°$、$\theta_2 = 90°$ のときのヤコビ行列 J と、ヤコビアン $\det J$ を求めましょう。

(2) 文字のまま $\det J$ を計算し、$L_1 L_2 \sin\theta_2$ になることを確かめましょう。

考え方　(1) ⑦の 4 つの偏微分の式に入れる。$\theta_{12} = 90°$。行は x、y、列は θ_1、θ_2。(2) たすきにかけてひき (7-4)、加法定理 (4-9) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ でまとめる。$\sin\theta_1$ を s_1、$\cos\theta_{12}$ を c_{12} のように短く書く。

式　(1) $\sin 0° = 0$、$\cos 0° = 1$、$\sin 90° = 1$、$\cos 90° = 0$

1 行め：$-0.30 \times 0 - 0.25 \times 1 = -0.25$、$-0.25 \times 1 = -0.25$

2 行め：$0.30 \times 1 + 0.25 \times 0 = 0.30$、$0.25 \times 0 = 0$

$\det J = (-0.25) \times 0 - (-0.25) \times 0.30 = 0.075$

(2) $\det J = (-L_1 s_1 - L_2 s_{12}) L_2 c_{12} - (-L_2 s_{12})(L_1 c_1 + L_2 c_{12})$

$= -L_1 L_2 s_1 c_{12} - L_2^2 s_{12} c_{12} + L_1 L_2 s_{12} c_1 + L_2^2 s_{12} c_{12}$

$= L_1 L_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1)$（$L_2^2$ の 2 つの項は消える）

$= L_1 L_2 \sin(\theta_{12} - \theta_1) = L_1 L_2 \sin\theta_2$（加法定理）

答え　(1) J は 1 行め $(-0.25,\ -0.25)$、2 行め $(0.30,\ 0)$。$\det J = 0.075$。(2) $\det J = L_1 L_2 \sin\theta_2$

このとき手は $(0.30,\ 0.25)$（m）にあり、ひじは直角に曲がっています。(2) の式でも $\det J = L_1 L_2 \sin 90° = 0.30 \times 0.25 = 0.075$ で、ヤコビアンがいちばん大きい（手がいちばん自由に動ける）姿勢です。

じぶんでとこう 6

同じロボットの腕で、$\theta_1 = 90°$、$\theta_2 = 90°$ のときのヤコビ行列 J と、ヤコビアン $\det J$ を求めましょう。

じぶんでとこう 7

うで 2 の向きを、水平からの角 φ で表すと、手の位置は次の式になります。

$$x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\varphi, \qquad y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\varphi$$

θ_1 と φ で偏微分したヤコビ行列 J を作り、文字のまま $\det J$ を計算して、$\sin$ 1 つにまとめましょう。

もっと知りたい ★★★★★

ひじの角と、ヤコビアン

例題 6（2）の式に、いろいろなひじの角を入れます（$L_1 L_2 = 0.075$）。

ひじの角 θ_2	0°	45°	90°	135°	180°
$\det J$	0	0.0530	0.075	0.0530	0

直角（90°）でいちばん大きく、のびきったとき（0°）と折りたたんだとき（180°）に 0 です。0 の姿勢では、手はある向きにどうしても動けません（7-4 の特異姿勢）。

例題 7　$\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$ で、手の動きを予想する

$\theta_1 = 30°$、$\theta_2 = 45°$ のロボットの腕（J は 1 行め $(-0.3915,\ -0.2415)$、2 行め $(0.3245,\ 0.0647)$）で、肩を 0.02 rad、ひじを −0.01 rad 回します。手はどれだけ動きますか。

考え方　2 つの関節を同時に少し回すので、全微分の行列の形 $\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$ で、行と列の内積（7-2）。

式
$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= -0.3915 \times 0.02 + (-0.2415) \times (-0.01)\\ &= -0.00783 + 0.00242 = -0.00541\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= 0.3245 \times 0.02 + 0.0647 \times (-0.01)\\ &= 0.00649 - 0.00065 = 0.00584\end{aligned}$$

答え　手は約 $(-0.0054,\ 0.0058)$（m）動く（本当に計算すると $(-0.0055,\ 0.0058)$）

例題 8　極座標のタイルの面積

極座標で、r が 2 から 2.1 まで、θ が θ_0 から $\theta_0 + 0.05$〔rad〕までの小さなタイルの面積を、ヤコビアンを使って見積もりましょう。

考え方　座標を取りかえたときの小さな面積は、ヤコビアン× $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。極座標のヤコビアンは r なので、面積 $\approx r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。

式　$\mathrm{d}r = 0.1$、$\mathrm{d}\theta = 0.05$、$r = 2$

面積 $\approx r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2 \times 0.1 \times 0.05 = 0.01$

確かめ：おうぎ形の面積（4-2）の差で、
$\dfrac{1}{2} \times (2.1^2 - 2^2) \times 0.05 = 0.01025$

答え　約 0.01（本当は 0.01025）

タイルのまん中の $r = 2.05$ を使うと、$2.05 \times 0.1 \times 0.05 = 0.01025$ で、ぴったり合います。$\mathrm{d}r$ を細かくするほど、どの r を使ってもちがいは小さくなります。

じぶんでとこう 8

同じロボットの腕（$\theta_1 = 30°$、$\theta_2 = 45°$）で、肩を $0.01\,\mathrm{rad}$、ひじを $0.02\,\mathrm{rad}$ 回します。手はどれだけ動くと予想できますか。

じぶんでとこう 9

$x = 3r\cos\theta$、$y = 2r\sin\theta$（だ円の座標）のヤコビアンを求め、$r = 1$、$\mathrm{d}r = 0.1$、$\mathrm{d}\theta = 0.1$ のタイルの面積を見積もりましょう。

例題 9　止めておく量を書く偏微分（熱力学）

理想気体の圧力は、次の式で表されます（物質量 n〔mol〕、温度 T〔K〕、体積 V〔m^3〕、$R = 8.31\,\mathrm{J/(mol\,K)}$）。

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$n = 1$、$V = 0.0224$ のときの $\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ を求め、意味を言いましょう。

考え方　右下の V は「V を止めておく」という印。V を数とみて T で偏微分する。

式　$\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \dfrac{nR}{V} = \dfrac{1 \times 8.31}{0.0224} \approx 371$（$\dfrac{nR}{V}$ が T にかかる数）

答え　約 $371\,\mathrm{Pa/K}$。体積を変えずに温度を $1\,\mathrm{K}$ 上げると、圧力は約 $371\,\mathrm{Pa}$ 上がる

例題 10　3 つの変数の全微分（誤差）

直方体の箱の体積 $V = abc$ で、たて a を 1 %、横 b を 2 %、高さ c を 0.5 % 大きくはかってしまいました。体積は約何 % 大きく計算されますか。

考え方　3 つの変数でも、全微分は項が 1 つふえるだけ（⑤）。Vでわって割合の式にする。

式　$\mathrm{d}V = bc\,\mathrm{d}a + ac\,\mathrm{d}b + ab\,\mathrm{d}c$

両辺を $V = abc$ でわると、$\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = \dfrac{\mathrm{d}a}{a} + \dfrac{\mathrm{d}b}{b} + \dfrac{\mathrm{d}c}{c}$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = 1 + 2 + 0.5 = 3.5$（%）

答え　約 3.5 % 大きくなる（本当は $1.01 \times 1.02 \times 1.005 = 1.0354$ で 3.54 %）

じぶんでとこう 10

例題 9 の理想気体（$n = 1$）で、$T = 273$、$V = 0.0224$ のときの $\left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ を求め、意味を言いましょう。

じぶんでとこう 11

直方体の鉄のかたまりの質量 $m = \rho abc$ で、密度 ρ が 1 %、a、b、c がそれぞれ 0.5 % 大きくずれているとき、質量は約何 % ずれますか。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

全微分を、偏微分の和と書く

× $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$

○ $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

坂だけをたしても、変化にはなりません。「坂×進んだ長さ」をたします。$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ を忘れると、進む向きや長さが答えに入らなくなります。

まちがえやすいところ

わり算の誤差を、ひき算で打ち消す

× $\rho = \dfrac{m}{V}$ で、m も V も 1％ ずれるので、$1 - 1 = 0\,\%$

○ いちばん大きいずれは $1 + 1 = 2\,\%$

ずれは、大きくはかることも小さくはかることもあります。m が +1％、V が −1％ だと、2 つのずれは同じ向き（密度を大きくする向き）に効きます。いちばん大きいずれは、割合の大きさをたして求めます。

⚠ まちがえやすいところ

ヤコビ行列の行と列

✕　1 行めに $\dfrac{\partial x}{\partial \theta_1}$、$\dfrac{\partial y}{\partial \theta_1}$ を並べる

○　1 行めは x の偏微分 $\dfrac{\partial x}{\partial \theta_1}$、$\dfrac{\partial x}{\partial \theta_2}$

行は出てくる量（x、y）、列は動かす量（θ_1、θ_2）です。入れかえると、$J\mathrm{d}\vec{\theta}$ の計算がまちがいます。「1 列めは肩だけを回したときの手の動き」と覚えておくと、たしかめられます。

⚠ まちがえやすいところ

角を度のまま使う

✕　肩を 1° 回すので、$\mathrm{d}\theta_1 = 1$

○　$\mathrm{d}\theta_1 = 1° = \dfrac{\pi}{180} \approx 0.0175\,\mathrm{rad}$

sin の偏微分が cos になるのは、角をラジアンではかるときです（5-15）。度のまま入れると、手の動きが約 57 倍も大きく出てしまいます。

⚠ まちがえやすいところ

連鎖律で、片方の道を忘れる

✕　$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ だけ

○　$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

x も y も時間で変わるときは、t から h への道が 2 つあります（図 6）。両方の道の分をたします。

⚠ まちがえやすいところ

極座標のタイルの r を忘れる

✕ 極座標のタイルの面積は $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

○ 極座標のタイルの面積は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$（ヤコビアンが r）

同じ $\mathrm{d}\theta$ でも、外側ほどタイルの横（弧の長さ $r\,\mathrm{d}\theta$）が長くなります。r を忘れると、8-6 で円の面積を求めるときに、正しい値になりません。単位でも気づけます：$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ は m（長さ）で、面積の m^2 になりません。

物理・工学ではこう使う

- **ロボットは、ヤコビ行列を計算しつづけている**

  工場のロボットの手を、まっすぐな線にそって動かすとき、コンピュータは、そのときの関節の角からヤコビ行列 J を作り、ほしい手の速度から関節の角速度を $\dot{\vec{\theta}} = J^{-1}\dot{\vec{p}}$（7-5）で求めます。角が変わると J も変わるので、この計算を 1 秒に何百〜何千回もくり返します。関節が 6 つの産業用ロボットでは、手の位置と向き（6 つの量）を 6 つの関節の角で偏微分した、6 行 6 列のヤコビ行列を使います。ヤコビアンが 0 に近い特異姿勢（⑧）を通らないように、動く道すじを決めます。

- **はかる・作るときの「ずれの予算」**

  部品を作るときは、寸法ごとに「ここまでのずれは許す」という幅（公差）を決めます。たとえば円柱の部品の体積や重さを、ある範囲に入れたいなら、④の $\dfrac{\Delta V}{V} \approx 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta h}{h}$ から、半径の公差を高さの公差よりきびしくすればよいとわかります。全微分は、どの寸法をていねいに作るべきかを決める道具です。電気の計測でも、電圧計と電流計のずれから、計算した抵抗や電力のずれを、同じ方法で見積もります。

物理・工学ではこう使う

● **エンジンの気体：何を止めて偏微分するか（物理 熱-2・熱-10）**

自動車のエンジンの中の気体は、圧力 p、体積 V、温度 T が同時に変わります。理想気体なら $pV = nRT$ の関係があるので、3 つのうち 2 つを決めると残りが決まります。だから熱力学では、「体積を止めて温度で偏微分」$\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ のように、何を止めたかを右下に書きます（例題 9）。たとえば、体積を止めて温度を上げるとき（なべにふたをして熱する）と、圧力を止めて温度を上げるとき（風船をあたためる）では、温度を 1 K 上げるのに必要な熱の量（定積比熱と定圧比熱）がちがいます。圧力を止めたときは、気体がふくらんで外へ仕事をする分だけ、多くの熱がいるのです。物理シリーズの熱力学では、全微分と、止めておく量を書いた偏微分を、たくさん使います。

● **完全微分と「道によらない量」（8-7 への予告）**

山の高さ h の変化 $\mathrm{d}h$ は全微分なので、P から頂上まで、どの道を通っても、高さの変化の合計は同じ $100\,\mathrm{m} - 83\,\mathrm{m} = 17\,\mathrm{m}$ です（①で見た「高さは場所だけで決まる」）。一方、歩いた道のりは道で変わります。物理 力-4 の力 $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ では、仕事 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ は xy の全微分なので道によらず、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ では全微分ではないので道で変わりました。この見分け方を、8-7・8-10 で学びます。

コラム　同じ腕でも、ヤコビ行列は角の選び方で変わる

じぶんでとこう 7 では、うで 2 の向きを、ひじの角 θ_2 ではなく、水平からの角 φ（$=\theta_1+\theta_2$）で表しました。同じ腕、同じ姿勢でも、動かす量の選び方を変えると、ヤコビ行列 J の中の数は変わります。30°・45° の姿勢（$\varphi=75°$）なら、θ_1 と φ で偏微分した J は、1 行め $(-0.150,\ -0.2415)$、2 行め $(0.2598,\ 0.0647)$ です。⑦の J の 2 列めは同じで、1 列めだけがちがいます。θ_1 だけを回すとき、φ を止める（うで 2 は向きを変えずに平行に動く）か、θ_2 を止める（うで 2 もいっしょに回る）かがちがうからです。

それでも、ヤコビアンはどちらも $L_1L_2\sin(\text{ひじの角})=0.0530$ です。手が動ける小さな面積の倍率は、角の選び方によらず、腕の形だけで決まるのです。偏微分では、「何を止めたか」がいつも大切です（専門書の $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ と同じ）。

章末問題　8-3 のまとめ

基本 ★★★★★

1 主役の山の点 $(20,\ -10)$ から、西へ 0.5 m、北へ 1 m 進みます。高さの変化を全微分で見積もりましょう。

2 $f(x,\ y)=x^3y$ の全微分を求め、$(1,\ 2)$ から x が 0.01、y が 0.03 ふえたときの f の変化を見積もりましょう。

3 円柱の体積 $V=\pi r^2h$ で、半径が 0.5 %、高さが 2 % 大きくずれているとき、体積は約何 % ずれますか。

4 電流 $I=\dfrac{V}{R}$ で、電圧 V に ±1 %、抵抗 R に ±1 % のずれがありえます。電流のずれは、いちばん大きくて何 % ですか。

5 主役の山の上を、$x = -20 + 4t$、$y = 10 + t$（t は分）と歩きます。$t = 0$ のときの高さの変わる速さを、連鎖律で求めましょう。

6 ロボットの腕（$L_1 = 0.30\,\mathrm{m}$、$L_2 = 0.25\,\mathrm{m}$）で、$\theta_1 = 60°$、$\theta_2 = 30°$ のときのヤコビ行列と、ヤコビアンを求めましょう（$\sin 60° = 0.866$、$\cos 60° = 0.5$）。

7 三角柱の体積 $V = \dfrac{1}{2}abh$ で、底の三角形の a と b が 1 % ずつ、高さ h が 2 % 大きくずれているとき、体積は約何 % ずれますか。

チャレンジ ★★★★★

8 ロボットの腕について答えましょう。

（1）問題 6 のロボットの腕（$\theta_1 = 60°$、$\theta_2 = 30°$）で、肩を 0.02 rad、ひじを 0.04 rad 回すと、手はどれだけ動くと予想できますか。

（2）例題 6（2）にならって、ロボットの腕のヤコビアンが $\det J = L_1 L_2 \sin\theta_2$ になることを、⑦の 4 つの偏微分から、何も見ずに計算して確かめましょう。次の加法定理（4-9）を使います。

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

9 理想気体の体積は $V = \dfrac{nRT}{p}$ です。$n = 1$、$R = 8.31$、$p = 101\,300\,\mathrm{Pa}$ のときの $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ を求め、意味を言いましょう。

10 直方体の金属のかたまりの密度を $\rho = \dfrac{m}{abc}$ で求めます。質量 m に ±0.5 %、たて a・横 b・高さ c に ±1 % ずつのずれがありえます。密度のずれは、いちばん大きくて何 % ですか（例題 4 と例題 10 の考え方を組み合わせる）。

11 例題 5 の道（$x = 30 - 3t$、$y = 20 - 2t$）で、$t = 10$ のときの $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ を連鎖律で求め、その意味を言いましょう。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ ななめの変化を、東の変化と北の変化のたし算で見積もれる。 → 102 ページ
- ☐ 全微分で、近似の値と誤差の伝わり方を計算できる。 → 109 ページ
- ☐ 連鎖律とヤコビ行列で、手の動きと面積の倍率（ヤコビアン）を求められる。 → 113 ページ

ソラ

全微分は「1 つずつの変化のたし算」だったね。8-4 では、どの向きに進むと、このたし算がいちばん大きくなるかを考えるよ。

第 1 部　たくさんの変数の微分

★★★★★

8-4 いちばん急な向き：勾配 grad

道しるべ　この章の前に 3-5 4-8 4-12 7-3 8-1 8-2 8-3
この章の先に 8-5 8-7 8-10 8-12 8-13

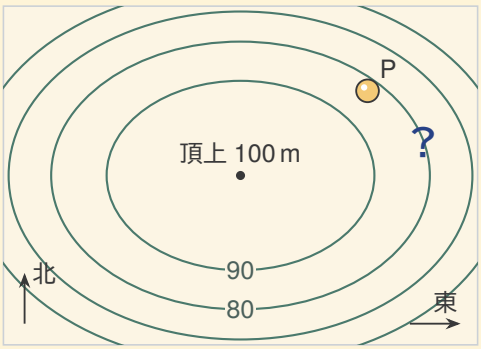
この章でできるようになること

- ★★★ 等高線の地図に、ボールが転がりはじめる向き（等高線と直角）をかきこめる。
- ★★★★ 東の坂と北の坂を並べて勾配 grad を作り、どの向きの坂も内積で計算できる。
- ★★★★★ 内積の cos の形から、いちばん急な向きと等高線の向きを説明し、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ などの物理の式を使える。

はてな？

8-1 から使ってきた主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の地図です（x は東へ、y は北へ、単位は m）。

点 P（$x = 30$、$y = 20$。高さ 83 m）の斜面に、ボールをそっと置きます。ボールは、どの向きに転がりはじめるでしょう。頂上と反対の向きへ、まっすぐ転がるでしょうか。



緑の線は等高線（10 m ごと）。

3-5 では、等高線の間がせまい所ほど坂が急だと学びました。8-2 では、東へ進むときの坂と北へ進むときの坂を、偏微分で別々に求めました。点 P では、東の坂が -0.6、北の坂が -0.8 でした。8-3 では、東と北に少しずつ進んだときの高さの変化を、2 つの坂からたし算で見積もりました。

山の上では、東と北だけでなく、あらゆる向きに歩けます。向きによって、坂の急さはちがいます。この章では、**いちばん急な向きはどちらか、その坂はどれだけ急か**を、東の坂と北の坂の 2 つの数から求めます。答えは、東の坂と北の坂を並べた、1 本の矢印になります。その矢印は、等高線と直角の向きを向いています。

この矢印は、山の地図だけのものではありません。ボールが転がる向き、熱が流れる向き、電場の向き、風をおす力の向きは、どれも同じ考えで決まります。物理第 1 巻の力-4 に出てきた $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ の grad が、この章で作る矢印です。

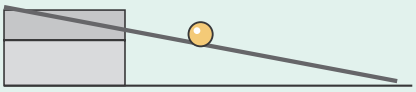
思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 3-5　坂の傾き＝高さの変化÷横に進んだ長さ。等高線の間がせまい所ほど、坂は急。
- 4-8　角 θ の向きの長さ 1 の矢印は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$。$\tan\theta$ は坂の傾き（$\tan 45° = 1$）。
- 4-12　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。直角なら内積は 0。
- 7-3　行列の積の成分は「行と列の内積」。1 行× 1 列なら、ただの内積。
- 8-1　主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$〔m〕。等高線は、同じ高さの点を結んだ線で、この山ではだ円。
- 8-2　偏微分：ほかを止めて 1 つだけ動かす。主役の山の点 $(30,\ 20)$ で、東の坂 $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x = -0.6$、北の坂 $\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.04y = -0.8$。
- 8-3　全微分：東へ $\mathrm{d}x$、北へ $\mathrm{d}y$ 進むと、$\mathrm{d}h = \dfrac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y$。点 $(30,\ 20)$ から東へ 1 m、北へ 1 m で、$-0.6 - 0.8 = -1.4$（m）。

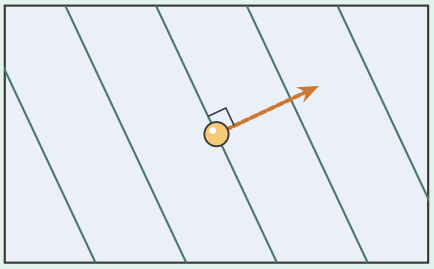
やってみよう　坂にボールを置いて、転がる向きを見よう

用意するもの　下じき（またはうすい板）、油性ペン、ビー玉、本（2〜3冊）、分度器

1. 下じきの左の辺の下に本を入れて、少しだけ傾ける。
2. 机から同じ高さの所をさがし、油性ペンで線を引く。高さを変えて、3 本引こう（これが等高線）。
3. 下じきの手前の辺の下にも本を入れ、2 つの向きに傾ける。②をやり直して、等高線を引き直そう。
4. ビー玉を等高線の上にそっと置き、手をはなす。転がりはじめた向きと等高線の角を、分度器ではかろう。



横から見たところ



上から見たところ（緑の線が等高線）

どの傾け方でも、ビー玉は**等高線と直角の向き**に転がりはじめます（ビー玉が少し転がりすぎて向きがずれることはあります。はじめの向きを見ます）。等高線の上は同じ高さなので、等高線にそって転がっても、高さは下がりません。下がるには、等高線から**いちばん早くはなれる向き**、つまり直角に進むのがいちばんです。このわけを、この章で、図と数と式の 3 通りで確かめます。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」の段は等高線の図だけで、「手でわかる」の段は表計算と、内積（4-12）の計算だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。

数学の道具

目でわかる 等高線と直角に転がる ★★★

1 ボールが転がる向きを、地図にかきこむ

主役の山の地図で、方眼の点（10 m ごと）にボールを置いたら、どの向きに転がりはじめるかを、矢印でかきこんでみます。やってみようのとおり、どの点でも、その点を通る等高線と直角に、低いほうへ向けます。

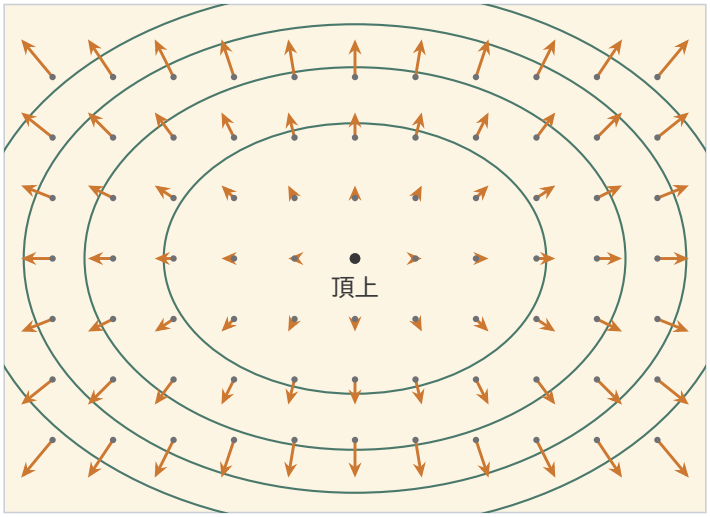


図 1 方眼の点（黒い点）に置いたボールが転がりはじめる向き（オレンジの矢印）。坂が急な所ほど長くかいた。等高線（緑の線、10 m ごと）は、はてな？ の地図と同じ。どの矢印も、そこを通る等高線と直角に交わる。

図 1 から、次の 3 つのことがわかります。

1. **矢印は、どれも等高線と直角。**
   等高線がだ円なので、矢印は頂上からまっすぐ外へ向かう向き（原点から見た向き）とは、少しずれています。
2. **北と南の側の矢印が長い。**
   この山は、東西より南北のほうがせまい（だ円が南北につぶれている）ので、南北の斜面のほうが急です。等高線の間もせまくなっています（3-5）。

3 頂上には矢印がない。

頂上はまわりより高く、どの向きにも坂がありません。置いたボールは転がりません。

2 なぜ、等高線と直角がいちばん急なのか

やってみようの下じきのように、平らな坂を考えます。平らな坂の等高線は、等しい間かくの平行な直線になります。となりの等高線との高さの差を 1 m、等高線の間かく（直角にはかった長さ）を d とします。

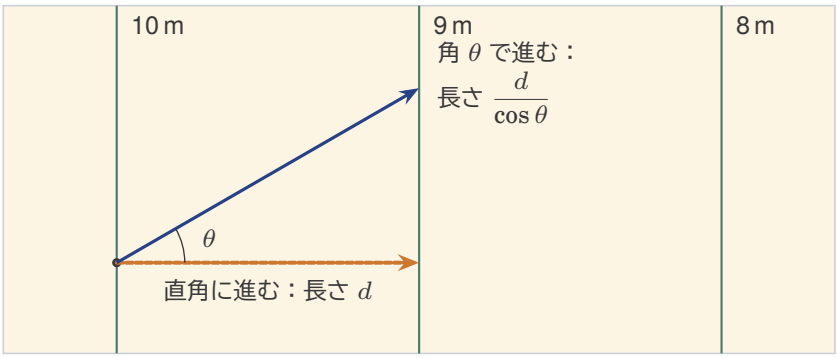


図 2　平らな坂の等高線（緑の線、1 m ごと）。どの道も、次の等高線に着いたときに 1 m 下がる。直角に進むと、いちばん短い長さ d で次の等高線に着く。角 θ だけずれて進むと、$\dfrac{d}{\cos\theta}$ 進まないと着かない。

次の等高線に着くと、高さはちょうど 1 m 下がります。どの向きに進んでも、下がる高さは同じ 1 m です。ちがうのは、そこまでに進む長さです。

- 等高線と直角に進むと、長さ d で着く。坂の傾きは $\dfrac{1}{d}$。
- 直角から角 θ だけずれて進むと、長さ $\dfrac{d}{\cos\theta}$ で着く（直角三角形の斜めの辺。4-8）。坂の傾きは $\dfrac{\cos\theta}{d}$。
- 等高線にそって進むと（$\theta = 90°$）、いつまでも次の等高線に着かない。坂の傾きは 0。

$\cos\theta$ は $\theta = 0°$ のときがいちばん大きく（1）、θ が大きくなるほど小さくなります。だから、**等高線と直角に進むのが、いちばん急**です。そして、そのときの坂

の傾き $\frac{1}{d}$ は、等高線の間かくがせまいほど大きくなります。3-5 の「間がせまいほど急」と同じです。

曲がった山の斜面でも、点のまわりのせまい所だけを見れば、8-3 で学んだように、平らな板（接平面）とみなせます。せまい所では、等高線もほぼ平行な直線です。だから、山のどの点でも、**いちばん急に下る向きは、その点を通る等高線と直角**です。ボールは、いちばん急に下る向きに転がりはじめます。

> **せいかくに言うと**
> ボールが転がりはじめる向きは、いちばん急に下る向きです。でも、転がりだしたボールは、勢い（速度）がつくので、そのあとも等高線と直角の向きに曲がりつづけるとはかぎりません。等高線と直角の向きの線をたどって下るのは、ゆっくり流れる水や、ねばりの強い液体のように、勢いをすぐに失うものです。この章で「転がる向き」というときは、そっと置いたボールが**転がりはじめる向き**のことです。

手でわかる どの向きの坂も、内積で ★★★★

③ 東の坂と北の坂を並べた矢印：勾配

点 P $(30,\ 20)$ で、東の坂は -0.6、北の坂は -0.8 でした（8-2）。「東へ 1 m 進むと 0.6 m 下がる」「北へ 1 m 進むと 0.8 m 下がる」という意味です。この 2 つの数を並べて、1 本の矢印にしてみます。

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (-0.6,\ -0.8)$$

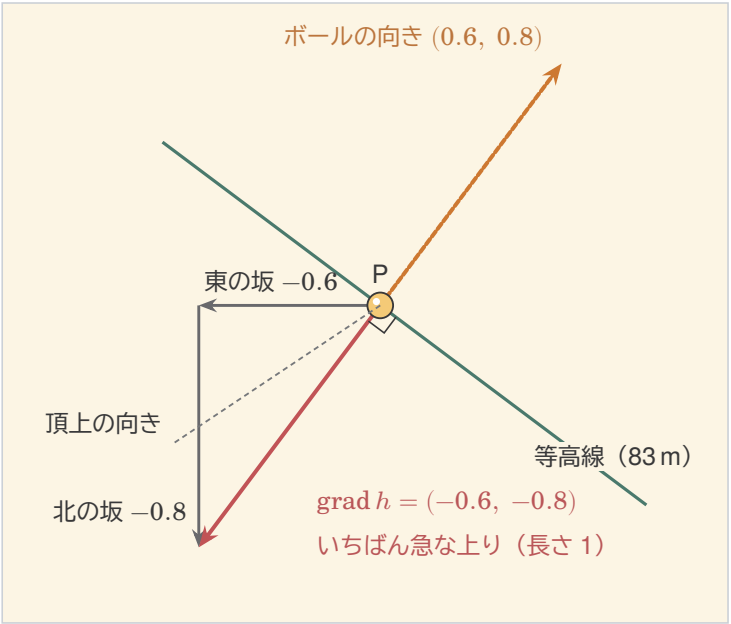


図 3　点 P の東の坂と北の坂（灰色の矢印）を並べると、赤い矢印 $\mathrm{grad}\, h$ になる。赤い矢印は、P を通る等高線と直角で、いちばん急な上りの向き。ボールは、その反対（オレンジの点線）へ転がる。頂上へまっすぐ向かう向き（灰色の点線）とは、少しずれている。

図 3 のように、この矢印は等高線と直角で、ボールが転がる向きのちょうど反対を向いています。つまり、**いちばん急な上りの向き**です。長さは $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = \sqrt{1} = 1$ です。

このように、関数 h の偏微分を並べた矢印を、h の**勾配**（こうばい）といい、$\mathrm{grad}\, h$ と書きます。「グラッド・エイチ」と読みます（gradient の頭の 4 文字）。

$$\mathrm{grad}\, h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

勾配ということばは、ふだんは「坂の傾き」の意味で使います（「勾配のきつい坂」）。数学の勾配は、傾きの大きさだけでなく、**いちばん急な上りの向き**も持った矢印です。高さ h は場所ごとに決まる 1 つの数ですが、$\mathrm{grad}\, h$ は場所ごとに決まる 1 本の矢印です。

ほかの点でも作ってみます。主役の山では、どの点でも次のようになります (8-2)。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -0.02x, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = -0.04y, \qquad \operatorname{grad} h = (-0.02x,\ -0.04y)$$

点 $(x,\ y)$	高さ h（m）	$\operatorname{grad} h$	長さ（坂の急さ）
$(30,\ 20)$	83	$(-0.6,\ -0.8)$	1.0
$(40,\ 0)$	84	$(-0.8,\ 0)$	0.8
$(0,\ 30)$	82	$(0,\ -1.2)$	1.2
$(20,\ 10)$	94	$(-0.4,\ -0.4)$	0.566
$(0,\ 0)$	100	$(0,\ 0)$	0

表 1　主役の山のいくつかの点の勾配。頂上では $\operatorname{grad} h = \vec{0}$（どの向きにも坂がない）。

$(40,\ 0)$ と $(0,\ 30)$ は高さがほぼ同じ（84 m と 82 m）ですが、坂の急さは 0.8 と 1.2 で、北側のほうが急です。図 1 で北と南の矢印が長かったのと同じです。

式がないとき：表の地図から、差で grad を求める

本物の山の地図や、天気の観測、温度の測定では、高さや温度の式はなく、決まった間かくの点の値（表）だけがあります。そのときは、8-2 で学んだように、表のとなりどうしの差で偏微分を見積もります。表計算で、行を北から南へ（行の番号が大きいほど南）、列を西から東へ並べ、点 P のまわりの高さを 10 m ごとに入れます。

	A	B	C	D
1	北↑ 東→	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$
2	$y = 30$	78	73	66
3	$y = 20$	88	83	76
4	$y = 10$	94	89	82

表 2　点 P（C3。高さ 83 m）のまわりの高さ（m）。東の坂は左右（緑）の差、北の坂は上下（黄）の差から求める。

点 P の左右のマスは 20 m はなれているので、東の坂は =(D3-B3)/20、北の坂は上の行から下の行をひいて =(C2-C4)/20 で求めます。

東の坂 $(76-88)\div 20=-0.6$　　北の坂 $(73-89)\div 20=-0.8$

$\mathrm{grad}\,h\approx(-0.6,\ -0.8)$ で、式で求めた値と同じです（主役の山は 2 次式なので、左右の差でちょうど合います）。地図のデータから坂の向きを計算するソフトウェアも、天気予報のコンピュータも、このように差で grad を求めています。

4 どの向きの坂も、内積で求まる：方向微分

東でも北でもない向きに進むと、坂はいくつでしょう。進む向きを、長さ 1 の矢印 $\vec{e}=(e_x,\ e_y)$ で表します。東から左回りに角 θ の向きなら、$\vec{e}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ です（4-8）。たとえば北東は $\theta=45°$ で、$\vec{e}=(0.707,\ 0.707)$ です。

この向きに、短い長さ s だけ進みます。すると、東へ $e_x s$、北へ $e_y s$ 進んだことになります。8-3 の全微分の式に、$\mathrm{d}x=e_x s$、$\mathrm{d}y=e_y s$ を入れます。

$$\mathrm{d}h=\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y$$　　8-3 の全微分

$$\mathrm{d}h=\frac{\partial h}{\partial x}e_x s+\frac{\partial h}{\partial y}e_y s$$　　東へ $e_x s$、北へ $e_y s$ 進んだ

$$\frac{\mathrm{d}h}{s}=\frac{\partial h}{\partial x}e_x+\frac{\partial h}{\partial y}e_y$$　　進んだ長さ s でわって、1 m あたりにした

$$\frac{\mathrm{d}h}{s}=\mathrm{grad}\,h\cdot\vec{e}$$　　左の形は、$\mathrm{grad}\,h$ と $\vec{e}$ の内積（4-12）

3 行めで s でわったのは、坂の傾きが「1 m 進んだときに高さがどれだけ変わるか」だからです（3-5）。4 行めの右辺は、2 つの矢印の成分どうしをかけてたした形、つまり内積です。7-3 の言い方では「1 行（$\mathrm{grad}\,h$）× 1 列（$\vec{e}$）」の積です。

向き $\vec{e}$（長さ 1）へ進むときの坂　　$\mathrm{grad}\,h\cdot\vec{e}=\dfrac{\partial h}{\partial x}e_x+\dfrac{\partial h}{\partial y}e_y$

この坂の値を、$\vec{e}$ の向きの**方向微分**（ほうこうびぶん）といいます。東の坂（x での偏微分）は $\vec{e}=(1,\ 0)$ のときの方向微分、北の坂（y での偏微分）は $\vec{e}=(0,\ 1)$ のときの方向微分です。勾配は、東と北の 2 つの坂を覚えておくだけで、**どの向きの坂でも内積で出せる**ようにした矢印なのです。

点 P で、北東の坂を確かめる

北東 $\vec{e}=(0.707,\ 0.707)$ の坂は、次のとおりです。

$$\mathrm{grad}\,h\cdot\vec{e}=(-0.6)\times 0.707+(-0.8)\times 0.707=-0.424-0.566=-0.990$$

8-3 では、東へ 1 m、北へ 1 m 進むと、高さは −1.4 m 変わりました。このとき進んだ長さは $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=1.414$（m）なので、1 m あたりでは $-1.4\div 1.414=-0.990$ です。同じ答えになりました。

向きを回して、いちばん急な向きをさがす

表計算で、θ を 0° から 15° ずつ回して、坂の値の表を作ります。E 列には確かめのため、本当に 1 m 進んだときの高さの差を、主役の山の式で計算します。

表を見る前に、予想してみましょう。点 P では、東の坂が −0.6、北の坂が −0.8 でした。（ア）いちばん急な上りは、東・西・南・北のどのあいだの向きでしょう。（イ）坂がちょうど 0 になる向きは、いくつあるでしょう。（ウ）いちばん急な坂は、東の坂や北の坂より、どれくらい急でしょう。答えは、表とグラフのあとの①〜③で確かめます。

D2	=-0.6*B2-0.8*C2

E2	=(100-0.01*(30+B2)^2-0.02*(20+C2)^2)-83

	A	B	C	D	E
1	θ（°）	e_x	e_y	坂 $\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e}$	本当の差（m）
2	0	1.000	0.000	−0.600	−0.610
5	45	0.707	0.707	−0.990	−1.005
8	90	0.000	1.000	−0.800	−0.820
11	135	−0.707	0.707	−0.141	−0.156
14	180	−1.000	0.000	0.600	0.590
17	225	−0.707	−0.707	0.990	0.975
20	270	0.000	−1.000	0.800	0.780
23	315	0.707	−0.707	0.141	0.126

表 3　A2 に 0、A3 に =A2+15、B2 に =COS(RADIANS(A2))、C2 に =SIN(RADIANS(A2)) と入れ、25 行め（345°）まで下へコピーした。のせたのは 45° ごとの行だけ（北東・北・北西…の 8 つの向き）。

D 列と E 列は、小数第 2 位までほぼ同じです。E 列が少しずれるのは、山の斜面が曲がっているからで、進む長さを短くすると、ずれは小さくなります (8-3)。D 列をグラフにすると、次のようになります。

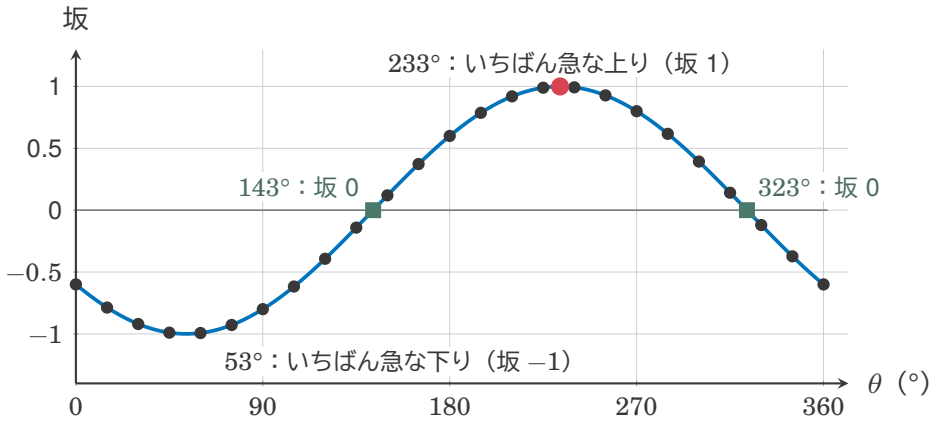


図 4　点 P で、向き θ に進むときの坂。黒い点は表計算の 15° ごとの値。いちばん大きいのは 233°（赤い点）で、$\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$ の向き。坂が 0 の 2 つの向き（四角）は、等高線の向き。

表とグラフから、次のことがわかります。

1. **いちばん急な上りは 233° のあたりで、坂はちょうど 1。**
   $\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$ の向きの角は 233.13° で、長さは 1 でした。いちばん急な向きは grad の向き、そのときの坂は grad の長さです。
2. **いちばん急な下りは、その反対の 53° で、坂は −1。**
   ボールが転がる向きです。
3. **坂が 0 になる向きが 2 つある（143° と 323°）。**
   坂が 0 の向きに進んでも、高さは変わりません。等高線の向きです。$233° - 143° = 90°$、$323° - 233° = 90°$ なので、等高線の向きは grad と直角です。

グラフの形は、cos のグラフ（4-8）を右へ 233° ずらした形に見えます。そのわけは、式でわかるの段で確かめます。

ここまでで十分

等高線の地図にボールの向きをかきこめて、東の坂と北の坂から grad を作り、どの向きの坂も内積で計算できれば十分です。この先は、なぜ grad の向きがいちばん急なのかを、式で確かめます。

∂ 式でわかる　内積の cos で確かめる　★★★★★

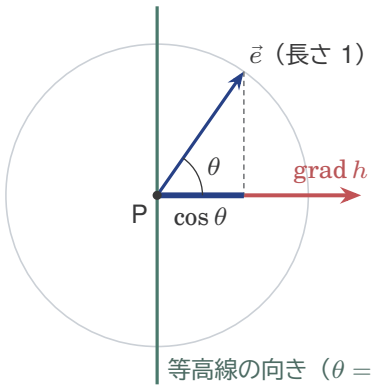
5 $\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e} = |\mathrm{grad}\, h| \cos\theta$

4-12 で、内積は「長さ×長さ× cos（2 つの矢印の間の角）」とも書けると学びました。$\vec{e}$ の長さは 1 なので、$\mathrm{grad}\, h$ と $\vec{e}$ の間の角を θ として、

$$\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e} = |\mathrm{grad}\, h|\,|\vec{e}| \cos\theta \qquad \text{内積のもう 1 つの形（4-12）}$$

$$\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e} = |\mathrm{grad}\, h| \cos\theta \qquad \vec{e} \text{ は長さ 1 なので } |\vec{e}| = 1$$

です。ここで θ は、東からはかった角ではなく、**grad の向きからはかった角**です。$|\mathrm{grad}\, h|$ はその点で決まった数なので、坂は $\cos\theta$ だけで変わります。図 4 のグラフが cos の形だったのは、このためです。



$\theta = 0°$　坂 $= |\mathrm{grad}\, h|$（いちばん急な上り）

$\theta = 90°$　坂 $= 0$（等高線の向き）

$\theta = 180°$　坂 $= -|\mathrm{grad}\, h|$（いちばん急な下り）

図 5　坂は、$\vec{e}$ を grad の向きに落とした影の長さ（$\cos\theta$）に、$|\mathrm{grad}\, h|$ をかけたもの。影がいちばん長いのは、$\vec{e}$ が grad と同じ向きのとき。

$\cos\theta$ は -1 から 1 までの値をとり、$\theta = 0°$ でいちばん大きく、$\theta = 180°$ でいちばん小さく、$\theta = 90°$ で 0 です。だから、次の 3 つのことが、どんな山（どんな関数）でもいえます。

いちばん急な上りは $\mathrm{grad}\, h$ の向きで、その坂は $|\mathrm{grad}\, h|$

いちばん急な下りは $-\mathrm{grad}\, h$ の向き

（ボールは等高線と直角に、急な向きへ転がる）

等高線は $\mathrm{grad}\, h$ と直角（内積が 0 の向き）

❓はてな？の答えです。ボールは、$-\mathrm{grad}\, h = (0.6,\ 0.8)$ の向き、つまり等高線と直角の向きに転がりはじめます。頂上から見てまっすぐ外へ向かう向き $(30,\ 20)$ ではありません。主役の山の等高線はだ円で、南北の斜面のほうが急なので、ボールは北側（y の向き）へ少し寄った向きに転がるのです。

「等高線と直角」は、目でわかるの段では図で、手でわかるの段では表で見ました。式では、等高線の向き $\vec{e}$ に進むと高さが変わらない（坂 0）ので、$\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e} = 0$ です。**内積が 0 なら直角**（4-12・7-3）なので、grad と等高線は直角です。3 通りで、同じことがいえました。

坂の大きさを、角度で言うと

$|\mathrm{grad}\, h|$ は、いちばん急な向きの坂の**傾き**です。傾きが m の坂の角度を α とすると、$\tan\alpha = m$ です（4-8）。点 P では $|\mathrm{grad}\, h| = 1$ なので、$\tan\alpha = 1$ で $\alpha = 45°$ です。横に 1 m 進むと 1 m 上がる、手をつきたくなるほど急な斜面です（主役の山は、計算しやすいように急にしてあります）。$|\mathrm{grad}\, h| = 1$ は「1°」ではなく「1 m 進むと 1 m 上がる」という意味です。

❻ 3 次元の勾配と等値面

部屋の中の温度のように、場所 $(x,\ y,\ z)$ で決まる数 $T(x,\ y,\ z)$ にも、勾配があります。偏微分が 3 つになるだけです。

$$\mathrm{grad}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x},\ \frac{\partial T}{\partial y},\ \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

方向微分も同じ形で、長さ 1 の矢印 $\vec{e}$ の向きの増え方は、次の式です。

$$\mathrm{grad}\, T \cdot \vec{e} = \frac{\partial T}{\partial x} e_x + \frac{\partial T}{\partial y} e_y + \frac{\partial T}{\partial z} e_z$$

5 と同じ理由で、$\mathrm{grad}\, T$ は**いちばん急に増える向き**を向き、その長さが増え方の速さです。

3 次元では、同じ温度の点を結ぶと、線ではなく**面**になります（8-1：等値面）。等高線と同じ理由で、$\mathrm{grad}\, T$ は等値面と直角です。

たとえば $f = x^2 + y^2 + z^2$（原点からの距離の 2 乗）の等値面は、原点を中心とする球の面です。偏微分すると、

$$\mathrm{grad}\, f = (2x,\ 2y,\ 2z) = 2\,(x,\ y,\ z)$$

で、原点から外へまっすぐ向かう矢印です。球の面と直角に、外へ向いています。点 $(1,\ 2,\ 2)$ では $\mathrm{grad}\, f = (2,\ 4,\ 4)$、長さは $\sqrt{4 + 16 + 16} = 6$ です。

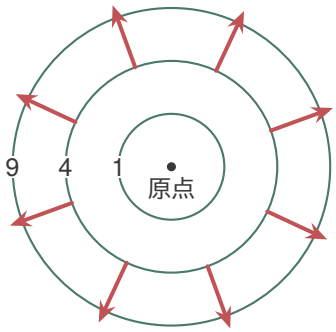


図 6　$f = x^2 + y^2 + z^2$ の等値面（球の面）を、$z = 0$ の平らな面で切った図。数字は f の値。$\mathrm{grad}\, f$ は等値面と直角（矢印は縮めてかいた。半径 2 の面の上では長さ 4）。

7 ナブラ ∇：偏微分を並べた記号

勾配を作るとき、私たちは「x で偏微分する」「y で偏微分する」「z で偏微分する」の 3 つの操作を、関数に順にほどこして並べました。この「3 つの操作を並べたもの」を、1 つの記号で書きます。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}\, f$$

∇ を**ナブラ**といいます。形が古いたて琴（ハープ）ににていることから、その名前でよばれるようになった、と伝えられています。∇f は「ナブラ・エフ」と読み、$\mathrm{grad}\, f$ とまったく同じものです。

∇ は、それだけでは数でも矢印でもありません。「右に関数が来たら、それを x・y・z で偏微分して並べる」という、**まだ何も入っていない機械**です。だから、右に関数を置いた ∇f と、左に置いた $f\nabla$ は、まったくちがうものです（$f\nabla$ は、まだ何も微分していない機械のままです）。

∇ の書き方	意味	答え	学ぶ章
∇f	勾配 $\mathrm{grad}\, f$	矢印	8-4
$\nabla \cdot \vec{F}$	発散 $\mathrm{div}\, \vec{F}$（わき出し）	数	8-9
$\nabla \times \vec{F}$	回転 $\mathrm{rot}\, \vec{F}$（うず）	矢印	8-10
$\nabla^2 f$	ラプラシアン（まわりの平均との差）	数	8-12

表 4　∇ を使う 4 つの書き方。この本では、ことばで読める grad・div・rot を主に使い、すぐ横に ∇ の書き方を並べる。物理の本や専門書では ∇ がよく使われる（物理 力-15 の $-\nabla p$ は $-\mathrm{grad}\, p$）。

8 物理に出てくる勾配

物理では、場所ごとに決まる 1 つの数（位置エネルギー・電位・温度・気圧）から、場所ごとの矢印（力・電場・熱の流れ・空気をおす力）が、勾配で作られます。どれも、**数が下がる向き**（$-\mathrm{grad}$）に、**下がり方が急なほど強く**向きます。ボールが転がる向きと同じです。

① 位置エネルギーと力：$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$

物理 力-4 では、力 $\vec{F}$ が小さな移動 $\mathrm{d}\vec{r}$ でする仕事が、位置エネルギー U の減った分になる、つまり $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}U$ でした。$\mathrm{d}U = \mathrm{grad}\, U \cdot \mathrm{d}\vec{r}$（4 のはじめの式を 3 次元にしたもの）とくらべると、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ です。

地面の近くの重力の位置エネルギーは、$U = mgz$（z は高さ）です。偏微分すると、次のようになります。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = -(0,\ 0,\ mg) = (0,\ 0,\ -mg)$$

真下向きに大きさ mg の力、つまり重力です。ばねの位置エネルギーが次の式なら、

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2), \qquad \vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = -k\,(x,\ y)$$

で、いつも原点（ばねの自然な長さの所）へ引きもどす力です（例題 6）。

② 電位と電場：$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, \phi$

電位 ϕ〔V〕（ファイ。高校物理の電位 V と同じもの）も、場所で決まる 1 つの数です。電場は $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, \phi$〔V/m〕で、電位の高い所から低い所へ向きます。高校物理の「等電位面と電気力線は直角」は、「等値面と grad は直角」のことです。

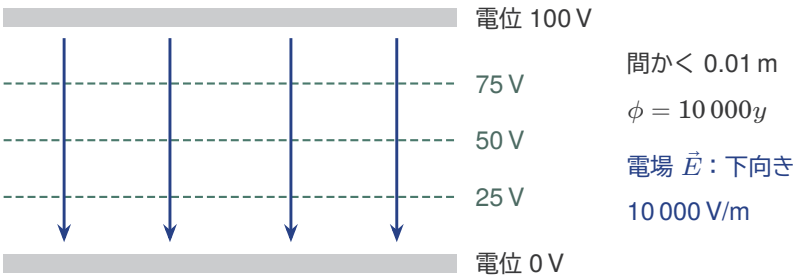


図 7　2 まいの平らな板（間かく 0.01 m、電位 0 V と 100 V）の間の電場（紺の矢印）と等電位面（緑の点線）。電場は等電位面と直角で、電位の低いほうを向く。

図 7 の板の間では、下の板からの高さを y〔m〕として $\phi = 10\,000y$〔V〕です。$\operatorname{grad}\phi = (0,\ 10\,000)$ なので、$\vec{E} = (0,\ -10\,000)$（V/m）。下向きに大きさ 10 000 V/m で、高校物理の $E = \dfrac{V}{d} = \dfrac{100}{0.01}$ と同じです。

③ 温度と熱の流れ：$\vec{q} = -k\operatorname{grad}T$

6-3 では、かべの中を流れる熱は「温度の傾きに比例する」（フーリエの法則）と学びました。熱の流れを矢印 $\vec{q}$〔W/m²〕（1 m² を 1 秒に通る熱）で表すと、3 次元では

$$\vec{q} = -k\operatorname{grad}T$$

です。k〔W/(m·K)〕は熱伝導率（ばね定数の k とは別のもの）です。熱は、温度の高い所から低い所へ、等温面と直角に、温度の下がり方が急なほど多く流れます。6-3 のかべ（厚さ 0.2 m、内側 20 ℃、外側 0 ℃、コンクリート $k = 1.6$）では、温度は $T = 20 - 100x$ なので、$\operatorname{grad}T = (-100,\ 0,\ 0)$（K/m）、$\vec{q} = (160,\ 0,\ 0)$（W/m²）です。6-3 と同じ 160 W/m² が、外向き（x の向き）に流れます。この式は、8-13 の熱方程式の出発点になります。

止まった水の中の圧力 p〔Pa〕も同じです。8-2 で、水の深さの向きの偏微分は $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$（$z$ は上向き）、横の向きは 0 でした。だから

$$\operatorname{grad}p = (0,\ 0,\ -\rho g) = \rho\vec{g}$$

で、圧力は真下へ向かっていちばん急に増え、同じ圧力の面（等圧面）は水平です（物理 力-12）。

④ 気圧と風：空気をおす力 $-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$

天気図の等圧線は、気圧 p の等高線です。空気は、気圧の高い所から低い所へおされます。空気 1 kg あたりにはたらくこの力（気圧傾度力）は、$-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$（$\rho$ は空気の密度。約 1.2 kg/m³）で、等圧線と直角に、低気圧のほうを向きます。

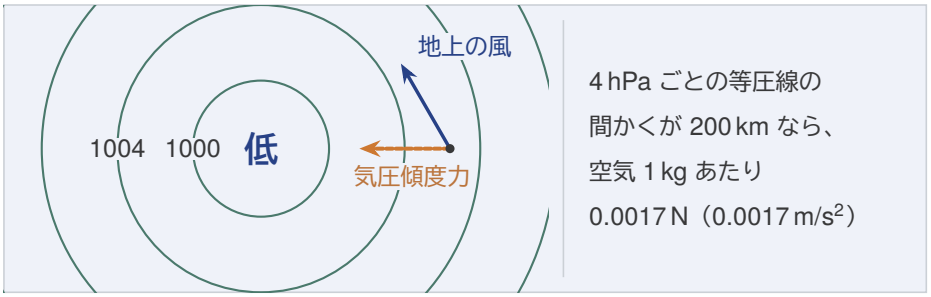


図 8　北半球の低気圧のまわり（模式図）。気圧傾度力（オレンジの点線）は等圧線（緑の線）と直角に低気圧へ向くが、地上の風（紺の矢印）は右へそれ、等圧線をななめに横切って吹きこむ。

4 hPa（400 Pa）ごとの等圧線の間かくが 200 km なら、空気 1 kg あたりの加速度は次のとおりです。

$$|\mathrm{grad}\, p| = 400 \div 200\,000 = 0.002\,\mathrm{Pa/m}, \qquad 0.002 \div 1.2 = 0.0017\,\mathrm{m/s^2}$$

小さく見えますが、何時間も続くと強い風になります。

ただし、実際の風は、この力の向きにまっすぐは吹きません。地球が自転しているので、北半球では動く空気が右へそれます（4-14 のコラムのコリオリの力）。上空では、風はほとんど等圧線にそって吹き、地面の近くでは、地面との摩擦で弱められて、等圧線をななめに横切って低気圧へ吹きこみます。等圧線の間がせまい所ほど風が強い、という天気予報の言い方は、$|\mathrm{grad}\, p|$ が大きいほど力が大きい、ということです。

場所で決まる数	矢印	式	等値面
高さ h	ボールの向き	$-\mathrm{grad}\, h$	等高線
位置エネルギー U	力 $\vec{F}$	$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$	同じ U の面
電位 ϕ	電場 $\vec{E}$	$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, \phi$	等電位面
温度 T	熱の流れ $\vec{q}$	$\vec{q} = -k\, \mathrm{grad}\, T$	等温面
気圧 p	空気をおす力	$-\frac{1}{\rho}\, \mathrm{grad}\, p$	等圧面

表 5 物理に出てくる勾配。どれも「数が下がる向きに、下がり方が急なほど強く」。矢印は等値面と直角。

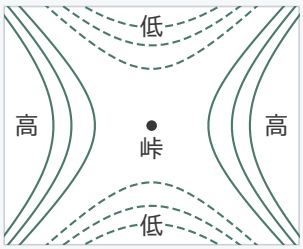
せいかくに言うと

どんな矢印でも、ある数の勾配（$-\mathrm{grad}$）で書けるわけではありません。たとえば、うずを巻く流れ（8-5）は、どんな数の勾配にもなりません。勾配で書ける力では、物を動かしてもどすと、した仕事の合計が 0 になります（8-7）。勾配で書けるかどうかは、すきまのない広がりの中なら、$\mathrm{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$ かどうかで見分けられます（8-10）。穴のある所では、rot が 0 でも勾配で書けないことがあります（8-7・8-11）。

もっと知りたい ★★★★★

頂上・谷・峠：$\mathrm{grad}\, f = \vec{0}$ の点

$\mathrm{grad}\, f = \vec{0}$ の点では、どの向きにも坂がありません。そのような点には、頂上（まわりより高い）、谷の底（まわりより低い）のほかに、**峠**（とうげ）の点があります。峠は、ある向きに進むと下がり、それと直角の向きに進むと上がる点です。馬のくらの形ににているので、**あん点**ともいいます。$f = x^2 - y^2$ の原点が峠の点です（図の実線は $f = 1,\ 2,\ 3$、点線は $f = -1,\ -2,\ -3$ の等高線）。

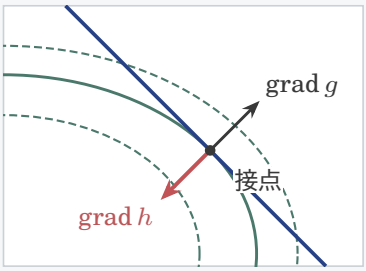


2 変数の関数のこのような点がどれになるかは、2 回の偏微分（8-2）を並べた行列（ヘッセ行列という）の固有値（7-8）の符号で決まります。2 つとも負なら頂上、2 つとも正なら谷の底、正と負が 1 つずつなら峠です。

もっと知りたい ★★★★★

道の上でいちばん高い所：ラグランジュの未定乗数法

主役の山の中腹を、まっすぐな道 $x + y = 50$ が通っています。この道の上で、いちばん高い所はどこでしょう。道を歩くと、等高線を横切るあいだは高さが変わります。いちばん高い所では、道は等高線を横切らず、そっと**接して**います。そこでは、等高線と直角な $\mathrm{grad}\, h$（赤）は、道とも直角です。



道の式を $g = x + y = 50$ と見ると、道と直角な矢印は $\mathrm{grad}\, g = (1,\ 1)$ です。だから接点では、$\mathrm{grad}\, h$ と $\mathrm{grad}\, g$ が平行で、ある数 μ（ミュー）を使って $\mathrm{grad}\, h = \mu\, \mathrm{grad}\, g$ と書けます。成分で書くと $-0.02x = \mu$、$-0.04y = \mu$ なので、$-0.02x = -0.04y$、つまり $x = 2y$ です。道の式に入れると $3y = 50$ で、$y = 16.7$、$x = 33.3$、高さは 83.3 m です（図の太い緑の線が 83.3 m の等高線）。この方法を**ラグランジュの未定乗数法**といい、μ を未定乗数といいます。多くの専門書では λ と書きますが、7-8 の固有値の λ とは別のものです。物理では、決まった全体のエネルギーの中で、いちばん起こりやすい分け方をさがすときに使います（物理 熱-15）。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対し、$\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$ を ϕ の勾配といい、$\mathbf{grad}\,\phi$ とも書く。単位ベクトル $\mathbf{e}$ の方向の方向微分係数は $\nabla\phi\cdot\mathbf{e}$ で与えられる。$\nabla\phi$ は ϕ の増加率が最大となる方向を向き、その大きさは最大の増加率に等しく、等位面 $\phi=$ 一定 に垂直である。

訳 「スカラー場」は、場所ごとに 1 つの数が決まるもの（高さ・温度・電位など。ここの ϕ は電位にかぎらない）。太字の $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ は x・y・z の向きの長さ 1 の矢印 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$（4-13）なので、$\nabla\phi$ はこの本の $\mathrm{grad}\,\phi$ そのもの。「方向微分係数」は方向微分（④）。「増加率が最大となる方向」はいちばん急な上り（⑤）。「等位面」は等値面（⑥）。

たいせつ

勾配	$\mathrm{grad}\,h = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}\right)$（3 次元は $\dfrac{\partial}{\partial z}$ も）
方向微分	$\mathrm{grad}\,h\cdot\vec{e} = \lvert\mathrm{grad}\,h\rvert\cos\theta$（$\vec{e}$ は長さ 1）
いちばん急な向き	上りは grad、下りは $-\mathrm{grad}$。坂は $\lvert\mathrm{grad}\,h\rvert$
等高線・等値面	grad と直角（内積 0）
ナブラ	$\nabla f = \mathrm{grad}\,f$
物理	$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$、$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$、$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$

この章で出てきたことば

勾配　場所で決まる数 f の偏微分を並べた矢印 $\mathrm{grad}\, f$。いちばん急に増える向きを向き、長さはそのときの増え方の速さ。グラディエント。

方向微分　長さ 1 の矢印 $\vec{e}$ の向きに進むときの、1 あたりの変わり方。$\mathrm{grad}\, f \cdot \vec{e}$。

等値面　3 次元で、同じ値の点を結んだ面（等温面・等電位面など）。2 次元では等値線（等高線・等圧線）。

ナブラ　偏微分の 3 つの操作を並べた記号 ∇。$\nabla f = \mathrm{grad}\, f$。

峠の点（あん点）　$\mathrm{grad}\, f = \vec{0}$ で、ある向きには上がり、別の向きには下がる点。

気圧傾度力　気圧の差で空気がおされる力。等圧線と直角に、低いほうへ向く。

記号カード　初めて出た章 8-4

$\mathrm{grad}\, f$

読み方　グラッド・エフ
意味　勾配。偏微分を並べた矢印。いちばん急に増える向き
英語　gradient

記号カード　初めて出た章 8-4

∇

読み方　ナブラ
意味　偏微分を並べた記号。$\nabla f = \mathrm{grad}\, f$。8-9・8-10・8-12 でも使う
英語　nabla, del

コラム　ナブラという名前

∇ の記号は、19 世紀のなかごろに、イギリスとアイルランドの数学者・物理学者が使いはじめました。アイルランドのハミルトンは、三角形を横にたおした形の記号を使い、スコットランドのテイトが、いまの逆さの三角形の形で広めた、と伝えられています。「ナブラ」という名前は、1870 年ころ、テイトの友人が、形が古いたて琴（ハープ）ににていることから、そのたて琴の名前をとって提案したものだそうです。マクスウェルも、手紙の中でこの名前を使っています。新しい記号は、はじめからいまの形と名前で決まっていたのではなく、たくさんの人が使いながら少しずつ形になっていったのです。

例題でたしかめよう

例題 1　主役の山の勾配

主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の点 $(20,\ 10)$ で、$\mathrm{grad}\, h$、いちばん急な上りの坂の大きさ、ボールが転がりはじめる向きを求めましょう。

考え方　③。偏微分 $-0.02x$、$-0.04y$ に点の値を入れる。坂は grad の長さ、ボールは $-\mathrm{grad}\, h$ の向き（⑤）。

式　x で偏微分 $-0.02 \times 20 = -0.4$、y で偏微分 $-0.04 \times 10 = -0.4$

長さ $\sqrt{(-0.4)^2 + (-0.4)^2} = \sqrt{0.32} = 0.566$

答え　$\mathrm{grad}\, h = (-0.4,\ -0.4)$、坂 0.566、ボールは $(0.4,\ 0.4)$ の向き（北東）

例題 2　向きを決めて坂を求める（方向微分）

主役の山の点 P $(30,\ 20)$（$\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$）で、(1) 北東、(2) 南に進むときの坂を求め、上りか下りかを答えましょう。

考え方　④。向きを長さ 1 の矢印 $\vec{e}$ にして、$\mathrm{grad}\, h \cdot \vec{e}$。正なら上り、負なら下り。

式　(1) $\vec{e} = (0.707,\ 0.707)$ で

$(-0.6) \times 0.707 + (-0.8) \times 0.707 = -0.990$

(2) $\vec{e} = (0,\ -1)$ で $(-0.6) \times 0 + (-0.8) \times (-1) = 0.8$

答え　(1) -0.990（下り）　(2) 0.8（上り）

じぶんでとこう 1

主役の山の点 $(-10,\ 15)$ で、$\mathrm{grad}\, h$、いちばん急な上りの坂の大きさ、ボールが転がりはじめる向きを求めましょう。

じぶんでとこう 2

主役の山の点 $(20,\ 10)$ で、(1) 北、(2) 南西に進むときの坂を求め、上りか下りかを答えましょう（grad は例題 1 で求めた）。

例題 3　いちばん急な上りと坂の角度

主役の山の点 $(10,\ 20)$ で、いちばん急な上りの向き（長さ 1 の矢印）、その坂の傾きと角度、ボールの向きを求めましょう。

考え方　⑤。上りは grad の向きで、長さ 1 にするには grad をその長さでわる。角度は $\tan\alpha =$ 傾き（4-8）。

式　$\mathrm{grad}\, h = (-0.2,\ -0.8)$、長さ $\sqrt{0.04 + 0.64} = \sqrt{0.68} = 0.825$

長さ 1：$(-0.2 \div 0.825,\ -0.8 \div 0.825) = (-0.243,\ -0.970)$

$\tan\alpha = 0.825$ より、電卓の $\tan^{-1}$ で $\alpha = 39.5°$

答え　上り $(-0.243,\ -0.970)$、傾き 0.825（約 39.5°）、ボールは $(0.243,\ 0.970)$ の向き

じぶんでとこう 3

主役の山の点 $(20,\ -15)$ で、いちばん急な上りの向き（長さ 1 の矢印）、その坂の傾きと角度、ボールの向きを求めましょう。

例題 4　等高線の向き

主役の山の点 P $(30,\ 20)$（$\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$）を通る等高線の向きを 1 つの矢印で答え、等高線の接線の傾き $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求めましょう。

考え方　⑤。等高線は grad と直角。$(a,\ b)$ と直角な矢印の 1 つは $(b,\ -a)$（入れかえて、片方の符号を変える）。

式　$(-0.6,\ -0.8)$ と直角：$(-0.8,\ 0.6)$、その反対の $(0.8,\ -0.6)$

確かめ $(-0.6)\times 0.8 + (-0.8)\times(-0.6) = 0$、傾き $\dfrac{-0.6}{0.8} = -0.75$

答え　$(0.8,\ -0.6)$（または $(-0.8,\ 0.6)$）。傾き -0.75

じぶんでとこう 4

主役の山の点 $(20,\ 10)$（$\mathrm{grad}\, h = (-0.4,\ -0.4)$）を通る等高線の向きを 1 つの矢印で答え、等高線の接線の傾き $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求めましょう。

例題 5　式の勾配（2 つの変数・3 つの変数）

次の関数の勾配を、( ) の点で求めましょう。(2) は長さも求めましょう。

(1) $f = x^2y + 3y$　$(1,\ 2)$　　(2) $T = x^2 + 2y^2 - z$　$(1,\ 1,\ 2)$

考え方　③・⑥。ほかの文字を止めて（数と同じに見て）、1 つずつ偏微分する（8-2）。

式　(1) x で $2xy$（$3y$ は x をふくまないので 0）、y で $x^2 + 3$

点 $(1,\ 2)$ で $(2\times 1\times 2,\ 1+3) = (4,\ 4)$

(2) $(2x,\ 4y,\ -1)$ に入れて $(2,\ 4,\ -1)$、長さ

$\sqrt{4+16+1} = \sqrt{21} = 4.58$

答え　(1) $\nabla f = (4,\ 4)$　(2) $\nabla T = (2,\ 4,\ -1)$、長さ 4.58

じぶんでとこう 5

次の関数の勾配を、( ) の点で求めましょう。(2) は長さも求めましょう。

(1) $f = xy^2 + 2x \quad (2,\ 1)$　　(2) $T = 3x + y^2 + z^2 \quad (1,\ 2,\ 1)$

例題 6　位置エネルギーから力を求める

ばね定数 $k = 200\,\mathrm{N/m}$ のばねで原点につながれた物の位置エネルギーは $U = \dfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$〔J〕です（$x$、$y$ は m）。点 $(0.03,\ 0.04)$ で物にはたらく力 $\vec{F}$ と、その大きさを求めましょう。

考え方　⑧の①。$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$。$\dfrac{1}{2}kx^2$ を x で微分すると kx。

式　$\mathrm{grad}\,U = (kx,\ ky) = (200 \times 0.03,\ 200 \times 0.04) = (6,\ 8)$

$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U = (-6,\ -8)$、大きさ $\sqrt{36 + 64} = 10$

答え　$\vec{F} = (-6,\ -8)$（N）、大きさ 10 N（原点のほうへ引きもどす）

じぶんでとこう 6

ばね定数 $k = 100\,\mathrm{N/m}$、位置エネルギー $U = \dfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$〔J〕のとき、点 $(0.06,\ -0.08)$ で物にはたらく力 $\vec{F}$ と、その大きさを求めましょう。

例題 7　温度の地図から熱の流れを求める

ステンレスの板（$k = 16\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$）の中の温度が $T = 60 - 300x - 400y$〔℃〕です（x、y は m）。熱の流れ $\vec{q}$ と、その大きさを求めましょう。

考え方　⑧の③。$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$。温度の差は、℃で数えても K で数えても同じ。

式　$\mathrm{grad}\,T = (-300,\ -400)$（K/m）

$\vec{q} = -16 \times (-300,\ -400) = (4800,\ 6400)$、大きさ $\sqrt{4800^2 + 6400^2} = 8000$

答え　$\vec{q} = (4800,\ 6400)$（$\mathrm{W/m^2}$）、大きさ $8000\,\mathrm{W/m^2}$（温度が下がる向き）

じぶんでとこう 7

コンクリートの板（$k = 1.6\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$）の中の温度が $T = 30 - 60x + 80y$〔℃〕です（x、y は m）。熱の流れ $\vec{q}$ と、その大きさを求めましょう。

熱の流れの大きさは、「k ×温度の坂（$\mathrm{grad}\,T$ の長さ）」です。例題 7 のステンレスは $16 \times 500 = 8000\,\mathrm{W/m^2}$、じぶんでとこう 7 のコンクリートは $1.6 \times 100 = 160\,\mathrm{W/m^2}$ でした。同じ坂なら、銅（k は約 $400\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$）には、ステンレスの約 25 倍の熱が流れます。

例題 8　電位から電場を求める

平面の上の電位が $\phi = 200x + 150y$〔V〕です（x、y は m）。(1) 電場 $\vec{E}$ とその大きさ、(2) 等電位線の向き（1 つの矢印）を求め、電場と直角か確かめましょう。

考え方　⑧の②。$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$。等電位線は grad と直角（例題 4 のさがし方）。

式　(1) $\mathrm{grad}\,\phi = (200,\ 150)$、$\vec{E} = (-200,\ -150)$、大きさ $\sqrt{200^2 + 150^2} = 250$

(2) $(150,\ -200)$、短くして $(3,\ -4)$。$\vec{E} \cdot (3,\ -4) = -600 + 600 = 0$

答え　(1) $\vec{E} = (-200,\ -150)$ (V/m)、250 V/m　(2) $(3,\ -4)$。内積 0 で直角

じぶんでとこう 8

平面の上の電位が $\phi = -120x + 160y$〔V〕です（x、y は m）。電場 $\vec{E}$ とその大きさを求め、等電位線の向き（1 つの矢印）が電場と直角か確かめましょう。

例題 9　坂をゆるくする道の向き

主役の山の点 P $(30,\ 20)$ では、$|\mathrm{grad}\, h| = 1$、grad の向きは東から左回りに $233.1°$ です。上りの坂が 0.5 になる道の向きを、東から左回りの角で 2 つ答えましょう。

考え方　⑤。grad から角 θ ずれた向きの坂は $|\mathrm{grad}\, h| \cos\theta$。grad の左右にずらす。

式　$1 \times \cos\theta = 0.5$ より $\theta = 60°$

$233.1° + 60° = 293.1°$、$233.1° - 60° = 173.1°$

答え　$173.1°$ と $293.1°$（grad から左右に $60°$ ずつずれた向き）

じぶんでとこう 9

主役の山の点 $(0,\ 30)$ では $\mathrm{grad}\, h = (0,\ -1.2)$ で、grad の向きは真南（東から左回りに $270°$）です。上りの坂が 0.6 になる道の向きを、東から左回りの角で 2 つ答えましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① grad を 1 つの数で答える

✕　点 P で、$\mathrm{grad}\, h = -0.6 + (-0.8) = -1.4$

○　$\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$（2 つの成分を並べた矢印）

grad は矢印です。2 つの偏微分をたしてはいけません。-1.4 は、8-3 で東へ 1 m・北へ 1 m 進んだときの高さの変化（全微分）です。

⚠ まちがえやすいところ

② ボールの向きを grad の向きにする

✕ ボールは $\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$ の向きに転がる

○ ボールは $-\mathrm{grad}\, h = (0.6,\ 0.8)$ の向きに転がる

grad はいちばん急な**上り**の向きです。下るボールは、その反対へ転がります。物理の $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ のマイナスも同じ理由です。

⚠ まちがえやすいところ

③ 長さが 1 でない矢印で坂を出す

✕ 北東の坂は、$(1,\ 1)$ との内積で $-0.6 - 0.8 = -1.4$

○ 北東は長さ 1 の $(0.707,\ 0.707)$ を使って -0.990

$(1,\ 1)$ の長さは $\sqrt{2}$ なので、内積は $1.414\,\mathrm{m}$ 進んだときの変化になります。$1\,\mathrm{m}$ あたりの坂は、長さ 1 の矢印で出します。

⚠ まちがえやすいところ

④ いちばん急な上りは、頂上へまっすぐ向かうと思う

✕ 点 P でいちばん急な上りは、頂上へ向かう $(-30,\ -20)$ の向き

○ いちばん急な上りは $\mathrm{grad}\, h = (-0.6,\ -0.8)$ の向き

頂上へまっすぐ向かう向き（長さ 1 で $(-0.832,\ -0.555)$）の坂は 0.943 で、1 より小さくなります。等高線がだ円の山では、grad は頂上を向きません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ $|\mathrm{grad}\, h|$ を角度と思う

✕ 坂の大きさ 1 は「1°」

○ 傾き 1、角度は $\tan\alpha = 1$ で 45°

$|\mathrm{grad}\, h|$ は「1 m 進むと何 m 上がるか」という傾きです。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $f\nabla$ を ∇f と同じと思う

✕ $f\nabla = \nabla f = \mathrm{grad}\, f$

○ ∇ は右にある関数を微分する。$f\nabla$ は何も微分していない

∇ は数ではなく「偏微分する機械」なので、置く場所を入れかえられません。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 偏微分で、止めた文字まで微分する

✕ $f = x^2y + 3y$ で、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + x^2 + 3$

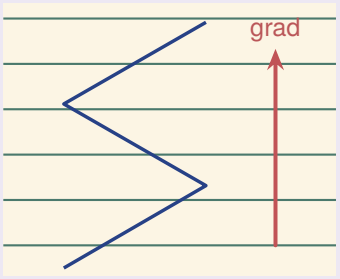
○ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$（$y$ は数と同じ。$3y$ は x をふくまないので 0）

x で偏微分するときは、y を止めて数と同じに見ます（8-2）。x^2y は「x^2 の y 倍」、$3y$ は「ただの数」です。

物理・工学ではこう使う

登山道のつづら折り

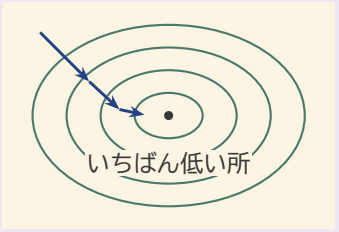
急な斜面の登山道は、いちばん急な向き（grad の向き）にまっすぐ登らず、ジグザグに折れ曲がりながら登ります（つづら折り）。grad の向きから角 θ ずれた道の坂は $|\mathrm{grad}\, h|\cos\theta$ なので、$\theta = 60°$ ずらせば坂は半分になります（例題 9）。そのかわり、道の長さは 2 倍になります。山の道路や、車いすで通れるスロープも、同じ考えで坂をゆるくしています。



上から見た斜面

機械学習の「勾配降下法」

コンピュータに画像の見分け方などを学ばせるときは、答えのまちがいの大きさを、たくさんの数（パラメータ）の関数として表します。そして、その関数の $-\mathrm{grad}$ の向き（いちばん急に下る向き）に、パラメータを少しずつ動かして、まちがいを小さくしていきます。霧の中で山を下りる人が、足もとのいちばん急な下りの向きに 1 歩ずつ進むのと同じ考えで、**勾配降下法**とよばれています。変数が何百万個あっても、勾配は「偏微分を並べた矢印」です。



コラム　熱の通り道を設計する

スマートフォンやパソコンの中では、CPU などの部品が熱を出します。熱は $\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$ の向き、つまり等温線と直角に、温度の高い所から低い所へ流れます（⑧の③）。設計では、コンピュータで板の中の温度の地図を計算し、温度の勾配が大きい所（熱がたくさん流れる所）に、熱を通しやすい銅の板やヒートパイプを置いて、熱をケースの外へ逃がします。サーモグラフィー（温度を色で見るカメラ）の画像は、温度の地図そのものです。その画像から、等温線の間がせまい所を見つければ、熱がたくさん流れている所がわかります。

もっと知りたい ★★★★★

勾配は「1 行のヤコビ行列」

8-3 では、関数 $x(\theta_1,\ \theta_2)$、$y(\theta_1,\ \theta_2)$ の偏微分を並べてヤコビ行列 J を作り、小さな変化を $\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$（行列×ベクトル）で表しました。出てくる量が高さ h の 1 つだけなら、偏微分を並べた行列は 1 行になります。それが勾配です。

$$\mathrm{d}h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,h \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

左の 1 行と右の 1 列の積が、7-3 の「行と列の内積」です。このように、全微分（8-3）・方向微分（④）・ヤコビ行列は、どれも「偏微分を並べたものと、小さな動きの内積」という同じしくみです。8-7 の線積分では、この $\mathrm{grad}\,h \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ を道にそってたし合わせ、「登る仕事は道によらない」ことを確かめます。

章末問題

8-4 のまとめ

基本 ★★★★★

1 主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の点 $(-20,\ -10)$ で、$\mathrm{grad}\, h$、いちばん急な上りの坂の大きさ、ボールが転がりはじめる向きを求めましょう（例題 1）。

2 主役の山の点 $(40,\ 0)$ では $\mathrm{grad}\, h = (-0.8,\ 0)$ です。(1) 北東、(2) 西に進むときの坂を求め、上りか下りかを答えましょう（例題 2）。

3 主役の山の点 $(0,\ -25)$ で、いちばん急な上りの向き（長さ 1 の矢印で）と、その坂の傾き・角度を求めましょう。また、ボールが転がりはじめる向きを答えましょう（例題 3）。

4 主役の山の点 $(-30,\ 10)$ を通る等高線の向きを 1 つの矢印で答え、等高線の接線の傾き $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求めましょう（例題 4）。

5 次の関数の勾配を、( ) の点で求めましょう（例題 5）。

(1) $f = x^2y^2 \quad (1,\ 2)$

(2) $T = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1,\ -2,\ 2)$（長さも求める）

6 ばね定数 $k = 400\,\mathrm{N/m}$ のばねで、位置エネルギーが $U = \dfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$〔J〕のとき、点 $(0.03,\ -0.04)$ で物にはたらく力 $\vec{F}$ と、その大きさを求めましょう（例題 6）。

7 れんがのかべ（$k = 0.6\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$）の中の温度が $T = 50 - 30x + 40y$〔℃〕です（x、y の単位は m）。熱の流れ $\vec{q}$ とその大きさを求めましょう（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

8 平面の上の電位が $\phi = 300x - 400y$〔V〕です（x、y の単位は m）。電場 $\vec{E}$ とその大きさを求め、等電位線の向き（1 つの矢印）が電場と直角か確かめましょう（例題 8）。

9 主役の山の点 $(40,\ 0)$ では $\mathrm{grad}\, h = (-0.8,\ 0)$ で、grad の向きは真西（東から左回りに 180°）です。上りの坂が 0.4 になる道の向きを、東から左回りの角で 2 つ答えましょう（例題 9）。

10 主役の山の点 $(-30,\ -20)$ について、次の問いに答えましょう。

（1）$\mathrm{grad}\, h$ と、いちばん急な上りの坂の大きさ

（2）北東に進むときの坂

（3）等高線の向き（1 つの矢印）（例題 1・例題 2・例題 4）

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 等高線の地図に、ボールが転がりはじめる向き（等高線と直角）をかきこめる。 → 141 ページ
- ☐ 東の坂と北の坂を並べて勾配 grad を作り、どの向きの坂も内積で計算できる。 → 146 ページ
- ☐ 内積の cos の形から、いちばん急な向きと等高線の向きを説明し、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ などの物理の式を使える。 → 150 ページ

ソラ

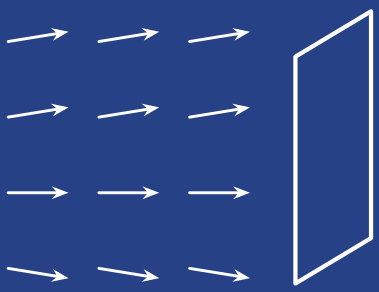
東の坂と北の坂、たった 2 つの数で、どの向きの坂もわかるんだね。
次の章では、空間のどこにも矢印がある「場」を見にいこう。

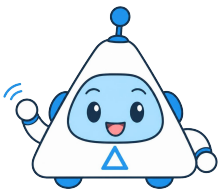
第８巻　第２部

ベクトル場と積分

2

- 空間のどこにも矢印がある、ってどういうこと？
- 遠回りすると、した仕事は変わる？
- あみを通りぬける水の量は、どう数える？





空間の点ごとに矢印が１本ずつある「ベクトル場」を、道にそって・面を通して、たし合わせるよ。積分の名前と、実際にふつうの定積分に直す手順を、場合ごとにていねいに見ていくよ。

この部で学ぶこと

8-5 ベクトル場 ★★★★☆ P.176

空間の点ごとに、矢印を 1 本ずつ

8-6 面や立体でたし合わせる：重積分 ★★★★★ P.202

厚さがちがう板の重さを求める

8-7 道にそってたす：線積分 ★★★★★ P.252

遠回りすると、仕事は変わる？

8-8 面を通りぬける量：面積分と流束 ★★★★★ P.294

あみの向きで、通りぬける水の量が変わる

この部を読むと…

ベクトル場を図と式で表し、重積分・線積分・面積分を、場合ごとの手順でふつうの定積分に直して計算できるようになります。

第 2 部　ベクトル場と積分

★★★★

8-5 ベクトル場

道しるべ　この章の前に 4-10 4-13 6-1 6-4 7-6 7-7 8-1 8-4
この章の先に 8-7 8-8 8-9 8-10 8-11

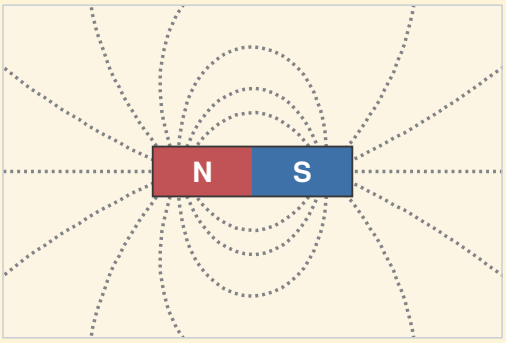
この章でできるようになること

- ★★★ 場所ごとの矢印を計算して、縮める割合をそろえた矢印の場の図にかける。
- ★★★★ 主役の 6 つの場・点電荷の場・勾配の場を見分け、流線（力線）の式を求められる。
- ★★★★ 座標の軸を回して見たときの矢印の成分を、回転行列の転置で計算できる。

はてな？

棒磁石の上に紙をのせ、砂鉄をうすくまいて、紙を指で軽くたたきます。すると、砂鉄は N 極から S 極へ向かう、たくさんの曲線の模様にならびます。

砂鉄の 1 つぶ 1 つぶは、小さな方位磁針のようなものです。この模様は、磁石のまわりの、どんなものをなぞっているのでしょう。



棒磁石のまわりの砂鉄の模様（上から見たところ）

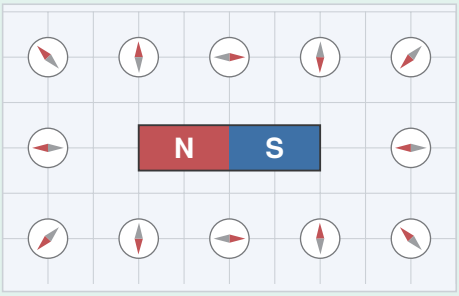
8-1 から 8-4 では、場所を決めると高さや温度が 1 つ決まる量を調べました。地図の上の 1 つの点に、1 つの数がのっていました。

ところが、風や水の流れ、電気や磁石の力は、場所ごとに**向きと大きさ**があります。天気予報の風の地図では、場所ごとに矢印が 1 本ずつかいてあります。4-10・4-13 で学んだベクトル（矢印）が、空間のすべての点に 1 本ずつ置かれているのです。この章では、このような「矢印の地図」の読み方とかき方を学びます。8-7 から 8-11 では、この矢印の地図を、道にそってたしたり（線積分）、面を通る量を数えたり（面積分）、わき出し（発散）やうず（回転）を調べたりします。この章は、その全部の出発点です。図をかいて、矢印を 1 本ずつ計算していけば、必ずわかるようになります。1 回でわからなくても大丈夫です。

やってみよう　方位磁針で、磁石のまわりの矢印の地図を作ろう

用意するもの　棒磁石、方位磁針（小さいもの）、方眼紙、えんぴつ

1. 方眼紙のまん中に棒磁石を置き、まわりをえんぴつでなぞる。
2. 方眼の線が交わる点に、1 つおきに方位磁針を置き、針の N 極（赤い先）が向いた向きに、短い矢印をかく。
3. 全部の点にかいたら、矢印を、向きにそってなめらかにつないでみよう。



方位磁針の N 極（赤い先）は、磁石の N 極から遠ざかり、S 極へ近づく向きを向きます。磁石の上の側では右向き、下の側でも右向き、両はしの外では左向きです。ばらばらに見えた 12 本の針が、③でつなぐと、N 極から出て S 極へ入る曲線になります。？はてな？の砂鉄の模様と同じ形です。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

4-10　ベクトル（矢印）は向きと大きさを持つ。成分で $(a_x,\ a_y)$ と書き、大きさは $\sqrt{a_x^2+a_y^2}$（三平方）。

4-13　3 次元のベクトル $(a_x,\ a_y,\ a_z)$。x・y・z の向きの長さ 1 の矢印 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ で、$a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$ とも書く。

6-1　傾きの場：方眼の点ごとに、ルールが決める傾きの短い線をかいた図。線の向きにそって進むと、解のグラフがかける。

6-4　変数分離：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の式を、y だけの式 $\mathrm{d}y=x$ だけの式 $\mathrm{d}x$ の形にして、両辺を積分する。

7-6　回転行列 $R(\theta)$ は、1 行めが $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$、2 行めが $(\sin\theta,\ \cos\theta)$。軸を θ 回して見ると、成分は $R(\theta)^{\mathsf{T}}\vec{x}$ になる。

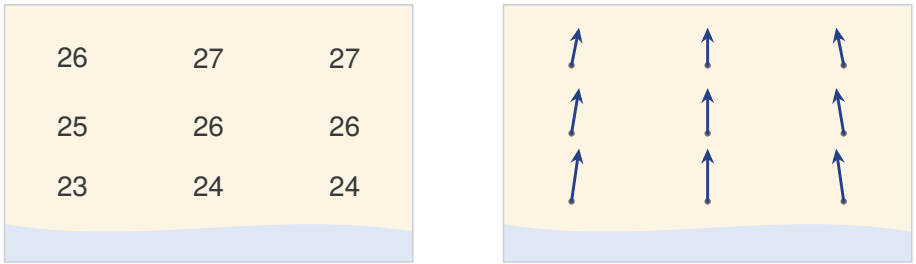
8-4　勾配 $\mathrm{grad}\,h=\left(\dfrac{\partial h}{\partial x},\ \dfrac{\partial h}{\partial y}\right)$。いちばん急な上りの向きで、等高線と直角。ボールは $-\mathrm{grad}\,h$ の向きへ転がる。

数学の道具

目でわかる　矢印の地図を読む　★★★

1 場所ごとに、矢印が 1 本：ベクトル場

同じ海べの町の、同じ時刻の 2 つの地図をくらべます。左は気温の地図、右は風の地図です。



気温（℃）：場所ごとに数が 1 つ　　風：場所ごとに矢印が 1 本

図 1　同じ町の、夏の昼の気温の地図と風の地図（模式図。下の青い所は海で、海から陸へ海風がふく）。風の矢印の根もとの点が、その風をはかった場所。

気温の地図では、場所 $(x,\ y)$ を決めると、気温という**数が 1 つ**決まります。8-1 の山の高さと同じで、場所を入れると数が出てくる関数 $T(x,\ y)$ です。風の地図では、場所を決めると、風の**矢印が 1 本**決まります。場所を入れると矢印が出てくる関数です。

$$\vec{F}(x,\ y) = (F_x(x,\ y),\ F_y(x,\ y))$$

場所 $(x,\ y)$ を入れると、矢印の 2 つの成分 F_x、F_y が出てくる

このように、場所ごとに矢印（ベクトル）が 1 本ずつ決まっているものを、**ベクトル場**（べくとるば）といいます。これに対して、気温や高さのように、場所ごとに数（スカラー）が 1 つずつ決まっているものを、**スカラー場**といいます。「場」は、空間に広がっているものを表すことばです。

ベクトル場の式では、入れるもの（場所）も出てくるもの（矢印）も、2 つの数の組です。取りちがえないように、場所は $(x,\ y)$、矢印の成分は大文字に下つきで F_x、F_y と書きます。たとえば $\vec{F}(x,\ y) = (-y,\ x)$ なら、場所 $(1,\ 2)$ の矢印は $\vec{F}(1,\ 2) = (-2,\ 1)$ です。

② 矢印は、縮めてかく

風の速さ 8 m/s を、地図の上に 8 m の矢印でかくことはできません。矢印の場の図では、すべての矢印を**同じ割合で縮めて**かきます。図 1 の風の地図では、1 m/s を 1 mm にしています。だから、矢印の長さをくらべれば、どこの風が強いかがわかります。どの割合で縮めたかは、図のすみに**物差しの矢印**（凡例）をかいて示します。

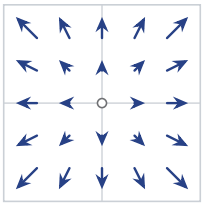
1. **1 つの図の中では、縮める割合を同じにする。**
   割合を変えると、長さで強さをくらべられなくなります。
2. **いちばん長い矢印が、となりの点にとどかないようにする。**
   矢印が重なると読めません。点の間かくの 8 割くらいまでにします。

3 矢印の根もとが、その矢印の場所。

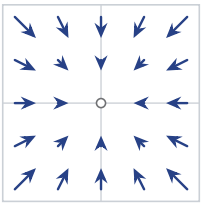
この本の大きな図では、根もとに黒い点をうちます。小さな図では、矢印のまん中をその場所に置きます。

3 主役の 6 つの場

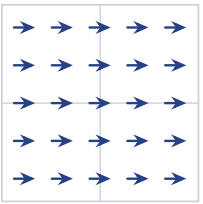
この巻では、平面の 6 つのベクトル場を「主役の場」として、8-7・8-9・8-10・8-11 でくり返し使います。どれも、x と y の簡単な式です。



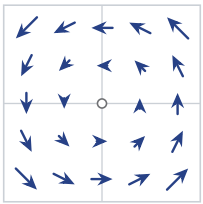
（ア）広がる $(x,\ y)$



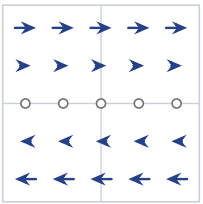
（イ）集まる $(-x,\ -y)$



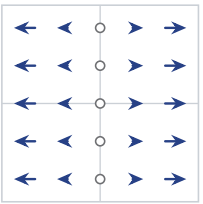
（ウ）そろった $(1,\ 0)$



（エ）うず $(-y,\ x)$



（オ）ずれ $(y,\ 0)$



（カ）側溝 $(x,\ 0)$

図 2　主役の 6 つの場（$-2 \leqq x \leqq 2$、$-2 \leqq y \leqq 2$）。矢印のまん中がその場所。どの図も同じ割合で縮めてある（（ウ）だけは 2 倍の割合）。白い丸は、矢印の長さが 0 の場所。

場	ようす	身近な例
（ア）$(x,\ y)$	外へ。遠いほど速い	水をそそぐ口のまわり
（イ）$(-x,\ -y)$	中へ。遠いほど速い	ふろの栓をぬいた排水口
（ウ）$(1,\ 0)$	どこでも同じ矢印	広い川のまん中、一様な風
（エ）$(-y,\ x)$	原点のまわりを左回り	回るターンテーブルの上
（オ）$(y,\ 0)$	上は右へ、下は左へ	重ねたトランプをずらす
（カ）$(x,\ 0)$	右へ行くほど速い	雨水が流れこむ側溝

表 1　主役の 6 つの場のようす。（エ）は、原点からのきょりに比例する速さで、すべてがいっしょに回る流れ（かたい板の回転と同じ）。

（ア）と（エ）は、どちらも原点から遠いほど矢印が長い場ですが、向きがちがいます。（ウ）と（カ）は、どちらも横向きの矢印ですが、（カ）は場所で長さが変わります。この見た目のちがいを、数で見分ける道具が、8-9 の発散（わき出し）と 8-10 の回転（うず）です。たとえば（カ）の側溝は、矢印がみな同じ向きなのに、下流ほど水がふえる「わき出し」があり、（オ）のずれは、まっすぐ流れているのに、小さな風車を置くと回ります。

4 矢印をつなぐ：流線と力線

やってみようの③のように、矢印の向きにそって、なめらかにつないだ線をかきます。どの点でも、線の向き（接線の向き）が、その点の矢印の向きになっている線です。水や風の流れなら**流線**（りゅうせん）、電場や磁場なら**力線**（りきせん。電気力線・磁力線）といいます。6-1 の「傾きの場の短い線にそって進むと、解のグラフになる」と同じ考えです。

❓はてな？の答えです。砂鉄の 1 つぶ 1 つぶは、その場所の磁場の向きにならびます。だから、砂鉄の模様は、磁石のまわりの磁場（ベクトル場）の**磁力線**をなぞっているのです。

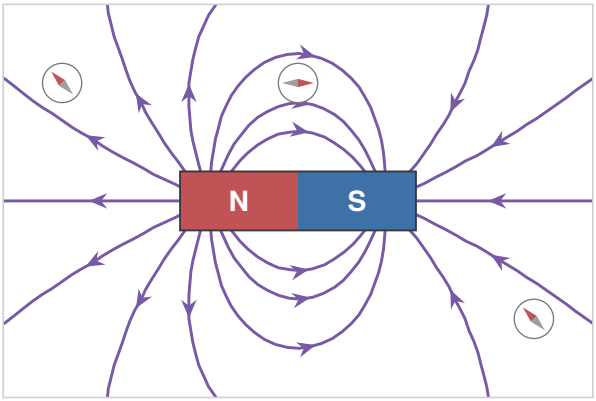


図 3 棒磁石のまわりの磁力線（むらさきの線。矢じりは磁場の向き）。方位磁針は、どこでも磁力線の向きを向く。磁力線は N 極から出て S 極に入り、たがいに交わらない。

流線や力線は、**たがいに交わりません**。1 つの場所には矢印が 1 本しかないので、そこを通る線の向きも 1 つに決まるからです（交わってよいのは、矢印の長さが 0 の場所だけ）。また、線がこみあっている所ほど、場が強いことが多い

です。磁石の極の近くで磁力線がこみあっているのは、そこで磁場が強いからです。

池の流れ：8-9・8-11 で使う場

もう 1 つ、この巻でくり返し使う場を見ておきます。広い池の水面の一部（6 m × 4 m）で、点 S $(1.5,\ 2.5)$ の口から水がわき出し、点 K $(4.5,\ 1.5)$ の口に同じ量だけ吸いこまれています（1 秒に、深さ 1 m あたり 4 m^3）。

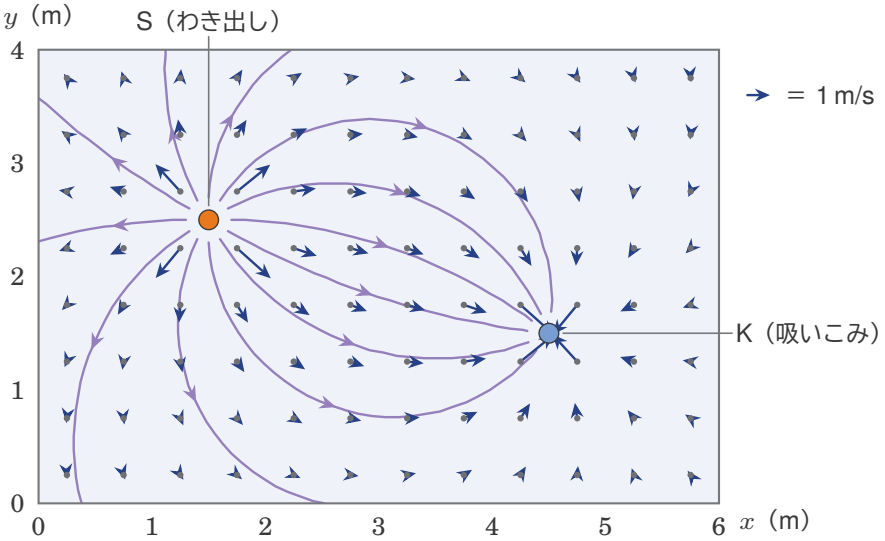


図 4　池の流れ（矢印の根もとの点が、その場所。0.5 m ごと）。むらさきの線は流線で、S から出て K に入る。

S の近くでは矢印が外向きに長く、K の近くでは内向きに長くなります。流線はどれも S から出て K に入り、たがいに交わりません。8-9 では、矢印だけがわかっているときに、どこにわき出しや吸いこみがあるかを、数で見つけます。

手でわかる 矢印を計算する・線の式を求める ★★★★

5 表計算で、場の矢印を計算する

（エ）のうずの場 $\vec{F} = (-y,\ x)$ の矢印を、表計算で計算して図にかきます。A 列に x、B 列に y を入れ、C 列に F_x、D 列に F_y、E 列に矢印の大きさを計算します。

C2	=-B2
D2	=A2
E2	=SQRT(C2^2+D2^2)

	A	B	C	D	E
1	x	y	F_x	F_y	大きさ
2	1	0	0	1	1.000
3	1	1	−1	1	1.414
4	0	1	−1	0	1.000
5	−1	0	0	−1	1.000
6	2	0	0	2	2.000
7	2	2	−2	2	2.828

表 2 うずの場 $(-y,\ x)$ の矢印。2 行めから下へコピーすれば、どの点でも計算できる。

矢印の大きさ $\sqrt{(-y)^2+x^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ は、原点からのきょりと同じです。だから、原点から 2 倍はなれると、矢印も 2 倍の長さになります。

また、矢印と、原点からその点への矢印 $(x,\ y)$ の内積は $x\times(-y)+y\times x=0$ なので、うずの矢印は、いつも原点からの向きと直角です（4-12）。だから、原点のまわりを回るのです。

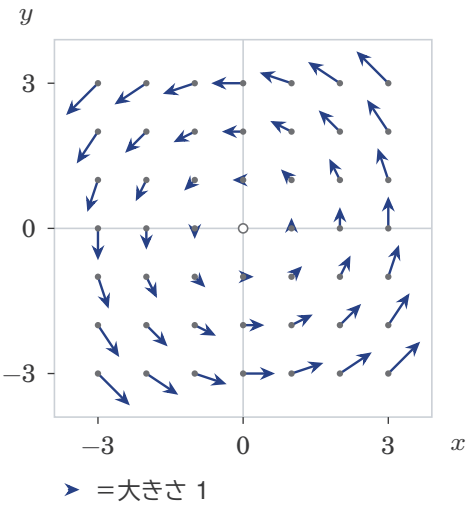


図 5　うずの場 $(-y,\ x)$。原点は長さ 0。

Python で矢印の場をかく

Python の matplotlib には、矢印の場をかく関数 quiver（クイバー。「矢筒」という意味）があります。

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x, y = np.meshgrid(np.arange(-3, 4), np.arange(-3, 4))  # 格子の点
Fx = -y     # 矢印の x 成分
Fy = x      # 矢印の y 成分
plt.quiver(x, y, Fx, Fy, angles='xy', scale_units='xy', scale=4)
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.show()
```

1　3 行め

np.meshgrid は、x が -3〜3、y が -3〜3 の格子の点（$7\times7=49$ 個）を作ります。

2　4〜5 行め

49 個の点の F_x、F_y を、表計算の C 列・D 列と同じ式で、まとめて計算します。

❸ 6 行め

矢印をかきます。scale=4 は「大きさ 4 の矢印を、1 目もりの長さにかく」、つまり $\frac{1}{4}$ に縮めるという意味です。根もとはその点です。

実行すると、図 5 と同じ形の矢印の図が、別の窓に出ます。4〜5 行めの式を変えれば、どんなベクトル場でもかけます。

❻ 3 次元のベクトル場：点電荷と地球

空間のベクトル場は、場所 $(x,\ y,\ z)$ を入れると、3 つの成分の矢印が出てくる関数です。

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) = (F_x,\ F_y,\ F_z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ は、x・y・z の向きの長さ 1 の矢印です（4-13）。$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ と書く本もありますが、同じものです。

① 点電荷のまわりの電場

原点に電荷 Q〔C〕を置くと、そのまわりの点の電場は、原点からまっすぐ外向き（Q が正のとき）です。大きさは、高校物理で学ぶ次の式です（r は原点からのきょり、$k = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$）。

$$E = \frac{kQ}{r^2}\ 〔\mathrm{N/C}〕$$

向きの矢印は、原点からその点への矢印 $(x,\ y,\ z)$ を、その長さ r でわって長さ 1 にしたものです。だから、

$$\vec{E}(x,\ y,\ z) = \frac{kQ}{r^2}\cdot\frac{(x,\ y,\ z)}{r} = \frac{kQ}{r^3}(x,\ y,\ z)$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

です。大きさは、きょりの 2 乗に反比例します。$Q = 1 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$（1 ナノクーロン）で計算すると、次のようになります。

きょり r（m）	0.1	0.2	0.3	0.5	1
大きさ E（N/C）	899	225	99.9	36.0	8.99

表 3　点電荷（1×10^{-9} C）の電場の大きさ。きょりが 2 倍になると $\frac{1}{4}$、3 倍になると $\frac{1}{9}$。

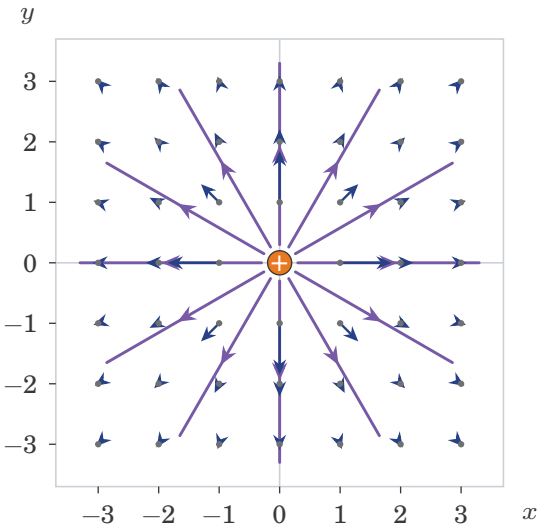


図 6　正の点電荷のまわりの電場を、$z = 0$ の平らな面で切った図。紺の矢印は電場（$\frac{1}{r^2}$ の大きさで、遠くではとても短くなる）、むらさきの線は電気力線。

図 6 のように、$\frac{1}{r^2}$ の場は、遠くで矢印がとても短くなり、図だけでは強さがくらべにくくなります。そのときは、表で大きさを見ます。電気力線は、電荷から放射状にまっすぐ出ていき、遠くほど間がまばらになります（8-8 では、電気力線の本数を「流束」として数えます）。

② 地球の重力の場

地球（質量 M）のまわりの物にはたらく重力は、地球の中心へ向かい、1 kg あたりの大きさ g は中心からのきょり r の 2 乗に反比例します。点電荷の場と同じ形で、向きが反対です。

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}(x,\ y,\ z)$$

地面（$r = R = 6371\,\mathrm{km}$）では $g = GM \div R^2 = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$ です（地球の自転の効果を入れない値）。中心からのきょりが r の所では、$R \div r$ を 2 乗して 9.82 にかければ、g が出ます。

場所	中心からのきょり	g（m/s²）
地面	6371 km	9.82
国際宇宙ステーション（高さ約 400 km）	6771 km	8.69
地面から 6371 km の高さ	12 742 km	2.46
静止衛星（高さ約 35 786 km）	42 157 km	0.224

表 4 地球の重力の場の大きさ。$9.82 \times \left(\frac{6371}{r}\right)^2$ で計算した。宇宙ステーションの中で物がうくのは、重力がないからではなく、ステーションといっしょに落ち続けているから（物理力-2）。

地面の近くのせまい範囲では、r がほとんど変わらないので、重力の場は $\vec{g} = (0,\ 0,\ -9.8)$ の一様な場（3 次元の（ウ））とみなせます。

7 流線の式を求める

流線は、どの点でも、向きがその点の矢印の向きになっている線でした（④）。矢印 $(F_x,\ F_y)$ の傾きは $\dfrac{F_y}{F_x}$ なので、流線を y を x の関数とみると、次の微分方程式になります（6-1 の傾きの場と同じ）。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{F_y}{F_x}$$

（エ）のうず $\vec{F} = (-y,\ x)$ で解きます。6-4 の変数分離です。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{-y}$$

流線の式に $F_x = -y$、$F_y = x$ を入れた

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

両辺に $-y\,\mathrm{d}x$ をかけて、y と x を分けた

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

両辺を積分した（C は定数）

$$x^2 + y^2 = 2C$$

両辺に 2 をかけて、x^2 を左へうつした

$x^2 + y^2$ が一定、つまり原点を中心とする円です（$2C$ は半径の 2 乗）。点 $(3,\ 4)$ を通る流線なら、$3^2 + 4^2 = 25$ で、半径 5 の円です。うずの流線は、図 2 の（エ）で見たとおり、ぐるっと 1 周して元にもどる、閉じた線です。

（ア）の広がる場 $\vec{F} = (x,\ y)$ では、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$ です。$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ と分けて積分すると、$\ln|y| = \ln|x| + C$ で、$y = ax$（a は定数）。原点を通る直線で、原点から放射状に出ていきます。（オ）のずれ $(y,\ 0)$ や（カ）の側溝 $(x,\ 0)$ では、$F_y = 0$ なので $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$、流線は横向きの直線 $y =$ 一定です。

> **せいかくに言うと**
>
> 流線は、ある時刻の矢印の場をつないだ線です。川や風の流れが時間で変わらないなら、水のつぶや木の葉は流線にそって動きます。でも、流れが時間で変わる（たとえば、風の向きがだんだん変わる）と、木の葉が実際に通った道（道すじ）は、ある時刻の流線とはちがう線になります。この巻では、とくにことわらないかぎり、時間で変わらない場（定常な場）を考えます。また、流線の式を $\dfrac{\mathrm{d}x}{F_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{F_y}$ の形で書く本もあります（$F_x = 0$ の所でも使える書き方です）。

8 軸を回して見ても、矢印は同じ

ドローンが、機首を東から左回りに 30° の向きに向けて飛んでいます。地面に固定した軸（x が東、y が北）で見ると、風は $(3,\ 4)$（m/s）です。ドローンの軸（x' が機首の向き、y' が機体の左の向き）で見ると、風の成分はいくつでしょう。

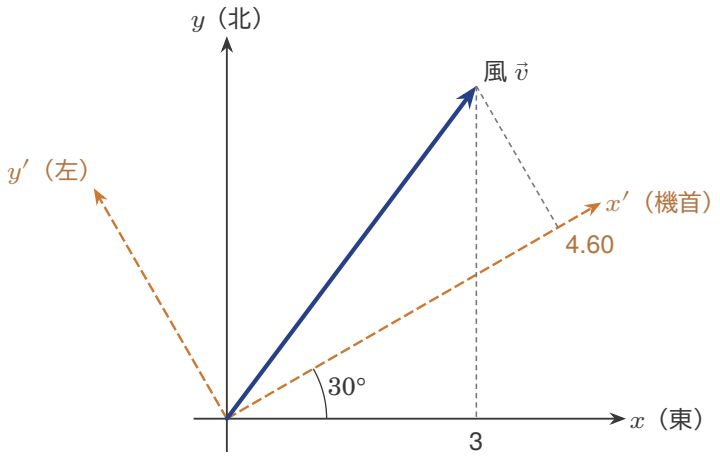


図 7 同じ風の矢印（紺）を、地面の軸（黒）とドローンの軸（オレンジの点線）で見る。矢印は同じでも、成分（矢印の影の長さ）は軸によってちがう。

7-6 で、軸を θ 回して見ると、成分は $R(\theta)^{\mathsf{T}}\vec{v}$ になると学びました（回転行列の転置は、逆に回す行列）。

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = R(30°)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_{x'} = 3 \times 0.866 + 4 \times 0.5 = 4.598$$

$$v_{y'} = -3 \times 0.5 + 4 \times 0.866 = 1.964$$

ドローンから見ると、風は機首の向きに 4.60 m/s、左向きに 1.96 m/s の成分を持ちます（後ろから押される、追い風ぎみの風）。大きさは、どちらの軸で計算しても同じです。

$$\sqrt{4.598^2 + 1.964^2} = 5.00, \qquad \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

> ベクトル場の矢印そのものは、軸の取り方によらない
>
> 軸を回すと、成分だけが R^{T} で変わる
>
> （大きさは変わらない）

3 次元でも同じで、7-7 の 3 次元の回転行列 R を使って $R^{\mathsf{T}}\vec{v}$ です。電場や風の「場」は、私たちがどう軸を決めるかとは関係なく、空間にある矢印です。だか

ら、計算しやすい軸を自由に選べます（8-8・8-11 で、対称性に合わせて軸や面を選ぶのは、このためです）。

⑨ 勾配の場と、そうでない場

8-4 で、主役の山の点ごとに、ボールが転がる向き $-\mathrm{grad}\, h = (0.02x,\ 0.04y)$ をかきました。これも、場所ごとに矢印が 1 本決まるので、ベクトル場です。重力（$-\mathrm{grad}\, U$）、電場（$-\mathrm{grad}\, \phi$）、熱の流れ（$-k\,\mathrm{grad}\, T$）も同じで、ある数の勾配で書けるベクトル場です。このような場の矢印は、いつも等高線（等値面）と直角です。

では、（エ）のうずの場 $(-y,\ x)$ は、ある山 h の $-\mathrm{grad}\, h$ になっているでしょうか。もしそうなら、矢印にそって進むと、いつも下り坂を下ることになります。ところが、うずの流線は円で、1 周すると元の場所にもどります。下り続けて元の高さにもどることはできないので、うずの場は、どんな山の $-\mathrm{grad}$ にもなりません。

場	勾配で書けるか
（ア）$(x,\ y)$	書ける：$h = -\dfrac{x^2+y^2}{2}$ の $-\mathrm{grad}\, h$
（ウ）$(1,\ 0)$	書ける：$h = -x$ の $-\mathrm{grad}\, h$
（エ）$(-y,\ x)$	書けない：流線が閉じている（1 周してもどる）
主役の山の $-\mathrm{grad}\, h$	書ける（もとの山 h がある）

表 5　勾配で書けるベクトル場と、書けない場の例。すきまのない広がりの中なら、回転 rot が 0 かどうかで、勾配で書けるかを見分けられる（8-10）。

勾配で書ける力の場では、物を動かしてもとの場所にもどすと、力がした仕事の合計が 0 になります（8-7）。物理 力-4 で学んだ「保存力」です。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

空間の各点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ にベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{r})=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ が対応しているとき、$\mathbf{A}$ をベクトル場という。曲線上の各点で接線がその点の $\mathbf{A}$ に平行であるような曲線を、$\mathbf{A}$ の流線（力線）といい、$\dfrac{dx}{A_x}=\dfrac{dy}{A_y}=\dfrac{dz}{A_z}$ をみたす。

訳　太字の $\mathbf{r}$ は場所を表す矢印（原点からその点への矢印）、太字の $\mathbf{A}$ はこの本の $\vec{F}$ のようなベクトル場。$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ は $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$（⑥）。「対応している」は「場所を入れると矢印が出てくる」。最後の式は、⑦の $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{F_y}{F_x}$ を 3 次元にした形（せいかくに言うと）。立てない d は、この本の d と同じ。

たいせつ

ベクトル場	場所を入れると矢印：$\vec{F}=(F_x,\ F_y)$
スカラー場	場所を入れると数：気温 T、高さ h
矢印のかき方	同じ割合で縮める。凡例をかく。根もとがその場所
流線・力線	矢印をつないだ線。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{F_y}{F_x}$。交わらない
点電荷・重力	大きさは $\dfrac{1}{r^2}$ に比例。電場は外向き、重力は内向き
軸を回す	矢印は同じ。成分は $R^{\mathsf{T}}\vec{F}$ で変わる

この章で出てきたことば

ベクトル場　場所ごとに矢印（ベクトル）が 1 本ずつ決まっているもの。風・水の流れ・電場・磁場・重力など。

スカラー場　場所ごとに数が 1 つずつ決まっているもの。気温・高さ・気圧・電位など。

流線　流れのベクトル場で、どの点でも向きがその点の矢印の向きになっている線。

力線　電場や磁場の流線。電気力線・磁力線。砂鉄の模様は磁力線をなぞる。

一様な場　どの場所でも同じ矢印の場（主役の（ウ）、地面の近くの重力）。

記号カード　　初めて出た章 **8-5**

$\vec{F}(x,\ y)$

読み方　エフ・エックス・ワイ
意味　ベクトル場。場所 $(x,\ y)$ を入れると矢印 $(F_x,\ F_y)$ が出てくる
英語　vector field

コラム　力線を考えたファラデー

イギリスのファラデー（1791～1867 年）は、磁石のまわりの砂鉄の模様を見て、磁石や電流のまわりの空間には「力の線」が広がっていると考えました。ファラデーは、数式をほとんど使わずに、力線の図で電気と磁気の実験を説明しました。その考えを、スコットランドのマクスウェルが 1850～1860 年代に数式に直し、電気と磁気の基本の式にまとめました。それが、8-14 で読むマクスウェル方程式です。矢印の場の図は、いまも、電気や流れを考えるときのいちばんの道具です。

例題でたしかめよう

例題 1　場の矢印を計算する

ベクトル場 $\vec{F}(x,\ y) = (x-y,\ x+y)$ の、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(1,\ 1)$ での矢印と、その大きさを求めましょう。

考え方　①・⑤。場所の x、y を、$F_x = x-y$、$F_y = x+y$ に入れる。大きさは三平方。

式　$(1,\ 0)$：$(1-0,\ 1+0) = (1,\ 1)$、大きさ $\sqrt{1+1} = 1.41$

$(0,\ 1)$：$(-1,\ 1)$、大きさ 1.41　　$(1,\ 1)$：$(0,\ 2)$、大きさ 2

答え　$(1,\ 1)$ と 1.41、$(-1,\ 1)$ と 1.41、$(0,\ 2)$ と 2

じぶんでとこう 1

ベクトル場 $\vec{F}(x,\ y) = (x + y,\ y - x)$ の、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(1,\ 1)$ での矢印と、その大きさを求めましょう。

例題 2　うずの回る向きを調べる

$\vec{F} = (y,\ -x)$ の矢印を、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(-1,\ 0)$、$(0,\ -1)$ で求め、左回り・右回りのどちらのうずか答えましょう。

考え方　③・⑤。4 つの点の矢印を順に見て、原点のまわりをどちら向きに回るかを読む。

式　$(1,\ 0)$ で $(0,\ -1)$ 下向き、$(0,\ 1)$ で $(1,\ 0)$ 右向き

$(-1,\ 0)$ で $(0,\ 1)$ 上向き、$(0,\ -1)$ で $(-1,\ 0)$ 左向き

答え　右回り（時計回り）のうず。どの点でも大きさは 1

じぶんでとこう 2

$\vec{F} = (-2y,\ 2x)$ の矢印を、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(-1,\ 0)$、$(0,\ -1)$ で求め、左回り・右回りのどちらのうずか答えましょう。

例題 3　点電荷の電場

原点に $Q = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ の点電荷があります。点 $(0.3,\ 0.4)$（m）での電場の大きさと成分を求めましょう（$k = 8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$）。

考え方　⑥の①。きょり r を三平方で求め、大きさ $kQ \div r^2$ に、向き $(x,\ y) \div r$ をかける。

式　$r = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5$

大きさ $8.99 \times 10^{9} \times 1 \times 10^{-9} \div 0.5^2 = 8.99 \div 0.25 = 36.0$

向き $(0.3,\ 0.4) \div 0.5 = (0.6,\ 0.8)$、成分 $(36.0 \times 0.6,\ 36.0 \times 0.8)$

答え　大きさ $36.0\,\mathrm{N/C}$、$\vec{E} = (21.6,\ 28.8)$（N/C）（外向き）

じぶんでとこう 3

原点に $Q = 2 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ の点電荷があります。点 $(0.6,\ 0.8)$（m）での電場の大きさと成分を求めましょう（$k = 8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$）。

例題 4　高い所の重力

地面での重力の大きさを $9.82\,\mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $6371\,\mathrm{km}$ とします。国際宇宙ステーション（高さ $400\,\mathrm{km}$）での重力の大きさを求めましょう。

考え方　⑥の②。大きさは中心からのきょりの 2 乗に反比例。きょりは中心からはかる。

式　中心からのきょり $r = 6371 + 400 = 6771$（km）

$9.82 \times (6371 \div 6771)^2 = 9.82 \times 0.885 = 8.69$

答え　約 $8.69\,\mathrm{m/s^2}$（地面の約 89%）

じぶんでとこう 4

地面での重力の大きさを $9.82\,\mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $6371\,\mathrm{km}$ とします。静止衛星（高さ $35\,786\,\mathrm{km}$）での重力の大きさを求めましょう。

例題 5　流線の式を求める

（ ）の点を通る流線の式を求めましょう。

(1) $\vec{F} = (-y,\ x)$　$(3,\ 4)$　　(2) $\vec{F} = (x,\ y)$　$(2,\ 1)$

考え方　⑦。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{F_y}{F_x}$ を変数分離で解き（6-4）、点を入れて定数を決める。

式　(1) $y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$ より $x^2 + y^2 = C$。点を入れて $C = 9 + 16 = 25$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ より $y = ax$。点を入れて $1 = 2a$、$a = 0.5$

答え　(1) $x^2 + y^2 = 25$（半径 5 の円）

(2) $y = 0.5x$（原点を通る直線）

じぶんでとこう 5

（ ）の点を通る流線の式を求めましょう。

(1) $\vec{F} = (y,\ -x)$　$(5,\ 12)$　　(2) $\vec{F} = (2x,\ 2y)$　$(1,\ 3)$

例題 6　回した軸で見た成分

地面の軸（x が東、y が北）で見た風が $(3,\ 4)$（m/s）です。東から左回りに 30° 回した軸で見た成分を求め、大きさが変わらないことを確かめましょう。

考え方　⑧。成分は $R(30°)^{\mathsf{T}}\vec{v}$。行と列の内積で計算する（7-3）。

式　$v_{x'} = 3 \times 0.866 + 4 \times 0.5 = 4.598$（1 行め $(\cos 30°,\ \sin 30°)$ と）

$v_{y'} = -3 \times 0.5 + 4 \times 0.866 = 1.964$（2 行め $(-\sin 30°,\ \cos 30°)$ と）

大きさ $\sqrt{4.598^2 + 1.964^2} = 5.00$、もとは $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

答え　$(4.60,\ 1.96)$（m/s）。大きさはどちらも 5 m/s

例題 7　勾配の場をかく

主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の $-\mathrm{grad}\, h$ を、点 $(40,\ 0)$、$(0,\ 30)$、$(-20,\ 20)$ で求め、点 $(-20,\ 20)$ で等高線と直角であることを確かめましょう。

考え方　⑨・8-4。$-\mathrm{grad}\, h = (0.02x,\ 0.04y)$。等高線の向きは grad と直角（8-4 例題 4）。

式　$(40,\ 0)$ で $(0.8,\ 0)$、$(0,\ 30)$ で $(0,\ 1.2)$、$(-20,\ 20)$ で $(-0.4,\ 0.8)$

$\mathrm{grad}\, h = (0.4,\ -0.8)$ と直角な等高線の向き $(-0.8,\ -0.4)$

内積 $(-0.4) \times (-0.8) + 0.8 \times (-0.4) = 0.32 - 0.32 = 0$

答え　$(0.8,\ 0)$、$(0,\ 1.2)$、$(-0.4,\ 0.8)$。内積 0 で、等高線と直角

じぶんでとこう 6

地面の軸で見た風が $(4,\ 2)$（m/s）です。東から左回りに $60°$ 回した軸で見た成分を求め、大きさが変わらないことを確かめましょう（$\cos 60° = 0.5$、$\sin 60° = 0.866$）。

じぶんでとこう 7

温度の場 $T = 50 - x^2 - 2y^2$ の $-\mathrm{grad}\, T$（熱が流れる向き）を、点 $(2,\ 0)$、$(0,\ -1)$、$(1,\ 1)$ で求め、点 $(1,\ 1)$ で等温線と直角であることを確かめましょう。

もっと知りたい ★★★★

まわる場・広がる場は、極座標の矢印で書くと短い

4-15 の極座標では、点の場所を原点からのきょり r と角 θ で表しました。その点で、原点から外へ向かう長さ 1 の矢印を $\vec{e}_r$、それを左回りに $90°$ 回した長さ 1 の矢印を $\vec{e}_\theta$ と書きます。

$$\vec{e}_r = (\cos\theta,\ \sin\theta), \qquad \vec{e}_\theta = (-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

（エ）のうず $(-y,\ x)$ に $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ を入れると、$(-r\sin\theta,\ r\cos\theta) = r\,\vec{e}_\theta$ です。（ア）の広がる場 $(x,\ y)$ は $r\,\vec{e}_r$、点電荷の電場は $\dfrac{kQ}{r^2}\,\vec{e}_r$ です。「どの向きに、どれだけ」が一目でわかります。8-8・8-11 で、球や円柱の面を通る量を数えるときは、この書き方を使います。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① 場所と矢印を取りちがえる

✕ $\vec{F} = (-y,\ x)$ の点 $(1,\ 2)$ の矢印は $(1,\ 2)$

○ 点 $(1,\ 2)$ の矢印は、$F_x = -2$、$F_y = 1$ で $(-2,\ 1)$

$(x,\ y)$ は矢印を置く場所、$(F_x,\ F_y)$ はその場所の矢印です。場所を式に入れて、はじめて矢印が出てきます。

⚠ まちがえやすいところ

② 図の矢印の長さを、本当の大きさと思う

✕ 図の矢印が 5 mm だから、風は 5 m/s

○ 凡例（物差しの矢印）で読む。1 m/s が 2 mm なら、2.5 m/s

矢印の場の図は、同じ割合で縮めてかいてあります。どれだけ縮めたかは、図ごとにちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

③ 軸を回すとき、R をかける

✕ 30° 回した軸で見た成分は $R(30°)\vec{v}$

○ 軸を 30° 回して見ると、矢印は反対に 30° 回って見えるので $R(30°)^{\mathsf{T}}\vec{v}$

$R(30°)\vec{v}$ は、矢印そのものを 30° 回したものです。軸を回したときは、逆に回す R^{T}（7-6）をかけます。

⚠ まちがえやすいところ

④ $\frac{1}{r^2}$ を $\frac{1}{r}$ とする

✕ きょりが 2 倍なら、電場は半分

○ きょりが 2 倍なら、電場は $\frac{1}{4}$

点電荷の電場も重力も、きょりの 2 乗に反比例します。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 流線が交わってよいと思う

✕ 2 本の流線が、とちゅうで交わる

○ 流線は、長さ 0 の点のほかでは交わらない

1 つの場所には、矢印が 1 本しかないからです。

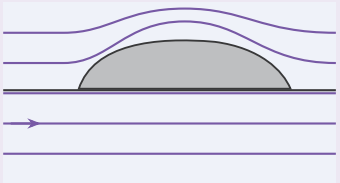
物理・工学ではこう使う

天気予報のコンピュータ

天気予報では、地球の大気を、たて・横・高さの細かい格子に分け、格子の点ごとに、風（ベクトル場）と、気温・気圧・水蒸気の量（スカラー場）を記録します。そして、数分ごとの「1 歩」のくり返しで、場の変わり方を計算します（6-2 のオイラー法の考え）。テレビの天気図の風の矢印は、そのベクトル場の一部を、矢印の場の図にしたものです。

車のまわりの空気の流れ

自動車や新幹線の形を決めるときは、まわりの空気の流れ（速度のベクトル場）をコンピュータで計算し、流線をかいて調べます。流線がなめらかに後ろへぬけるほど、空気の抵抗が小さくなります。風洞（大きな送風機のトンネル）の実験では、細い煙を流して、本物の流線を目で見ます。



章末問題

8-5 のまとめ

基本 ★★★★

1 ベクトル場 $\vec{F}(x,\ y) = (2x - y,\ x)$ の、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(1,\ 1)$ での矢印と、その大きさを求めましょう（例題 1）。

2 ベクトル場 $\vec{F} = (3y,\ -3x)$ の矢印を、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(-1,\ 0)$、$(0,\ -1)$ で求め、左回り・右回りのどちらのうずか答えましょう（例題 2）。

3 原点に $Q = 3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ の点電荷があります。点 $(0.3,\ 0.4)$（m）での電場の大きさと成分を求めましょう（$k = 8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$）（例題 3）。

4 次のベクトル場の、（ ）の点を通る流線の式を求めましょう（例題 5）。

（1）$\vec{F} = (-y,\ x)$　$(6,\ 8)$

（2）$\vec{F} = (x,\ y)$　$(4,\ 2)$

5 地面の軸で見た風が $(5,\ 0)$（m/s）（東向き）です。東から左回りに 30° 回した軸で見た、風の成分を求め、大きさが変わらないことを確かめましょう（例題 6）。

6 地面での重力の大きさを $9.82\,\mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $6371\,\mathrm{km}$ とします。地面からの高さ $20\,200\,\mathrm{km}$（GPS 衛星の高さ）での重力の大きさを求めましょう（例題 4）。

チャレンジ ★★★★★

7 地面での重力の大きさを $9.82\,\mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $6371\,\mathrm{km}$ とします。地面から $6371\,\mathrm{km}$ の高さでの重力の大きさを求めましょう（例題 4）。

8 主役の山で、$-\mathrm{grad}\, h$ を点 $(-40,\ 0)$、$(0,\ -30)$、$(20,\ -20)$ で求めましょう。また、点 $(20,\ -20)$ で、その矢印が等高線と直角であることを確かめましょう（例題 7）。

9 温度の場 $T = 40 - 2x^2 - y^2$ の $-\mathrm{grad}\, T$（熱が流れる向き）を、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 2)$、$(1,\ 1)$ で求めましょう。また、点 $(1,\ 1)$ で、その矢印が等温線と直角であることを確かめましょう（例題 7）。

10 うずの場 $\vec{F} = (-y,\ x)$ について、次の問いに答えましょう。

（1）点 $(2,\ 0)$ の矢印と、その点を通る流線の式

（2）（1）の矢印を、東から左回りに $90°$ 回した軸で見た成分（$\cos 90° = 0$、$\sin 90° = 1$）（例題 1・例題 5・例題 6）

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 場所ごとの矢印を計算して、縮める割合をそろえた矢印の場の図にかける。 → 179 ページ
- ☐ 主役の 6 つの場・点電荷の場・勾配の場を見分け、流線（力線）の式を求められる。 → 187 ページ
- ☐ 座標の軸を回して見たときの矢印の成分を、回転行列の転置で計算できる。 → 188 ページ

ミナ

空間のどこにも矢印がある、っていう見方ができたね。次は、この矢印を道にそってたしてみよう。

第 2 部　ベクトル場と積分

★★★★★

8-6 面や立体でたし合わせる：重積分

道しるべ　この章の前に 4-5 4-11 4-15 5-10 5-11 5-16 7-4 8-2 8-3
この章の先に 8-7 8-8 8-11 8-12 9-2 9-4

この章でできるようになること

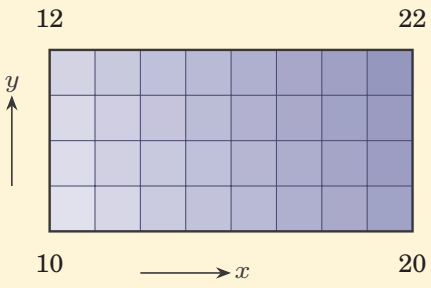
- ★★★ 板を小さなタイルに分けて重さを表計算でたし、重積分の記号を「何を・どこで・1 枚の量」で読める。
- ★★★★ 長方形の範囲の重積分を、ふつうの定積分を 2 回くり返す形に直して計算できる。
- ★★★★★ 場合分けの表を使って、三角形・円・立体の重積分を、正しいふつうの定積分（極座標・球座標）に直して計算できる。

はてな？

はばが 2 m、奥行きが 1 m の鉄の板があります。板の厚さは場所によってちがい、右の奥ほど厚くなっています。

厚さが同じ板なら、「1 m^2 あたりの質量×面積」で全体の質量がわかります。でも、この板は場所ごとに「1 m^2 あたりの質量」がちがいます。

この板全体の重さ（質量）は、何 kg でしょう。



色がこいほど厚い。角の数は 1 m^2 あたりの質量（kg）。

第 5 巻の 5-10 では、グラフの下の面積を「細い長方形に分けてたす」ことで求め、それを定積分とよびました。この章では、同じ考えを**面のタイル**で行います。板の重さ、山の土の量、パイプを流れる水の量、回る物の回りにくさ。どれも「小さく分けて、1 つずつ量をかけて、たす」で求められます。

積分の記号は「どんな操作をするか」の**名前**です。答えを出すには、名前を第 5 巻のふつうの定積分に**直す**必要があり、どう直すかは形によってちがいます。この章では「こんな形のときは、こう直す」を、場合ごとにていねいに見ていきます（8-7・8-8・8-11 も同じやり方）。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、表計算と第 5 巻の定積分だけで読めます。「式でわかる」の段は、場合分けの表と流れ図を見ながら 1 つずつ進めば大丈夫です。1 回で分からなくても、何度ももどってきてください。

やってみよう　板をタイルに分けて、表計算で重さをたそう

板を、1 辺 0.5 m の正方形のタイル 8 枚（横に 4 枚、たてに 2 枚）に分けます。タイルのまん中の場所で「1 m^2 あたりの質量」$\sigma = 10 + 5x + 2y$ を計算し、タイルの面積 $0.5 \times 0.5 = 0.25\,\mathrm{m}^2$ をかけて、全部たします。

1. 1 行めの B1〜E1 に、タイルのまん中の x（0.25、0.75、1.25、1.75）を入れる。
2. A 列の A2・A3 に、タイルのまん中の y を入れる。地図と同じく北（奥）を上にするので、A2 に 0.75、A3 に 0.25。
3. B2 に `=(10+5*B$1+2*$A2)*0.25` と入れ、B2〜E3 の 8 つのセルにコピーする。
4. F2 に `=SUM(B2:E2)`（行の合計）、B4 に `=SUM(B2:B3)`（列の合計）と入れ、それぞれ F3、C4〜E4 にコピーする。
5. F4 に `=SUM(B2:E3)` と入れて、8 枚の合計を出す。

③の B$1 の「$」は、「コピーしても 1 行めのまま動かさない」という印です。$A2 は「A 列のまま動かさない」。こうすると、どのセルでも「その列の 1 行めの x」と「その行の A 列の y」が使われます（2-18 の表計算と同じ使い方）。0.25 をかけるのは、タイル 1 枚の面積が $0.25\,\mathrm{m}^2$ だからです。

	A	B	C	D	E	F
1	$y \diagdown x$	0.25	0.75	1.25	1.75	行の合計
2	0.75	3.1875	3.8125	4.4375	5.0625	16.5
3	0.25	2.9375	3.5625	4.1875	4.8125	15.5
4	列の合計	6.125	7.375	8.625	9.875	32

表 1　表計算の結果。B2〜E3 は、タイル 1 枚の質量（kg）。F4 が 8 枚の合計 32 kg。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 5-10　グラフの下の面積は、細い長方形に分けて「高さ×はば」をたし、はばを 0 に近づけた先で求める。これが定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。
- 5-11　$F(x)$ を微分して $f(x)$ になるなら、$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。
- 8-2　偏微分は「ほかを止めて 1 つだけ動かす」。止めた文字は、ただの数と同じにあつかう。
- 4-15　極座標：中心からの距離 r と角 θ で場所を表す。$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$。
- 8-3　ヤコビ行列 J の行列式（ヤコビアン）は、小さな面積が何倍になるかを表す（7-4 の「行列式は面積の倍率」）。

数学の道具

目でわかる　タイルに分けてたす　★★★

❶ タイルに分けて、1 枚ずつかけて、たす

やってみようでは、板を 8 枚のタイルに分けました。1 枚ずつ、「まん中の場所の σ」に「タイルの面積」をかけて、そのタイルの質量を出しました。それを全部たすと 32 kg になりました。

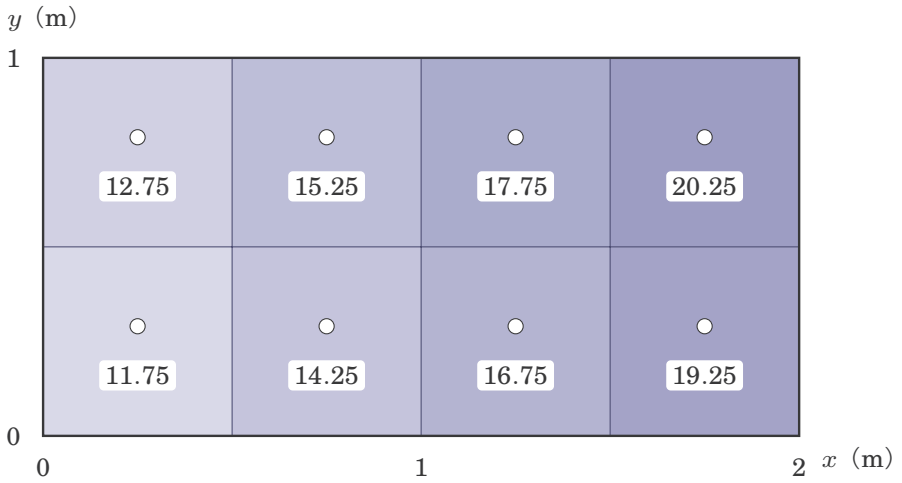


図 1 8 枚のタイルと、まん中の点（白い丸）の σ（kg/m^2）。たとえば右上のタイルは、$x = 1.75$、$y = 0.75$ で $\sigma = 10 + 5 \times 1.75 + 2 \times 0.75 = 20.25$、質量は $20.25 \times 0.25 \approx 5.06\,\text{kg}$。

まん中ではなく、角の値を使うと？

タイルの σ に、まん中ではなく左下の角の値を使ってみます。左下の角は σ がいちばん小さい所なので、合計は少なめに出ます。タイルを細かくしていくと、次の表のようになりました。

分け方（横×たて）	タイルの数	左下の角の値で（kg）	まん中の値で（kg）
4×2	8	28.5	32
8×4	32	30.25	32
16×8	128	31.125	32
40×20	800	31.65	32
400×200	80 000	31.965	32

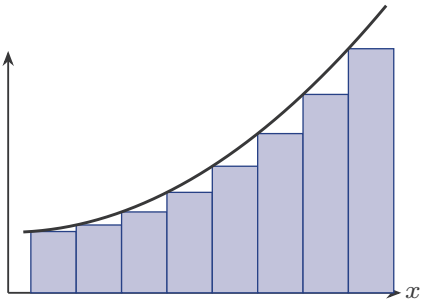
表 2　タイルを細かくしていくと、角の値の合計も 32 に近づく。

左下の角の値で計算した合計は、タイルを細かくするほど 32 に近づきます。5-10 で、細い長方形を細くしていくと、面積がある値に近づいたのと同じです。

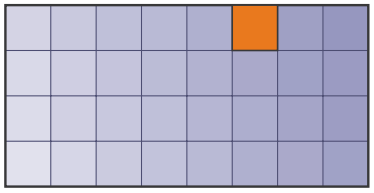
まん中の値を使うと、はじめから 32 ぴったりです。これは、$\sigma = 10 + 5x + 2y$ が 1 次式（平らな坂の形）だからです。1 次式なら、タイルの左半分で少なすぎる分と、右半分で多すぎる分が、ちょうど打ち消し合います。σ が 1 次式でないときは、まん中の値を使っても少しずれます。それでも、タイルを細かくすれば、どの点の値を使っても同じ値に近づきます。

5-10 の細い長方形との比べ

5-10 では、x だけが変わる関数 $f(x)$ を、細い長方形に分けてたしました。この章では、場所が x と y の 2 つの数で決まる量 $\sigma(x, y)$ を、面のタイルに分けてたします。



5-10：細い長方形（はば $\mathrm{d}x$）



8-6：面のタイル（面積 $\mathrm{d}A$）

図 2　左は第 5 巻の細い長方形、右はこの章のタイル。どちらも「小さく分けて、1 つずつ量をかけて、たす」。オレンジのタイル 1 枚の質量は「その場所の σ × タイルの面積」。

	5-10（定積分）	8-6（この章）
分けるもの	区間 $a \leqq x \leqq b$	板の形（面の範囲）
小さな 1 つ	細い長方形（はば Δx）	タイル（面積 ΔA）
1 つの量	高さ×はば $f(x)\,\Delta x$	σ ×面積 $\sigma(x,\ y)\,\Delta A$
たした先	面積	板の質量

表 3　細い長方形とタイルの比べ。

② 名前の段：重積分の記号を読む

タイルを細かくした先の値を、記号で次のように書き、**重積分**（じゅうせきぶん）とよびます。2 つの数で場所が決まる面の上の積分なので、**2 重積分**（にじゅうせきぶん）ともいいます。

$$\iint_D \sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}A$$

「範囲 D の上で、σ ×タイルの面積 $\mathrm{d}A$ をたし合わせた先」

読み方は「ダブル・インテグラル、ディーの上で、シグマ、ディー・エー」などです。σ はギリシャ文字で「シグマ」と読みます。

①名前の段　記号を読む：何を・どこで・1 枚の量

この記号には、「何を」「どこで」「1 枚の量」の 3 つが書いてあります。

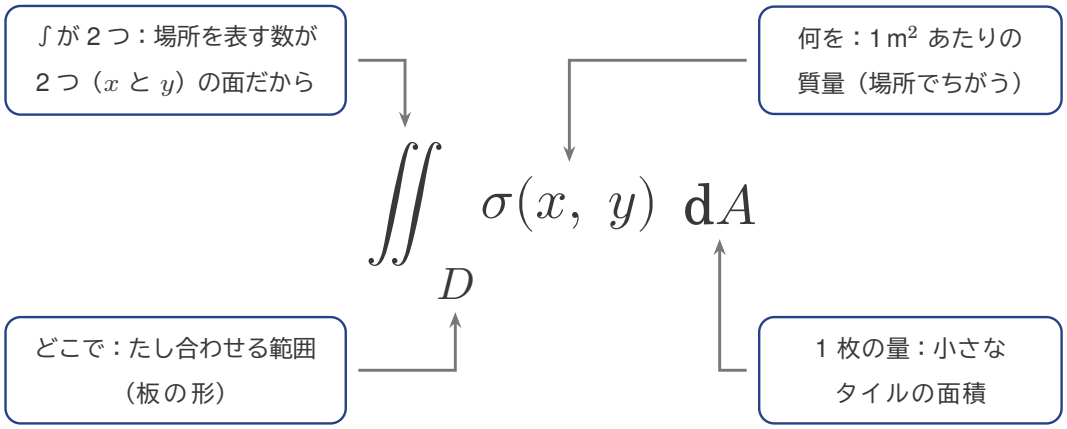


図 3　重積分の記号の読み方。

1. **どこで**：$\iint$ の右下の D は、たし合わせる範囲（板の形）です。D は英語の domain（範囲）の頭文字です。はてな？ の板なら、「$0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 1$ の長方形」が D です。
2. **何を**：$\sigma(x,\ y)$ は、場所 $(x,\ y)$ での $1\,\mathrm{m}^2$ あたりの質量です。場所ごとに値がちがうので、$(x,\ y)$ をつけて書きます。
3. **1 枚の量**：$\mathrm{d}A$ は、とても小さなタイルの面積です。A は英語の area（面積）の頭文字です。$\sigma\,\mathrm{d}A$ が、タイル 1 枚の質量です。

なぜ ∫ が 2 つなのか

5-10 の定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ では、場所は x の 1 つの数で決まりました（数直線の上）。板の上の場所は、x と y の 2 つの数で決まります。そこで、$\int$ を 2 つ重ねて書きます。この巻では、次の約束を使います。

$\int$ の数 ＝ 場所を表す数の数

道（線）は 1 つ：$\displaystyle\int_C$　　面は 2 つ：$\displaystyle\iint_D$　　立体は 3 つ：$\displaystyle\iiint_V$

記号は「操作の名前」

ここで、とても大事なことがあります。$\iint_D \sigma \,\mathrm{d}A$ という記号は、「タイルに分けて、σ ×面積をたし、細かくした先」という**操作の名前**です。この記号を見ただけでは、まだ計算はできません。

5-10 の定積分 $\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x$ なら、「x を 0 から 2 まで動かす」と、範囲が数で書いてありました。だから、原始関数を使って計算できました（5-11）。ところが $\iint_D$ には、D という名前しか書いてありません。x と y をどの順に、どこからどこまで動かすかは、書いてないのです。

そこで、重積分の答えを出すには、次の②の段で、名前を**ふつうの定積分**（第 5 巻の、範囲が数で書いてある定積分）に**直し**ます。この本では、式の中の「名前」と「ふつうの定積分」を、次のように枠で見分けます。

$$\underbrace{\iint_D \sigma \,\mathrm{d}A}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_0^2 (10 + 5x + 2y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}}$$

	名前	ふつうの定積分
枠	**点線**の枠・白い地	**実線**の枠・うすい色の地
書いてあること	何を・どこで・1 枚の量	何を・どの文字を・何から何まで
計算	まだできない	原始関数（5-11）や表計算でできる

表 4 「名前」と「ふつうの定積分」の見分け方。点線は「まだ名前だけ」、実線は「ここで計算できる」の印。

左の名前と右のふつうの定積分は、同じ値（32 kg）を表しています。右の形にどう直すのかを、③からていねいに見ていきます。

ほかの積分の名前も、同じ考え

この巻では、重積分のほかに、道にそってたす積分（8-7）、曲がった面でたす積分（8-8）が出てきます。どれも「小さく分けて、1 つずつ量をかけて、たす」の名前で、ふつうの定積分に直して計算します。次の表は、この巻に出てくる積分の名前の一覧です。まだ学んでいない行は、いまは読みとばしてかまいません。

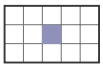
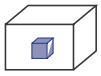
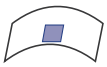
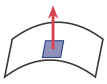
タイル	名前（記号）	何をたすか（1 枚の量）	ふつうの定積分に直した形
	$\int_a^b f\,\mathrm{d}x$	f ×細い長方形のはば $\mathrm{d}x$	そのまま（第 5 巻）
	$\iint_D f\,\mathrm{d}A$	f ×タイルの面積 $\mathrm{d}A$	場所を 2 つの数で表し、定積分を 2 回（8-6）
	$\iiint_V f\,\mathrm{d}V$	f ×小さな箱の体積 $\mathrm{d}V$	場所を 3 つの数で表し、定積分を 3 回（8-6）
	$\int_C f\,\mathrm{d}s$	f × 1 歩の長さ $\mathrm{d}s$	道を 1 つの数で表し、定積分を 1 回（8-7）
	$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力と 1 歩の矢印 $\mathrm{d}\vec{r}$ の内積	道を 1 つの数で表し、定積分を 1 回（8-7）
	$\iint_S f\,\mathrm{d}S$	f ×曲がったタイルの面積 $\mathrm{d}S$	面を 2 つの数で表し、重積分に（8-8）
	$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$	矢印と、向きのついたタイル $\vec{n}\,\mathrm{d}S$ の内積	面を 2 つの数で表し、重積分に（8-8）
	$\oint_C$　$\oiint_S$	○は「閉じている」という印	上と同じ。定理で取りかえられる（8-11）

表 5　この巻の積分の名前と、ふつうの定積分に直した形。最後の行の ○ は、道や面が「閉じている」という印で、円の形や面積を表すのではない。

たいせつ

- **重積分 $\iint_D f\,\mathrm{d}A$ は、「範囲 D をタイルに分け、f ×タイルの面積をたし、細かくした先」という操作の名前。**
- **記号から、「何を（f）」「どこで（D）」「1 枚の量（$\mathrm{d}A$）」を読みとる（①名前の段）。**
- **答えを出すには、ふつうの定積分に直す（②直す段）。直す前に、楽な道をさがす（③楽をする段）。**

手でわかる ふつうの定積分を 2 回くり返す ★★★★

③ 表の合計は、行からでも列からでも同じ

表 1 では、8 枚の合計 32 kg を、2 通りに出しました。

① 行ごとにたしてから、行の合計をたす

$$16.5 + 15.5 = 32$$

② 列ごとにたしてから、列の合計をたす

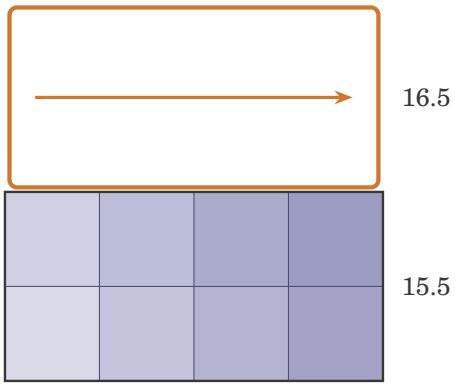
$$6.125 + 7.375 + 8.625 + 9.875 = 32$$

どちらも同じ 32 です。表の数を全部たすのですから、どの順番でたしても同じになります（1-13・2-18 の表の合計と同じ）。

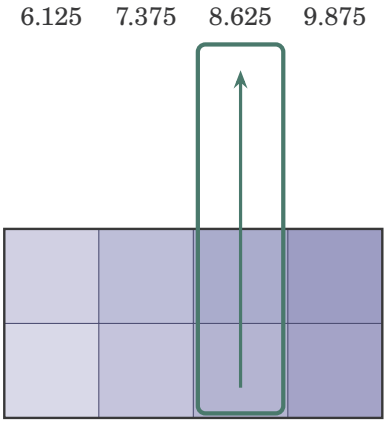
行の合計は、y を止めた定積分

行の合計は、「y を 1 つの値に止めて、x だけを 0 から 2 まで動かしてたす」ことです。8-2 の偏微分で「ほかを止めて 1 つだけ動かす」としたのと同じ「止める」です。

タイルを横にどんどん細くすると、行の合計は、y を止めた x の定積分になります。$y = 0.75$ の行なら、$\sigma = 10 + 5x + 2 \times 0.75 = 11.5 + 5x$ を、x で 0 から 2 まで積分します。



行の合計：y を止めて、x の向きにたす



列の合計：x を止めて、y の向きにたす

図 4　行の合計（オレンジのわく）は、y を 1 つに止めて、横にならんだタイルをたしたもの。列の合計（緑のわく）は、x を止めて、たてにたしたもの。

$$\int_0^2 (11.5 + 5x)\,\mathrm{d}x$$

$y = 0.75$ に止めた σ を、x で積分する

$$= \left[11.5x + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^2$$

原始関数（5-11）

$$= 23 + 10 = 33$$

$x = 2$ を入れ、$x = 0$ の 0 をひく

この 33 は、「$y = 0.75$ の所の、横 1 列の帯の、奥行き 1 m あたりの質量」（kg/m）です。帯の奥行きは 0.5 m なので、$33 \times 0.5 = 16.5$ kg。表 1 の 2 行めの合計 16.5 とぴったり同じです。

y を文字のまま止めておく

$y = 0.75$ のかわりに、y を文字のまま止めて計算すると、どの行にも使える式ができます。

$$\int_0^2 (10 + 5x + 2y)\,\mathrm{d}x$$

y は止めてあるので、ただの数と同じ

$$= \left[10x + \frac{5}{2}x^2 + 2y\,x \right]_0^2$$

$2y$ は定数なので、原始関数は $2y\,x$

$$= 20 + 10 + 4y = 30 + 4y$$

$x = 2$ を入れる（$x = 0$ では 0）

$30+4y$ は、「高さ y の所の帯の、奥行き $1\,\mathrm{m}$ あたりの質量」です。$y=0.75$ を入れると 33、$y=0.25$ を入れると 31。どちらも上で求めた値と同じです。

最後に、この帯を、奥行きの向き（y）に 0 から 1 までたします。

$$\int_0^1 (30+4y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{帯の質量を、}y\text{ で 0 から 1 までたす}$$

$$= \Big[30y+2y^2\Big]_0^1 \qquad \text{原始関数}$$

$$= 30+2=32 \qquad y=1 \text{ を入れる}$$

表計算と同じ $32\,\mathrm{kg}$ が、ふつうの定積分を 2 回くり返して出てきました。

④ 直す段：長方形なら、ふつうの定積分を 2 回

③でしたことを、手順にまとめます。これが「名前」を「ふつうの定積分」に直す方法です。

②直す段　場所を数で表し、範囲を決め、内側から 1 つずつ

1. **場所を数で表す**：板の上の場所を $(x,\ y)$ で表す。
2. **1 枚の量をその数で書く**：タイルを、横 $\mathrm{d}x$・たて $\mathrm{d}y$ の小さな長方形にとると、面積は $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。
3. **数の範囲を決める**：$0\leqq x\leqq 2$、$0\leqq y\leqq 1$。
4. **内側から計算する**：内側の定積分では y を止めて x で積分し、出てきた y の式を、外側で y で積分する。

$$\iint_D \sigma\,\mathrm{d}A = \int_0^1\Big(\int_0^2 (10+5x+2y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1 (30+4y)\,\mathrm{d}y = 32$$

かっこの中の積分を**内側の積分**、外の積分を**外側の積分**といいます。内側の $\int_0^2 \cdots\,\mathrm{d}x$ は「x を 0 から 2 まで」、外側の $\int_0^1 \cdots\,\mathrm{d}y$ は「y を 0 から 1 まで」です。$\int$ と d は、内側どうし、外側どうしで組になります。このように、ふつう

の定積分を何回かくり返す形を、**累次積分**（るいじせきぶん）といいます。かっこを省いて $\int_0^1\int_0^2(10+5x+2y)\,dx\,dy$ と書くこともあります。

順番を変えても同じ

列の合計からたしても 32 だったように、先に y で積分してもかまいません。

$$\int_0^1 (10+5x+2y)\,dy$$ こんどは x を止めて、y で積分する

$$= \Big[10y+5x\,y+y^2\Big]_0^1 = 11+5x$$ $5x$ は定数なので、原始関数は $5x\,y$

$$\int_0^2 (11+5x)\,dx = \Big[11x+\frac{5}{2}x^2\Big]_0^2$$ 外側は x で 0 から 2 まで

$$= 22+10 = 32$$ 同じ 32

範囲が長方形なら、どちらの順番でも同じ答えになります。計算が楽なほうを選べます。

はてな？の答え

場所ごとの「1 m^2 あたりの質量」σ を、**面密度**（めんみつど）といいます。はてな？ の板の質量は、32 kg です。表計算でタイル 8 枚のまん中の値をたしても、ふつうの定積分を 2 回くり返しても、同じ 32 が出ます。平らな鉄の板（厚さ一定）なら、σ が一定なので「σ ×面積」ですが、厚さが場所でちがうときは、重積分で求めます。

かけ算に分かれる形

$f(x,\,y)=x\,y^2$ のように、f が「x だけの式」と「y だけの式」のかけ算になっているときは、もっと楽です。範囲 $0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 3$ で計算します。

$$\int_0^2 x\,y^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{内側：}y\text{ を止めると }y^2\text{ はただの数}$$

$$= y^2 \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = y^2 \times 2 = 2y^2 \qquad \text{数 } y^2 \text{ は積分の外に出せる}$$

$$\int_0^3 2y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^3 = 18 \qquad \text{外側：}y\text{ で }0\text{ から }3\text{ まで}$$

内側の積分で、y^2 は外に出ました。だから答えは、2 つのふつうの定積分のかけ算になります。

$$\int_0^3\int_0^2 x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^2 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^3 y^2\,\mathrm{d}y\right) = 2 \times 9 = 18$$

これが使えるのは、範囲が長方形で、f が「x だけ」×「y だけ」に分かれるときだけです。

> **ここまでで十分**
>
> 板をタイルに分けて表計算でたし、長方形の範囲なら、ふつうの定積分を 2 回くり返して計算できれば十分です。この先は、三角形・円・立体のときの直し方です。

∂ 式でわかる 形ごとに、直し方を選ぶ ★★★★★

5 場合分けの表と流れ図

長方形でない形では、④の手順③「数の範囲を決める」が、そのままではできません。たとえば円の板では、x の範囲が y によって変わります。また、立体なら $\mathrm{d}A$ ではなく、小さな箱の体積 $\mathrm{d}V$ をたします。

どう直すかは、形によってちがいます。そこで、「こんなときは、こう直す」を表（場合分けの表 8-6）にまとめ、どの順で問いかければよいかを流れ図（図 5・図 6）にしました。表と流れ図は同じ記号（A〜H）を使っています。この章の例題は、どれもこの記号を 1 行めに書いてあります。

表の A〜E が、②の**直す段**の手順です。F・G・H は、③の**楽をする段**です。楽をする段は、直す前に確かめます。だから流れ図は 2 つに分けて、先に楽をする段の問い（H・F・G、図 5）、そのあとに直す段の問い（形の問い、図 6）を置きました。段の番号は①②③ですが、使う順は「①→③→②」です。

流れ図の使い方：はてな？ の板の場合

はてな？ の板 $\iint_D (10+5x+2y)\,\mathrm{d}A$（$D$ は 2 m × 1 m の長方形）で、流れ図をたどってみます。

1. 名前の段：何を＝ $\sigma = 10+5x+2y$、どこで＝長方形 D、1 枚の量＝ $\mathrm{d}A$。
2. データだけ？ いいえ（式がある）。簡単な形の和・差？ いいえ（1 つの長方形）。
3. 折り返し・回転で 0 や同じになる？ いいえ（σ は右の奥ほど大きく、折り返すと値が変わる）。「直す段へ」から図 6 へ。
4. 立体？ いいえ。円の形？ いいえ。
5. 長方形？ はい。$f = g(x)\,h(y)$？ いいえ（$10+5x+2y$ は、かけ算に分かれない）。

こうして、場合 **A**（定積分を 2 回、順番は自由）に決まります。④でしたとおりです。計算したら、流れ図の下の「確かめ」で、表計算の 32 kg と同じかを見ます。

1 回で全部の場合を覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどって、どの場合かを確かめましょう。

どの場合かな？

次の積分は、場合分けの表 8-6 のどの場合でしょう。流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1. 半径 2 の円の板で $\iint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A$

   答え：**C′**。円で、$x^2+y^2=r^2$ は中心からの距離 r だけで決まる。

2 頂点が $(0,\ 0)$、$(2,\ 0)$、$(0,\ 2)$ の三角形の板で $\iint x\,\mathrm{d}A$

答え：**B**。境目がななめの線。

3 $0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 2$ の長方形で $\iint x\,e^{y}\,\mathrm{d}A$

答え：**A′**。長方形で、$x\,e^{y}$ は「x だけ」×「y だけ」。

4 1 辺 1 m の立方体の中で $\iiint (x+y+z)\,\mathrm{d}V$

答え：**E**。直方体なので、A の定積分を 3 回。

5 町を 100 m 四方のマスに分け、マスごとに数えた人の数から、町の人口を出す

答え：**H**。式がなく、データだけ。

6 中心が原点の円の板で $\iint x\,\mathrm{d}A$

答え：**G**。左右対称で、x は $-x$ にすると符号が変わるので 0。

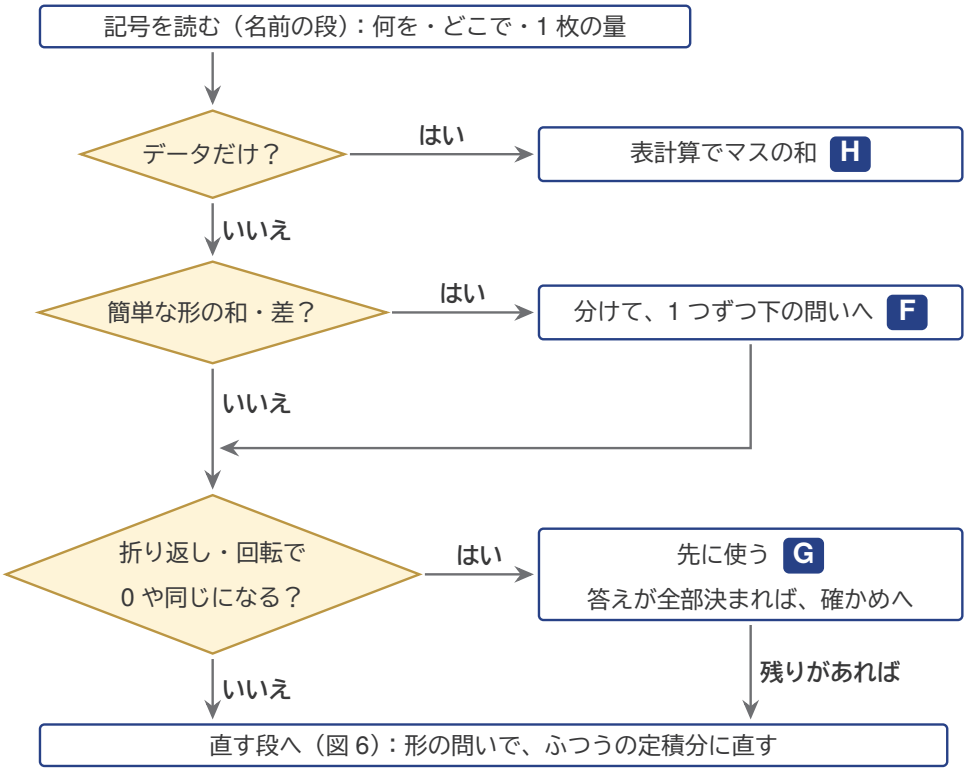
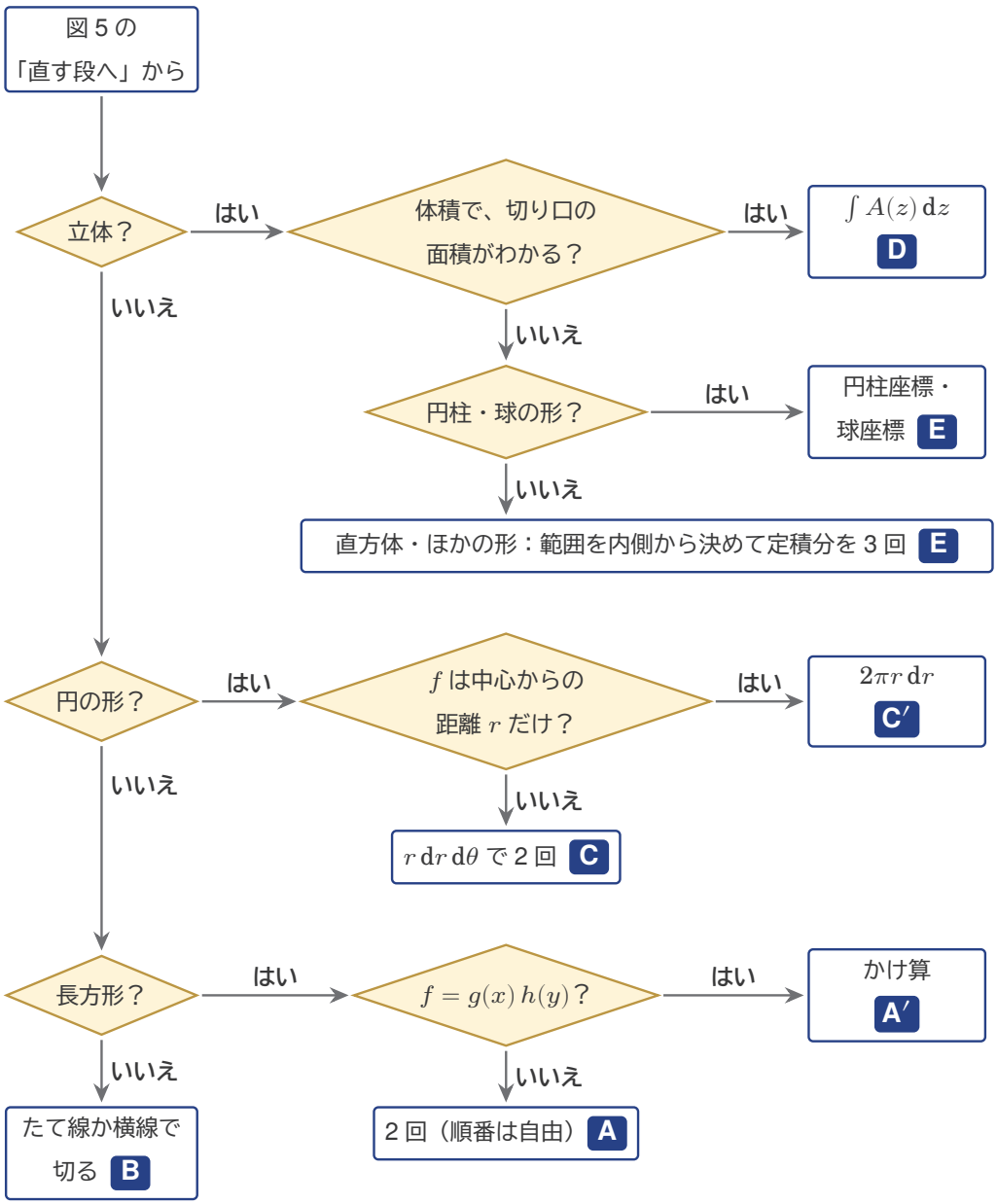


図 5 重積分の流れ図（1）楽をする段。ひし形は問い、四角はすること。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ進む。F・G の四角からは、矢印の先へ進む。

場合分けの表 8-6　重積分：どんなときに、どう直す？

記号	こんなとき	手順（ふつうの定積分に直す）	例題
A	範囲が長方形	$\int_c^d \left(\int_a^b f \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$。内側は y を止めて x で積分。順番は自由	1
A′	長方形で、f が「x だけ」×「y だけ」	2 つのふつうの定積分のかけ算	2
B	境目がななめの線・曲線（三角形など）	たて線で切り、内側の範囲を外側の文字の式で書く。順番を変えるときは図をかき直す	3・4
C	円の形（円・おうぎ形・輪）	極座標 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$。タイルは $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$	5
C′	円・輪で、f が中心からの距離 r だけで決まる	細い輪に分ける：$\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$。定積分 1 回	6・7
D	立体の体積で、切り口の面積 $A(z)$ がわかる	体積 $= \int A(z)\,\mathrm{d}z$（内側の 2 回が切り口の面積）	8
E	立体（直方体・円柱・球など）	範囲を内側から決めて定積分を 3 回（直方体なら A を 3 回）。円柱座標 $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$、球座標 $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$	9
F	簡単な形の和・差（穴あき・L 字）	分けて、それぞれ A〜E で計算し、たす・ひく	10
G	折り返し・回転で、0 になる・同じになる部分がある	計算の前に使う。左右対称で x の奇関数なら 0。円なら $\iint x^2\,\mathrm{d}A = \iint y^2\,\mathrm{d}A$	5・6
H	式がない（データだけ）	表計算で「マスの値×マスの面積」をたす	11

A′・C′ の「′」は「A のなかま」「C のなかま」という印です。微分の印ではありません。



確かめ（答えが出たら）：表計算のタイルの和や、順番を変えた計算で、同じ答えか

図 6 重積分の流れ図（2）直す段。図 5 の「直す段へ」から、形の問いで直し方を選ぶ。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ進む。

6 場合 B：境目がななめの線や曲線のとき

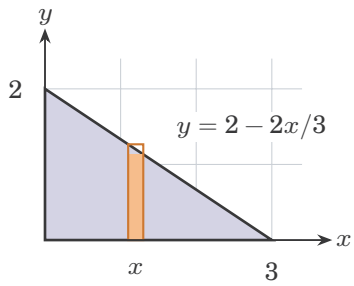
3 つの頂点が $(0,\ 0)$、$(3,\ 0)$、$(0,\ 2)$ の三角形の板を考えます（長さの単位は m）。ななめの辺は、$(3,\ 0)$ と $(0,\ 2)$ を通る直線なので、式は次のとおりです（$x=0$ で 2、$x=3$ で 0 になることで確かめられます）。

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

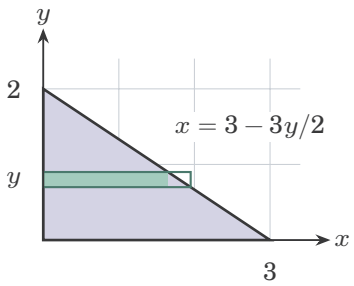
まず、この三角形の面積を、重積分で求めてみます。面積は、「$1\,\mathrm{m}^2$ あたり 1」をたしたもの、つまり $\iint_D 1\,\mathrm{d}A$ です。答えは $3\times 2\div 2=3$ になるはずです。

たて線で切る

場所 x でたてに切ると、切り口は $y=0$ から $y=2-\frac{2}{3}x$ までの線分です。x によって、上の境目の高さが変わります。



たて線で切る：$0 \leqq y \leqq 2-2x/3$



横線で切る：$0 \leqq x \leqq 3-3y/2$

図 7　三角形の板を、たて線で切る（左）・横線で切る（右）。切り口の長さが、場所によって変わる。

$$\int_0^3 \left(\int_0^{2-\frac{2}{3}x} 1\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

内側：x を止めて、y を 0 から上の境目まで

$$= \int_0^3 \left(2 - \frac{2}{3}x\right) \mathrm{d}x$$

内側の答えは切り口の長さ。x の式が残る

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^2 \right]_0^3 = 6 - 3 = 3$$

外側：x で 0 から 3 まで

三角形の面積 3 と同じになりました。

ここで大事なのは、**内側の範囲（上のはし）に、外側の文字 x が入っている**ことです。内側の積分では x を止めているので、上のはしはその x で決まる数です。内側の積分が終わると x の式が残り、それを外側で積分します。

横線で切る（順番を変える）

先に x で積分したいときは、横線で切ります。高さ y で横に切ると、切り口は $x=0$ から $x=3-\frac{3}{2}y$ まで（ななめの辺の式を x について解いた形）です。

$$\int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3}{2}y} 1 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

内側：y を止めて、x を 0 から右の境目まで

$$= \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y\right) \mathrm{d}y = \left[3y - \frac{3}{4}y^2 \right]_0^2$$

外側：y で 0 から 2 まで

$$= 6 - 3 = 3$$

同じ 3

順番を変えると、範囲の式も変わりました。長方形のときのように、$\int$ を入れかえるだけではだめです。**順番を変えるときは、図をかき直して、範囲を作り直します。**外側の範囲には、いつもただの数（0 と 2 など）が入り、内側の範囲には、外側の文字の式が入ることがあります。

⑦ 場合 C・C′：円は極座標で

半径 R の円の板を考えます。$(x,\ y)$ で範囲を書くと、たて線の上のはしは $y=\sqrt{R^2-x^2}$、下のはしは $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ です（三平方の定理、4-4）。ルートの入った範囲で積分するのは、たいへんです。

そこで、4-15 の**極座標**を使います。場所を、中心からの距離 r と、角 θ で表します。すると円の板は、次のように書けます。

$$0 \leqq r \leqq R, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

範囲が、ただの数で書けました。r と θ を横・たてにとった表で見ると、円の板は長方形になります。

極座標のタイルは、$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

極座標では、タイルを「r を少し（$\mathrm{d}r$）、θ を少し（$\mathrm{d}\theta$）ふやした所」で区切ります。すると、タイルは、おうぎ形の一部（輪のかけら）になります。

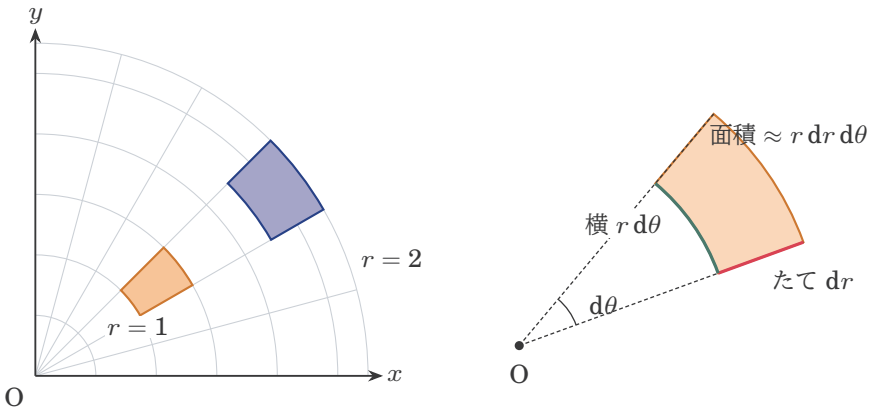


図 8　左：極座標のタイル。同じ $\mathrm{d}r$・$\mathrm{d}\theta$ でも、中心から遠いタイル（紺）は、近いタイル（オレンジ）より大きい。右：タイル 1 枚を大きくした図。たては $\mathrm{d}r$、横は半径 r の円の弧で $r\,\mathrm{d}\theta$。

タイルの、中心へ向かう向きの辺の長さは $\mathrm{d}r$ です。円にそった向きの辺は、半径 r・中心角 $\mathrm{d}\theta$ の弧なので、長さは $r\,\mathrm{d}\theta$ です（4-2 の「弧の長さ＝半径×角」。角はラジアン）。とても小さなタイルは、ほぼ長方形とみなせるので、

$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

です。r がかかっているのは、**中心から遠いほど、同じ $\mathrm{d}\theta$ でもタイルの横はばが広い**からです。図 8 の左では、$r = 2$ の所のタイル（紺）は、$r = 1$ の所のタイル（オレンジ）のちょうど 2 倍の面積です。

もう 1 つの見方：ヤコビアンは r

8-3 で、ヤコビアン（ヤコビ行列の行列式）は「小さな面積が何倍になるか」を表すと学びました。$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ を、r と θ でそれぞれ偏微分して並べます（1 列めが r で、2 列めが θ で偏微分したもの）。

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J = \cos\theta \times r\cos\theta - (-r\sin\theta) \times \sin\theta \qquad \text{7-4 の } ad - bc$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{（4-8）}$$

$(r,\ \theta)$ の表の小さな長方形 $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ は、$(x,\ y)$ の平面では r 倍の面積になります。図で考えても、行列式で考えても、同じ r が出てきました。

円の面積を確かめる

半径 R の円の面積を、極座標の重積分で求めます。

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\text{、範囲はただの数}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{内側：}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^R = \tfrac{R^2}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \pi R^2 \qquad \text{外側：}\tfrac{R^2}{2}\text{ は定数}$$

4-5 で学んだ円の面積 πR^2 と同じです。もし r を忘れて $\int_0^{2\pi}\int_0^R \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ とすると、答えは $2\pi R$ になります。これは円周の長さで、単位も m で、面積（m^2）になりません（まちがえやすいところ①）。

場合 C′：f が r だけなら、細い輪に分ける

はかる量 f が、中心からの距離 r だけで決まるときは、θ の積分はいつも 2π になります。

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r)\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^R f(r)\,r\,\mathrm{d}r = \int_0^R f(r)\,2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$2\pi r\,\mathrm{d}r$ は、半径 r・はば $\mathrm{d}r$ の**細い輪**の面積です（輪を切って広げると、長さ $2\pi r$・はば $\mathrm{d}r$ の細長い帯になる。4-5）。だから、円の板を「同じ中心の細い輪」に分けて、「f ×輪の面積」をたせば、ふつうの定積分 1 回で答えが出ます。物理の本の管の流れ（力-14）は、この形で計算しています。

もっと知りたい ★★★★★

ガウス積分： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

e^{-x^2} の原始関数は、知っている関数では書けません。ところが、全体の範囲の積分なら、重積分を使って答えが出ます。$\iint e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A$（平面全体）を 2 通りに計算します。

場合 A′ として：$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}\times e^{-y^2}$ なので、かけ算に分かれます。求めたい値を $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ とすると、重積分は $I\times I = I^2$ です。

場合 C′ として：$x^2+y^2 = r^2$ なので、$f = e^{-r^2}$ は r だけで決まります。

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,2\pi r\,\mathrm{d}r$$ 細い輪に分ける

$$= \pi\int_0^{\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$ $u = r^2$、$\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$（5-16 の置換積分）

$$= \pi\Big[-e^{-u}\Big]_0^{\infty} = \pi\times(0+1) = \pi$$ u が大きいと e^{-u} は 0 に近づく

正方形の範囲を広げた先と、円の範囲を広げた先は、同じ値になります（$e^{-(x^2+y^2)}$ は遠くでとても小さいので、広げ方のちがう角の部分は効かない）。だから $I^2 = \pi$、$I = \sqrt{\pi} \approx 1.7725$ です。この値は、ちらばりの計

算（3-14 の標準偏差）に出てくる正規分布や、気体の分子の速さ（物理熱-14）で使います。「∞ まで」は、「範囲をどんどん広げた先」という意味です。

⑧ 場合 D・E：立体は 3 重積分

立体の中で量をたすときは、小さな箱（体積 $\mathrm{d}V$）に分けます。場所は x・y・z の 3 つの数で決まるので、$\int$ を 3 つ重ねて書き、**3 重積分**（さんじゅうせきぶん）とよびます。

$$\iiint_V f\,\mathrm{d}V$$　「立体 V の中で、f ×小さな箱の体積 $\mathrm{d}V$ をたし合わせた先」

直方体なら、$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ として、場合 A の定積分を 3 回くり返します。たとえば、たて・横・高さが 1・2・3 の直方体の体積は、次のとおりです。

$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

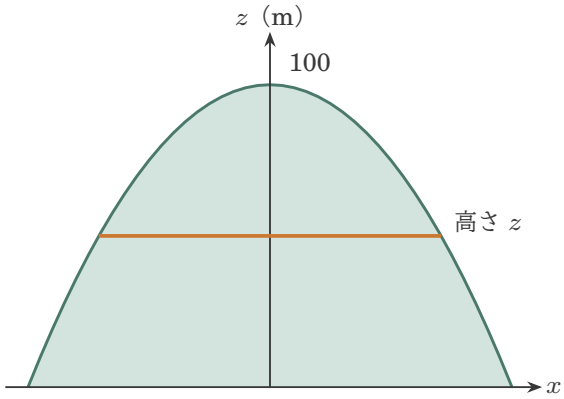
場合 D：切り口の面積がわかる立体

3 重積分のうち、内側の 2 回（x と y）を先にすませると、高さ z の**切り口の面積** $A(z)$ になります。だから、切り口の面積がわかる立体なら、体積は 1 回の定積分です。

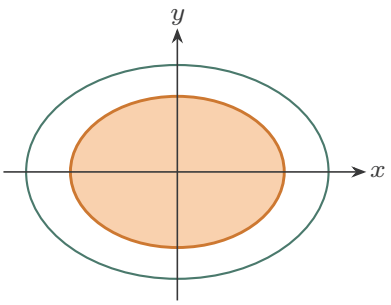
$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int A(z)\,\mathrm{d}z$$

これは、4-5 の「うすく切ってたす」、5-10 の CT スキャンの考えと同じです。

主役の山 h〔m〕$= 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ で考えます。高さ z の所で水平に切ると、切り口は、地図の上で $h \geqq z$ になる所、つまり $0.01x^2 + 0.02y^2 \leqq 100 - z$ の所です。これは、等高線 $h = z$（8-1 のだ円）の内側です。



横から見た図（$y = 0$）



上から見た図（切り口はだ円）

図 9　主役の山を高さ z で切ると、切り口（オレンジ）は、等高線 $h = z$ のだ円の内側。緑の外側のだ円はふもと（$h = 0$）。

だ円 $0.01x^2 + 0.02y^2 = 100 - z$ の、横の半径（$y = 0$ のとき）を a、たての半径（$x = 0$ のとき）を b とします。

$$a = \sqrt{\frac{100 - z}{0.01}} = 10\sqrt{100 - z}, \quad b = \sqrt{\frac{100 - z}{0.02}} = \sqrt{50}\sqrt{100 - z}$$

だ円は、半径 a の円を、たてに b/a 倍にちぢめた形です。面積も b/a 倍になる（7-4 の面積の倍率）ので、だ円の面積は次のようになります。

$$\pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$$

$$A(z) = \pi ab = \pi \times 10\sqrt{50} \times (100 - z) \qquad \sqrt{100 - z} \times \sqrt{100 - z} = 100 - z$$

$$\approx 222.1 \times (100 - z) \qquad \pi \times 10\sqrt{50} \approx 222.1$$

ふもと（$z = 0$）では $A = 22\,210\ \mathrm{m}^2$ ほど、頂上（$z = 100$）では 0 です。体積は、これを z で 0 から 100 までたします。この計算は例題 8 で行います。

場合 E：円柱座標と球座標

円柱の形には、極座標に高さ z を加えた**円柱座標**（4-15）を使います。小さな箱は、極座標のタイル $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に高さ $\mathrm{d}z$ をかけたものです。

$$\text{円柱座標：}\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

球の形には、**球座標** $(r,\ \theta,\ \varphi)$ を使います（4-15 と同じく、r は中心からの距離、θ は真上（z 軸）からの角、φ は床の上で x 軸から回った角）。小さな箱の 3 つの辺は、次のとおりです。

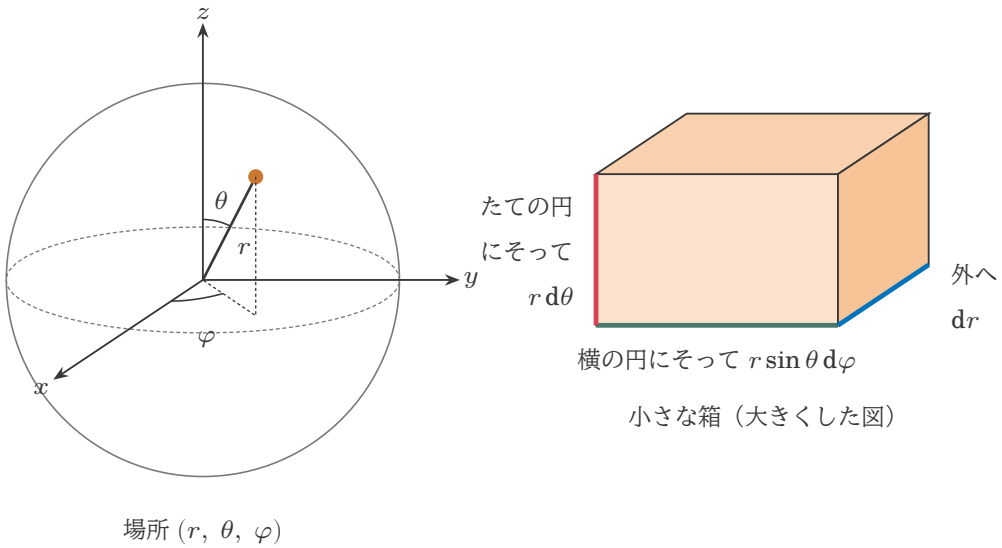


図 10 球座標の小さな箱。3 つの辺の長さをかけると、体積 $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

1. 中心から外へ向かう辺：長さ $\mathrm{d}r$。
2. 真上から下へ（たての円にそって）回る辺：半径 r の円の弧なので、長さ $r\,\mathrm{d}\theta$。
3. 床と平行に（横の円にそって）回る辺：この横の円の半径は、z 軸からの距離 $r\sin\theta$ です（4-15）。だから弧の長さは $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

3 つをかけて、

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

球全体は、$0 \leqq r \leqq R$、$0 \leqq \theta \leqq \pi$（真上から真下まで）、$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$（1 周）です。$\theta$ が π（半周）までで、φ が 2π（1 周）までなのに注意します。θ も 1 周させると、球を 2 回数えてしまいます。上半分の半球なら、θ は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$（真上から横まで）です。

球の体積を確かめる

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

かけ算に分かれる（場合 A′ と同じ考え）

$$= \left(\int_0^{R} r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right)$$

3 つのふつうの定積分のかけ算

$$= \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

まん中の積分は 2（下の式）

（まん中の積分は $\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$ です。）4-5 で学んだ球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ と同じです。f が中心からの距離 r だけで決まるときは、θ と φ の積分が $2 \times 2\pi = 4\pi$ になり、うすい球の殻 $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ に分けた 1 回の定積分になります（場合 C′ の立体版）。

9 楽をする段：対称性・分ける・データ

③楽をする段　計算する前に、楽な道をさがす

直す前に、流れ図（1）の 3 つの問い（図 5）を確かめます。答えが「はい」なら、計算がずっと楽になります。

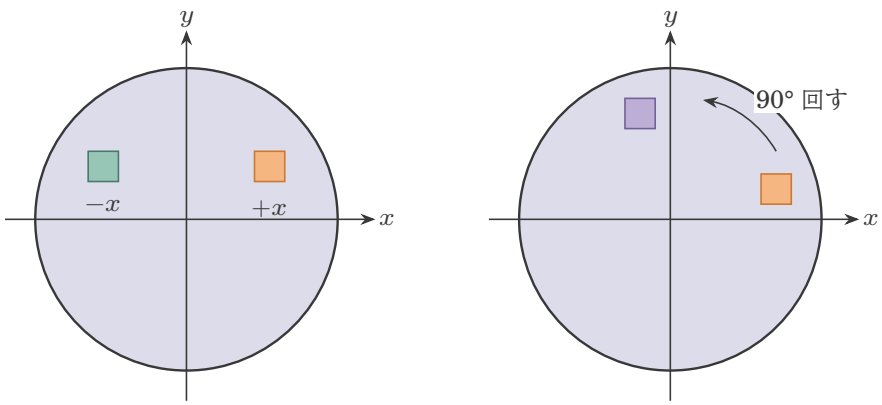
場合 G：対称性で、0 になる・同じになる

中心が原点の円の板で、$\iint_D x\,\mathrm{d}A$ を考えます。点 $(x,\ y)$ のタイルと、y 軸で折り返した点 $(-x,\ y)$ のタイルは、同じ面積で、x の値は反対の符号です。だから 2 つのタイルの「x ×面積」は打ち消し合い、全部たすと 0 になります。

$$\iint_D x\,\mathrm{d}A = 0$$

（範囲が y 軸について左右対称で、f が x を $-x$ にすると符号が変わる関数のとき）

これで、左右対称な板の重心が、対称の軸の上にあることもわかります。



x の積分は打ち消し合って 0　　$\iint x^2\,\mathrm{d}A = \iint y^2\,\mathrm{d}A$

図 11　円の板の対称性。左：y 軸で折り返すと x の符号が変わるので、x をたすと 0。右：90° 回すと x と y が入れかわるので、x^2 をたしても y^2 をたしても同じ。

また、円の板を 90° 回すと、x の役目と y の役目が入れかわります。だから $\iint_D x^2\,\mathrm{d}A = \iint_D y^2\,\mathrm{d}A$ です。この 2 つをたすと $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A = \iint_D r^2\,\mathrm{d}A$ なので、

$$\iint_D y^2\,\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\iint_D r^2\,\mathrm{d}A$$

となります。右辺は f が r だけの形（場合 C′）なので、1 回の定積分で計算できます。物理の本（力-10）で円の棒の曲がりにくさを求めるときに使う考えです（例題 6）。

場合 F：簡単な形の和・差に分ける

穴のあいた円（輪）の板は、「大きい円」から「小さい円」をひいた形です。L 字の板は、2 つの長方形を合わせた形です。重積分は「タイルをたしたもの」なので、範囲を分ければ、それぞれの重積分の和や差になります。

$$\iint_{\text{輪}} f\,\mathrm{d}A = \iint_{\text{大きい円}} f\,\mathrm{d}A - \iint_{\text{小さい円}} f\,\mathrm{d}A$$

パイプ（中が空の丸棒）の曲がりにくさを求めるときに使います（例題 10）。

場合 H：データだけのときは、表計算でたす

雨の量、地下の水の深さ、畑の肥料の量などは、式ではなく、マスごとにはかった値（データ）で与えられることが多いです。そのときは、やってみようと同じように、「マスの値×マスの面積」を表計算でたします。これも重積分（の近い値）です。気象庁の雨のデータ（解析雨量）は、1 km 四方のマスごとに出ています。川の流域に降った雨の量は、マスの雨量（m）×マスの面積（m^2）を、流域のマスについてたして求めます（例題 11）。

せいかくに言うと

一般の座標の変え方：$\mathrm{d}A = |\det J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

場所を $(x,\ y)$ のかわりに、別の 2 つの数 $(u,\ v)$ で表すとき（$x = x(u,\ v)$、$y = y(u,\ v)$）、小さな長方形 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ は、$(x,\ y)$ の平面では、ヤコビ行列 J の行列式の大きさ倍の面積になります（8-3・7-4）。

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}A = |\det J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

行列式が負になるのは、向きが裏返るときです。面積は正なので、大きさ（絶対値）をとります。極座標では $\det J = r$ でした。

だ円の座標で、主役の山の体積を求める：主役の山は、$a = 100$、$b = \sqrt{5000} \approx 70.71$ として $h = 100\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ と書けます。$x = a\,r\cos\theta$、$y = b\,r\sin\theta$ とおくと、$h = 100(1 - r^2)$、ふもとのだ円は $r = 1$ です。

$$\det J = a\cos\theta \times b\,r\cos\theta + a\,r\sin\theta \times b\sin\theta$$ J の 1 列めは r、2 列めは θ で偏微分

$$= ab\,r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = ab\,r$$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 100(1-r^2)\,ab\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$ 高さ×タイルをたす

$$= 100ab \times 2\pi \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 50\pi ab$$ $\int_0^1 (r - r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}$

$$= 50\pi \times 100 \times 70.71 \approx 1.11 \times 10^6$$ 単位は m^3

例題 8 の切り口の方法（場合 D）と同じ答えになります（2 通りで確かめられる）。

専門書をのぞいてみよう　重積分の専門書ふうの書き方

$D = [a,b] \times [c,d]$ 上の連続関数 f に対し，$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$ が成り立つ．変数変換 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$ により D が E に対応するとき，$\iint_D f\,dxdy = \iint_E f\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$.

訳　$[a,b] \times [c,d]$ は長方形 $a \leqq x \leqq b$、$c \leqq y \leqq d$。「連続関数」はとぎれのない関数。$\int_c^d dy \int_a^b f\,dx$ は、この本の $\int_c^d \left(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ を、$\mathrm{d}y$ を前に出して書いたもの（右の積分から先に計算する）。$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ はヤコビアン $\det J$。専門書は d を立てずに dx と書くことが多い。物理の本では、$\int$ を 1 つだけ書いて $\int_D f\,\mathrm{d}A$、$\int_V \rho\,\mathrm{d}V$ と書くことも多い（物理第 1 巻もこの書き方）。どれも同じもの。

この章で出てきたことば

重積分　範囲をタイルに分け、「量×タイルの面積（体積）」をたし、細かくした先。面なら 2 重積分 $\iint$、立体なら 3 重積分 $\iiint$。操作の名前。

累次積分　ふつうの定積分を何回かくり返す形。重積分は、累次積分に直して計算する。

極座標のタイル　$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。たて $\mathrm{d}r$、横 $r\,\mathrm{d}\theta$。r はヤコビアン。

円柱座標・球座標　円柱は $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$、球は $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

面密度　$1\,\mathrm{m}^2$ あたりの質量（$\mathrm{kg/m}^2$）。板の場所ごとの重さの濃さ。

記号カード　初めて出た章 8-6

$$\iint_D$$

読み方　ダブル・インテグラル
意味　範囲 D の上で、量×タイルの面積 $\mathrm{d}A$ をたした先（重積分）。$\int$ の数は場所を表す数の数
英語　double integral

記号カード　初めて出た章 8-6

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

読み方　アール・ディーアール・ディーシータ
意味　極座標の小さなタイルの面積。r は、遠いほどタイルが広い分（ヤコビアン）
英語　area element in polar coordinates

コラム　CT スキャンと積分

病院の CT スキャンは、X 線を体のいろいろな向きから通し、出てきた X 線の弱まり方をはかります。弱まり方は、X 線が通った道にそって「場所ごとの吸収の強さ」をたしたもの（次の 8-7 の線積分）です。コンピュータは、たくさんの向きの線積分から、体の切り口の「場所ごとの吸収の強さ」の地図を作ります。その地図のマスをたしていけば（場合 H）、臓器の体積などもわかります。

たいせつ

重積分の 3 つの段

名前 **記号を読む：何を（f）・どこで（D・V）・1 枚の量（$\mathrm{d}A$・$\mathrm{d}V$）**

楽をする **直す前に：データだけ？　和・差？　対称性？**

直す **形に合う場所の数を選び、ふつうの定積分を 2 回・3 回**

場合分けの表 8-6（まとめ）

記号	こんなとき	1 枚の量・直し方
A	長方形	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。2 回、順番は自由
A′	長方形で $f = g(x)\,h(y)$	2 つの定積分のかけ算
B	境目が曲線・ななめ	たて線で切る。内側の範囲は外側の文字の式
C	円・おうぎ形・輪	$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$（$r$ を忘れない）
C′	円で f が r だけ	細い輪 $2\pi r\,\mathrm{d}r$ で 1 回
D	切り口の面積がわかる	$\int A(z)\,\mathrm{d}z$
E	円柱・球	$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$、$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$
F	和・差	分けて、たす・ひく
G	対称性	先に使う（0・同じ）
H	データだけ	表計算でマスの和

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 8-6 のどの場合かを書きました。そのあとの札は、名前 が名前の段、楽をする が楽をする段、直す が直す段です。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜11 を、図 5・図 6 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。どれも、考え方の 1 行めの場合に着きます。じぶんでとこうも同じ道すじです。例題を読む前に、どの道すじになるか予想してみましょう。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	厚さがちがう板	長方形？	A
2	かけ算に分かれる	長方形？ → $f = g(x)\,h(y)$？	A′
3	順番を変える	（長方形？ はいいえ）	B
4	三角形の重心	（長方形？ はいいえ）	B
5	半円の重心	折り返しで 0（$\iint x\,\mathrm{d}A$）→ 円の形？ （$f = r\sin\theta$ は r だけでない）	G C
6	丸い棒の I	回転で同じ（$\iint y^2 = \iint x^2$）→ 円の形？ → r だけ？	G C′
7	管の流量	円の形？ → r だけ？	C′
8	山の体積	立体？ → 体積で切り口？	D
9	球の I	立体？ → 円柱・球？	E
10	パイプの I	和・差？（それぞれの円で、もう一度上から）	F
11	流域の雨	データだけ？	H

表 6　例題 1〜11 の流れ図の道すじ（G のあとは、矢印の先の「直す段へ」から図 6 へ）。

例題 1　厚さがちがう板の重さ

はば 2 m、奥行き 1 m の板（$0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 1$）があります。場所 $(x,\ y)$ での面密度 σ〔kg/m^2〕は $\sigma = 12 + 6x + 4y$ です。板の質量を、2 つの順番で求めましょう。

考え方　**場合：**範囲が長方形（表 8-6 の **A**）

名前　$\iint_D \sigma \,\mathrm{d}A$：板の上で「$\sigma$ ×タイルの面積」をたす。

直す　$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。内側は 1 つを止めて、もう 1 つで積分。

式　【x が先】内側：y を止める：

$$\int_0^2 (12 + 6x + 4y)\,\mathrm{d}x = \Big[\,12x + 3x^2 + 4y\,x\,\Big]_0^2$$

$x = 2$ を入れる：$= 24 + 12 + 8y = 36 + 8y$

外側：y で 0 から 1：$\displaystyle\int_0^1 (36 + 8y)\,\mathrm{d}y = \Big[\,36y + 4y^2\,\Big]_0^1 = 40$

【y が先】内側：x を止める：

$$\int_0^1 (12 + 6x + 4y)\,\mathrm{d}y = \Big[\,12y + 6x\,y + 2y^2\,\Big]_0^1 = 14 + 6x$$

外側：x で 0 から 2：

$$\int_0^2 (14 + 6x)\,\mathrm{d}x = \Big[\,14x + 3x^2\,\Big]_0^2 = 28 + 12 = 40$$

答え　40 kg（どちらの順番でも同じ）

じぶんでとこう 1

$0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 1$ の板で、面密度が $\sigma = 8 + 3x + 4y$〔kg/m^2〕のとき、板の質量を 2 つの順番で求めましょう。

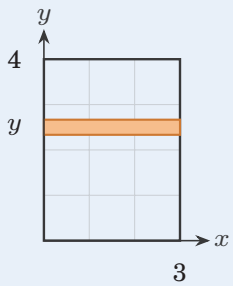
例題 2　かけ算に分かれる重積分

$0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq 4$ の長方形 D で、$\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}A$ を求めましょう。

考え方　**場合：**長方形で、f が「x だけ」×「y だけ」（表 8-6 の A′）

名前　長方形の上で「x^2y ×タイル」をたす。

直す　内側（x で積分）では y は数なので外に出る。2 つの定積分のかけ算になる。



オレンジの帯の上では y は同じ数。

帯の積分は $y \times \int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = 9y$

式　内側：y は数なので外へ：$\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^3 x^2 y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^4 y \left(\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

x の定積分：$\displaystyle\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 9$

外側：$\displaystyle\int_0^4 9y \, \mathrm{d}y = 9 \times \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = 9 \times 8 = 72$

答え　72

じぶんでとこう 2

$0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 2$ の正方形 D で、$\iint_D x y^3 \, \mathrm{d}A$ を求めましょう。

例題 3　積分の順番を変える

$0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ の三角形 D（頂点 $(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(1,\ 1)$）で、$\iint_D x\,y\,\mathrm{d}A$ を、たて線で切る順番と、横線で切る順番の 2 通りで求めましょう。

考え方　**場合：**境目がななめの線（三角形）（表 8-6 の **B**）

名前　三角形の上で「xy ×タイル」をたす。

直す　たて線：x で止めると $0 \leqq y \leqq x$。横線：y で止めると $y \leqq x \leqq 1$。図をかいて範囲を作り直す。

式　【たて線】内側：x を止めて y で：$\displaystyle\int_0^x x\,y\,\mathrm{d}y = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^3}{2}$

外側：x で 0 から 1：$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$

【横線】内側：y を止めて x で：$\displaystyle\int_y^1 x\,y\,\mathrm{d}x = y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 = \frac{y-y^3}{2}$

外側：y で 0 から 1：$\displaystyle\int_0^1 \frac{y-y^3}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$

同じ答え：$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

答え　$\dfrac{1}{8}$（どちらの順番でも同じ）

じぶんでとこう 3

$0 \leqq y \leqq x \leqq 2$ の三角形 D で、$\iint_D x\,y\,\mathrm{d}A$ を、たて線で切る順番と、横線で切る順番の 2 通りで求めましょう。

例題 4　三角形の板の重心

3 つの頂点が $(0,\ 0)$、$(3,\ 0)$、$(0,\ 2)$ の三角形の板（厚さは一定）の重心を求めましょう（長さの単位は m）。重心の x 座標は「x ×タイルの面積」の合計を面積でわったもの、y 座標も同じです。

考え方　**場合**：境目がななめの線（三角形）（表 8-6 の B）

名前　$\bar{x} = \dfrac{1}{3}\iint_D x\,\mathrm{d}A$、$\bar{y} = \dfrac{1}{3}\iint_D y\,\mathrm{d}A$（面積は⑥で 3）。

直す　たて線で切る：$0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq g$（$g = 2 - \frac{2}{3}x$）。

式　内側：止めた x ×切り口の長さ：$\displaystyle\int_0^g x\,\mathrm{d}y = x\,g = 2x - \frac{2}{3}x^2$

外側：x で 0 から 3：$\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}A = \left[x^2 - \frac{2}{9}x^3\right]_0^3 = 9 - 6 = 3$

内側：$\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{2}{3}x\right)^2$ を展開：$\displaystyle\int_0^g y\,\mathrm{d}y = \frac{g^2}{2} = 2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}x^2$

外側：$6 - 6 + 2$：$\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}A = \left[2x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{27}x^3\right]_0^3 = 2$

面積 3 でわる：$\bar{x} = \dfrac{3}{3} = 1$，　$\bar{y} = \dfrac{2}{3}$

答え　$\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$（m）。3 つの頂点の平均 $\left(\dfrac{0+3+0}{3},\ \dfrac{0+0+2}{3}\right)$ と同じ (4-11)

物理の本（力-3・力-5）では、重心を $\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$ と書きます。板なら $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}A$、$M = \iint \sigma\,\mathrm{d}A$ で、厚さが一定なら σ が約分されて、この例題の式になります。力-12 の「$\iint y\,\mathrm{d}A$ ＝重心の高さ×面積」も、$\bar{y}$ の式を面積倍したものです。

じぶんでとこう 4

3 つの頂点が $(0,\ 0)$、$(6,\ 0)$、$(0,\ 3)$ の三角形の板（厚さは一定）の面積と重心を、重積分で求めましょう（長さの単位は m）。

例題 5　半円の板の重心

半径 R の半円の板（$x^2+y^2 \leqq R^2$、$y \geqq 0$。厚さは一定）の重心を求めましょう。また、$R = 0.15\,\mathrm{m}$ のときの重心を求めましょう。

考え方　**場合**：左右対称で、範囲が半円（表 8-6 の G と C）

名前　$\bar{x} = \dfrac{1}{S}\iint_D x\,\mathrm{d}A$、$\bar{y} = \dfrac{1}{S}\iint_D y\,\mathrm{d}A$（面積 $S = \dfrac{\pi R^2}{2}$）。

楽をする　y 軸で左右対称で、x は折り返すと符号が変わるので $\iint_D x\,\mathrm{d}A = 0$、$\bar{x} = 0$。

直す　残りの $\iint y\,\mathrm{d}A$ は極座標：$0 \leqq r \leqq R$、$0 \leqq \theta \leqq \pi$（上半分）、$y = r\sin\theta$、$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。$f = r\sin\theta$ は θ もふくむので C。

式　$y = r\sin\theta$、タイル $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$：$\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}A = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{R} r\sin\theta \times r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$

内側：θ を止めて r で：$\displaystyle\int_0^{R} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{R^3}{3}\sin\theta$

外側：$[-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$：$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2R^3}{3}$

面積でわる：$\displaystyle\bar{y} = \frac{2R^3}{3} \div \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4R}{3\pi}$

$R = 0.15$ のとき $\displaystyle\bar{y} = \frac{4 \times 0.15}{3\pi} \approx 0.0637$

答え　$\left(0,\ \dfrac{4R}{3\pi}\right)$（中心から約 $0.42R$ 上）。$R = 0.15\,\mathrm{m}$ なら $(0,\ 0.0637)$（m）

じぶんでとこう 5

半径 $0.3\,\mathrm{m}$ の半円の板（$x^2+y^2 \leqq 0.3^2$、$y \geqq 0$。厚さは一定）の重心を求めましょう。

例題 6　丸い棒の断面二次モーメント

直径 $d = 0.04\,\mathrm{m}$ の丸い棒の切り口（円）で、$I = \iint_D y^2\,\mathrm{d}A$ を求めましょう。I は、棒の曲がりにくさを決める量で、**断面二次モーメント**といいます（物理 力-10）。

考え方　**場合：**円で、対称性を使うと f が r だけになる（表 8-6 の G と C′）

名前　円の上で「y^2 ×タイル」をたす（中心を原点にとる）。

楽をする　90° 回すと x と y が入れかわるので $\iint y^2\,\mathrm{d}A = \iint x^2\,\mathrm{d}A = \dfrac{1}{2}\iint r^2\,\mathrm{d}A$。

直す　$f = \dfrac{r^2}{2}$ は r だけなので、細い輪 $\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$、$0 \leqq r \leqq R$（$R = d \div 2$）。

式　細い輪に分ける：$I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^R r^2 \times 2\pi r\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r$

原始関数：$= \pi\left[\dfrac{r^4}{4}\right]_0^R = \dfrac{\pi R^4}{4}$

$R = \dfrac{d}{2}$：$= \dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{d^4}{16} = \dfrac{\pi d^4}{64}$

数を入れる：$= \dfrac{\pi \times 0.04^4}{64} = \dfrac{\pi \times 2.56 \times 10^{-6}}{64} \approx 1.257 \times 10^{-7}$

答え　$\dfrac{\pi d^4}{64} \approx 1.26 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^4$（物理の本の式と同じ）

じぶんでとこう 6

直径 $d = 0.06\,\mathrm{m}$ の丸い棒の切り口で、断面二次モーメント $I = \iint_D y^2\,\mathrm{d}A$ を求めましょう。

例題 7　管を流れる水の量

半径 $R = 1\,\mathrm{cm}$ の細い管の中を、水がゆっくり流れています。中心からの距離 r の所の速さ u〔m/s〕は $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$、中心の速さは $u_{\max} = 0.2\,\mathrm{m/s}$ です（物理 力-14）。1 秒に流れる水の体積（流量）Q と、平均の速さを求めましょう。

考え方　**場合：**円で、u が r だけで決まる（表 8-6 の C′）

名前　$Q = \iint_D u\,\mathrm{d}A$（切り口の上で「速さ×タイルの面積」をたす。1 秒に、タイルを通る水は、タイルを底面、u を高さとする柱）。

直す　細い輪に分ける：$\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$、$0 \leqq r \leqq R$。

式　速さ×輪の面積をたす：$Q = \displaystyle\int_0^R u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,\mathrm{d}r$

定数を外へ出す：$= 2\pi u_{\max}\displaystyle\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r$

原始関数：$= 2\pi u_{\max}\left(\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^2}{4}\right) = \dfrac{\pi u_{\max} R^2}{2}$

$R = 0.01\,\mathrm{m}$：$= \dfrac{\pi \times 0.2 \times 0.01^2}{2} \approx 3.14 \times 10^{-5}$

mL に直す：$3.14 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3/s} \times 1 \times 10^{6}\,\mathrm{mL/m^3} = 31.4\,\mathrm{mL/s}$

平均の速さ：$\dfrac{Q}{\pi R^2} = \dfrac{u_{\max}}{2} = 0.1\,\mathrm{m/s}$

答え　流量 約 31.4 mL/s（約 1.9 L/min）、平均の速さ 0.1 m/s（中心の速さの半分）

じぶんでとこう 7

半径 $R = 2\,\mathrm{cm}$ の管で、速さが $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$、$u_{\max} = 0.5\,\mathrm{m/s}$ のとき、流量と平均の速さを求めましょう。

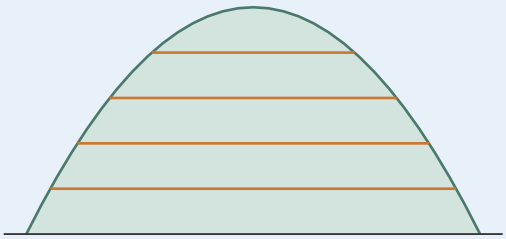
例題 8　主役の山の体積

主役の山 h〔m〕$= 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ の、地面（$h = 0$）より上の体積を求めましょう。高さ z の切り口の面積 $A(z)$〔m^2〕は、⑧で求めたように $A(z) = \pi \times 10\sqrt{50} \times (100 - z)$ です。

考え方　**場合：**立体の体積で、切り口の面積がわかる（表 8-6 の **D**）

名前　$V = \iiint_V \mathrm{d}V$（山の中の小さな箱の体積をたす）。

直す　内側の 2 回は切り口の面積。$V = \int_0^{100} A(z)\,\mathrm{d}z$。



うすい切り口（面積 $A(z)$、厚さ $\mathrm{d}z$）をふもとから頂上までたす

式　定数を外へ出す：$V = \pi \times 10\sqrt{50} \displaystyle\int_0^{100} (100 - z)\,\mathrm{d}z$

$10\,000 - 5000$：$\displaystyle\int_0^{100} (100 - z)\,\mathrm{d}z = \left[100z - \frac{1}{2}z^2\right]_0^{100} = 5000$

かける：$V = \pi \times 10\sqrt{50} \times 5000 \approx 222.1 \times 5000 \approx 1.11 \times 10^6$

答え　約 1.11×10^6 m^3（せいかくに言うとの、だ円の座標の計算と同じ）

じぶんでとこう 8

山の形が h〔m〕$= 40 - 0.01x^2 - 0.04y^2$ のとき、高さ z の切り口（だ円）の面積 $A(z)$ と、地面より上の体積を求めましょう。

例題 9　球の慣性モーメント

半径 R、密度 ρ が一定の球の、z 軸（中心を通る軸）のまわりの慣性モーメント $I = \iiint_V \rho\,(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$ を、球の質量 M と R で表しましょう。また、鋼（密度 $7850\,\mathrm{kg/m^3}$）の球（$R = 5\,\mathrm{cm}$）の I を求めましょう。

考え方　**場合：**立体が球（表 8-6 の **E**）

名前　球の中で「ρ ×軸からの距離の 2 乗×箱の体積」をたす（物理 力-6）。

直す　球座標。軸からの距離は $r\sin\theta$ なので $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta$。$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。球全体は $0 \leqq r \leqq R$、$0 \leqq \theta \leqq \pi$、$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$（上半分の半球なら θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$）。

式　$I = \rho \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin^2\theta \times r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

かけ算に分かれる：$I = \rho\left(\displaystyle\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)$

3 つの定積分：$\dfrac{R^5}{5}$、$\dfrac{4}{3}$（下の注）、2π

かける：$I = \rho \times \dfrac{R^5}{5} \times \dfrac{4}{3} \times 2\pi = \dfrac{8\pi\rho R^5}{15}$

$M = \rho \times \dfrac{4}{3}\pi R^3$ でわる：$\dfrac{I}{M} = \dfrac{8\pi\rho R^5}{15} \div \dfrac{4\pi\rho R^3}{3} = \dfrac{2}{5}R^2$

鋼の球：$M = 7850 \times \dfrac{4}{3}\pi \times 0.05^3 \approx 4.11$、

$I = \dfrac{2}{5} \times 4.11 \times 0.05^2 \approx 4.11 \times 10^{-3}$

答え　$I = \dfrac{2}{5}MR^2$。鋼の球は約 $4.11 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$

注：$\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta$。$u = \cos\theta$ とおくと $\mathrm{d}u = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$、$\theta$ が 0 から π で u は 1 から -1（5-16 の置換積分）。$\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,\mathrm{d}u = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$。

じぶんでとこう 9

半径 R、密度 ρ が一定の半球（$z \geqq 0$ の部分）の、z 軸のまわりの慣性モーメント $I = \iiint_V \rho\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V$ を、半球の質量 M と R で表しましょう。

例題 10　パイプの断面二次モーメント

外の直径 $D = 40\,\mathrm{mm}$、内の直径 $d = 30\,\mathrm{mm}$ のパイプ（中が空の丸い棒）の切り口で、断面二次モーメント $I = \iint y^2\,\mathrm{d}A$ を求めましょう。また、同じ外の直径の丸い棒（例題 6）とくらべましょう。

考え方　**場合：**穴のあいた円（和・差）（表 8-6 の **F**）

名前　輪の上で「y^2 ×タイル」をたす。

楽をする　輪＝大きい円－小さい円。それぞれ例題 6 の $\dfrac{\pi d^4}{64}$（G と C′）。

式　大きい円－小さい円：$I = \dfrac{\pi D^4}{64} - \dfrac{\pi d^4}{64} = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$

$D = 0.04\,\mathrm{m}$、$d = 0.03\,\mathrm{m}$：

$D^4 - d^4 = 2.56 \times 10^{-6} - 8.1 \times 10^{-7} = 1.75 \times 10^{-6}$

$I = \dfrac{\pi \times 1.75 \times 10^{-6}}{64} \approx 8.59 \times 10^{-8}$

丸い棒との比：$8.59 \times 10^{-8} \div 1.257 \times 10^{-7} \approx 0.68$

切り口の面積の比：$\dfrac{D^2 - d^2}{D^2} = \dfrac{16 - 9}{16} \approx 0.44$

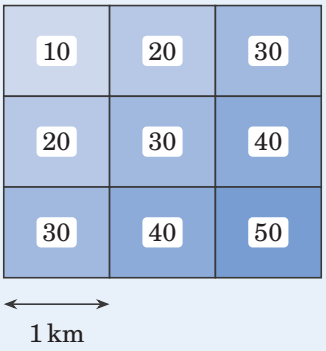
答え　約 $8.59 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^4$。材料は約 44% なのに、曲がりにくさは約 68% 残る

じぶんでとこう 10

外の直径 $D = 60\,\mathrm{mm}$、内の直径 $d = 40\,\mathrm{mm}$ のパイプの切り口で、断面二次モーメントを求めましょう。

例題 11　川の流域に降った雨の量

1 km 四方のマスが、たて 3 つ・横 3 つの 9 つならぶ流域があります。ある日の雨の量（mm）は、マスごとに次のとおりでした。流域に降った雨の体積を求めましょう。



マスの数は雨の量（mm）

1 マスは 1 km 四方

色がこいほど多い

考え方　**場合**：式がない（データだけ）（表 8-6 の **H**）

名前　流域の上で「雨の深さ×タイルの面積」をたす。

楽をする　マスごとに「雨の深さ×マスの面積」をたす（表計算の SUM）。

式　マスの面積：$1000\,\mathrm{m} \times 1000\,\mathrm{m} = 1 \times 10^6\,\mathrm{m}^2$

$1\,\mathrm{mm} = 0.001\,\mathrm{m}$ なので、1 mm の雨は 1 マスに

$0.001 \times 1 \times 10^6 = 1000\,\mathrm{m}^3$

雨の量の合計：$10 + 20 + 30 + 20 + 30 + 40 + 30 + 40 + 50 = 270$（mm）

体積：$270 \times 1000\,\mathrm{m}^3 = 2.7 \times 10^5\,\mathrm{m}^3$

答え　約 $2.7 \times 10^5\,\mathrm{m}^3$（流域の平均の雨は $270 \div 9 = 30\,\mathrm{mm}$）

じぶんでとこう 11

1 km 四方のマス 9 つ（たて 3 つ・横 3 つ）の流域で、雨の量（mm）が、1 行めから順に「5、10、15」「10、20、25」「15、25、35」でした。流域に降った雨の体積と、平均の雨の量を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 極座標で r を忘れる

× 円の面積 $= \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R$

○ 円の面積 $= \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi R^2$

タイルの横はばは $r\,\mathrm{d}\theta$ です。r を忘れると答えが長さ（m）になり、面積（m^2）になりません。

まちがえやすいところ

② 順番を変えたのに、範囲をそのままにする

× $\int_0^{3}\int_0^{2-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ の順番を変えて、$\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\int_0^{3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

○ 図をかき直して、$\int_0^{2}\int_0^{3-\frac{3}{2}y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

外側の範囲に文字 x が残ると、答えが数になりません。

⚠ まちがえやすいところ

③ 止めた文字の項に、はばをかけ忘れる

✕ $\int_0^2 (10+5x+2y)\,\mathrm{d}x = 20+10+2y$

○ $\int_0^2 (10+5x+2y)\,\mathrm{d}x = 20+10+4y$

x で積分するとき $2y$ は定数で、0 から 2 まで積分すると $2\times 2y = 4y$ です。

⚠ まちがえやすいところ

④ 名前をそのまま計算する

✕ $\iint_D \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma\times$（板の面積）$= (10+5x+2y)\times 2$

○ σ が場所で変わるときは、ふつうの定積分に直して計算する

$$\underbrace{\iint_D \sigma\,\mathrm{d}A}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^2 \sigma\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}} = 32$$

$\iint_D \sigma\,\mathrm{d}A$ は操作の名前です。「σ ×面積」は、σ がどこでも同じときだけです。答えに x や y が残ったら、まちがいです。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 内側の範囲に、内側の文字を入れる

✕ $\int_0^1\left(\int_0^y x\,y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$（$y$ で積分するのに、上のはしが y）

○ $\int_0^1\left(\int_0^x x\,y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$（上のはしは外側の文字 x）

内側の範囲は、止めている外側の文字で決まります。内側で動かしている文字を範囲に入れると、意味のない式になります。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 球座標の $\sin\theta$ と範囲

✕　$\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$、
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$、$0 \leqq \varphi \leqq \pi$

○　$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$、
$0 \leqq \theta \leqq \pi$、$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$

θ は真上から真下まで（半周）、φ は床の上で 1 周です。$\sin\theta$ は、横の円の半径 $r\sin\theta$ から出てきます。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ どの $\int$ とどの d が組か

✕　$\int_0^1\int_0^2 f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ の内側の「0 から 2」を y の範囲と読む

○　内側の $\int$ と内側の $\mathrm{d}x$ が組。「0 から 2」は x の範囲

$\int$ と d は、かっこと同じように、内側どうし・外側どうしで組になります。まよったら、かっこをつけて書きます。

⚠ まちがえやすいところ

⑧ $\iint$ を「2 つの積分のかけ算」と思いこむ

✕　三角形 $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ でも $\iint x\,y\,\mathrm{d}A = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{4}$

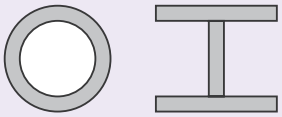
○　三角形では範囲が x によるので、例題 3 のとおり $\frac{1}{8}$

かけ算に分かれるのは、範囲が長方形で、f が「x だけ」×「y だけ」のとき（場合 A′）だけです。

物理・工学ではこう使う

曲がりにくい形：パイプと H 形鋼

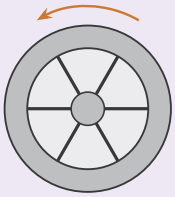
はりや柱の曲がりにくさは、切り口の断面二次モーメント $\iint y^2\,\mathrm{d}A$ で決まります（物理 力-10）。y^2 がかかるので、中心から遠い所の材料ほど、曲がりにくさに強くききます。だから、自転車のフレームはパイプにし、ビルや橋の鉄骨は、上と下に材料を集めた H 形鋼にして、軽くて曲がりにくい形にしています（例題 10）。



パイプ　H 形鋼

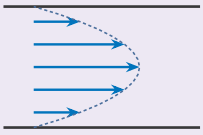
回りにくさ：フライホイール

回る物の回りにくさ（慣性モーメント）は、$\iiint \rho\, r^2\,\mathrm{d}V$ です（r は軸からの距離。物理 力-6）。エンジンや発電機の軸につける重い円板（フライホイール、はずみ車）は、外側に材料を集めて慣性モーメントを大きくし、回る速さのむらを小さくします。



管を流れる量：水道管から血管まで

細い管をゆっくり流れる水や油は、まん中が速く、かべの近くはほとんど止まっています。流量は切り口の上の $\iint u\,\mathrm{d}A$ で、細い輪に分けて求めます（例題 7、物理 力-14）。平均の速さは中心の速さの半分です。水道や油の配管、化学工場のパイプの設計に使います。



章末問題

8-6 のまとめ

基本 ★★★★★

1 $0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq 1$ の板で、面密度が $\sigma = 12 + 4x + 6y$〔kg/m^2〕のとき、板の質量を求めましょう（例題 1）。

2 $0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq 1$ の長方形 D で、$\iint_D x^2 y^2 \, \mathrm{d}A$ を求めましょう（例題 2）。

3 3 つの頂点が $(0,\ 0)$、$(4,\ 0)$、$(0,\ 3)$ の三角形の板（厚さは一定）の面積と重心を、重積分で求めましょう（長さの単位は m）（例題 4）。

4 半径 0.6 m の半円の板（$x^2 + y^2 \leqq 0.6^2$、$y \geqq 0$。厚さは一定）の重心を求めましょう（例題 5）。

5 直径 $d = 0.1\,\mathrm{m}$ の丸い棒の切り口で、断面二次モーメント $\iint y^2 \, \mathrm{d}A$ を求めましょう（例題 6）。

6 半径 $R = 0.5\,\mathrm{cm}$ の管で、速さが $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$、$u_{\max} = 0.4\,\mathrm{m/s}$ のとき、流量（mL/s）と平均の速さを求めましょう（例題 7）。

7 1 km 四方のマス 6 つ（たて 2 つ・横 3 つ）の流域で、雨の量（mm）が、1 行めから順に「10、15、20」「25、30、35」でした。流域に降った雨の体積を求めましょう（例題 11）。

チャレンジ ★★★★★

8 $0 \leqq y \leqq x \leqq 3$ の三角形 D で、$\iint_D y \, \mathrm{d}A$ を、たて線で切る順番と、横線で切る順番の 2 通りで求めましょう（例題 3）。

9 山の形が $h\,〔\mathrm{m}〕 = 60 - 0.01x^2 - 0.04y^2$ のとき、高さ z の切り口の面積と、地面より上の体積を求めましょう（例題 8）。

10 半径 $R = 0.1\,\mathrm{m}$ の鋼（密度 $7850\,\mathrm{kg/m^3}$）の球の、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めましょう（例題 9）。

11 外の直径 $50\,\mathrm{mm}$、内の直径 $40\,\mathrm{mm}$ のパイプの切り口で、断面二次モーメントを求めましょう（例題 10）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 板を小さなタイルに分けて重さを表計算でたし、重積分の記号を「何を・どこで・1 枚の量」で読める。 → 205 ページ
- ☐ 長方形の範囲の重積分を、ふつうの定積分を 2 回くり返す形に直して計算できる。 → 213 ページ
- ☐ 場合分けの表を使って、三角形・円・立体の重積分を、正しいふつうの定積分に直して計算できる。 → 215 ページ

ソラ

∬ は操作の名前で、計算するのはふつうの定積分なんだね。次は、道にそってたす「線積分」。同じ 3 つの段で読んでいこう。

第 2 部　ベクトル場と積分

★★★★★

8-7 道にそってたす：線積分

道しるべ　この章の前に 4-11 4-12 5-8 5-12 8-3 8-4 8-5 8-6
この章の先に 8-8 8-10 8-11 8-14

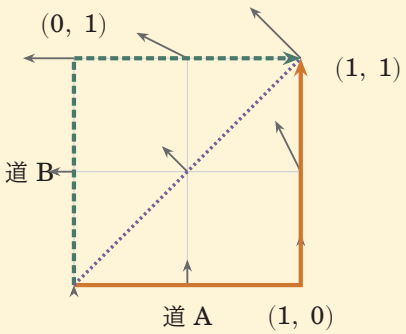
この章でできるようになること

- ★★★ 道を小さな 1 歩に分け、「力と 1 歩の内積」をたして仕事を表計算で求め、線積分の記号を読める。
- ★★★★ 軸に平行な道（折れ線）の線積分を、ふつうの定積分に直して計算できる。
- ★★★★★ 場合分けの表を使って、ななめ・曲線・円の道、保存力、閉じた道の線積分を計算できる。

はてな？

場所 $(x,\ y)$（m）ごとに向きと大きさのちがう力 $\vec{F} = (-y,\ x)$（N）がはたらく平面で、物を原点から点 $(1,\ 1)$ まで動かします。道 A は右へ 1 m、上へ 1 m。道 B は上へ 1 m、右へ 1 m。ななめの道もあります。

この力がする仕事は、道によって変わるでしょうか。遠回りすると、仕事は変わる？



灰色の矢印が力 $\vec{F}$。オレンジが道 A、緑の点線が道 B、紫の点線がななめ。

4-12 で、仕事は「力と、動いた矢印の内積」だと学びました。5-12 では、力が場所で変わるときは、細かく分けて、かけて、たしました。でもそれは、まっすぐな道の上の話でした。

この章では、力の向きと大きさが場所ごとにちがい（8-5 のベクトル場）、道も曲がっているときの仕事を求めます。道を小さな 1 歩に分け、1 歩ずつ「力と 1 歩の内積」をたします。この操作の名前が**線積分**です。8-6 と同じく、名前を、ふつうの定積分に直して計算します。どう直すかは道の形で決まるので、場合ごとに見ていきます。

この章の計算は、物理の本（力-4）の「仕事とエネルギー」、電気の「電圧」「起電力」、熱の「気体がする仕事」に、そのまま使われます。

やってみよう 1 歩ずつ「力×進んだ距離」をたそう

道 A を、0.25 m ずつの 8 歩に分けます。1 歩ごとに、その 1 歩のまん中の場所で力 $\vec{F} = (-y,\ x)$ を計算し、1 歩の移動 $(\Delta x,\ \Delta y)$ との内積 $F_x\Delta x + F_y\Delta y$ を求めて、たします。

1. A 列（A2〜A9）に、歩の番号 1〜8 を入れる。
2. B 列・C 列に、その 1 歩のまん中の x・y を入れる。右へ進む 4 歩は $y = 0$、上へ進む 4 歩は $x = 1$。
3. D 列・E 列に、1 歩の移動 Δx・Δy を入れる。右へ進む歩は $(0.25,\ 0)$、上へ進む歩は $(0,\ 0.25)$。
4. F2 に `=-C2*D2+B2*E2` と入れて、F9 までコピーする。
5. F10 に `=SUM(F2:F9)` と入れる。道 B・ななめの道でも同じ表を作ろう。

④の式は、$F_x\Delta x + F_y\Delta y$ に $F_x = -y$（C 列）、$F_y = x$（B 列）を入れたものです（4-12 の、成分で計算する内積）。力は場所で変わるので、1 歩の中のまん中の場所の力を使います（8-6 のタイルのまん中と同じ考え）。

	A	B	C	D	E	F
1	歩	まん中の x	まん中の y	Δx	Δy	内積
2	1	0.125	0	0.25	0	0
3	2	0.375	0	0.25	0	0
4	3	0.625	0	0.25	0	0
5	4	0.875	0	0.25	0	0
6	5	1	0.125	0	0.25	0.25
7	6	1	0.375	0	0.25	0.25
8	7	1	0.625	0	0.25	0.25
9	8	1	0.875	0	0.25	0.25
10					合計	1

表 1　道 A の表計算。右へ進む間は $y = 0$ なので $F_x = 0$ で、仕事は 0。上へ進む間は $F_y = x = 1$ で、1 歩ごとに $1 \times 0.25 = 0.25$ J。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-12　仕事は、力 $\vec{F}$ と動いた矢印 $\vec{s}$ の内積 $\vec{F} \cdot \vec{s} = F_x s_x + F_y s_y$。力と動きが直角なら 0。
- 5-12　力が場所で変わるときの仕事は、細かく分けて「力×進んだ距離」をたした先 $\int F \mathrm{d}x$。
- 4-11　点 $\vec{p}_0$ から、向き $\vec{v}$ にまっすぐ進む点は $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}$。
- 5-8　短い時間 Δt の間の位置の変化は、ほぼ「速度× Δt」。
- 8-3　道 $x(t)$、$y(t)$ を歩くと、$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$（連鎖律）。
- 8-6　積分の記号は操作の名前。名前の段→直す段→楽をする段で、ふつうの定積分に直して計算する。

数学の道具

目でわかる 道を小さな 1 歩に分ける ★★★

1 1 歩ずつ、力と 1 歩の内積をたす

物が道にそって動くとき、道を小さな移動 $\Delta\vec{r}_i$ に分けます。1 つの区間の間は、力はほぼ一定の $\vec{F}_i$ とみなせます。その区間の仕事は、内積 $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$ です (4-12)。全部の区間をたすと、道全体の仕事が近い値で出ます。

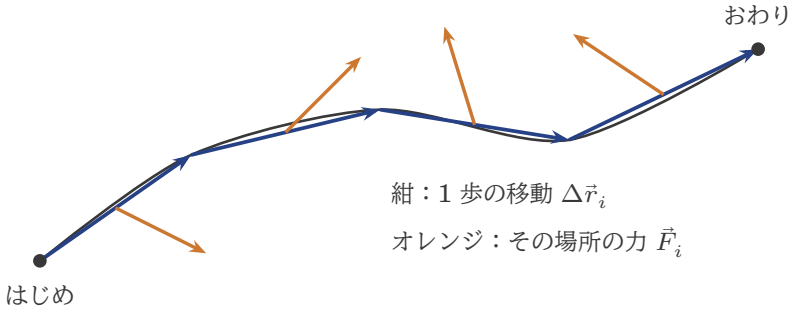


図 1 道を 4 つの小さな移動（紺）に分けた。1 歩ごとの仕事は、その場所の力（オレンジ）と移動の内積。力が移動と同じ向きなら正、反対向きなら負、直角なら 0。

やってみようの表計算は、この考えを道 A で行ったものでした。道 B とななめの道でも同じように計算すると、次の表のようになります。くらべるために、もう 1 つの力 $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ でも計算しました（はてな？ の力を $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ とよびます。物理の本の力-4 と同じ名前です）。

力	道 A	道 B	ななめ
$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$（はてな？の力）	1 J	−1 J	0 J
$\vec{F}_1 = (y,\ x)$	1 J	1 J	1 J

表 2 3 つの道の仕事（0.25 m ずつの表計算。どれもまん中の値でぴったり出る）。

道 B では、はじめに上へ進む間は $x = 0$ なので $F_y = 0$ で、仕事は 0 です。そのあと右へ進む間は $y = 1$ なので $F_x = -1$ で、力は進む向きと反対です。だから仕事は $-1 \times 1 = -1$ J です。

気づくこと

- はてな？ の力 $\vec{F}_2$ では、同じ点から同じ点へ動かしても、**道によって仕事が変わる**（1、−1、0）。
- $\vec{F}_1$ では、どの道でも仕事は 1。**道によらない**力もある。

どんな力なら道によらないのかは、⑨で調べます。

② 名前の段：線積分の記号を読む

1 歩を細かくした先の値を、次のように書きます。物理の本（力-4）と同じ書き方です。

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \lim \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

「道 C にそって、力と 1 歩の矢印の内積をたし合わせた先」

これを、道 C にそった**線積分**（せんせきぶん）といいます。lim は、区切りを細かくした先、という意味です。

①名前の段　記号を読む：何を・どの道で・1 歩の量

1. **どの道で**：$\int$ の右下の C は、物が通った道です（英語の curve（曲線）の頭文字）。道には**向き**があります。はじめの点からおわりの点へ進みます。
2. **何を**：$\vec{F}$ は、場所ごとにちがう力（ベクトル場、8-5）です。
3. **1 歩の量**：$\mathrm{d}\vec{r}$ は、とても小さな 1 歩の移動の矢印です。$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ は、その 1 歩の仕事（内積）です。

道の上の場所は、「はじめから何 m 進んだ所か」や「何秒後の場所か」のように、1 つの数で決まります。だから $\int$ は 1 つです（8-6 の「$\int$ の数＝場所を表す数の数」）。

記号は「操作の名前」

8-6 の重積分と同じく、$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ は操作の**名前**です。C という名前と、$\mathrm{d}\vec{r}$ という矢印しか書いてないので、このままでは計算できません。ふつうの定積分に**直す**と、次のような形になります（どう直すかは④・⑥で）。

$$\underbrace{\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1 F_x(x,\ 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F_y(1,\ y)\,\mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}}$$

これは道 A の場合です。道が変われば、直した形も変わります。

たいせつ

- **線積分 $\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ は、「道 C を小さな 1 歩に分け、力と 1 歩の内積をたし、細かくした先」という操作の名前。**
- **道には向きがある。力によっては、同じ 2 点を結んでも、道によって値が変わる。**

手でわかる 表計算と、軸に平行な道 ★★★★

③ 表計算で、細かくしてたす

道が曲がっているときも、表計算で近い値が出せます。半径 1 m の円を、左回りに 1 周する道で、はてな？ の力 $\vec{F}_2$ の仕事を求めます。円を n 本の短い線分（弦）に分け、それぞれのまん中の点の力と、線分の矢印の内積をたします（物理の本の力-4 の Python と同じ方法）。

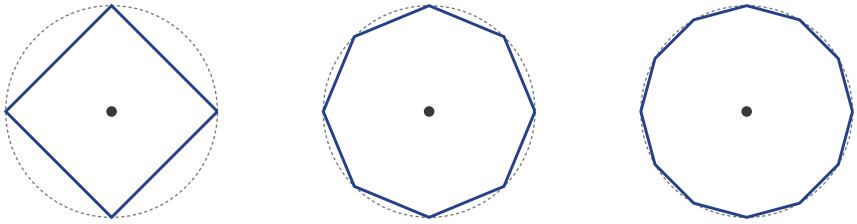


図 2　円（点線）を、n 本の線分（紺）に分ける。n を大きくすると、線分の道は円の道に近づく。

線分の数 n	4	8	12	100
仕事の合計（J）	4	5.657	6.000	6.279

表 3　n をふやすと、$2\pi \approx 6.283$ に近づく。物理の本の Python の答え 6.2791 は $n = 100$ のときの値。

n を大きくした先は 2π になります。このことは、⑥で、ふつうの定積分に直して確かめます。

Python でたす

同じ計算を Python で行うと、次のようになります（物理の本の力-4 と同じ方法）。円の上に $n + 1$ 個の点をとり、となりどうしの点を結ぶ線分のまん中の点と、線分の矢印を、配列でまとめて計算します。

Python

```
import numpy as np
n = 100
th = np.linspace(0, 2*np.pi, n+1)   # 円の上の n+1 個の点の角
x, y = np.cos(th), np.sin(th)
mx = (x[:-1] + x[1:]) / 2           # 線分のまん中の点
my = (y[:-1] + y[1:]) / 2
dx, dy = np.diff(x), np.diff(y)     # 1 歩の矢印（Δ x, Δ y）
W = np.sum(-my*dx + mx*dy)          # F2=(-y, x) との内積をたす
print(round(W, 4))
```

実行結果

```
6.2791
```

n = 1000 にすると 6.2832 になり、$2\pi = 6.28318\ldots$ にさらに近づきます。

4 直す段：軸に平行な道

道 A や道 B のように、道が「横だけ」「たてだけ」の線分でできているときは、ふつうの定積分にすぐ直せます。

②直す段 動く文字は 1 つだけ

右へ進む区間では、y は変わりません（$\mathrm{d}y = 0$）。だから 1 歩の仕事は次のとおりです。

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y \times 0 = F_x\,\mathrm{d}x$$

上へ進む区間では、x は変わらず（$\mathrm{d}x = 0$）、$F_y\,\mathrm{d}y$ です。

1. 道を、横の区間とたての区間に分ける。
2. 横の区間：y をその区間の値で止めて、F_x を x で積分する。
3. たての区間：x を止めて、F_y を y で積分する。
4. 範囲は「はじめの値から、おわりの値まで」。左や下へ進む区間では、下のはしの数が上のはしより大きくなる。
5. 区間ごとの答えをたす。

道 A（$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$）

$$\int_0^1 F_x(x,\ 0)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-0)\,\mathrm{d}x = 0$$

右へ：$y = 0$ に止める。
$F_x = -y = 0$

$$\int_0^1 F_y(1,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 1$$

上へ：$x = 1$ に止める。
$F_y = x = 1$

$$0 + 1 = 1$$

2 つの区間をたす

道 B（$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$）

$$\int_0^1 F_y(0,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 0\,\mathrm{d}y = 0$$

上へ：$x = 0$ に止める。
$F_y = x = 0$

$$\int_0^1 F_x(x,\ 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = -1$$

右へ：$y = 1$ に止める。
$F_x = -y = -1$

$$0 + (-1) = -1$$

2 つの区間をたす

表計算と同じ 1 と -1 が出ました。

逆向きに進むと、符号が変わる

道 A を逆に、$(1,\ 1)$ から $(1,\ 0)$ へ下り、$(0,\ 0)$ へ左に進むとします。下る区間は $\int_1^0 F_y(1,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_1^0 1\,\mathrm{d}y = -1$、左へ進む区間は $\int_1^0 0\,\mathrm{d}x = 0$ で、合計は -1 です。同じ道を逆向きに進むと、1 歩の矢印 $\mathrm{d}\vec{r}$ がすべて反対向きになるので、線積分の符号が変わります。だから、道の**向き**は、いつも書いておきます。

> **ここまでで十分**
>
> 道を小さな 1 歩に分けて、力と 1 歩の内積を表計算でたし、軸に平行な道なら、ふつうの定積分に直して計算できれば十分です。この先は、ななめ・曲線・円の道と、計算を楽にする方法です。

∂ 式でわかる 道の形ごとに、直し方を選ぶ ★★★★★

5 場合分けの表と流れ図

道がななめや曲線になると、x と y がいっしょに変わります。そのときは、道の上の場所を**1つの数**（たとえば時刻 t）で表して、ふつうの定積分1回に直します。どの数を使うかは、道の形で決まります。8-6 と同じく、「こんなときは、こう直す」を表にしました（記号 A〜K）。

場合分けの表 8-7 線積分：道の形で、どう直す？

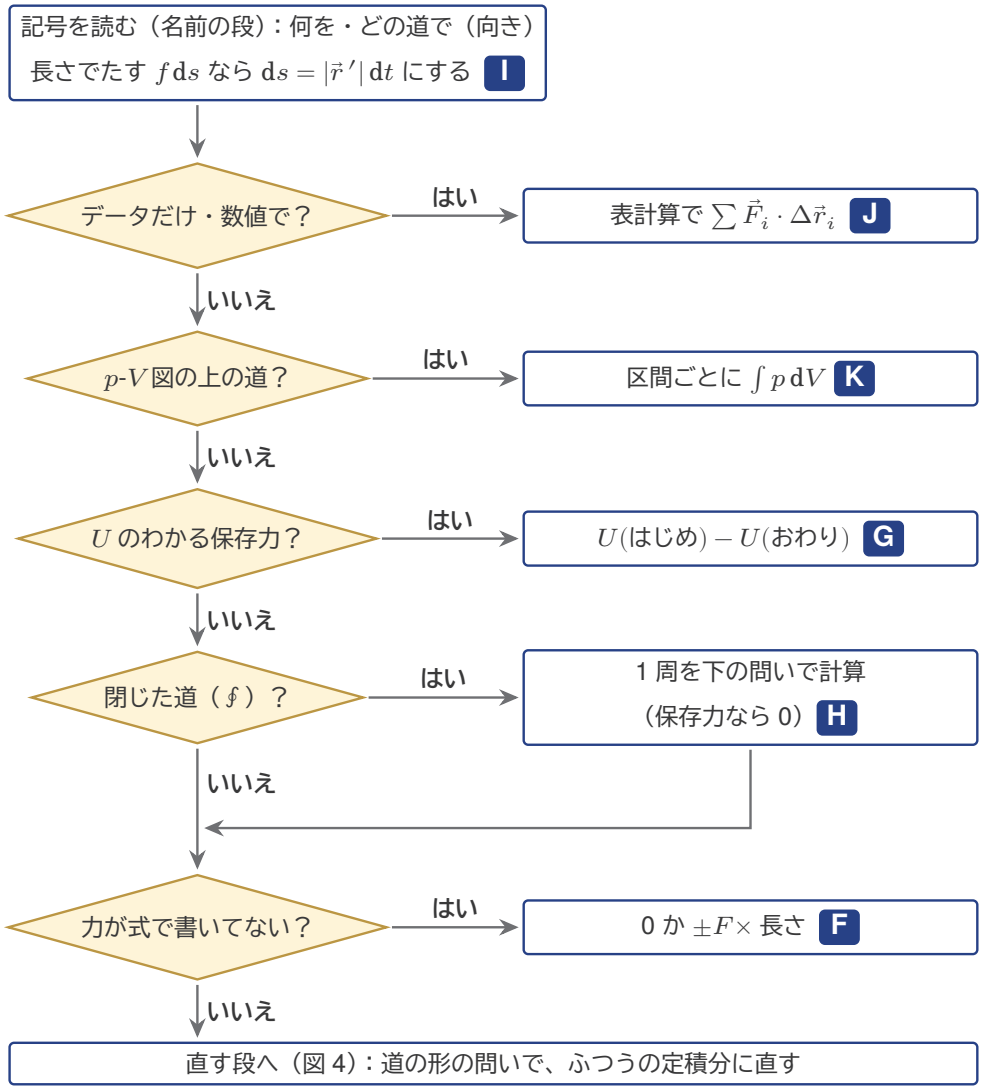
記号	こんなとき	手順（ふつうの定積分に直す）	例題
A	道が軸に平行な線分（横だけ・たてだけ）でできている	区間ごとに、動く文字は1つだけ。横は $F_x\,\mathrm{d}x$（y は止める）、たては $F_y\,\mathrm{d}y$（x は止める）	1・8
B	まっすぐななめの道（点 A から点 B へ）	$\vec{r}(t)=\vec{A}+t(\vec{B}-\vec{A})$、$0 \leqq t \leqq 1$。$\mathrm{d}\vec{r}=(\vec{B}-\vec{A})\,\mathrm{d}t$	2
C	道が $y=g(x)$ のグラフ	x を道の数にする。$\mathrm{d}\vec{r}=(1,\ g'(x))\,\mathrm{d}x$。$y$ には $g(x)$ を入れる	3
D	道が円・円弧	角 θ を道の数にする。$\vec{r}=(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$、$\mathrm{d}\vec{r}=(-R\sin\theta,\ R\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$	4・9

場合分けの表 8-7　（つづき）区間・長さ・楽をする場合

記号	こんなとき	手順	例題
E	ななめ・曲線のある折れ線	区間ごとに A〜D で計算して、たす。逆向きの区間は符号が変わる	5
I	長さでたす $\int_C f\,\mathrm{d}s$（向きのない量）	$\mathrm{d}s = \lvert\vec{r}\,'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$（三平方）。向きを逆にしても同じ値	9
F	力が式で書いてなく、大きさと向きで決まる（いつも道と直角、または同じ向き・反対向きで大きさ一定。摩擦力など）	内積を先に：直角なら 0。平行なら $\pm F\times$（道の長さ）	6
G	U のわかる保存力（$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$）	道によらない：U(はじめ) $-$ U(おわり)。楽な道に取りかえてもよい	7
H	閉じた道（$\oint$）	保存力なら 0。そうでなければ 1 周を F〜D の問いで計算（8-11 では「rot ×面積」）	4・5・8
J	データだけ、または数値で近い値を求める	表計算で $\sum \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$（まん中の点で）	10
K	状態の図（p-V 図）の上の道	$\int p\,\mathrm{d}V$ も道にそってたす。区間ごとに A	11

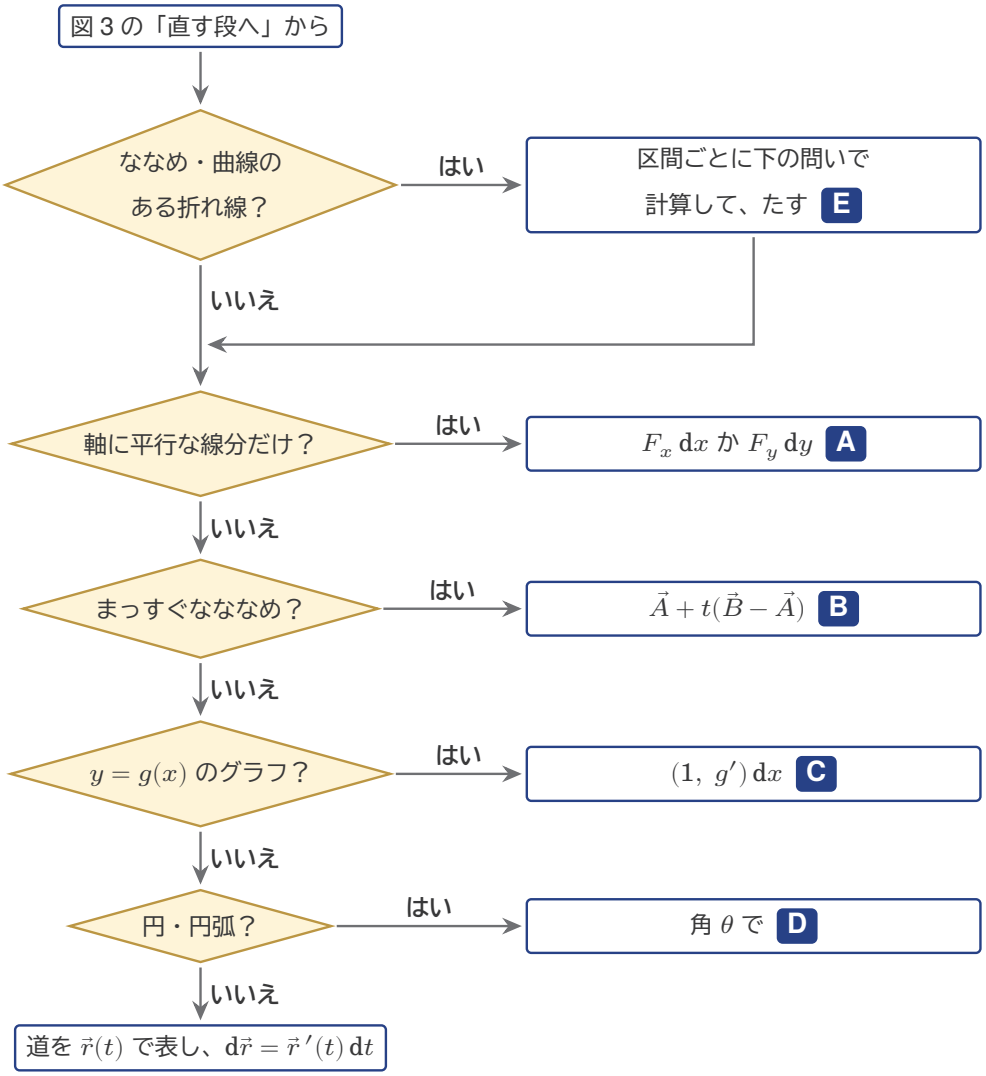
A〜E と I が②の**直す段**、F・G・H・J・K が③の**楽をする段**です（K は物理で使う形で、区間ごとの直し方は A と同じ）。どの順で問えばよいかを、2 つの流れ図にしました。先に楽をする段の問い（図 3）、そのあとに直す段の道の形

の問い（図 4）をたどります。長さでたす積分（I）でも、道の形の問い（A〜E）は同じです。



確かめ（答えが出たら）：逆向きで符号が変わるか。保存力なら、別の道で同じか

図 3 線積分の流れ図（1）楽をする段。ひし形は問い、四角はすること。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ進む。H の四角からは、矢印の先の問いへ。



確かめ（答えが出たら）：逆向きで符号が変わるか。保存力なら、別の道で同じか

図 4　線積分の流れ図（2）直す段。図 3 の「直す段へ」から、道の形の問いで直し方を選ぶ。E の四角からは、矢印の先の問いへ。

流れ図の使い方：道 B

はてな？ の力 $\vec{F}_2$ で、道 B の線積分をたどります。

1. 名前の段：何を＝ $\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}$、道＝道 B（$(0,\ 0)\to(0,\ 1)\to(1,\ 1)$）。
2. データだけ・数値で？ いいえ。p-V 図の上の道？ いいえ。U のわかる保存力？ いいえ（$\vec{F}_2$ は道で値が変わった。表 2）。

3 閉じた道？ いいえ。力が式で書いてない？ いいえ（式 $(-y,\ x)$ で書いてある）。「直す段へ」から図 4 へ。

4 ななめ・曲線のある折れ線？ いいえ。軸に平行な線分だけ？ はい。

こうして場合 A に決まります。④でしたとおりです。1 回で全部の場合を覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどって確かめましょう。

どの場合かな？

次の線積分は、場合分けの表 8-7 のどの場合でしょう。流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1 原点から $(2,\ 0)$ を通って $(2,\ 3)$ まで、$\vec{F} = (x,\ y^2)$

答え：A。軸に平行な線分だけ。

2 $(1,\ 1)$ から $(3,\ 2)$ へまっすぐ、$\vec{F} = (y,\ x^2)$

答え：B。まっすぐななめ。

3 ばねの力（$U = \frac{1}{2}kx^2$）が、$x = 0.1$ から $x = 0.3$ までにする仕事

答え：G。U のわかる保存力。

4 机の上で物をおして 1 周させるときの、動摩擦力の仕事

答え：H→F。閉じた道で、摩擦力は式で書いてなく、大きさと向きで決まる。

5 道の上の 10 か所ではかった力のデータから仕事を出す

答え：J。データだけ。

6 直す段：道を 1 つの数 t で表す

道がななめや曲線のときは、道の上の場所を、1 つの数 t で表します。t は「道を歩く人の時刻」と思ってかまいません。時刻 t に場所 $\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t))$ にいて、$t = a$ ではじめの点、$t = b$ でおわりの点に着くとします。

② 直す段　1 歩の矢印は $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$

短い時間 $\mathrm{d}t$ の間に動く矢印は、ほぼ「速度×時間」です（5-8 の近似）。速度は位置の矢印を微分したもの $\vec{r}\,'(t) = (x'(t),\ y'(t))$ なので、

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\underbrace{\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

右辺は、t だけの関数を a から b まで積分する、ふつうの定積分です。手順は次の 4 つです。

1. 道を $\vec{r}(t)$ で表し、はじめとおわりの t を決める。
2. $\vec{r}\,'(t)$ を計算する（成分ごとに t で微分）。
3. $\vec{F}$ の $x\cdot y$ に、$x(t)\cdot y(t)$ を入れる（$\vec{F}$ を t の式にする）。
4. 内積 $\vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t)$ を計算し、t で a から b まで積分する。

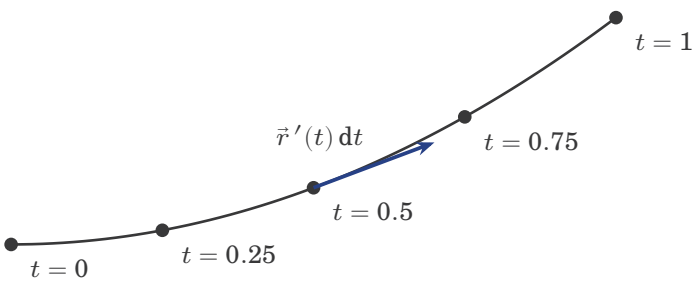


図 5　道の上の場所に、時刻 t の目もりをつける。時刻 t の所から短い時間 $\mathrm{d}t$ に動く矢印は、速度 $\vec{r}\,'(t)$ に $\mathrm{d}t$ をかけたもの。

場合 B：まっすぐななめの道

点 $\vec{A}$ から点 $\vec{B}$ へまっすぐ進む道は、4-11 の「まっすぐ一定の速さで進む点」と同じで、

$$\vec{r}(t) = \vec{A} + t(\vec{B}-\vec{A})\quad (0 \leqq t \leqq 1),\qquad \vec{r}\,'(t) = \vec{B}-\vec{A}$$

です。$t=0$ で $\vec{A}$、$t=1$ で $\vec{B}$ に着きます。はてな？ のななめの道（$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$）は $\vec{r}(t)=(t,\ t)$、$\vec{r}\,'(t)=(1,\ 1)$ です。$\vec{F_2}=(-y,\ x)$ に $x=t$、$y=t$ を入れると $(-t,\ t)$ で、内積は $-t\times 1+t\times 1=0$。だから仕事は 0 です（表 2 と同じ）。

場合 C：道が $y=g(x)$ のグラフ

道がグラフ $y=g(x)$ のときは、x そのものを道の数にすると楽です（t のかわりに x）。

$$\vec{r}(x)=(x,\ g(x))、\qquad \mathrm{d}\vec{r}=(1,\ g'(x))\,\mathrm{d}x$$

大事なのは、$\vec{F}$ の中の y に、$g(x)$ を入れることです。y を残したまま x で積分してはいけません（まちがえやすいところ③）。

場合 D：道が円・円弧

半径 R の円の上の場所は、角 θ を使って $\vec{r}(\theta)=(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$ と書けます（4-15）。θ で微分すると、

$$\mathrm{d}\vec{r}=(-R\sin\theta,\ R\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

です。この矢印は、位置の矢印 $(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$ を左に 90° 回した向きで、円の接線の向きです（内積が $-R^2\cos\theta\sin\theta+R^2\sin\theta\cos\theta=0$ で、直角）。長さは $R\,\mathrm{d}\theta$ で、4-2 の弧の長さです。

③の答えを確かめる：円を 1 周

半径 1 の円を左回りに 1 周（θ が 0 から 2π）する道で、$\vec{F_2}=(-y,\ x)$ の線積分を求めます。

$$\vec{F_2}=(-\sin\theta,\ \cos\theta) \qquad x=\cos\theta、y=\sin\theta \text{ を入れる}$$

$$\vec{F_2}\cdot\vec{r}\,'=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \vec{r}\,'=(-\sin\theta,\ \cos\theta) \text{ との内積}$$

$$\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta=2\pi \qquad \text{ふつうの定積分}$$

表 3 の値が近づいていった先は、$2\pi \approx 6.283$ でした。$\vec{F}_2$ は、どこでも道と同じ向き（円の接線の向き）を向いていて、大きさは 1 です。だから、仕事は「1 ×円周の長さ 2π」になります（これは⑨の場合 F の考え方でもあります）。

⑦ 向きと、区間に分ける道

道 C を逆向きに進む道を $-C$ と書くと、

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

です。1 歩の矢印がすべて反対向きになるからです。t で表した積分なら、はじめとおわりの t を入れかえることになり、ふつうの定積分の性質 $\int_b^a = -\int_a^b$（5-11）からも同じことがわかります。

場合 E：折れ線は、区間ごとに直してたす

道がいくつかの区間（線分・曲線）をつないだものなら、区間ごとに A〜D で直して、たします。重積分の場合 F（形の和）と同じ考えです。区間ごとに向きを確かめます。たとえば、道 A で $(1,\ 1)$ まで行き、ななめの道を通って原点へもどる三角形の道では、もどる区間は「ななめの道を逆向き」なので、ななめの道の値の符号を変えたものになります（例題 5）。

⑧ 長さでたす線積分：場合 I

道にそってたす量が、力のような矢印ではなく、ただの数のこともあります。たとえば、太さがちがう針金の質量は、「1 m あたりの質量 λ × 1 歩の長さ」をたしたものです。これを

$$\int_{C} \lambda \,\mathrm{d}s \qquad (\mathrm{d}s：1\text{ 歩の長さ})$$

と書きます（s は道にそった長さの文字。4-2 の弧の長さ $s = r\theta$ と同じ）。1 歩の長さは、1 歩の矢印 $\mathrm{d}\vec{r} = (x'\,\mathrm{d}t,\ y'\,\mathrm{d}t)$ の長さなので、三平方の定理（4-4）から

$$\mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

です。円なら $|\vec{r}\,'(\theta)| = \sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta} = R$ なので、$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$ です。

長さでたす線積分は、道を逆向きに進んでも値は変わりません。1 歩の長さは、向きを変えても正のままだからです。矢印でたす $\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ との大きなちがいです。$\lambda = 1$ なら、$\int_C \mathrm{d}s$ は道の長さそのものです。

9 楽をする段：直角・平行、保存力、閉じた道

③楽をする段 **計算する前に、楽な道をさがす**

場合 F：力が道と直角・平行

- 力が道といつも直角なら、どの 1 歩も内積が 0 なので、仕事は 0 です。円運動をする物を中心へ引く力（向心力）は、いつも道と直角なので、仕事をしません。
- 力がいつも道と同じ向きで大きさ F が一定なら、仕事は $F\times$（道の長さ）。反対向きなら $-F\times$（道の長さ）。床の上をすべらせる物にはたらく動摩擦力は、大きさ $\mu' N$ で、いつも動く向きと反対なので、仕事は $-\mu' N\times$（道の長さ）です。遠回りするほど、摩擦の仕事は大きく負になります（物理 力-4）。

場合 G：保存力なら、はじめとおわりだけで決まる

8-4 で、位置エネルギー U から力が $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$ と作れる場合を学びました。このような力を**保存力**（ほぞんりょく）といいます。保存力の線積分は、道によらず、はじめとおわりの U だけで決まります。

$$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = U(\text{はじめ}) - U(\text{おわり})$$

（$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$ のとき）

なぜか：道を $\vec{r}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で表し、歩く人が感じる U の変わる速さを、8-3 の連鎖律で計算します。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x(t),\ y(t)) = \frac{\partial U}{\partial x}x' + \frac{\partial U}{\partial y}y' \qquad \text{8-3 の連鎖律}$$

$$= \mathbf{grad}\, U \cdot \vec{r}\,'(t) = -\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t) \qquad \text{内積の形。} \mathbf{grad}\, U = -\vec{F}$$

$$\int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}\,' \,\mathrm{d}t = -\Big[\, U(\vec{r}(t)) \,\Big]_a^b \qquad -U \text{ を微分すると } \vec{F} \cdot \vec{r}\,' \text{（5-11）}$$

$$= U(\text{はじめ}) - U(\text{おわり}) \qquad t = a \text{ ではじめ、} t = b \text{ でおわり}$$

$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ は、$U = -xy$ とすると $-\mathbf{grad}\, U = -(-y,\ -x) = (y,\ x)$ なので、保存力です。$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$ への仕事は、次のとおりです。

$$U(0,\ 0) - U(1,\ 1) = 0 - (-1) = 1$$

表 2 で、どの道でも 1 になったのは、このためです。重力も保存力で（$U = mgz$）、主役の山の $(30,\ 20)$（83 m）から頂上（100 m）まで、50 kg の人がゆっくり登るときの仕事は、どの道でも 8330 J です（例題 7）。

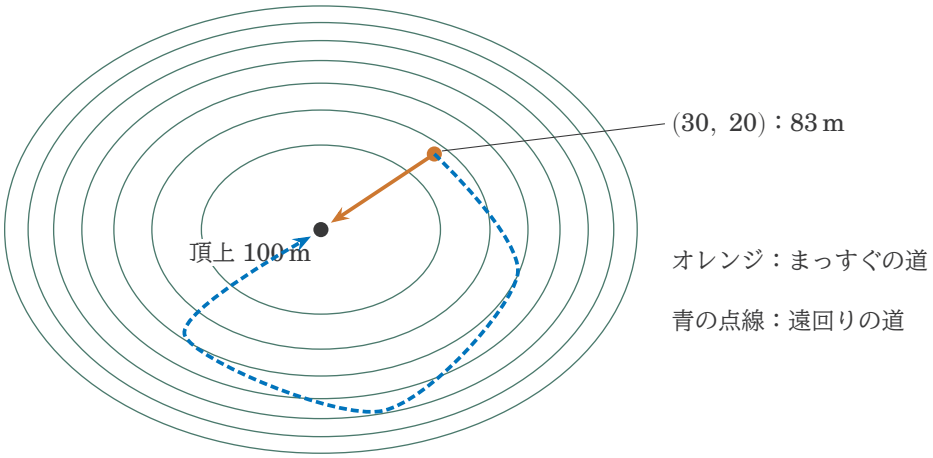


図 6　主役の山を登る 2 つの道。重力は保存力なので、どちらの道でも、重力に逆らってする仕事は $mg \times (100 - 83)$ で同じ。遠回りすると、坂がゆるやかになって必要な力は小さくなるが、進む距離が長くなる。

はてな？の答え

はてな？の力 $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ では、仕事は道によって変わります（道 A 1 J、道 B -1 J、ななめ 0 J）。$\vec{F}_2$ は保存力ではないからです。いっぽう、重力や $\vec{F}_1$ のような保存力では、遠回りしても仕事は変わりません。

どんな力が保存力かは、平面の力なら $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ が 0 かどうかで見分けられます（すきまのない広がりの中なら。8-10 の rot）。$\vec{F}_1$ は $1-1=0$、$\vec{F}_2$ は $1-(-1)=2$ です。

場合 H：閉じた道 $\oint$

はじめの点とおわりの点が同じで、1 周してもどる道を**閉じた道**といい、線積分を次のように書きます（**周回積分**。しゅうかいせきぶん）。

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$\oint$ の◯は「道が閉じている（1 周してもとにもどる）」という印です。円の形の道という意味ではありません。正方形でも三角形でも、閉じていれば $\oint$ です。どの道かは、右下の C が決めます。

- 保存力なら、はじめとおわりが同じなので、$U(\text{はじめ}) - U(\text{はじめ})$ で、$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$。
- 保存力でなければ、0 とはかぎりません。$\vec{F}_2$ で、1 辺 1 の正方形を左回りに 1 周すると 2、半径 1 の円では 2π です。どちらも「2 ×囲んだ面積」になっています。このことは、8-11 のストークスの定理（グリーンの定理）で、「rot の値×面積」として学びます。

⑩ 場合 K：状態の図の上の道

線積分の「道」は、地図の上の道だけではありません。シリンダーの中の気体の、体積 V を横、圧力 p をたてにとった図（p-V 図）を考えます。気体の状態は、この図の上の点で表され、状態が変わると点が動いて道をえがきます。気体が外にする仕事は、5-12 と同じく $\int p\,\mathrm{d}V$ で、これも道にそってたす積分です。

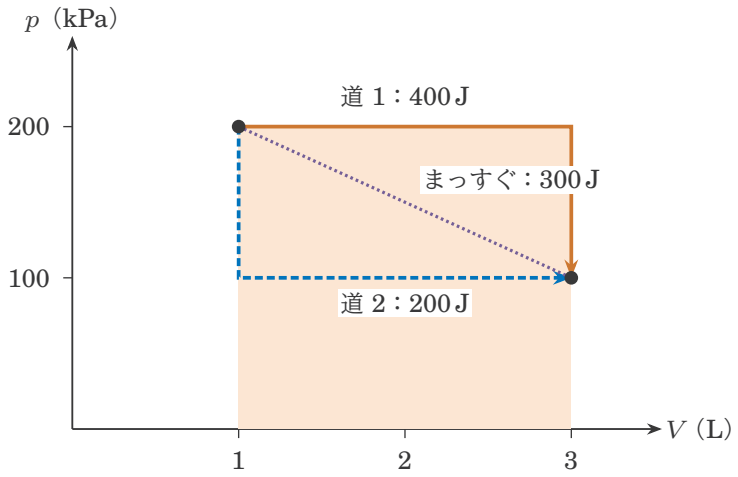


図 7　p-V 図の上の 3 つの道。どれも 1 L・200 kPa の状態から 3 L・100 kPa の状態へ。気体がする仕事 $\int p\,\mathrm{d}V$ は、道の下の面積で、道によって変わる（例題 11）。

道 1 は、圧力 200 kPa のまま 1 L から 3 L にふくらみ、そのあと体積を変えずに圧力を下げます。体積が変わらない区間は $\mathrm{d}V = 0$ なので、仕事は 0。だから道 1 の仕事は $200 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 400\,\mathrm{J}$ です（場合 A と同じく、区間ごとに動く文字は 1 つ）。道 2 は先に圧力を下げるので 200 J、まっすぐの道は 300 J です。気体がする仕事は、同じ 2 つの状態を結んでも道によって変わります。物理の熱力学（熱-2）では、このことから「仕事や熱は道によって変わるが、内部エネルギーは状態だけで決まる」ことを学びます。

せいかくに言うと

道の表し方を変えても、答えは同じ

同じ道を、別の数で表してもかまいません。たとえば、ななめの道（$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$）を、$\vec{r}(u) = (u^2,\ u^2)$（$0 \leqq u \leqq 1$）と表すと、$\vec{r}\,'(u) = (2u,\ 2u)$ です。$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ では

$$\int_0^1 (u^2,\ u^2) \cdot (2u,\ 2u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 4u^3\,\mathrm{d}u = 1$$

で、$\vec{r}(t) = (t,\ t)$ で計算した 1 と同じです。歩く速さを変えても、1 歩の矢印 $\vec{r}\,'\,\mathrm{d}t$ の中で、速さと時間の変化が打ち消し合うからです（5-16 の置換積分）。ただし、はじめとおわりを入れかえると、符号が変わります。

もっと知りたい ★★★★★

道を選んで、積分をいちばん小さくする（変分法の入口）

この章では、道を決めてから線積分を計算しました。反対に、「線積分がいちばん小さくなる道はどれか」を求める問題もあります。たとえば、2点を結ぶ道の長さ $\int_C \mathrm{d}s$ がいちばん小さいのは、まっすぐな線分です。両はしを持ってつり下げた鎖（長さは決まっている）は、位置エネルギー（$\int_C \lambda g y \,\mathrm{d}s$）がいちばん小さくなる形になり、その形は 6-11 で出てきた懸垂線です。光は、かかる時間がいちばん短い道を進みます（フェルマーの原理）。このような問題をあつかう数学を**変分法**（へんぶんほう）といい、そのための式を**オイラー・ラグランジュ方程式**といいます。物理の本（波-3）で使います。

専門書をのぞいてみよう　線積分の専門書ふうの書き方

曲線 $C:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\ (a\le t\le b)$ に沿うベクトル場 $\mathbf{F}$ の線積分を $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$ で定める．平面では $\displaystyle\int_C P\,dx+Q\,dy$ とも書く．$\mathbf{F}=\nabla\phi$ ならば $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\phi(\mathbf{r}(b))-\phi(\mathbf{r}(a))$.

訳　太字の $\mathbf{F}$・$\mathbf{r}$ は、この本の矢印の $\vec{F}$・$\vec{r}$。「沿う」は「そって」。$P\,dx+Q\,dy$ は $F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y$ のこと（$P=F_x$、$Q=F_y$）。数学の本では、$\mathbf{F}=\nabla\phi$（$+$ の符号）と書くことが多く、そのとき答えは「おわり－はじめ」になる。物理の本は $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,U$（$-$ の符号）なので「はじめ－おわり」。符号のつけ方がちがうだけで、同じこと。物理の本では $\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ のように $\mathrm{d}\vec{l}$ や $\mathrm{d}\vec{s}$ と書くこともある。

たいせつ

線積分の 3 つの段

名前　**記号を読む：何を（$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ か $f\,\mathrm{d}s$）・どの道で（C と向き）**

楽をする　**直す前に：データ・数値？　p-V 図？　U のわかる保存力？**
閉じた道？　力が式でない？

直す　**道を 1 つの数で表し、$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$ で、ふつうの定積分 1 回**

$$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$$

場合分けの表 8-7（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	軸に平行	$F_x\,\mathrm{d}x$ か $F_y\,\mathrm{d}y$（もう 1 つは止める）
B	まっすぐななな め	$\vec{A}+t(\vec{B}-\vec{A})$、$0\leqq t\leqq 1$
C	$y=g(x)$	$(1,\ g'(x))\,\mathrm{d}x$、y に $g(x)$ を入れる
D	円・円弧	$(-R\sin\theta,\ R\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$
E	折れ線	区間ごとにたす。逆向きは符号が変わる
F	力が式で書いてない	0 か $\pm F\times$ 長さ
G	保存力	U(はじめ) $-$ U(おわり)
H	閉じた道 $\oint$	保存力なら 0
I	長さでたす	$\mathrm{d}s=\lvert\vec{r}\,'\rvert\,\mathrm{d}t$。向きによらない
J	データだけ・数値で	表計算で $\sum\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$
K	p-V 図	区間ごとに $\int p\,\mathrm{d}V$

この章で出てきたことば

線積分　道を小さな 1 歩に分け、「力と 1 歩の矢印の内積」（または「量× 1 歩の長さ」）をたし、細かくした先。操作の名前。

閉じた道　はじめとおわりが同じ道。線積分は $\oint$ で書く。○は「閉じている」という印。

保存力　$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ と書ける力。仕事は道によらず、U(はじめ) $-$ U(おわり)。閉じた道では 0。

$\mathrm{d}s$　道にそった 1 歩の長さ。$\mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t$。

p-V 図　気体の体積を横、圧力をたてにとった図。仕事 $\int p\,\mathrm{d}V$ は道で変わる。

記号カード　初めて出た章 **8-7**

$$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

読み方　インテグラル・シー、エフ・ドット・ディーアール
意味　道 C にそって、力と 1 歩の矢印の内積をたした先（線積分）。道には向きがある
英語　line integral

記号カード　初めて出た章 **8-7**

$$\oint_C$$

読み方　周回積分（しゅうかいせきぶん）
意味　閉じた道 C を 1 周する線積分。○は「閉じている」印で、円の形の意味ではない
英語　closed line integral (circulation)

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 8-7 のどの場合かを書きました。力の単位は N、長さの単位は m、仕事の単位は J です。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜11 を、図 3・図 4 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」。力が 2 つある例題は $\vec{F}_2$ で）。どれも、考え方の 1 行めの場合に着きます。じぶんでとこうも同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	軸に平行な道	軸に平行な線分だけ？	A
2	ななめの道	まっすぐななめ？	B
3	放物線の道	$y = g(x)$ のグラフ？	C
4	円を 1 周	閉じた道？ → 円・円弧？	H D
5	三角形の道	閉じた道？ → ななめ・曲線のある折れ線？（区間ごとに A・A・B）	H E
6	摩擦力	力が式で書いてない？	F
7	保存力	U のわかる保存力？	G
8	正方形の 1 周	閉じた道？ → 軸に平行な線分だけ？	H A
9	半円の針金	名前の段で $f\,\mathrm{d}s$（I）→ 円・円弧？	I D
10	表計算で円	データだけ・数値で？	J
11	p-V 図	p-V 図の上の道？	K

表 4　例題 1〜11 の流れ図の道すじ。

例題 1〜5・8 の $\vec{F}_1$ は保存力ですが、問題に U が書いていないので、道ごとに計算して「道によらない」ことを確かめます（あとから G で確かめられる）。

例題を読む前に、表の「はい」と答えた問いを、図 3・図 4 の上で指でたどってみましょう。考え方の 1 行めの「場合」と同じ札に着けば、その例題で使う直し方が先にわかります。

例題 1　軸に平行な道

力 $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ について、道 A（$(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1)$）と道 B（$(0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (1,\ 1)$）の線積分を、それぞれ求めましょう。

考え方　**場合：**道が横とたての線分（表 8-7 の **A**）

名前　$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$：道にそって、力と 1 歩の内積をたす。

直す　横の区間は $F_x\,\mathrm{d}x$（y を止める）、たての区間は $F_y\,\mathrm{d}y$（x を止める）。

式　$\vec{F}_2$、道 A：$\int_0^1 (-0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 0 + 1 = 1$

（右へは $y = 0$ で $F_x = 0$。上へは $x = 1$ で $F_y = 1$）

$\vec{F}_2$、道 B：$\int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = 0 - 1 = -1$

（上へは $x = 0$ で $F_y = 0$。右へは $y = 1$ で $F_x = -1$）

$\vec{F}_1$、道 A：$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 1$　（$F_x = y = 0$、$F_y = x = 1$）

$\vec{F}_1$、道 B：$\int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$　（$F_y = x = 0$、$F_x = y = 1$）

答え　$\vec{F}_2$：道 A 1 J、道 B -1 J。$\vec{F}_1$：どちらも 1 J

じぶんでとこう 1

力 $\vec{F}_3 = (2x,\ 2y)$ と $\vec{F}_4 = (y,\ -x)$ について、道 A と道 B の線積分を、それぞれ求めましょう。

例題 2　まっすぐななななめの道

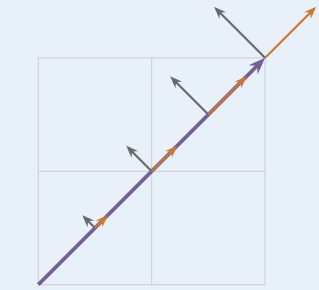
原点 $(0,\ 0)$ から点 $(1,\ 1)$ へまっすぐ進む道で、次の 2 つの力の線積分を求めましょう。

$$\vec{F}_1 = (y,\ x),\quad \vec{F}_2 = (-y,\ x)$$

考え方　**場合：**まっすぐななななめの道（表 8-7 の B）

名前　ななめの道にそって、力と 1 歩の内積をたす。

直す　$\vec{r}(t) = (0,\ 0) + t(1,\ 1) = (t,\ t)$、$0 \leqq t \leqq 1$、$\vec{r}\,'(t) = (1,\ 1)$。



灰色：$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$（道と直角）

オレンジ：$\vec{F}_1 = (y,\ x)$（道と同じ向き）

式　$\vec{F}_1(\vec{r}(t)) = (t,\ t)$、内積 $(t,\ t)\cdot(1,\ 1) = 2t$

$$\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = \Big[\,t^2\,\Big]_0^1 = 1$$

$\vec{F}_2(\vec{r}(t)) = (-t,\ t)$、内積 $(-t,\ t)\cdot(1,\ 1) = 0$

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$$

答え　$\vec{F}_1$：1 J、$\vec{F}_2$：0 J（$\vec{F}_2$ は、この道の上ではいつも道と直角）

じぶんでとこう 2

点 $(1,\ 0)$ から点 $(0,\ 1)$ へまっすぐ進む道で、$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ と $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

例題 3　放物線の道

原点から点 $(1,\ 1)$ へ、放物線 $y = x^2$ にそって進む道で、$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ と $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

考え方　**場合：**道が $y = g(x)$ のグラフ（表 8-7 の **C**）

名前　放物線にそって、力と 1 歩の内積をたす。

直す　x を道の数にする：$\vec{r} = (x,\ x^2)$、$\mathrm{d}\vec{r} = (1,\ 2x)\,\mathrm{d}x$、$0 \leqq x \leqq 1$。$y$ には x^2 を入れる。

式　$\vec{F}_1 = (x^2,\ x)$、内積 $x^2 \times 1 + x \times 2x = 3x^2$

$$\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x = \Big[x^3\Big]_0^1 = 1$$

$\vec{F}_2 = (-x^2,\ x)$、内積 $-x^2 + x \times 2x = x^2$

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

答え　$\vec{F}_1$：1 J（ほかの道と同じ）、$\vec{F}_2$：$\dfrac{1}{3}$ J

じぶんでとこう 3

原点から点 $(1,\ 1)$ へ、曲線 $y = x^3$ にそって進む道で、$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ と $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

例題 4　円を 1 周する道

中心が原点、半径 3 の円を、点 $(3,\ 0)$ から左回りに 1 周する道で、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

考え方　**場合：**閉じた道で、道が円（表 8-7 の **H** と **D**）

名前　円にそって 1 周、力と 1 歩の内積をたす（閉じた道なので $\oint$ と書く）。

直す　$\vec{r} = (3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$、$\mathrm{d}\vec{r} = (-3\sin\theta,\ 3\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$、$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$。

式　$\vec{F}_2 = (-3\sin\theta,\ 3\cos\theta)$、内積 $9\sin^2\theta + 9\cos^2\theta = 9$

$$\int_0^{2\pi} 9\,\mathrm{d}\theta = 18\pi \approx 56.5$$

$\vec{F}_1 = (3\sin\theta,\ 3\cos\theta)$、内積 $-9\sin^2\theta + 9\cos^2\theta = 9\cos 2\theta$

$$\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{9}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

答え　$\vec{F}_2$：18π（$= 2\times$ 円の面積 9π）、$\vec{F}_1$：0（保存力なので 1 周で 0）

じぶんでとこう 4

中心が原点、半径 2 の円を左回りに 1 周する道で、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

例題 5　折れ線の道（三角形）

道 A で $(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1)$ と進み、ななめの線分を通って $(0,\ 0)$ へもどる三角形の道で、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

考え方　**場合：**閉じた道で、ななめの区間もある折れ線（表 8-7 の **H** と **E**）

名前　3 つの区間をつないだ閉じた道。区間ごとに直してたす。

直す　横・たての区間は A、ななめの区間は B。もどる区間は例題 2 の道の逆向きなので、符号を変える。

式　$\vec{F}_2$：道 A の部分は例題 1 より 1。もどる区間は例題 2 の 0 の逆で 0

合計 $1 + 0 = 1$

$\vec{F}_1$：道 A の部分は 1。もどる区間は例題 2 の 1 の逆で -1

合計 $1 + (-1) = 0$

答え　$\vec{F}_2$：1、$\vec{F}_1$：0

じぶんでとこう 5

道 B で $(0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (1,\ 1)$ と進み、ななめの線分を通って $(0,\ 0)$ へもどる三角形の道で、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と $\vec{F}_1 = (y,\ x)$ の線積分を求めましょう。

例題 6　摩擦力の仕事

質量 10 kg の箱を、床の上で点 P から点 Q まで、すべらせて動かします。動摩擦係数は $\mu' = 0.3$ です。(1) P から Q までまっすぐ 5 m 動かすとき、(2) 横に 3 m、たてに 4 m の L 字の道で動かすとき、動摩擦力がする仕事をそれぞれ求めましょう（重力加速度 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

考え方　**場合：**力が式で書いてなく、いつも道と反対向きで大きさ一定（表 8-7 の **F**）

名前　道にそって、摩擦力と 1 歩の内積をたす。

楽をする　摩擦力はいつも動く向きと反対で大きさ一定。内積は −（力の大きさ）×（1 歩の長さ）。

式　床が箱をおし返す力（垂直抗力）N〔N〕は $10 \times 9.8 = 98$

動摩擦力の大きさ $\mu' N = 0.3 \times 98 = 29.4\,\mathrm{N}$

(1) $-29.4 \times 5 = -147$

(2) 道の長さ $3 + 4 = 7\,\mathrm{m}$、$-29.4 \times 7 = -205.8$

答え　(1) $-147\,\mathrm{J}$　(2) 約 $-206\,\mathrm{J}$（遠回りすると、摩擦の仕事は大きく負になる）

じぶんでとこう 6

質量 5 kg の箱を、床の上で、(1) 直径 4 m の半円の道、(2) その直径にそったまっすぐな道で動かします。動摩擦係数 $\mu' = 0.4$ のとき、動摩擦力がする仕事をそれぞれ求めましょう（重力加速度 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

例題 7　保存力の仕事

(1) 質量 50 kg の人が、主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$〔m〕の点 $(30,\ 20)$ から頂上までゆっくり登ります。重力がする仕事と、人がする仕事を求めましょう（重力加速度 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

(2) $\vec{F_1} = (y,\ x)$（$U = -xy$）が、点 $(1,\ 2)$ から点 $(3,\ 1)$ まで、どんな道で動かしたときもする仕事を求めましょう。

考え方　**場合：**U のわかる保存力（表 8-7 の G）

名前　道にそって、力と 1 歩の内積をたす（道はわからなくてよい）。

楽をする　保存力なので $U(\text{はじめ}) - U(\text{おわり})$。重力は $U = mgz$、$\vec{F_1}$ は $U = -xy$。

式　(1) はじめの高さ $h(30,\ 20) = 100 - 9 - 8 = 83\,\mathrm{m}$、おわり $100\,\mathrm{m}$

重力の仕事

$= mg \times 83 - mg \times 100 = 50 \times 9.8 \times (83 - 100) = -8330$

人の仕事は、重力に逆らうので $+8330$

(2) $U(1,\ 2) - U(3,\ 1) = (-1 \times 2) - (-3 \times 1) = -2 + 3 = 1$

答え　(1) 重力 $-8330\,\mathrm{J}$、人 $8330\,\mathrm{J}$（どの道でも同じ）　(2) $1\,\mathrm{J}$

じぶんでとこう 7

(1) 質量 2 kg の玉が、高さ 5 m の所から、曲がった坂をころがって地面まで下ります。重力がする仕事を求めましょう（重力加速度 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

(2) $\vec{F_1} = (y,\ x)$（$U = -xy$）が、点 $(0,\ 2)$ から点 $(2,\ 3)$ まで動かしたときにする仕事を求めましょう。

例題 8　閉じた道の線積分

1 辺 1 の正方形の道 $(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1) \to (0,\ 1) \to (0,\ 0)$（左回り）で、$\oint \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ と $\oint \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ を求めましょう（$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$、$\vec{F}_1 = (y,\ x)$）。

考え方　**場合：**閉じた道で、軸に平行な線分だけ（表 8-7 の **H** と **A**）

名前　正方形を 1 周して、力と 1 歩の内積をたす。

楽をする　$\vec{F}_1$ は保存力なので、1 周で 0。$\vec{F}_2$ は保存力でないので、区間に分ける（A）。

直す　下の辺（右へ、$y = 0$）、右の辺（上へ、$x = 1$）、上の辺（左へ、$y = 1$）、左の辺（下へ、$x = 0$）。

式　下の辺：$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$　（$F_x = -y = 0$）

右の辺：$\int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 1$　（$F_y = x = 1$）

上の辺：$\int_1^0 (-1)\,\mathrm{d}x = 1$　（$F_x = -1$、左へ進むので 1 から 0 まで）

左の辺：$\int_1^0 0\,\mathrm{d}y = 0$　（$F_y = x = 0$）

合計 $0 + 1 + 1 + 0 = 2$

答え　$\oint \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2$（$= 2\times$ 面積 1）、$\oint \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

じぶんでとこう 8

1 辺 2 の正方形の道 $(0,\ 0) \to (2,\ 0) \to (2,\ 2) \to (0,\ 2) \to (0,\ 0)$ で、$\oint \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ と $\oint \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ を求めましょう。

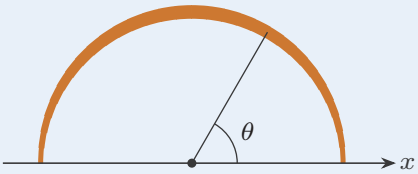
例題 9　半円の針金の質量

半径 0.5 m の半円の形の針金（θ が 0 から π）があります。角 θ の所の 1 m あたりの質量は $\lambda = 2 + \sin\theta$〔kg/m〕です。針金の質量を求めましょう。

考え方　**場合：**長さでたす（向きのない量）で、道が円（表 8-7 の **I** と **D**）

名前　$\int_C \lambda\,\mathrm{d}s$：針金にそって「$\lambda \times 1$ 歩の長さ」をたす。

直す　円なので $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta = 0.5\,\mathrm{d}\theta$、$0 \leqq \theta \leqq \pi$。



太いほど重い：$\lambda = 2 + \sin\theta$

まん中（$\theta = 90°$）が 3 kg/m、両はしが 2 kg/m

式　$\displaystyle\int_0^{\pi} (2 + \sin\theta) \times 0.5\,\mathrm{d}\theta = 0.5\Big[2\theta - \cos\theta\Big]_0^{\pi}$

$= 0.5 \times ((2\pi + 1) - (0 - 1)) = 0.5 \times (2\pi + 2) = \pi + 1$

答え　$\pi + 1 \approx 4.14\,\mathrm{kg}$

じぶんでとこう 9

半径 2 m の 4 分の 1 円の形の針金（θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$）で、1 m あたりの質量が $\lambda = 1 + \cos\theta$〔kg/m〕のとき、針金の質量を求めましょう。

例題 10　表計算で円の道をたす

半径 1 の円を、点 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(-1,\ 0)$、$(0,\ -1)$ を順に結ぶ 4 本の線分（正方形）で近づけ、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分の近い値を、線分のまん中の点の力を使って求めましょう。

考え方　**場合：**数値で近い値を求める（表 8-7 の **J**）

名前　円の道にそって、力と 1 歩の内積をたす。

楽をする　4 本の線分に分け、「まん中の点の力 $\vec{F}_i$」と「線分の矢印 $\Delta\vec{r}_i$」の内積をたす。

式　1 本め：$\Delta\vec{r} = (0,\ 1) - (1,\ 0) = (-1,\ 1)$、まん中 $(0.5,\ 0.5)$

$\vec{F}_2 = (-0.5,\ 0.5)$、内積 $0.5 + 0.5 = 1$

2 本め：$\Delta\vec{r} = (-1,\ -1)$、まん中 $(-0.5,\ 0.5)$、$\vec{F}_2 = (-0.5,\ -0.5)$

内積 $0.5 + 0.5 = 1$

3 本め・4 本めも、同じように 1 ずつ（円の対称性）

合計 $1 \times 4 = 4$

答え　4（本当の値 $2\pi \approx 6.28$ より小さい。表 3 のように、線分をふやすと近づく）

じぶんでとこう 10

半径 1 の円を、角 0°、60°、120°、…、300° の 6 つの点を順に結ぶ 6 本の線分で近づけ、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分の近い値を、線分のまん中の点の力を使って求めましょう。

例題 11　p-V 図の上の仕事

シリンダーの中の気体が、体積 1 L・圧力 200 kPa の状態から、体積 3 L・圧力 100 kPa の状態へ変わります。気体がする仕事 $\int p\,\mathrm{d}V$ を、次の 3 つの道で求めましょう。(1) 道 1：圧力 200 kPa のままふくらみ、そのあと体積を変えずに圧力を下げる。(2) 道 2：先に体積を変えずに 100 kPa まで下げ、そのあとふくらむ。(3) p-V 図の上をまっすぐ進む。

考え方　**場合**：状態の図の上の道（表 8-7 の K）

名前　p-V 図の道にそって「$p \times \mathrm{d}V$」をたす。

直す　区間ごとに：体積が変わらない区間は $\mathrm{d}V = 0$ で 0。圧力が一定の区間は $p\times$（体積の変化）。

式　体積の変化 $2\,\mathrm{L} = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$（$1000\,\mathrm{L/m}^3$）

(1) $200 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} + 0 = 400$

(2) $0 + 100 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 200$

(3) 道の上で $p = 200 - 50(V-1)$〔kPa、V は L〕

$$\int_1^3 (200 - 50(V-1))\mathrm{d}V = \Big[200V - 25(V-1)^2\Big]_1^3$$

$= (600 - 100) - 200 = 300$（kPa・L）

$1\,\mathrm{kPa} \times 1\,\mathrm{L} = 10^3 \times 10^{-3} = 1\,\mathrm{J}$ なので 300 J（下の台形の面積 $\dfrac{200+100}{2} \times 2$ と同じ）

答え　(1) 400 J　(2) 200 J　(3) 300 J（道によって変わる）

じぶんでとこう 11

気体が、体積 2 L・圧力 300 kPa の状態から、体積 5 L・圧力 100 kPa の状態へ変わります。例題 11 と同じ 3 つの道で、気体がする仕事を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 向きを忘れて、力の大きさ×長さにする

✕ 道 B での $\vec{F}_2$ の仕事＝$|\vec{F}_2|\times$（道の長さ）で正の値

○ $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$（内積）をたす。道 B では -1

$$\int_C \vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = -1$$

仕事は内積なので、力と進む向きが反対なら負、直角なら 0 です。$|\vec{F}|\,\mathrm{d}s$ をたしてよいのは、力がいつも道と同じ向きのとき（場合 F）だけです。

まちがえやすいところ

② t の範囲を、はじめとおわりで逆にする

✕ $(1,\ 1)$ から $(0,\ 0)$ へ進むのに、$\vec{r}=(t,\ t)$ で $\int_0^1$ とする

○ $\vec{r}=(1-t,\ 1-t)$ で $\int_0^1$、または $\vec{r}=(t,\ t)$ で $\int_1^0$

t の下のはしは「はじめの点」、上のはしは「おわりの点」です。逆にすると符号が逆になります。

⚠ まちがえやすいところ

③ $\oint$ の○を「円の道」と思う

✕ $\oint$ だから、道は円

○ ○は「閉じた道」という印。正方形でも三角形でもよい

どの道かは、右下の C と、問題の文で決まります。8-8 の $\oiint$（閉じた面）の○も同じ意味です。

⚠ まちがえやすいところ

④ 保存力でない力に、U の差を使う

✕ $\vec{F}_2$ の仕事は、はじめとおわりだけで決まる

○ $\vec{F}_2$ は保存力ではない。道ごとに計算する

U の差が使えるのは、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ と書ける力だけです。摩擦力も保存力ではありません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ $y = g(x)$ の道で、y を残したまま積分する

✕ $y = x^2$ の道で、

$\int_0^1 (-y + 2x^2)\,\mathrm{d}x = -y + \frac{2}{3}$

○ y に x^2 を入れて、

$\int_0^1 (-x^2 + 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

道の上では y は x で決まるので、積分する前に y を $g(x)$ に置きかえます。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 左や下へ進む区間を $\int_0^1$ にする

✕ 正方形の上の辺（$(1,\ 1)$ から $(0,\ 1)$）を

$\int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = -1$

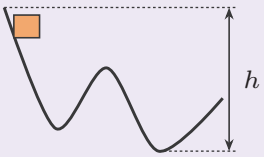
○ $\int_1^0 (-1)\,\mathrm{d}x = 1$

左へ進むとき、x は 1 から 0 へ。下のはしがはじめの x です。

物理・工学ではこう使う

エネルギーの保存：ジェットコースター

重力は保存力なので、ジェットコースターがどんな曲がったレールを通っても、重力の仕事は高さの差だけで決まります。だから、まさつが小さければ、レールの形を細かく計算しなくても、高さから速さがわかります（物理 力-4）。実際には、まさつや空気の力（保存力でない）の分、少しずつエネルギーが失われます。



電圧と起電力

電場 $\vec{E}$ の中で、電気をもった粒が動くときも、仕事は線積分です。電圧（電位差）は、電場を道にそって線積分したものです。止まった電荷が作る電場は保存力の場なので、電圧は道によらず決まります。いっぽう、発電機のように磁場が時間とともに変わる所では、閉じた道の線積分 $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ が 0 でなくなり、これが**起電力**です（物理 電-8、8-14）。

電流をはさんではかる：クランプメーター

電線を流れる電流のまわりには、輪の形の磁場ができます。磁場を電線を囲む閉じた道で線積分すると、囲んだ電流に比例します（アンペールの法則、8-11）。電線のまわりの円の道では、磁場は道と同じ向きで大きさが一定なので、場合 F と同じく「磁場の大きさ×円周の長さ」です。クランプメーターは、電線をはさむ輪で、この磁場をはかり、電線を切らずに電流を知る計測器です。

電流と、
まわりの磁場

コラム　エンジンの 1 回の仕事は、閉じた道の線積分

自動車のエンジンのシリンダーの中では、気体が「吸う・おしちぢめる・燃えてふくらむ・出す」をくり返します。p-V 図の上では、気体の状態は 1 回ごとに同じ所へもどる閉じた道をえがきます。気体が 1 回にする仕事は $\oint p\,\mathrm{d}V$ で、これは道が囲む面積です。この面積が大きいほど、1 回にたくさん仕事をするエンジンです（物理 熱-6）。

流れ図でたどってみよう（まとめの練習）

章末問題に進む前に、図 3・図 4 の流れ図を、もう一度上からたどってみましょう。次の線積分は、表 8-7 のどの場合でしょう。

1. $(0,\ 0)$ から $(2,\ 4)$ まで、放物線 $y = x^2$ にそって、$\vec{F} = (y,\ 1)$
   答え：**C**。保存力かどうかは書いていない（U がない）。閉じていない道で、$y = g(x)$ のグラフ。
2. 気体を、圧力 100 kPa のまま、2 L から 5 L までふくらませる
   答え：**K**。p-V 図の上の、横にまっすぐな道。
3. 重さ 20 N の荷物を、床から高さ 1.5 m のたなまで、いろいろな道で持ち上げるときの重力の仕事（$U = 20z$）
   答え：**G**。U のわかる保存力なので、道によらず $0 - 30 = -30$ J。
4. $(0,\ 0) \to (3,\ 0) \to (3,\ 2)$ の折れ線にそって、$\vec{F} = (x + y,\ xy)$
   答え：**A**。ななめ・曲線の区間がなく、軸に平行な線分だけ。
5. 長方形 $(0,\ 0) \to (2,\ 0) \to (2,\ 1) \to (0,\ 1) \to (0,\ 0)$ を 1 周、$\vec{F} = (-y,\ x)$
   答え：**H**→**A**。閉じた道なので H、1 周を下の問いでたどると、軸に平行な線分だけ。
6. 1 秒ごとに記録した位置と、そのときの風の力のデータから、風がした仕事を求める
   答え：**J**。式がなく、データだけ。

章末問題

8-7 のまとめ

基本 ★★★★★

1 力 $\vec{F} = (2y,\ x)$ について、道 A（$(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1)$）と道 B（$(0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (1,\ 1)$）の線積分を求めましょう（例題 1）。

2 原点から点 $(1,\ 1)$ へまっすぐ進む道で、$\vec{F} = (2y,\ x)$ の線積分を求めましょう（例題 2）。

3 原点から点 $(1,\ 1)$ へ放物線 $y = x^2$ にそって進む道で、$\vec{F} = (2y,\ x)$ の線積分を求めましょう（例題 3）。

4 中心が原点、半径 2 の円の上半分を、点 $(2,\ 0)$ から点 $(-2,\ 0)$ まで左回りに進む道で、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の線積分を求めましょう（例題 4）。

5 半径 1 m の 4 分の 1 円の形の針金（θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$）で、1 m あたりの質量が $\lambda = 3 + \sin\theta$〔kg/m〕のとき、針金の質量を求めましょう（例題 9）。

6 質量 60 kg の人が、主役の山の点 $(40,\ 10)$ から頂上までゆっくり登ります。人がする仕事を求めましょう（重力加速度 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$）（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

7 道 A で $(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1)$ と進み、ななめの線分を通って $(0,\ 0)$ へもどる三角形の道で、$\vec{F} = (2y,\ x)$ の線積分を求めましょう（例題 5）。

8 1 辺 1 の正方形の道 $(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1) \to (0,\ 1) \to (0,\ 0)$ で、$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ を求めましょう（$\vec{F} = (2y,\ x)$）（例題 8）。

9 質量 20 kg の箱を、動摩擦係数 $\mu' = 0.25$ の床の上で、(1) まっすぐ 10 m、(2) 横に 6 m、たてに 8 m の L 字の道で動かすとき、動摩擦力がする仕事を求めましょう（重力加速度 9.8 m/s^2）（例題 6）。

10 気体が、体積 1 L・圧力 400 kPa の状態から、体積 4 L・圧力 100 kPa の状態へ変わります。例題 11 と同じ 3 つの道で、気体がする仕事を求めましょう（例題 11）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 道を小さな 1 歩に分け、力と 1 歩の内積をたして仕事を表計算で求め、線積分の記号を読める。 → 255 ページ
- ☐ 軸に平行な道（折れ線）の線積分を、ふつうの定積分に直して計算できる。 → 259 ページ
- ☐ 場合分けの表を使って、ななめ・曲線・円の道、保存力、閉じた道の線積分を計算できる。 → 261 ページ

ミナ

道にそってたすときは、道を 1 つの数で表せばふつうの定積分になるんだね。次は、面を通りぬける量をたす面積分。

第 2 部　ベクトル場と積分

★★★★★

8-8 面を通りぬける量：面積分と流束

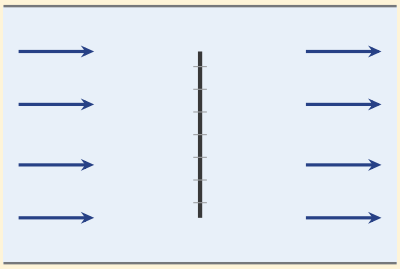
道しるべ　この章の前に 4-12 4-13 4-14 4-15 5-12 8-5 8-6
この章の先に 8-9 8-11 8-14

この章でできるようになること

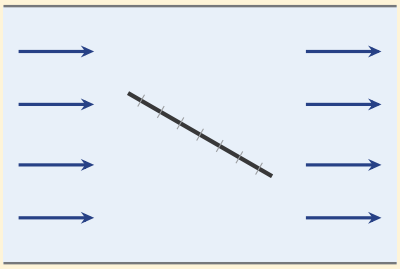
- ★★★ 網を通る水の量が、流れの「面に直角な成分」×面積で決まることを説明できる。
- ★★★★ 平らな面の流束を、法線ベクトルの内積と重積分で求められる。
- ★★★★★ 場合分けの表で、曲がった面や閉じた面の面積分をふつうの定積分に直せる。

はてな？

川の流れの中に、虫とりに使う四角い網（面積 $0.5\,\mathrm{m}^2$）を入れます。水はどこでも同じ速さ $2\,\mathrm{m/s}$ で、まっすぐ流れています。網を流れに正面から向けたときと、網を回して $60°$ かたむけたときでは、1 秒間に網を通りぬける水の量はどうちがうでしょう。



正面に向けた網



60° 回した網

8-5 では、場所ごとに矢印がある「ベクトル場」を学びました。8-6 では、面を小さなタイルに分けて量をたす「重積分」を学びました。この章では、2 つを合わせて、**矢印の場が、面を通りぬける量**を求めます。

川を流れる水の量、電線を流れる電流、窓から入る風、太陽電池のパネルに当たる光、コイルを通りぬける磁場。どれも「面を通りぬける量」です。

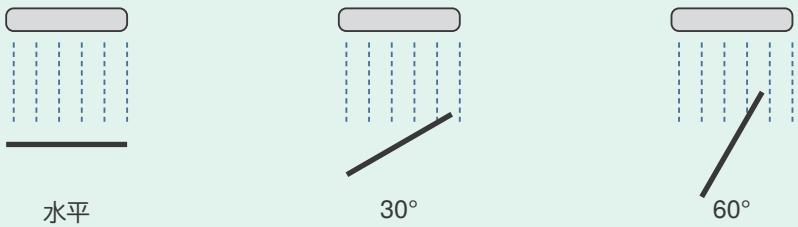
この章の記号 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（面積分）も、8-6 と同じく**操作の名前**です。答えを出すには、ふつうの定積分に**直す**必要があります。どう直すかは、面の形と場のようすで決まります。「こんな面のときは、こう直す」を、場合ごとにていねいに見ていきます。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、図と、内積（4-12）・8-6 の重積分だけで読めるように書きました。1 回で分からなくても大丈夫です。図と数にもどりながら、ゆっくり進みましょう。

やってみよう　かたむけると、受ける水がへる？

用意するもの　平らなトレイ（四角いバットなど）、シャワー（または、じょうろ）、計量カップ、分度器、時計

1. シャワーを真下に向けて、同じ強さで出し続ける。
2. トレイを水平にして、シャワーの下で 30 秒間水を受ける。たまった水を計量カップではかる。
3. トレイを 30°、60° かたむけて同じようにはかり、水平のときの何倍かを計算しよう（ふちの高いトレイで）。



たとえば、次のような結果になります（シャワーの強さで数は変わります）。

トレイのかたむき	0°（水平）	30°	60°
30 秒でたまった水	300 mL	260 mL	150 mL
水平のときの何倍か	1	0.87	0.5

表 1　トレイをかたむけると、受ける水がへる。60° では、ちょうど半分。

トレイの大きさは同じなのに、かたむけると受ける水がへりました。真上から見ると、かたむいたトレイは小さく見えます。雨つぶ（シャワーの水）は真上から落ちてくるので、トレイが受けるのは、「**真上から見たときの大きさ**」の分だけなのです。0.87 と 0.5 という数は、$\cos 30° \approx 0.87$、$\cos 60° = 0.5$ です。なぜ cos が出てくるのかを、これから調べます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-12　内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$。$\theta$ は 2 つの矢印のなす角。直角なら 0。
- 4-13　平面 $ax + by + cz = d$ の向きは、平面に直角な矢印（法線ベクトル）$(a,\ b,\ c)$ で表す。
- 4-14　外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直角な矢印で、長さは 2 つがつくる平行四辺形の面積。
- 8-6　重積分 $\iint_D f\,\mathrm{d}A$ は操作の名前。場所を 2 つの数で表して、ふつうの定積分を 2 回くり返す形に直して計算する。円は極座標で $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。
- 5-12　パイプを流れる水の量（流量）は、速さ×断面積。1 秒間に通る体積で、単位は m^3/s。
- 4-15　球座標：原点からの距離 r、真上（z 軸）からの角 θ、床の上の角 φ。

数学の道具

目でわかる　面に直角な成分だけが通りぬける　★★★

① 通りぬけるのは、面に直角な成分

❓はてな？の網で考えます。網を正面に向けると、水は網にまっすぐ当たり、1 秒間に「速さ×面積」$= 2 \times 0.5 = 1.0\,\mathrm{m}^3$ の水が通りぬけます（5-12 の流量と同じ）。

では、網をかたむけるとどうなるでしょう。流れの矢印 $\vec{v}$ を、網に**直角な成分**と、網に**そった成分**の 2 つに分けてみます（4-12 で、力を 2 つの向きに分けたのと同じ）。

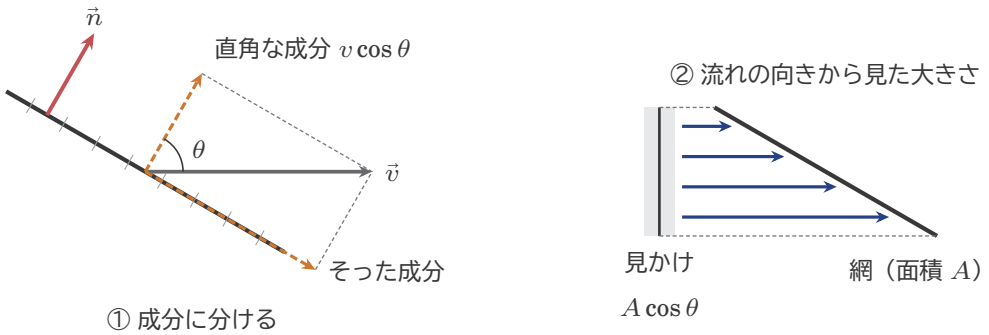


図 1 網を横から見た図。流れ $\vec{v}$ と、網に直角な向き $\vec{n}$ のなす角を θ とする。①網を通りぬけるのは、網に直角な成分 $v\cos\theta$ だけ。②流れの向きから見ると、網は $A\cos\theta$ の大きさにしか見えない。

① 成分に分けて考える

網にそった成分は、網の面にそって流れるだけで、網を通りぬけません。通りぬけるのは、網に直角な成分 $v\cos\theta$ だけです（θ は、流れと「網に直角な向き」のなす角）。だから、1 秒間に通る量は $(v\cos\theta) \times A$ です。

② 見かけの大きさで考える

流れの向きから見ると、かたむいた網は、はばが $A\cos\theta$ の網と同じに見えます。網の外を通る水は、通りぬけません。だから、通る量は $v \times (A\cos\theta)$ です。やってみようのトレイと同じ考えです。

どちらで考えても、同じ式になります。

> 1 秒間に面を通りぬける量 $= vA\cos\theta$
>
> （θ は、流れと「面に直角な向き」のなす角）

❓はてな？の答え

網を 60° 回すと、流れと「網に直角な向き」のなす角も 60° になります。

$vA\cos 0° = 2 \times 0.5 \times 1 = 1.0$　　正面に向けた網

$vA\cos 60° = 2 \times 0.5 \times 0.5 = 0.5$　　60° 回した網

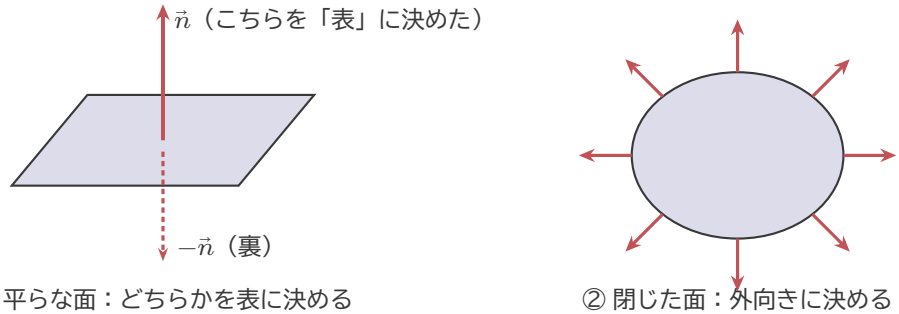
正面なら 1 秒間に $1.0\,\mathrm{m}^3$、60° 回すと $0.5\,\mathrm{m}^3$ で、ちょうど半分になります。網をどんどん回して 90°（網が流れと平行）にすると、$\cos 90° = 0$ で、水はまったく通りぬけません。

網の角 θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos\theta$	1	0.866	0.707	0.5	0
通る量（m^3/s）	1.0	0.87	0.71	0.5	0

表 2　❓はてな？の網（2 m/s、$0.5\,\mathrm{m}^2$）の角を変えたとき。

2 面の向きを、矢印で表す

「面に直角な向き」は、面ごとに決まります。4-13 で、平面の向きを、平面に直角な矢印（**法線ベクトル**）で表しました。ここでは、長さを 1 にそろえた法線ベクトルを $\vec{n}$（エヌ）と書きます。物理の本と同じ文字です。



① 平らな面：どちらかを表に決める　　② 閉じた面：外向きに決める

図 2　面の向きを表す法線ベクトル $\vec{n}$（長さ 1）。平らな面や開いた面では、どちらを表（正）にするかを先に決める。閉じた面では、いつも外向きにとる。

面には表と裏があります。どちらの向きに通りぬけた量を正（プラス）にするかを、先に決めておかなければなりません。

- **開いた面**（網、窓、ドームの屋根）では、問題に合わせて「上向き」「流れの向き」などと決めます。反対向きに通る量は負（マイナス）になります。
- **閉じた面**（ボール、箱、袋の表面）では、いつも**外向き**にとります。物理の本（力-12・力-13）の「物の表面の外向きの単位ベクトル $\vec{n}$」は、これのことです。外へ出る量が正、中へ入る量が負になります。

内積を使うと、cos が自動で出てくる

流れ $\vec{v}$ と $\vec{n}$ の内積は、$|\vec{n}| = 1$ なので $\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \times 1 \times \cos\theta = v\cos\theta$ です。これは、ちょうど「面に直角な成分」です。だから、通りぬける量は

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}) \times A$$

と書けます。内積なら、成分どうしをかけてたすだけで、角度を測らなくても計算できます。

たとえば❓はてな？の 60° の網なら、流れは $\vec{v} = (2,\ 0,\ 0)$、網の $\vec{n} = (\cos 60°,\ \sin 60°,\ 0) = (0.5,\ 0.866,\ 0)$ です。

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \times 0.5 + 0 \times 0.866 + 0 \times 0 = 1.0 \qquad 1.0 \times 0.5 = 0.5\,\mathrm{m^3/s}$$

図を見なくても、同じ答えが出ました。$\vec{n}$ に面積 A をかけた矢印 $A\vec{n}$ を、**面積ベクトル**とよぶこともあります。向きが面の向き、長さが面積です。

③ 流束：面を通りぬける量の名前

1 秒間に面を通りぬける量を、**流束**（りゅうそく）といいます。英語では flux（フラックス：流れ）です。流束は、水の流れだけのことばではありません。「1 m^2 を 1 秒間に通る量」の矢印の場があれば、どれにでも使えます。

矢印の場	その場の流束	単位
水の速さ $\vec{v}$	1 秒間に通る水の体積（流量）	m^3/s
$\rho\vec{v}$（密度×速さ）	1 秒間に通る質量（物理力-13）	kg/s
電流密度 $\vec{j}$	電流	A
熱の流れ $\vec{q}$（8-4）	1 秒間に通る熱（熱の流れの量）	W
電場 $\vec{E}$	電場の流束 Φ_E（電気力線の本数のもと）	$\mathrm{N\,m}^2/\mathrm{C}$
磁場 $\vec{B}$	磁束（コイルを通る磁場）	Wb（ウェーバ）

表 3　いろいろな流束。どれも「矢印の場の、面に直角な成分×面積」をたしたもの。

電場や磁場は、本当に何かが流れているわけではありません。それでも、同じ計算をするので、同じ「束」の字を使います。電場の流束 Φ_E は 8-11 のガウスの法則で、磁場の流束（磁束）は 8-14 の発電の式で使います。なお、電気工学の本では、電束密度 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ の流束を「電束」（単位 C）とよびます。そのときガウスの法則は $\iint \vec{D}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = Q$ です。

手でわかる 平らな面なら、内積と重積分 ★★★★

4 平らな面で、場がどこでも同じとき

③楽をする段 積分しない：場がどこでも同じなら

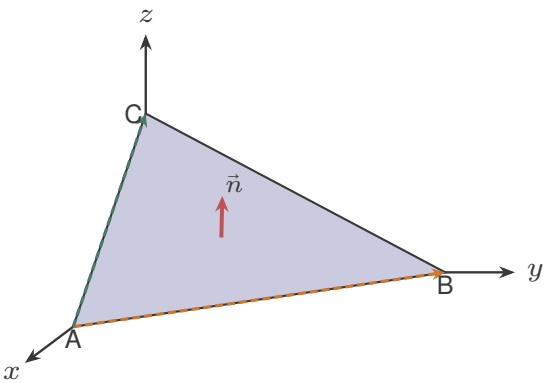
場がどこでも同じ（一様）で、面が平らなら、面の上のどこでも $\vec{v}\cdot\vec{n}$ は同じです。だから、たし合わせる必要はなく、

$$\text{流束} = (\vec{F}\cdot\vec{n}) \times A = \vec{F}\cdot(A\vec{n})$$

で求められます。むずかしいのは、面が空間の中でななめのときに、$\vec{n}$ と面積 A を求めることです。外積（4-14）を使います。

4-13 の平面を通りぬける量

4-13 で、平面 $2x+y+2z=6$ の法線ベクトルは $(2,\ 1,\ 2)$ だと学び、「平面を通りぬける水や電気の量を計算するときに使う」と予告しました。この平面の、座標軸で切りとられた三角形を考えます。頂点は、軸と交わる 3 つの点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$、$\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$、$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$ です（$y=z=0$ を入れると $2x=6$ で $x=3$。ほかも同じ）。



三角形の 2 つの辺を矢印にします。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3,\ 6,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3,\ 0,\ 3)$$

この 2 本がつくる平行四辺形の、ちょうど半分が三角形です。

図 3 平面 $2x+y+2z=6$ の、座標軸で切りとられた三角形。オレンジと緑の矢印が 2 つの辺、赤い矢印が面の向き。

外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は、2 本の両方に直角（つまり面に直角）で、長さが平行四辺形の面積の矢印でした（4-14）。成分で計算します。

x 成分 $= 6 \times 3 - 0 \times 0 = 18$　　2 つめ× 3 つめ− 3 つめ× 2 つめ

y 成分 $= 0 \times (-3) - (-3) \times 3 = 9$　　3 つめ× 1 つめ− 1 つめ× 3 つめ

z 成分 $= (-3) \times 0 - 6 \times (-3) = 18$　　1 つめ× 2 つめ− 2 つめ× 1 つめ

外積は $(18,\ 9,\ 18)$ です。三角形は平行四辺形の半分なので、半分にした $(9,\ 4.5,\ 9)$ が、三角形の面積ベクトル $A\vec{n}$ です。

- 向きは $(9,\ 4.5,\ 9) = 4.5 \times (2,\ 1,\ 2)$ で、4-13 の法線ベクトル $(2,\ 1,\ 2)$ と同じ向きです。
- 長さ（三角形の面積）は $\sqrt{9^2 + 4.5^2 + 9^2} = \sqrt{182.25} = 13.5$ です。

どこでも同じ流れ $\vec{F} = (1,\ 1,\ 1)$ (m/s) がこの三角形を通りぬける量は、内積で

$$\vec{F} \cdot (A\vec{n}) = 1 \times 9 + 1 \times 4.5 + 1 \times 9 = 22.5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

です。面積 13.5 や角度を別に出さなくても、外積の矢印と内積だけで求められました。

屋根に降る雨：かたむきによらない

真下に降る雨を受ける屋根を考えます。屋根は、上から見ると 10 m × 6 m の長方形で、30° かたむいています。雨は 1 時間に 5 mm（0.005 m）の速さで降るとします（1 時間に 5 mm たまる雨。傘がないとぬれる、ふつうの雨）。

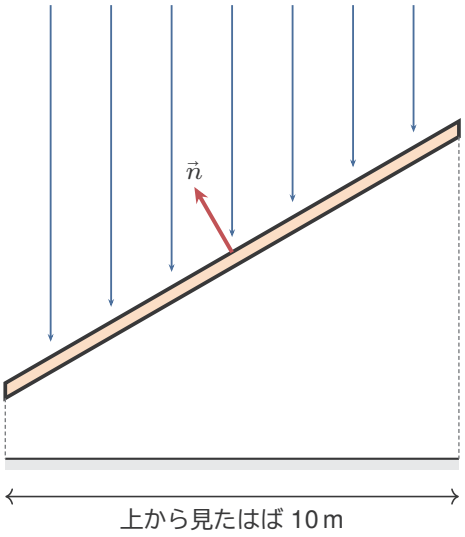


図 4 30° かたむいた屋根（横から見た図）。屋根の本当の面積は大きいが、雨は面になるめに当たる。

屋根の本当の面積は、上から見た面積 $10 \times 6 = 60\,\mathrm{m}^2$ より大きく、次のようになります（かたむいた辺は、上から見た長さの $\frac{1}{\cos 30°}$ 倍だから）。

$$\frac{60}{\cos 30°} \approx 69.3\,\mathrm{m}^2$$

いっぽう、雨（真下向き）と屋根の $\vec{n}$ のなす角も 30° です（屋根を 30° かたむけると、$\vec{n}$ も真上から 30° かたむく）。だから、

$$0.005 \times \frac{60}{\cos 30°} \times \cos 30° \qquad \text{雨の速さ} \times \text{本当の面積} \times \cos\theta$$

$$= 0.005 \times 60 = 0.3 \qquad \cos 30° \text{ が約分されて消える}$$

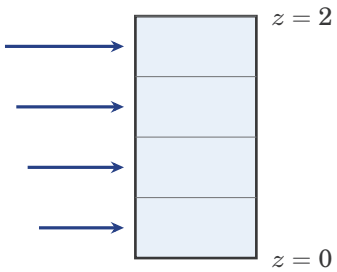
1 時間に $0.3\,\mathrm{m}^3$（300 L）の雨水が、屋根に集まります。かたむきが何度でも、cos は約分されて消えます。屋根が受ける雨は、**上から見た面積**だけで決まるのです。トレイの実験と同じ考えです。雨どいの太さは、この考えで決めます。

5 平らな面で、場が場所ごとにちがうとき

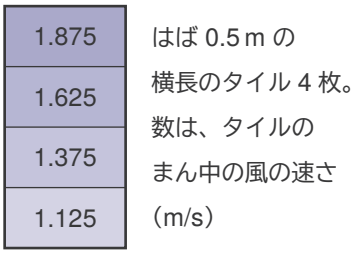
場所ごとに流れの強さがちがうときは、一度に「$\vec{v} \cdot \vec{n}$ ×面積」とはできません。8-6 と同じように、面を小さなタイルに分けます。

窓を通りぬける風

はば 1 m、高さ 2 m の窓に、外から風が直角に吹きこんでいます。地面の近くは建物や木にさえぎられるので、風は高い所ほど強く、窓の下の辺からの高さ z〔m〕の所で $v = 1 + 0.5z$〔m/s〕でした。1 秒間に窓を通る空気の量を求めます。



窓（横から見た図）



窓（正面から見た図）

図 5　高い所ほど風が強い窓。正面の図は、窓を高さ 0.5 m ずつの 4 枚のタイルに分けたところ。

表計算でタイルをたす　窓を、高さ 0.5 m（はば 1 m）の横長のタイル 4 枚に分けます。1 枚の面積は 0.5 m^2。タイルのまん中の高さで風の速さを計算して、面積をかけてたします。風は窓に直角なので、$\vec{v} \cdot \vec{n}$ は風の速さそのものです。

	A	B	C	D
1	まん中の高さ z	速さ =1+0.5*A2	面積	通る量 =B2*C2
2	1.75	1.875	0.5	0.9375
3	1.25	1.625	0.5	0.8125
4	0.75	1.375	0.5	0.6875
5	0.25	1.125	0.5	0.5625
6			合計	3

表 4　窓のタイル 4 枚の表計算（上の行ほど高い所。D6 は =SUM(D2:D5)）。

合計は 1 秒間に 3 m^3 です。タイルを 8 枚、16 枚と細かくしても、答えは 3 のまま変わりません（風の速さが高さの 1 次式なので、まん中の値がちょうど平均になるから。8-6 の板の表計算と同じ）。

①名前の段　記号を読む：何を・どこで・1 枚の量

タイルを細かくした先を、次の記号で書き、**面積分**（めんせきぶん）とよびます。

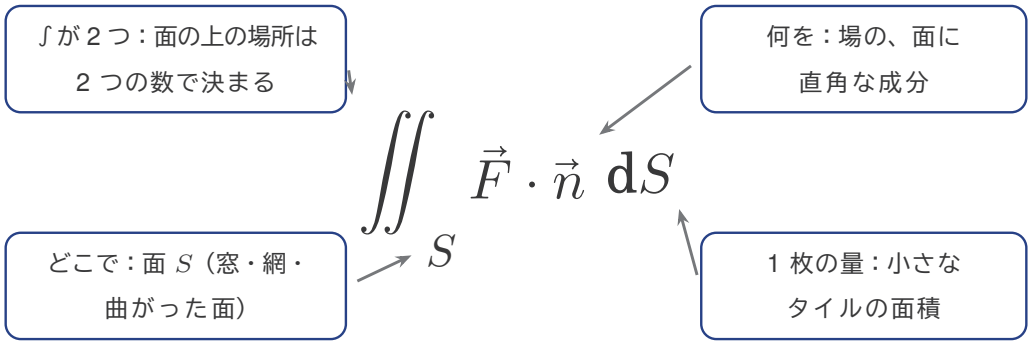


図 6　面積分（流束）の記号の読み方。$\vec{n}\,\mathrm{d}S$ をまとめて「向きのついたタイル」と読んでもよい。

1. **どこで**：$\iint$ の右下の S は、たし合わせる面です。S は英語の surface（面）の頭文字です。窓なら「はば 1 m・高さ 2 m の長方形」が S です。
2. **何を**：$\vec{F}\cdot\vec{n}$ は、場 $\vec{F}$ の、面に直角な成分です（①②）。$\vec{F}$ のところには、水の速さ $\vec{v}$ も、電場 $\vec{E}$ も入ります。
3. **1 枚の量**：$\mathrm{d}S$ は、面の上の小さなタイルの面積です。$\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ が、タイル 1 枚を通りぬける量です。

タイルに向き $\vec{n}$ をつけて、$\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を「**向きのついたタイル**」とよぶこともあります。$\int$ が 2 つなのは、8-6 の約束（$\int$ の数＝場所を表す数の数）のとおりです。面は曲がっていても、場所は 2 つの数で表せます（地球の上の場所は、緯度と経度の 2 つ）。

記号は「操作の名前」

$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ は、「面 S をタイルに分け、1 枚ずつ『場の直角な成分×面積』を求めて、たし合わせ、細かくした先」という**操作の名前**です。8-6 の重積分と同じく、この記号を見ただけでは、まだ計算できません。S という名前しか書いてないからです。どの文字を、どこからどこまで動かすのかは、書いてありません。

② 直す段　直す段：窓の面積分を、ふつうの定積分に

窓の場合に、名前をふつうの定積分に直します。

1. **場所を数で表す**：窓の上の場所を、横 x（0〜1）と高さ z（0〜2）で表す。
2. **1 枚の量をその数で書く**：窓は平らで、軸にそった長方形なので、タイルは横 $\mathrm{d}x$・たて $\mathrm{d}z$ の長方形。$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$。$\vec{n}$ は窓に直角な向き（風の向き）で、$\vec{v}\cdot\vec{n} = 1 + 0.5z$。
3. **数の範囲を決める**：$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq z \leqq 2$。
4. **ふつうの定積分を計算する**：8-6 の長方形（場合 A）と同じ。

$$\underbrace{\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^2 \left(\int_0^1 (1 + 0.5z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z}_{\text{ふつうの定積分}}$$

$$\int_0^1 (1 + 0.5z)\,\mathrm{d}x = 1 + 0.5z$$

内側：z を止めると、ただの数 ×はば 1

$$\int_0^2 (1 + 0.5z)\,\mathrm{d}z = \Big[z + 0.25z^2 \Big]_0^2$$

外側：z で 0 から 2 まで

$$= 2 + 1 = 3$$

表計算と同じ $3\,\mathrm{m^3/s}$

平らで、軸に直角な面なら、面積分は 8-6 の重積分そのものです。面の向き $\vec{n}$ が場所によらないので、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ という数の重積分になるからです。

6 円の面：パイプを流れる水

8-6 で、パイプ（半径 $R = 1\,\mathrm{cm}$）の断面を細い輪に分けて、流量を求めました。水の速さは、まん中で $u_{\max} = 0.2\,\mathrm{m/s}$、中心から r の所で $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ でした（壁で 0）。これは「断面という円の面を、水が通りぬける量」なので、面積分です。

断面は平らで、水は断面に直角に流れるので、$\vec{v}\cdot\vec{n}=u$。円の面なので、8-6の極座標（場合 C′：f が r だけなら細い輪 $2\pi r\,\mathrm{d}r$）に直します。

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_0^R u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi R^2 u_{\max}}{2}$$

$R=0.01$、$u_{\max}=0.2$ を入れると $\dfrac{\pi\times 0.0001\times 0.2}{2}\approx 3.14\times 10^{-5}\,\mathrm{m^3/s}$、つまり 1 秒間に 31.4 mL です（8-6・物理 力-14 と同じ数）。積分の計算は例題5でていねいにします。

ここまでで十分

面に直角な成分×面積で流束を求め、平らな面なら、内積・外積と 8-6 の重積分で計算できれば十分です。この先は、曲がった面と閉じた面です。

∂ 式でわかる 面の形ごとに、直し方を選ぶ ★★★★★

7 場合分けの表と流れ図

ここまでの面は、平らな面でした。ボールの表面やドームの屋根のような**曲がった面**では、場所ごとに面の向き $\vec{n}$ が変わります。また、箱や袋の表面のような**閉じた面**もあります。面積分の名前 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ は同じでも、ふつうの定積分への直し方は、面の形と場のようすで、大きくちがいます。

そこで、「こんな面のときは、こう直す」を表にしました。この章の例題は、どれもこの表の記号（A〜J）を 1 行めに書いてあります。

場合分けの表 8-8　面積分：どんなときに、どう直す？（開いた面）

記号	こんなとき	手順（ふつうの定積分に直す）	例題
A	平らな面で、場がどこでも同じ	積分しない：$(\vec{F}\cdot\vec{n})\times A=\vec{F}\cdot(A\vec{n})$。ななめの面の $A\vec{n}$ は外積（4-14）で	1・2・3
B	平らで、軸に直角な面（窓・床）。場は場所で変わる	$\vec{n}$ は軸の向き、$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ など。8-6 の重積分そのもの（長方形なら定積分を 2 回）	4
C	平らな円の面（パイプの断面）	8-6 の極座標 $\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。$\vec{F}\cdot\vec{n}$ が r だけなら細い輪 $2\pi r\,\mathrm{d}r$ で 1 回	5
D	球面・円柱面で、$\vec{F}\cdot\vec{n}$（向きのいらないときは f）が面の上で一定	積分の外に出す：（一定の値）×（面積。球面 $4\pi R^2$、半球 $2\pi R^2$、円柱面 $2\pi RL$）	6・9
E	曲がった面が $z=g(x,\,y)$ のグラフ	$\vec{n}\,\mathrm{d}S=\left(-\dfrac{\partial g}{\partial x},\,-\dfrac{\partial g}{\partial y},\,1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（上向き）。床に落とした影の範囲で重積分	7
F	球面・円柱面など、2 つの数で表せる曲がった面	$\vec{n}\,\mathrm{d}S=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$。球面は $\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$、円柱面は $\mathrm{d}S=R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$。向きのない $\iint f\,\mathrm{d}S$ も同じ $\mathrm{d}S$ で	8・9

場合分けの表 8-8 （つづき）閉じた面・立体角・データ

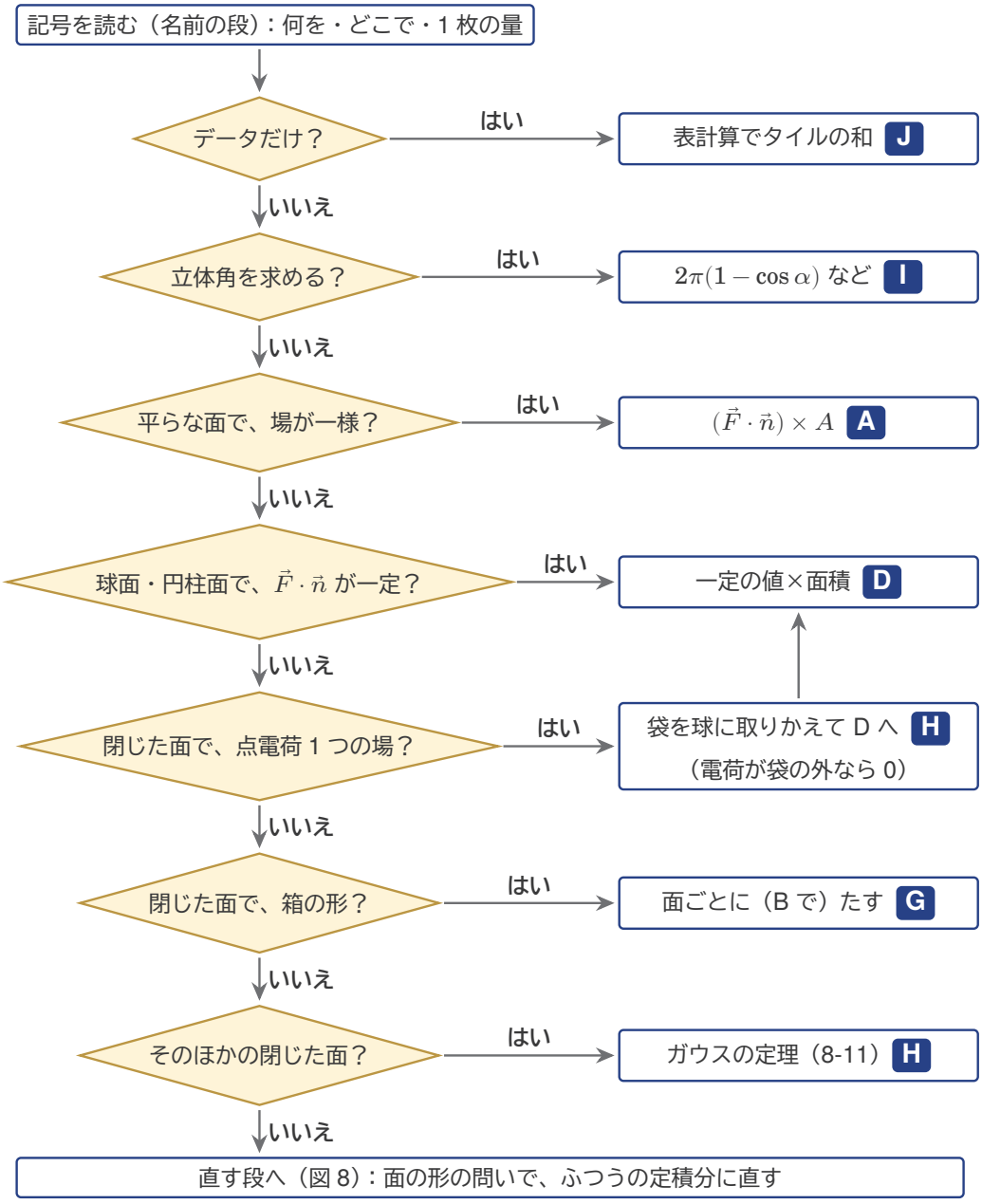
記号	こんなとき	手順（ふつうの定積分に直す）	例題
G	閉じた面が、平らな面の組み合わせ（箱）	面ごとに B で求めて、たす。どの面も外向きが正	10
H	閉じた面で、わき出しが点電荷 1 つだけ。または形が計算しにくい	袋を取りかえる：電荷が中なら同じ中心の球（D へ）、外なら 0。そのほかはガウスの定理（8-11）で体積の積分に	11
I	点から見た、面の見かけの大きさ（立体角）	$\Omega = \iint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2}\,\mathrm{d}S$。円すいの口なら $2\pi(1-\cos\alpha)$	12
J	式がない（データだけ）	表計算で「$\vec{F}\cdot\vec{n}$ ×タイルの面積」をたす	13

表の場合を、3 つの段に分けると次のようになります。

段	場合	すること
楽をする 楽をする	A・D・H・J	積分しない・一定なら外に出す・袋を取りかえる・数でたす
楽をする 楽をする（分ける）	G	閉じた箱を、平らな面に分ける（1 つずつは B）
直す 直す	B・C・E・F	面を 2 つの数で表し、ふつうの定積分を 2 回
（別の量）	I	流束と同じ形でたす、点から見た見かけの大きさ

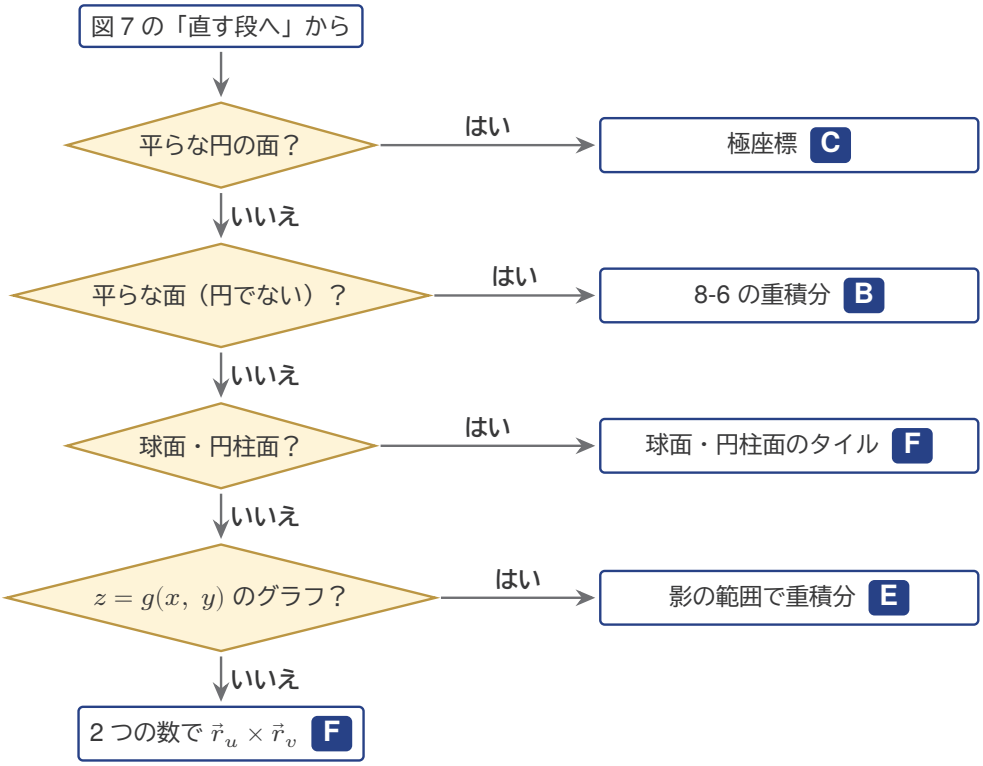
表 5 場合と 3 つの段。楽をする段は、直す前に確かめる。

楽をする段は、直す前に確かめます。どの順で問いかければよいかを、2 つの流れ図にしました。先に楽をする段の問い（図 7）、そのあとに直す段の面の形の問い（図 8）をたどります。



確かめ（答えが出たら）：面の向き（外向き・上向き）と符号、ちがう方法で同じ答えか

図 7　面積分の流れ図（1）楽をする段。ひし形は問い、四角はすること。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ進む。向きのいらない量では「f が一定？」と読む。「点電荷 1 つの場」は、わき出しが 1 点の電荷だけの場。



確かめ（答えが出たら）：面の向き（外向き・上向き）と符号、ちがう方法で同じ答えか

図 8 面積分の流れ図（2）直す段。図 7 の「直す段へ」から、面の形の問いで直し方を選ぶ。

流れ図の使い方：窓の風の場合

⑤の窓 $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ で、流れ図をたどってみます。

1. 名前の段：何を＝風の直角な成分 $1+0.5z$、どこで＝窓 S、1 枚の量＝ $\mathrm{d}S$。
2. データだけ？ いいえ（式がある）。立体角を求める？ いいえ。
3. 平らな面で、場が一様？ いいえ（高さで風がちがう）。球面・円柱面で、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ が一定？ いいえ（窓は平らな長方形）。
4. 閉じた面で、点電荷 1 つの場？ 閉じた面で、箱の形？ そのほかの閉じた面？ どれも、いいえ（窓は開いた面）。「直す段へ」から図 8 へ。
5. 平らな円の面？ いいえ（長方形）。平らな面（円でない）？ はい。

こうして、場合 B（8-6 の重積分そのもの）に決まります。⑤でしたとおりです。

8 曲がった面のタイル：外積で、向きと面積を一度に

曲がった面では、タイルごとに向きがちがいます。そこで、面の上の場所を 2 つの数で表し、その 2 つの数を少しずつ動かして、小さなタイルを作ります。

②直す段　曲がった面を 2 つの数で表し、タイルを外積で作る

面の上の場所を、2 つの数 u・v で $\vec{r}(u,\ v)$ と表します（地球の上の場所を、緯度と経度で表すのと同じ）。u だけを少し（$\mathrm{d}u$）動かすと、場所は $\vec{r}_u\,\mathrm{d}u$ だけ動きます。$\vec{r}_u$ は「v を止めて u で偏微分した矢印」$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ です（8-2。成分ごとに偏微分する）。同じように、v だけを動かすと $\vec{r}_v\,\mathrm{d}v$ 動きます。

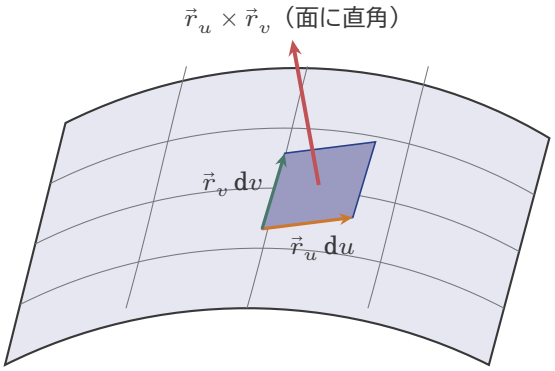


図 9　曲がった面を、u の線と v の線で区切ると、小さな平行四辺形のタイルができる。2 本の辺の矢印の外積が、タイルの向きと面積を一度に表す。

小さなタイルは、2 本の矢印 $\vec{r}_u\,\mathrm{d}u$ と $\vec{r}_v\,\mathrm{d}v$ がつくる平行四辺形と見なせます（とても小さいので、曲がりは無視できる）。4-14 で、外積の長さは平行四辺形の面積、向きは両方に直角だと学びました。だから、

$$\vec{n}\,\mathrm{d}S = (\vec{r}_u\,\mathrm{d}u) \times (\vec{r}_v\,\mathrm{d}v) = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

これで、向き $\vec{n}$ と面積 $\mathrm{d}S$ が一度に u・v の式になり、面積分は u・v の重積分に直ります。u と v の順を入れかえると、外積は反対向きになります（4-14）。だから、計算の前に「どちらを表にするか」と合っているかを確かめます。

場合 E：面が $z = g(x,\ y)$ のグラフのとき

ドームやおわんの形のように、面が $z = g(x,\ y)$ と書けるときは、$u = x$、$v = y$ にとります。

$\vec{r}(x,\ y) = (x,\ y,\ g(x,\ y))$　　床の $(x,\ y)$ の真上の点

$\vec{r}_x = \left(1,\ 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)$　　y を止めて x で偏微分

$\vec{r}_y = \left(0,\ 1,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)$　　x を止めて y で偏微分

$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \left(-\dfrac{\partial g}{\partial x},\ -\dfrac{\partial g}{\partial y},\ 1\right)$　　外積（z 成分が $+1$ で上向き）

4 行めの外積の x 成分は $0 \times \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x} \times 1$、$y$ 成分は $\dfrac{\partial g}{\partial x} \times 0 - 1 \times \dfrac{\partial g}{\partial y}$、$z$ 成分は $1 \times 1 - 0 \times 0$ です（4-14 の「2 つめ× 3 つめ− 3 つめ× 2 つめ」の順）。

$$\vec{n}\,\mathrm{d}S = \left(-\frac{\partial g}{\partial x},\ -\frac{\partial g}{\partial y},\ 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上向き）

面積分は、面を床に落とした影の範囲 D での重積分に直ります（$\vec{F}$ の中の z には $g(x,\ y)$ を入れる）。

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \vec{F}\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x},\ -\frac{\partial g}{\partial y},\ 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注意：タイルの面積 $\mathrm{d}S$ は、$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ではありません。外積の長さの

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

で、かたむいた所ほど大きくなります（屋根の本当の面積が、上から見た面積より大きかったのと同じ）。流束では、この大きさと cos が約分されて、上の形にまとまります。

9 場合 F：球面と円柱面のタイル

球面は $z = g(x,\ y)$ の 1 つの式では書けません（上半分と下半分で 2 つの式が要る）。そこで、4-15 の球座標の角 θ（真上からの角）と φ（床の上の角）の 2 つで表します。半径 R の球面の上の場所は

$$\vec{r}(\theta,\ \varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

です。

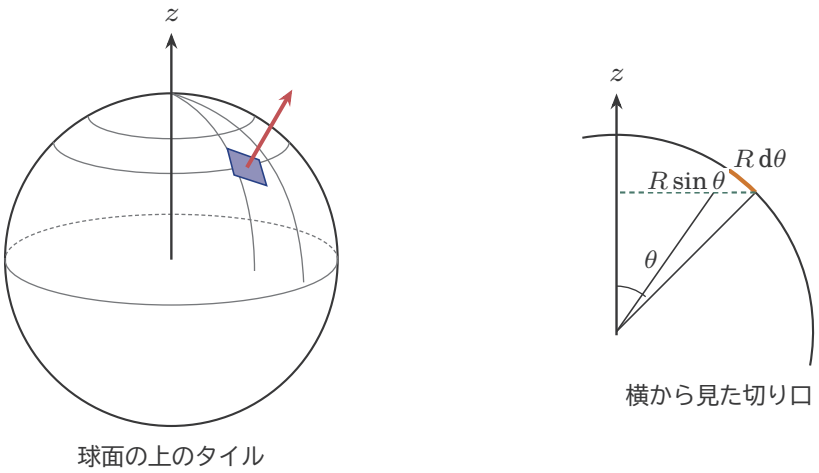


図 10　球面のタイル。たては、半径 R の円の弧で $R\,\mathrm{d}\theta$（4-2 の弧の長さ）。横は、高さ θ の所の緯線の円（半径 $R\sin\theta$）の弧で $R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

タイルの面積は、2 通りで求められます。

1 図で：たての辺は、半径 R の円の弧なので $R\,\mathrm{d}\theta$。横の辺は、真上から θ の所の緯線（半径 $R\sin\theta$ の円）の弧なので $R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$。小さなタイルはほぼ長方形なので、$\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta \times R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

② 外積で

$\vec{r}(\theta,\ \varphi)$ を成分ごとに偏微分します（8-2。$\sin\theta$ を θ で微分すると $\cos\theta$、$\cos\theta$ は $-\sin\theta$、$\cos\varphi$ を φ で微分すると $-\sin\varphi$。z 成分 $R\cos\theta$ に φ はないので、φ で微分すると 0）。

$$\vec{r}_\theta = (R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ -R\sin\theta)$$ φ を止めて θ で

$$\vec{r}_\varphi = (-R\sin\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$ θ を止めて φ で

外積を、4-14 の順に 1 成分ずつ計算します（x 成分は「2 つめ× 3 つめ− 3 つめ× 2 つめ」、y 成分は「3 つめ× 1 つめ− 1 つめ× 3 つめ」、z 成分は「1 つめ× 2 つめ− 2 つめ× 1 つめ」）。

$$\begin{aligned} x\text{ 成分} &= R\cos\theta\sin\varphi\times 0-(-R\sin\theta)\times R\sin\theta\cos\varphi \\ &= R^2\sin^2\theta\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\text{ 成分} &= (-R\sin\theta)\times(-R\sin\theta\sin\varphi)-R\cos\theta\cos\varphi\times 0 \\ &= R^2\sin^2\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{ 成分} &= R\cos\theta\cos\varphi\times R\sin\theta\cos\varphi \\ &\quad -R\cos\theta\sin\varphi\times(-R\sin\theta\sin\varphi) \\ &= R^2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) && \text{くくった} \\ &= R^2\sin\theta\cos\theta && (4\text{-}8) \end{aligned}$$

（4-8）は $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ です。3 つの成分を $R^2\sin\theta$ でくくると、

$$\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi = R^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

かっこの中は、中心から外へ向かう長さ 1 の矢印 $\vec{e}_r$ です（球面の上の点 $\vec{r}$ を R でわったもの）。だから、外積の向きは外向き、長さは $R^2\sin\theta$ で、①と同じです。

球面：$\vec{n} = \vec{e}_r$（外向き）

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

θ は $0 \sim \pi$、φ は $0 \sim 2\pi$

$\sin\theta$ がつくのは、北極・南極に近いほど緯線の円が小さく、タイルが細くなるからです。たとえば、球面全体の面積は

$$\iint_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = R^2 \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi}$$　　内側：θ で 0 から π まで

$$= R^2 \{ -\cos\pi - (-\cos 0) \} = 2R^2$$　　$\cos\pi = -1$、$\cos 0 = 1$

$$\int_0^{2\pi} 2R^2 \,\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2$$　　外側：φ で 0 から 2π まで

よく知られた球の表面積の公式 $4\pi R^2$ が出てきました。

円柱面のタイル

半径 R の円柱の側面は、角 θ と高さ z の 2 つで表せます。

$$\vec{r}(\theta,\ z) = (R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ z)$$

タイルは、横が弧 $R\,\mathrm{d}\theta$、たてが $\mathrm{d}z$ の長方形です。

円柱面：$\vec{n} = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$（軸から外向き）

$$\mathrm{d}S = R \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$$

向きのいらない面積分 $\iint_S f\,\mathrm{d}S$

ペンキのぬる量、ボールの皮の質量、面にかかる圧力の力の大きさのように、向きがいらない量は、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ のかわりに数 f をかけてたします。タイルの面積 $\mathrm{d}S$ は同じです。$f=1$ なら面積そのもので、上の $4\pi R^2$ がその例です（例題 9）。

⑩ 場合 D：対称なら、積分の外に出す

③楽をする段　対称なら、積分の外に出す

原点に置いた点電荷のまわりの電場は、原点から外向き（面に直角）で、大きさは原点からの距離 r だけで決まります（8-5）。原点を中心とする半径 R の球面の上では、どこでも

- 電場は面に直角（外向き）なので、$\vec{E}\cdot\vec{n}=|\vec{E}|$（$\cos 0^\circ=1$）。
- その大きさは、同じ $r=R$ なのでどこでも同じ。

です。だから、$\vec{E}\cdot\vec{n}$ は球面の上で一定の数で、積分の外に出せます。

$$\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = |\vec{E}(R)|\iint_S \mathrm{d}S$$

一定の数は外に出せる（5-11 の定数倍と同じ）

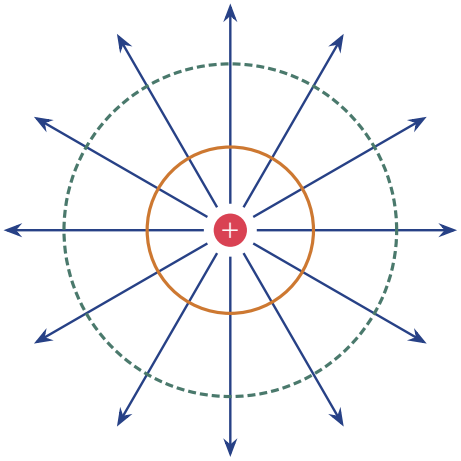
$$= |\vec{E}(R)|\times 4\pi R^2$$

残りは球面の面積（⑨）

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

点電荷の電場の大きさ（クーロンの法則）

R^2 が約分されて、**球の半径によらず** $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ になりました。電場は遠くほど R^2 に反比例して弱くなりますが、球面の面積は R^2 に比例して広くなるので、ちょうど打ち消し合うのです。（ε_0 は真空の誘電率という自然の定数で、$\varepsilon_0\approx 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$。2019 年の SI の改定からは測って決める値で、ほぼこの値です。高校物理の k とは $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ の関係です。）



小さな球（半径 R）も、大きな球（半径 $2R$）も、
電気力線を 12 本ずつ受ける。

大きな球では、場は $\frac{1}{4}$ に弱く、面積は 4 倍。

図 11　点電荷のまわりの電気力線（12 本だけかいた）。どの球も、同じ本数の線を受ける。流束が半径によらないのは、このため。

この「流束は、中の電荷だけで決まり、球の大きさによらない」ことが、8-11 で学ぶ**ガウスの法則**の出発点です。高校物理の「電気力線の本数 $N = 4\pi kQ$」は、この $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ のことです（$4\pi kQ = 4\pi \times \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times Q = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$）。

11 場合 G：閉じた面と記号 $\oiint$

箱やボールの表面のように、ぐるりと閉じた面の流束は、中から外へ出る量の合計です。閉じた面の面積分を、次の記号で書きます。

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

名前

$\iint$ に重なった◯は、「**面 S が閉じている**」という**印**です。8-7 の $\oint$（閉じた道）と同じ考えです。◯は、球の形や円の面積を表すのではありません。どの面かは、下の S が決めます。立方体の箱でも、ジャガイモのような形の袋でも、閉じていれば同じ $\oiint$ を使います。閉じた面の $\vec{n}$ は、いつも**外向き**です。

箱の 6 つの面を、1 つずつ

1 辺 1 の立方体の箱（$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 1$、$0 \leqq z \leqq 1$）から、場 $\vec{F} = (x^2,\ xy,\ -z)$ が外へ出る量を求めます。8-9 の発散の章でも使う場です。

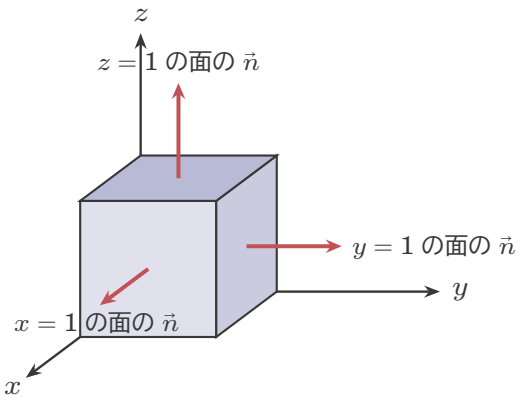


図 12 立方体の箱。見えている 3 つの面（$x = 1 \cdot y = 1 \cdot z = 1$）の外向きの $\vec{n}$ は、それぞれ $x \cdot y \cdot z$ の正の向き。見えない 3 つの面（$x = 0 \cdot y = 0 \cdot z = 0$）の $\vec{n}$ は、負の向き。

③楽をする段　分ける：閉じた面を、平らな面に

$\oiint_S$ は、6 つの平らな面の面積分の和に分けられます。どの面も軸に直角なので、1 つずつは場合 **B** です。

面	外向きの $\vec{n}$	$\vec{F} \cdot \vec{n}$	面積分（その面から出る量）
$x = 1$	$(1,\ 0,\ 0)$	$x^2 = 1$	$1 \times$ 面積$1 = 1$
$x = 0$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$-x^2 = 0$	0
$y = 1$	$(0,\ 1,\ 0)$	$xy = x$	$\int_0^1 \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = 0.5$
$y = 0$	$(0,\ -1,\ 0)$	$-xy = 0$	0
$z = 1$	$(0,\ 0,\ 1)$	$-z = -1$	$-1 \times 1 = -1$（入ってくる）
$z = 0$	$(0,\ 0,\ -1)$	$z = 0$	0

表 6 立方体の 6 つの面。$\vec{F}$ の中の文字には、その面の値（$x = 1$ の面なら $x = 1$）を入れる。

6 つをたすと、$1+0+0.5+0+(-1)+0=0.5$ です。

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \underbrace{1+0}_{x\text{ の面}} + \underbrace{0.5+0}_{y\text{ の面}} + \underbrace{(-1)+0}_{z\text{ の面}} = 0.5$$

箱からは、差し引き 0.5 が外へ出ています。$y=1$ の面では、x によって出る量がちがうので、ふつうの定積分を 2 回しました（内側 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 0.5$、外側 $\int_0^1 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5$）。8-9 では、この同じ場の発散が $3x-1$ になり、8-11 では、$3x-1$ を箱の中でたし合わせた値がこの 0.5 と同じになることを確かめます。

⑫ 場合 H：袋の形を変えても、答えは同じ

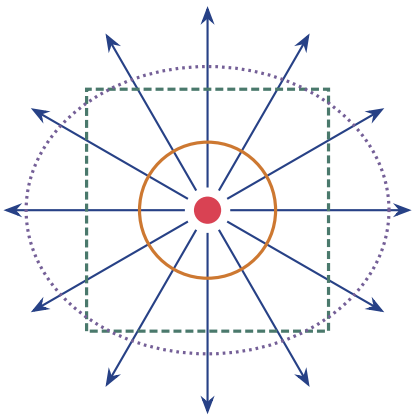
③楽をする段　袋を、計算が楽な形に取りかえる

⑩では、点電荷を囲む球の流束が、球の大きさによらず $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ になりました。では、袋を球ではなく、**立方体**にしたらどうでしょう。

ここからは、$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}=1$ になるように数をそろえた、次の場で考えます。

$$\vec{F} = \frac{(x,\ y,\ z)}{r^3} \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

半径 R の球なら、⑩と同じく $\dfrac{1}{R^2}\times 4\pi R^2 = 4\pi \approx 12.566$ です。



球（実線）・立方体（点線）・だ円の袋（細かい点線）

どの袋も、電荷から出る線を全部受ける。

だから、流束はどれも同じ 4π。

図 13　点電荷を囲む、形のちがう 3 つの袋（切り口）。袋の形を変えても、電荷から出る線はすべて袋を通りぬける。

立方体の袋を、対称性とコンピュータで

中心が原点、1 辺 2 の立方体（$-1 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）を袋にします。6 つの面は、原点から見てどれも同じ形・同じ距離なので、6 つの面の流束は等しくなります（対称性）。そこで、上の面（$z = 1$）だけを計算して 6 倍します。

上の面は $z = 1$ で平らなので場合 **B** で、$\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ です。だから、

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_z = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$$

です。これをふつうの定積分で計算するのは大変なので、表計算と同じく、面を小さなタイルに分けてたします（場合 **J** の数値のたし算）。

Python

```
import numpy as np
n = 100                                  # 1 辺を 100 こに分ける
t = (np.arange(n) + 0.5) / n * 2 - 1     # タイルのまん中（-1〜1）
X, Y = np.meshgrid(t, t)
Fz = 1 / (X**2 + Y**2 + 1)**1.5          # 上の面（z=1）での z 成分
one = (Fz * (2/n)**2).sum()              #「Fz ×タイルの面積」をたす
print(round(one, 4), round(6 * one, 4))
print(round(4 * np.pi, 4))
```

実行結果

```
2.0944 12.5667
12.5664
```

1 つの面は約 2.0944 で、6 つの面で約 12.5667 です。球の $4\pi \approx 12.5664$ とほぼ同じです（ちがいの 0.0003 は、タイルが有限の大きさだから。タイルを細かくすると近づく）。**袋を球から立方体に変えても、流束は同じ**でした。1 つの面は、ちょうど全体の $\frac{1}{6}$ です。

1 どんな形の袋でも

電荷が中にあれば、流束は 4π（$\frac{Q}{\varepsilon_0}$）。中の電荷だけで決まります。

2 電荷が外にあれば

袋の中に電荷がなければ、入ってきた線は必ず反対側から出ていくので、流束は 0 です。

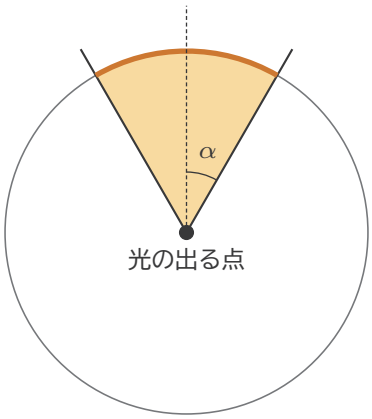
3 だから、計算が楽な袋を選んでよい

答えが変わらないなら、⑩の球のように「場が面に直角で一定」になる袋を選びます。これが、場合 **H**「袋を楽な形に取りかえる」です。

なぜ袋の形によらないのかは、8-9 の発散（点電荷の場は電荷の外で発散が 0）と、8-11 のガウスの定理で、きちんと説明します。

13 場合 I：立体角——点から見た見かけの大きさ

懐中電灯やスポットライトの光は、円すいの形に広がります。点から見て、面が「どれだけの広がりを占めて見えるか」を表すのが**立体角**（りったいかく）です。平面の角（ラジアン）が「半径 1 の円の弧の長さ」だったように（4-2）、立体角は「**半径 1 の球面の上で、その面が占める面積**」です。単位は sr（ステラジアン）です。



オレンジの部分：半径 1 の球面の上で、
円すいが切りとる「おわん」の面積

α：円すいの中心の線からの角（半分の角）

図 14　円すいの立体角。光の出る点を中心とする半径 1 の球面のうち、円すいの中にある「おわん」の部分の面積が、立体角。

半分の角が α の円すいなら、半径 1 の球面の、真上から α までの部分の面積です。⑨の球面のタイル（$R=1$）で直します。

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\alpha} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi \qquad R=1 \text{ の球面で、} \theta \text{ は } 0 \text{ から } \alpha \text{ まで}$$

$$= 2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\alpha} = 2\pi(1-\cos\alpha) \qquad \text{外側の } \varphi \text{ の積分は } 2\pi$$

Ω はギリシャ文字の大文字で「オメガ」と読みます。$\alpha = 90°$（半球）なら 2π、$\alpha = 180°$（全体）なら 4π です。

半分の角 α	30°	60°	90°	180°
立体角（sr）	0.842	$\pi \approx 3.14$	$2\pi \approx 6.28$	$4\pi \approx 12.57$
全体（4π）の何倍か	0.067	0.25	0.5	1

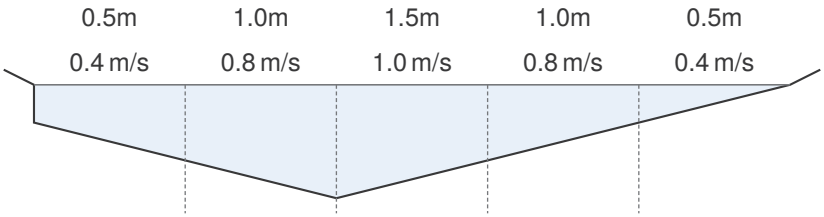
表 7 円すいの立体角。60° の円すいは、まわり全体のちょうど $\frac{1}{4}$。

半径 1 でない面や、ななめの面のときは、面のタイルを「点から見た向き」に直して r^2 でわります：$\Omega = \iint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2}\,\mathrm{d}S$。これは、⑫の場 $\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ の流束と同じ形です。だから、点を囲む閉じた面の立体角は、いつも 4π になります（⑫の答え）。

⑭ 場合 J：データだけのとき——川の流量

③楽をする段　式がなければ、数でたす

川の流量（1 秒間に流れる水の量）は、式ではわかりません。そこで、川のはばをいくつかの区間に分け、区間ごとに深さと流れの速さを測って、「速さ×深さ×はば」をたします。川の流量の観測で実際に使われている方法です（ふだんは流速計を使い、区間ごとにたして求める）。



はば 10 m を、2 m ずつ 5 つの区間に分けた（上の数は、区間の深さと平均の速さ）

図 15 川の断面（深さは見やすいように大きくかいた）。区間ごとに、深さと平均の速さを測る。

1 つの区間を通る量は「速さ×（深さ×はば）」です。流れは断面に直角なので、$\vec{v} \cdot \vec{n}$ は速さそのものです。

$0.5 \times 0.4 + 1.0 \times 0.8 + 1.5 \times 1.0$	はば 1 m あたり。左の 3 つの区間
$+1.0 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4$	右の 2 つの区間
$= 0.2 + 0.8 + 1.5 + 0.8 + 0.2 = 3.5$	5 つの区間をたした
$2 \times 3.5 = 7.0$	はば 2 m をかけた（m^3/s）

区間を細かくするほど、本当の面積分 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$ に近づきます。式がわからなくても、面積分の考え（タイルに分けて、直角な成分×面積をたす）は、そのまま使えるのです。

> **せいかくに言うと**
>
> **表と裏が決められない面**
>
> 流束は、面の表（正の向き）を決めてはじめて計算できます。ところが、細長い紙を 1 回ねじってはり合わせた「メビウスの帯」には、表と裏の区別がありません。帯にそって 1 周すると、表だったはずの側が裏につながってしまうのです。このような面では、どの場所でもなめらかにつながる $\vec{n}$ を選べないので、流束は決められません。この本で考える面（平らな面、球面、円柱面、箱の表面など）は、どれも表と裏が決められる面です。
>
> **$\vec{n}\,\mathrm{d}S$ の向きと、u・v の順**
>
> $\vec{n}\,\mathrm{d}S = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ は、u と v の順を入れかえると、外積が反対向きになります。球面で $(\theta,\ \varphi)$ の順にとると外向きになりますが、$(\varphi,\ \theta)$ の順にとると内向きになります。だから、計算の最後に「決めた表の向きと合っているか」を必ず確かめます。

たいせつ

面積分の 3 つの段

名前 **記号を読む：何を（$\vec{F}\cdot\vec{n}$ か f）・どの面で（S と表の向き。閉じた面は外向き）・1 枚の量（$\vec{n}\,\mathrm{d}S$）**

楽をする **直す前に：データだけ？　立体角？　平らで一様？　球面で一定？　閉じた面？**

直す **面を 2 つの数で表し、$\vec{n}\,\mathrm{d}S=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ で、ふつうの定積分を 2 回**

$$\underbrace{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_{v_1}^{v_2}\left(\int_{u_1}^{u_2}\vec{F}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v}_{\text{ふつうの定積分}}$$

場合分けの表 8-8（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	平らで、場が一様	$(\vec{F}\cdot\vec{n})\times A=\vec{F}\cdot(A\vec{n})$。$A\vec{n}$ は外積で
B	平らで、軸に直角	8-6 の重積分（長方形なら定積分を 2 回）
C	平らな円	極座標 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$、$r$ だけなら $2\pi r\,\mathrm{d}r$
D	球面・円柱面で一定	一定の値×面積（$4\pi R^2$、$2\pi R^2$、$2\pi RL$）
E	$z=g(x,\,y)$	$\left(-\frac{\partial g}{\partial x},\,-\frac{\partial g}{\partial y},\,1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。影の範囲で
F	球面・円柱面など	球面 $R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$、円柱面 $R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$
G	閉じた箱	面ごとに B でたす。どの面も外向き
H	点電荷 1 つの袋	中なら球に取りかえ（D）、外なら 0。ほかは 8-11
I	立体角	$2\pi(1-\cos\alpha)$、全体は 4π
J	データだけ	表計算で「$\vec{F}\cdot\vec{n}$ ×タイルの面積」をたす

この章で出てきたことば

流束（flux）　1 秒間に面を通りぬける量。$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$。

面積分　面をタイルに分け、1 枚ずつ量をかけてたし合わせ、細かくした先。操作の名前。

法線ベクトル $\vec{n}$　面に直角な、長さ 1 の矢印。閉じた面では外向き。

面積ベクトル　面積を長さ、面の向きを向きとする矢印 $A\vec{n}$。

立体角　点から見た、面の見かけの大きさ。半径 1 の球面の上の面積。単位はステラジアン（sr）。

記号カード　初めて出た章 8-8

$\vec{n}\,\mathrm{d}S$

読み方　エヌ・ディー・エス
意味　向きのついた小さなタイル。$\vec{n}$ は外向き（表向き）の長さ 1 の矢印、$\mathrm{d}S$ はタイルの面積
英語　vector area element

記号カード　初めて出た章 8-8

$\oiint_S$

読み方　閉じた面の面積分
意味　○は「面が閉じている」という印。形や面積ではない。どの面かは S で決める
英語　closed surface integral

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

閉曲面 S を貫く電場の流束は、

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A \tag{2.8}$$

で与えられる。ただし $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ は外向きの面素ベクトルである。

訳　「閉曲面」は閉じた面、「貫く」は通りぬける。Φ_E（ファイ・イー）は電場の流束。物理の本や多くの専門書では、閉じた面にも $\oint$ を 1 つだけ書き、$\int$ も 1 つで書く。どちらも○は「閉じている」という印で、この本の $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ と同じもの。太字の $\mathrm{d}\mathbf{S}$（面素ベクトル）は、この本の $\vec{n}\,\mathrm{d}S$。$\mathrm{d}\vec{A}$ と書く本もある。$\mathrm{d}A$ はタイルの面積（この本の $\mathrm{d}S$）。

もっと知りたい ★★★★★

電場の流束と「電束」（電気工学の本を読むとき）

この本と物理シリーズでは、$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を**電場の流束** Φ_E〔$\mathrm{N\,m^2/C}$〕とよびます。電気工学の本では、電場に ε_0 をかけた**電束密度** $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$〔$\mathrm{C/m^2}$〕を使い、その流束を**電束**〔C〕とよびます（この $\vec{D}$ は、場合分けの表の D とは別のものです）。

	この本・物理シリーズ	電気工学の本
閉じた面の積分	$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=Q$
よび名と単位	電場の流束〔$\mathrm{N\,m^2/C}$〕	電束〔C〕
$1.0\times10^{-9}\,\mathrm{C}$ を囲む袋	約 $113\,\mathrm{N\,m^2/C}$	$1.0\times10^{-9}\,\mathrm{C}$

両辺に ε_0 をかけただけで、同じ法則です。電束を使うと、右辺が中の電荷 Q そのものになるので、電気工学ではこの形がよく使われます。

ソラ：書き方がちがっても、「何を・どこで・1 枚の量」を読めば同じだね。

例題でたしかめよう

例題 1　網を通る水の量

川の水がどこでも 1.5 m/s で流れています。面積 0.4 m^2 の網を入れ、網に直角な向き $\vec{n}$ と流れのなす角 θ を、(1) 0°、(2) 60°、(3) 90° にしました。それぞれ、1 秒間に網を通る水の量を求めましょう。

考え方　**場合**：平らな網で、流れはどこでも同じ（表 8-8 の **A**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：網 S の上で「直角な成分×タイル」をたす。ここでは積分しないで済む。

楽をする　積分しない：通る量 $= vA\cos\theta$（①）。

式　(1) $1.5\times0.4\times\cos0^\circ = 1.5\times0.4\times1 = 0.6$

(2) $1.5\times0.4\times\cos60^\circ = 1.5\times0.4\times0.5 = 0.3$

(3) $1.5\times0.4\times\cos90^\circ = 1.5\times0.4\times0 = 0$

答え　(1) 0.6 m^3/s　(2) 0.3 m^3/s　(3) 0（網が流れと平行で、通りぬけない）

じぶんでとこう 1

水がどこでも 3 m/s で流れる水路に、面積 0.2 m^2 の網を入れます。網に直角な向きと流れのなす角が (1) 45°、(2) 90° のとき、1 秒間に網を通る水の量を求めましょう（$\cos45^\circ \approx 0.707$）。

例題 2　ななめの平面を通る量：外積で面積ベクトル

平面 $x+2y+2z=4$ の、座標軸で切りとられた三角形を、どこでも同じ流れ $\vec{F}=(1,\ 1,\ 1)$（m/s）が通りぬけます。三角形の面積と、1 秒間に通りぬける量を求めましょう（三角形の向きは、原点から遠ざかる向きを正とする）。

考え方　**場合**：平らな三角形で、流れはどこでも同じ（表 8-8 の **A**）

名前　$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：三角形 S の上でたす。ここでは積分しないで済む。

楽をする　積分しない：$\vec{F}\cdot(A\vec{n})$。$A\vec{n}$ は 2 つの辺の外積の半分（④）。

式　頂点：A$(4,\ 0,\ 0)$、B$(0,\ 2,\ 0)$、C$(0,\ 0,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 2,\ 0)$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4,\ 0,\ 2)$

外積の x 成分：$2\times 2-0\times 0=4$

外積の y 成分：$0\times(-4)-(-4)\times 2=8$

外積の z 成分：$(-4)\times 0-2\times(-4)=8$

半分にして $A\vec{n}=(2,\ 4,\ 4)$（法線 $(1,\ 2,\ 2)$ と同じ向き）

面積：$\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{36}=6$

通りぬける量：$(1,\ 1,\ 1)\cdot(2,\ 4,\ 4)=2+4+4=10$

答え　面積 $6\,\mathrm{m}^2$、通りぬける量 $10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

じぶんでとこう 2

平面 $2x+2y+z=4$ の、座標軸で切りとられた三角形を、どこでも同じ流れ $\vec{F}=(1,\ 2,\ 3)$（m/s）が通りぬけます。三角形の面積と、1 秒間に通りぬける量を求めましょう（原点から遠ざかる向きを正とする）。

例題 3　屋根に降る雨

上から見ると 8 m × 5 m の長方形で、30° かたむいた屋根があります。雨が真下に、1 時間に 4 mm の強さで降っています。(1) 屋根の本当の面積、(2) 1 時間に屋根が受ける雨水の量を求めましょう（$\cos 30° \approx 0.866$）。

考え方　**場合：**平らな屋根で、雨はどこでも同じ（表 8-8 の **A**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：屋根 S の上で、雨の直角な成分×タイルをたす。

楽をする　積分しない。雨と $\vec{n}$ のなす角も 30°（④の屋根）。

式　(1) $\dfrac{8\times 5}{\cos 30°} = \dfrac{40}{0.866} \approx 46.2$

(2) 4 mm ＝ 0.004 m。

$$0.004 \times \frac{40}{\cos 30°} \times \cos 30° = 0.004 \times 40 = 0.16$$

答え　(1) 約 46.2 m^2　(2) 0.16 m^3（160 L。上から見た面積だけで決まる）

じぶんでとこう 3

上から見ると 12 m × 5 m の長方形で、45° かたむいた屋根に、雨が真下に 1 時間に 6 mm の強さで降っています。(1) 屋根の本当の面積、(2) 1 時間に受ける雨水の量を求めましょう（$\cos 45° \approx 0.707$）。

例題 4　高さで強さが変わる風が、窓を通る量

はば 2 m、高さ 1.5 m の窓に、風が直角に吹きこんでいます。窓の下の辺からの高さ z〔m〕の所で、風の速さは $v = 0.8 + 0.4z$〔m/s〕です。1 秒間に窓を通る空気の量を求めましょう。

考え方　**場合**：平らで軸に直角な窓。風は高さで変わる（表 8-8 の **B**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：窓の上で「直角な成分×タイル」をたす。

直す　場所は横 x（0〜2）と高さ z（0〜1.5）。$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$、$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0.8 + 0.4z$。

式　内側：$\displaystyle\int_0^2 (0.8 + 0.4z)\,\mathrm{d}x = 2(0.8 + 0.4z) = 1.6 + 0.8z$

外側：$\displaystyle\int_0^{1.5} (1.6 + 0.8z)\,\mathrm{d}z = \Big[1.6z + 0.4z^2\Big]_0^{1.5}$

$= 2.4 + 0.9 = 3.3$

答え　$3.3\,\mathrm{m^3/s}$

じぶんでとこう 4

はば 1.5 m、高さ 2 m の窓に、風が直角に吹きこんでいます。窓の下の辺からの高さ z〔m〕の所で、風の速さは $v = 0.5 + 0.5z$〔m/s〕です。1 秒間に窓を通る空気の量を求めましょう。

例題 5　パイプの断面を通る水

半径 $R = 2\,\mathrm{cm}$ のパイプの中を、水がまん中で $u_{\max} = 0.1\,\mathrm{m/s}$、中心から r の所で $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ の速さで流れています。1 秒間に断面を通る水の量（流量）を求めましょう。また、平均の速さを求めましょう。

考え方　**場合：**平らな円の断面。速さは r だけで決まる（表 8-8 の **C**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：断面の円 S の上で、速さ×タイルをたす。

直す　細い輪に分ける：$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$（8-6 の場合 C′）。$r$ は 0 から R まで。

式
$$\int_0^R u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi u_{\max}\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi u_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi u_{\max}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{\pi R^2 u_{\max}}{2}$$

$R = 0.02$、$u_{\max} = 0.1$：$\dfrac{\pi \times 0.0004 \times 0.1}{2} \approx 6.28 \times 10^{-5}$

平均の速さ：流量÷断面積 $= \dfrac{\pi R^2 u_{\max}/2}{\pi R^2} = \dfrac{u_{\max}}{2} = 0.05$

答え　約 $6.28 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3/s}$（1 秒間に 62.8 mL）。平均の速さは 0.05 m/s（まん中の半分）

じぶんでとこう 5

半径 $R = 1.5\,\mathrm{cm}$ のパイプの中を、水がまん中で $u_{\max} = 0.4\,\mathrm{m/s}$、中心から r の所で $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ の速さで流れています。流量（mL/s）と平均の速さを求めましょう。

例題 6　対称な場：球面を通りぬける量

(1) 場 $\vec{F} = (x,\ y,\ z)$ が、原点を中心とする半径 2 の球面を外へ通りぬける量を求めましょう。

(2) $Q = 1.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ の点電荷を中心に置いた、半径 $0.1\,\mathrm{m}$ の球面と半径 $1\,\mathrm{m}$ の球面を通りぬける電場の流束を求めましょう（$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$）。

考え方　**場合**：球面で、場が面に直角、大きさが一定（表 8-8 の **D**）

名前　$\displaystyle\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：球面（閉じた面）全体で、外向きの成分×タイルをたす。

楽をする　一定の $\vec{F}\cdot\vec{n}$ を積分の外に出し、球面の面積 $4\pi R^2$ をかける（⑩）。

式　(1) $\vec{F} = (x,\ y,\ z)$ は原点から外向きで、長さは r。球面の上では

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = r = 2$$

$$2 \times 4\pi \times 2^2 = 32\pi \approx 100.5$$

(2) どちらの球も $\dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1.0 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} \approx 113$

答え　(1) $32\pi \approx 100.5$　(2) どちらも約 $113\,\mathrm{N\,m^2/C}$（半径によらない）

じぶんでとこう 6

(1) 場 $\vec{F} = (x,\ y,\ z)$ が、原点を中心とする半径 3 の球面を外へ通りぬける量を求めましょう。(2) $Q = 2.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ の点電荷を囲む半径 $0.5\,\mathrm{m}$ の球面を通りぬける電場の流束を求めましょう（$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$）。

例題 7　グラフの形の曲がった面：おわんを伏せた面

面 $z = 1 - x^2 - y^2$（$z \geqq 0$ の部分。おわんを伏せた形）を、場 $\vec{F} = (x,\ y,\ z)$ が上向きに通りぬける量を求めましょう。

考え方　**場合：**面が $z = g(x,\ y)$ のグラフ（表 8-8 の **E**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：$S$ は曲がった面。$\vec{n}$ は場所で変わる。

直す　$\vec{n}\,\mathrm{d}S = \left(-\dfrac{\partial g}{\partial x},\ -\dfrac{\partial g}{\partial y},\ 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。影の範囲は $x^2 + y^2 \leqq 1$（$z = 0$ になる円）なので、極座標に。

式　$g = 1 - x^2 - y^2$ より $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -2x$、$\dfrac{\partial g}{\partial y} = -2y$。

$\vec{n}\,\mathrm{d}S = (2x,\ 2y,\ 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\vec{F}\cdot(2x,\ 2y,\ 1) = 2x^2 + 2y^2 + z$。$z$ に $1 - x^2 - y^2$ を入れて

$x^2 + y^2 + 1$

極座標で $x^2 + y^2 = r^2$、$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r^2+1)\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \times \frac{3}{4}$$

答え　$\dfrac{3\pi}{2} \approx 4.71$（8-11 で、ガウスの定理を使って同じ答えになることを確かめる）

じぶんでとこう 7

面 $z = 4 - x^2 - y^2$（$z \geqq 0$ の部分）を、場 $\vec{F} = (0,\ 0,\ z)$ が上向きに通りぬける量を求めましょう。

例題 8　球面の一部：半球のドームを通る量

原点を中心とする半径 $R=2$ の上半分の球面（ドーム）を、場 $\vec{F}=(0,\ 0,\ z)$ が外向きに通りぬける量を求めましょう。

考え方　**場合**：球面の一部（表 8-8 の **F**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：ドーム S の上で、外向きの成分×タイルをたす。$\vec{n}$ は場所で変わる。

直す　球面のタイル：$\vec{n}=\vec{e}_r$、$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$（⑨）。上半分なので θ は $0\sim\dfrac{\pi}{2}$、φ は $0\sim2\pi$。

式　面の上では $z=R\cos\theta$。$\vec{e}_r$ の z 成分は $\cos\theta$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=z\times\cos\theta=R\cos^2\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} R\cos^2\theta\times R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\quad(\varphi\text{ の積分は }2\pi)$$

$u=\cos\theta$ とおくと $\mathrm{d}u=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$（5-16 の置換積分）。$\theta$ が $0\sim\frac{\pi}{2}$ で u は $1\sim0$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$$

$$2\pi\times2^3\times\frac{1}{3}=\frac{16\pi}{3}$$

答え　$\dfrac{16\pi}{3}\approx16.76$

じぶんでとこう 8

原点を中心とする半径 $R=3$ の上半分の球面を、場 $\vec{F}=(0,\ 0,\ z)$ が外向きに通りぬける量を求めましょう。

例題 9　向きのいらない面積分：ドームの屋根をぬるペンキ

半径 10 m の半球のドーム屋根の外側を、ペンキでぬります。

(1) $1\,\mathrm{m}^2$ あたり $0.2\,\mathrm{L}$ のペンキが要るとき、全部で何 L のペンキが要るでしょう。

(2) ドームの面積は、ドームの床（半径 10 m の円）の面積の何倍でしょう。

考え方　**場合：**球面の一部で、ぬる量は一定。面積は球面のタイルで（表 8-8 の **D** と **F**）

名前　$\displaystyle\iint_S 0.2\,\mathrm{d}S$：$\vec{F}\cdot\vec{n}$ のかわりに数 0.2 をかけてたす。

楽をする　0.2 は一定なので外に出す。残りは面積 $\iint_S \mathrm{d}S$。

式　面積：$\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2$

$2\pi\times 10^2 \approx 628.3$

(1) ペンキ：$0.2\times 628.3 \approx 125.7$

(2) 床の面積は πR^2。$\dfrac{2\pi R^2}{\pi R^2} = 2$

答え　(1) 約 126 L（ドームの面積は約 $628\,\mathrm{m}^2$）　(2) 2 倍（半径によらない）

じぶんでとこう 9

半径 3 m の球形のタンクの外側を、$1\,\mathrm{m}^2$ あたり $0.15\,\mathrm{L}$ のペンキでぬります。(1) 全部で何 L のペンキが要るでしょう。(2) タンクの表面積は、半径 3 m の円の面積の何倍でしょう。

例題 10 閉じた箱から出る量

1 辺 1 の立方体の箱（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から、場 $\vec{F} = (xy,\ y^2,\ z)$ が外へ出る量 $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$ を求めましょう。

考え方 **場合**：閉じた面が 6 つの平らな面（表 8-8 の **G**）

名前 $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$：箱の表面全体で、外向きの成分×タイルをたす。

楽をする 6 つの面に分ける。どの面も軸に直角なので、1 つずつは場合 B。外向きの $\vec{n}$ に気をつける。

式 $x = 1$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = xy = y$。$\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 0.5$

$x = 0$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = -xy = 0$。0

$y = 1$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = y^2 = 1$。$1 \times 1 = 1$

$y = 0$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = -y^2 = 0$。0

$z = 1$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = z = 1$。$1 \times 1 = 1$

$z = 0$：$\vec{F} \cdot \vec{n} = -z = 0$。0

合計 $0.5 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 2.5$

答え 2.5（8-9 の例題 5 と同じ場。8-11 で、発散 $3y + 1$ を箱の中でたした値と同じになる）

じぶんでとこう 10

1 辺 1 の立方体の箱（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から、場 $\vec{F} = (x + y,\ 2y,\ z^2)$ が外へ出る量を求めましょう。

例題 11　袋の形を変えても同じ：点電荷の場

原点にある点電荷の場を、数をそろえて次のようにします。

$$\vec{F} = \frac{(x,\ y,\ z)}{r^3} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

(1) 原点を中心とする半径 1 の球面と、半径 3 の球面を外へ通りぬける量を、それぞれ求めましょう。

(2) 原点を中心とする 1 辺 2 の立方体の袋の、1 つの面を通りぬける量と、6 つの面の合計を求めましょう。

(3) 原点が外にある袋（たとえば、中心が $(5,\ 0,\ 0)$ で半径 1 の球面）を通りぬける量は、いくつでしょう。

考え方　**場合：**閉じた面。わき出しは点電荷 1 つだけ（表 8-8 の **H**）

名前　$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：袋の表面全体でたす。名前は同じでも、袋の形はいろいろ。

楽をする　(1) は場合 D で外に出す。(2) は対称性で 6 つの面が等しいことを使う（⑫）。(3) は、中に電荷がない袋。

式　(1) 球面の上で $\vec{F}\cdot\vec{n} = \dfrac{1}{R^2}$。$\dfrac{1}{R^2} \times 4\pi R^2 = 4\pi$（$R = 1$ でも $R = 3$ でも）

(2) 立方体の袋も、中の電荷は同じなので、合計は球と同じ 4π

6 つの面は対称で等しいので、1 つの面は $\dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2.094$

（⑫の Python の 2.0944 と一致）

(3) 袋の中に電荷がないので、入ってきた分は全部出ていく。0

答え　(1) どちらも $4\pi \approx 12.57$　(2) 1 つの面 $\dfrac{2\pi}{3} \approx 2.09$、合計 4π　(3) 0

じぶんでとこう 11

点電荷の場を $\vec{F} = \dfrac{3(x,\ y,\ z)}{r^3}$ とします（例題 11 の 3 倍の強さ）。(1) 原点を中心とする半径 2 の球面を外へ通りぬける量、(2) 原点を中心とする 1 辺 4 の立方体の袋の、1 つの面を通りぬける量を求めましょう。

例題 12　立体角：ライトの光が届く広がり

小さな電球が、どの向きにも同じ強さで、全部で 2 W の光を出しています。この電球を、半分の角 $\alpha = 60°$ の円すいの形の穴から見ると、(1) 穴の立体角、(2) 全体の何倍か、(3) 穴から出ていく光の量を求めましょう。

考え方　**場合：**点から見た見かけの大きさ（表 8-8 の **I**）

名前　$\Omega = \displaystyle\iint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2}\,\mathrm{d}S$：穴の口の面を、点から見た向きでたす。

直す　半径 1 の球面で、θ が $0 \sim \alpha$ の部分の面積：$2\pi(1-\cos\alpha)$（⑬）。全体は 4π。

式　(1) $2\pi(1-\cos 60°) = 2\pi(1-0.5) = \pi$

(2) $\dfrac{\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{4}$

(3) $2 \times \dfrac{1}{4} = 0.5$

答え　(1) $\pi \approx 3.14\,\mathrm{sr}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) 0.5 W

じぶんでとこう 12

例題 12 の電球（全部で 2 W）を、半分の角 $\alpha = 30°$ の円すいの穴から見ます。(1) 穴の立体角、(2) 全体の何倍か、(3) 穴から出ていく光の量を求めましょう（$\cos 30° \approx 0.866$）。

例題 13　データから川の流量を求める

はば 8 m の川を、2 m ずつ 4 つの区間に分けて測ったところ、深さは岸から順に 0.4 m、0.8 m、0.8 m、0.4 m、平均の速さは 0.3 m/s、0.6 m/s、0.6 m/s、0.3 m/s でした。川の流量を求めましょう。

考え方　**場合：**式がなく、データだけ（表 8-8 の **J**）

名前　$\displaystyle\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：川の断面 S の上でたす。式がないので、区間に分けて数でたす。

楽をする　区間ごとに「速さ×（深さ×はば）」を求めて、たす（⑭）。流れは断面に直角。

式　区間ごと：$0.4\times0.3=0.12$、$0.8\times0.6=0.48$、0.48、0.12（はば 1 m あたり）

はば 2 m をかけて、たす：

$$2\times(0.12+0.48+0.48+0.12)=2\times1.2=2.4$$

答え　$2.4\ \mathrm{m^3/s}$

じぶんでとこう 13

はば 6 m の川を、2 m ずつ 3 つの区間に分けて測ったところ、深さは 0.6 m、1.2 m、0.6 m、平均の速さは 0.5 m/s、1.0 m/s、0.5 m/s でした。川の流量を求めましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

①「名前」のまま、場×面積とする

✕ 窓の風の流束は、$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = v \times \text{面積} = 1\times 2 = 2$

○ 風が高さで変わるので、ふつうの定積分に直す（⑤）

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_0^2\int_0^1 (1+0.5z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 3$$

「場×面積」でよいのは、場が面の上で一定のとき（場合 A・D）だけです。場所で変わるときは、名前をふつうの定積分に直します。

⚠ まちがえやすいところ

② $\vec{F}\cdot\vec{n}$ のかわりに $|\vec{F}|$ をかける

✕ 60° 回した網を通る量は、$2\times 0.5 = 1.0$

○ $\vec{v}\cdot\vec{n}\times A = 2\times\cos 60°\times 0.5 = 0.5$

面にそった成分は通りぬけません。かけるのは、面に直角な成分 $\vec{F}\cdot\vec{n}$ です。網を流れと平行に置けば、どんなに大きな網でも、通りぬける量は 0 です。

⚠ まちがえやすいところ

③ 閉じた面の $\vec{n}$ を内向きにする

✕ $x = 0$ の面の $\vec{n}$ を $(1,\ 0,\ 0)$

○ 外向きの $(-1,\ 0,\ 0)$

閉じた面の $\vec{n}$ は、どの面も外へ。逆だと符号が逆になります。

⚠ まちがえやすいところ

④ 曲がった面で $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ とする

✕ 曲がった面のタイルを $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

○ 外積で作る（場合 E）

$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ は影の面積。かたむいた所のタイルは影より大きい。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 球面で $R^2 \sin\theta$ を忘れる

✕ 球面の面積を $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ でたす

○ $\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

角は長さではありません。辺は $R\,\mathrm{d}\theta$ と $R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$（単位が m^2 かで気づける）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $\oiint$ の○を「球の面」と思う

✕ $\iint_S$ は球面の上の積分

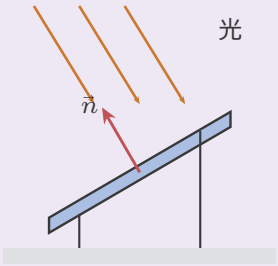
○ ○は「閉じている」印

どの面かは下の S で決めます。箱の流束も $\oiint$ で書きます（⑪）。

物理・工学ではこう使う

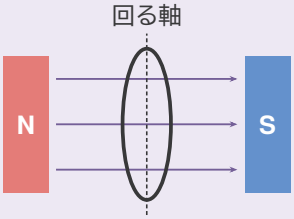
太陽電池パネルの向き

晴れた日の昼、地面に届く太陽の光は、光に直角な面 $1\,\mathrm{m}^2$ あたりおよそ $1000\,\mathrm{W}$ です。面積 $1.6\,\mathrm{m}^2$、光を電気に変える割合 20% のパネルを光に直角に向けると、$1000 \times 1.6 \times 0.2 = 320\,\mathrm{W}$。光と $\vec{n}$ の角が $60°$ になると、$\cos 60° = 0.5$ で $160\,\mathrm{W}$ にへります。パネルを南に向け、地域ごとに決めた角度でかたむけるのは、1 年を通して $\cos\theta$ を大きくするためです。



発電機と磁束

磁場 $\vec{B}$ の中でコイルを回すと、コイルを通りぬける磁場の流束（磁束）$\Phi = BA\cos\theta$ が、回る角 θ とともに変わります。磁束が変わると、コイルに電圧が生まれます（電磁誘導。8-14、物理電-8）。発電所の発電機も、自転車のライトの発電機も、この「流束の変化」を利用しています。

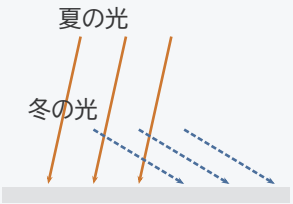


電線を流れる電流

電線の中の電流は、電流密度 $\vec{j}$（$1\,\mathrm{m}^2$ あたりの電流の矢印）の流束です。断面積 $2\,\mathrm{mm}^2$ の銅線に、電流密度 $5\,\mathrm{A/mm}^2$ が断面に直角に一様に流れていれば、電流は $5 \times 2 = 10\,\mathrm{A}$ です（場合 A）。電線の太さは、電流密度が大きくなりすぎて熱くならないように決めます。

コラム　夏が暑く、冬が寒いわけ

太陽の光は、遠くからほぼ平行にやってくる「一様な流れ」です。地面が受ける光の量は、場合 A のとおり「光の強さ×面積× $\cos\theta$」で、θ は光と地面の $\vec{n}$（真上）のなす角です。東京（北緯約 35.7°）では、昼の太陽の高さが、夏至のころは約 78°、冬至のころは約 31° です（地球の軸のかたむき 23.4° から計算した値）。光と真上のなす角は 12° と 59° なので、$\cos 12° \approx 0.98$、$\cos 59° \approx 0.51$。同じ $1\,\mathrm{m}^2$ の地面が受ける光は、冬は夏のおよそ半分です（空気の層での弱まりは考えない）。季節があるのは、太陽までの距離ではなく、この $\cos\theta$ のちがいが大きな理由の 1 つです（昼の長さのちがいも効きます）。



流れ図でたどってみよう（まとめの練習）

章末問題に進む前に、図 7・図 8 の流れ図を、もう一度上からたどってみましょう。次の面積分は、表 8-8 のどの場合でしょう。

1 水平に置いた面積 $0.5\,\mathrm{m}^2$ の平らな板を、どこでも同じ流れ $\vec{v} = (0,\ 0,\ 3)$（m/s）が通りぬける量

答え：**A**。平らな面で、場が一様。$3 \times 0.5 = 1.5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。

2 半径 2 の球面から、中心から外向きで大きさ 5 の場が出ていく量

答え：**D**。球面の上で $\vec{F} \cdot \vec{n} = 5$ が一定。$5 \times 4\pi \times 2^2 = 80\pi$。

3 1 辺 2 の立方体の箱（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 2$）から、場 $\vec{F} = (x,\ 0,\ 0)$ が出ていく量

答え：**G**。閉じた面で、箱の形。$x = 2$ の面だけが $2 \times 4 = 8$。

4 xy 平面の半径 1 の円板を、場 $\vec{F} = (0,\ 0,\ 1 - r^2)$（$r$ は中心からの距離）が通りぬける量

答え：**C**。平らな円の面で、場は場所で変わる。

5 曲がった屋根 $z = x^2 + y^2$（$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 1$）を、真上へ向かう流れ $\vec{F} = (0,\ 0,\ 1)$ が通りぬける量

答え：**E**。曲がった面で、$z = g(x,\ y)$ のグラフ。

6 30 枚のタイルごとに測った、風の直角な成分とタイルの面積の表から、通りぬける空気の量を求める

答え：**J**。式がなく、データだけ。

章末問題　8-8 のまとめ

基本 ★★★★★

1 水がどこでも 2.5 m/s で流れています。面積 0.6 m^2 の網を入れ、網に直角な向きと流れのなす角が（1）0°、（2）60° のとき、1 秒間に網を通る水の量を求めましょう（例題 1）。

2 平面 $3x + 2y + z = 6$ の、座標軸で切りとられた三角形を、どこでも同じ流れ $\vec{F} = (1,\ 1,\ 1)$（m/s）が通りぬけます。面積ベクトル $A\vec{n}$（原点から遠ざかる向き）と、1 秒間に通りぬける量を求めましょう（例題 2）。

3 上から見ると 15 m × 8 m の長方形で、20° かたむいた屋根に、雨が真下に 1 時間に 2 mm の強さで降っています。1 時間に受ける雨水の量を求めましょう（例題 3）。

4 はば 1 m、高さ 3 m の窓に、風が直角に吹きこんでいます。窓の下の辺からの高さ z〔m〕の所で、風の速さは $v = 0.6 + 0.2z$〔m/s〕です。1 秒間に窓を通る空気の量を求めましょう（例題 4）。

5 半径 $R = 0.5\,\mathrm{cm}$ のパイプの中を、水が中心で $u_{\max} = 0.6\,\mathrm{m/s}$、中心から r の所で $u = u_{\max}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ の速さで流れています。流量（mL/s）を求めましょう（例題 5）。

6 閉じた面から外へ出る量を求めましょう。

（1）場 $\vec{F} = (x,\ y,\ z)$ が、原点を中心とする半径 1.5 の球面を外へ通りぬける量（例題 6）

（2）1 辺 1 の立方体の箱（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から、場 $\vec{F} = (2x,\ y^2,\ -z)$ が外へ出る量（例題 10）

7 はば 9 m の川を、3 m ずつ 3 つの区間に分けて測ったところ、深さは 1.0 m、2.0 m、1.0 m、平均の速さは 0.5 m/s、0.9 m/s、0.5 m/s でした。川の流量を求めましょう（例題 13）。

8 半分の角 $\alpha = 45°$ の円すいの立体角と、それが全体の何倍かを求めましょう（$\cos 45° \approx 0.707$）（例題 12）。

チャレンジ ★★★★★

9 面 $z = 2 - x^2 - y^2$（$z \geqq 0$ の部分）を、場 $\vec{F} = (x,\ y,\ 0)$ が上向きに通りぬける量を求めましょう（例題 7）。

10 原点を中心とする半径 $R = 4$ の上半分の球面を、場 $\vec{F} = (0,\ 0,\ z)$ が外向きに通りぬける量を求めましょう（例題 8）。

11 点電荷の場を $\vec{F} = \dfrac{2(x,\ y,\ z)}{r^3}$ とします。（1）原点を中心とする半径 5 の球面を外へ通りぬける量、（2）原点を中心とする 1 辺 2 の立方体の袋の 1 つの面を通りぬける量、（3）原点が外にある袋を通りぬける量を求めましょう（例題 11）。

ふりかえり　できるようになったかな？

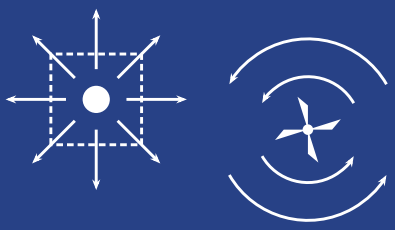
- [ ] 網を通る水の量が、流れの「面に直角な成分」×面積で決まることを説明できる。 → 297 ページ
- [ ] 平らな面の流束を、法線ベクトルの内積と重積分で求められる。 → 301 ページ
- [ ] 場合分けの表で、曲がった面や閉じた面の面積分をふつうの定積分に直せる。 → 307 ページ

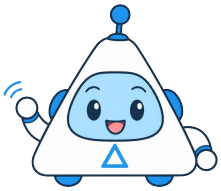
第８巻　第３部

発散と回転

3

- 蛇口から広がる水の流れを、数で表すには？
- 風車が回るかどうかは、何で決まる？
- 中のわき出しと、外へ出ていく量の関係は？





この部では、流れの中に小さな箱や風車を置いて、場所ごとの「わき出し」と「うず」を数で表すよ。電気・磁気や水の流れの式を読むための、大事な道具だよ。

この部で学ぶこと

8-9 わき出しと吸いこみ：発散 div ★★★★★ P.350

小さな箱から、どれだけ出ていく？

8-10 うず：回転 rot ★★★★★ P.396

小さな風車を置くと、回るかな？

8-11 中と外をつなぐ：ガウスの定理とストークスの定理 ★★★★★ P.440

中のわき出しを全部たすと、外へ出る量になる

8-12 ならす働き：ラプラシアン ★★★★★ P.492

まわりの平均との差が、変化を決める

この部を読むと…

発散・回転・ラプラシアンの意味を、小さな箱と風車で説明し、ガウスの定理・ストークスの定理で「中」と「外」をつなげられるようになります。

第 3 部　発散と回転

★★★★★

8-9 わき出しと吸いこみ：発散 div

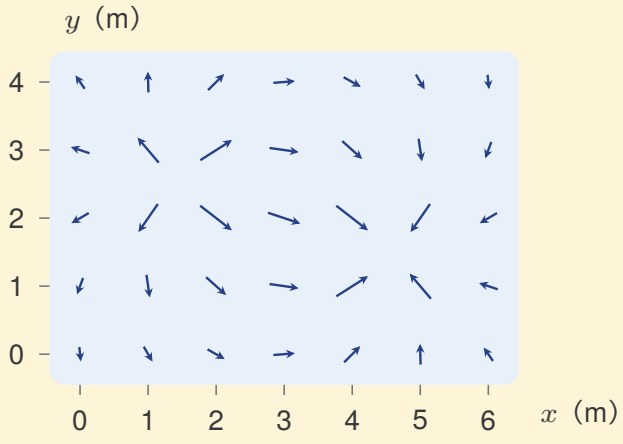
道しるべ　この章の前に 4-12 4-13 8-2 8-4 8-5 8-8
この章の先に 8-10 8-11 8-12 8-13 8-14

この章でできるようになること

- ★★★ 矢印の図にマスを置いて、わき出しと吸いこみを見分けられる。
- ★★★★ マスの辺を通る量から、表計算で発散を求められる。
- ★★★★★ 発散を偏微分の和で計算し、流束や連続の式と結びつけられる。

はてな？

広い池の水面の一部（6 m × 4 m）で、水の流れを調べました。矢印は、その点の水の流れの向きと速さです（速いほど長くかいてあります）。池の底には、水がわき出してくる口と、水が吸いこまれる口が、1 つずつかくれています。どこにあるでしょう。



8-5 では、場所ごとに矢印が 1 本ずつある「ベクトル場」を、図にかいて見ました。8-8 では、矢印の場が面を通りぬける量（流束）を、面積分で求めました。この章では、その 2 つを組み合わせて、「**水がどこで生まれて、どこで消えているか**」を見つける道具を作ります。

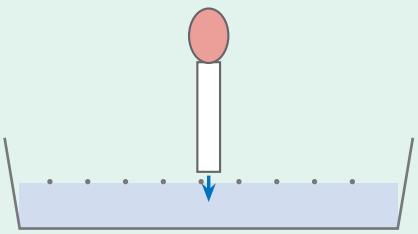
矢印をながめているだけでは、わき出しの口はなかなか見つかりません。そこで、流れの中に小さな「箱」を置き、箱から出ていく水と入ってくる水を数えます。数えるだけなら、たし算とひき算でできます。最後に、箱を小さくしていくと、8-2 の偏微分が出てきます。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、図と表計算だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。図と数にもどりながら、ゆっくり進みましょう。

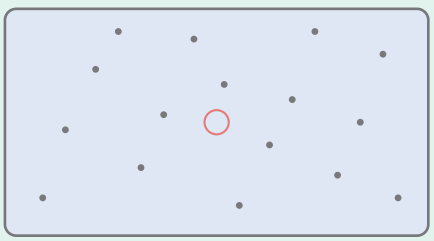
やってみよう　水を出す所、吸いこむ所を見よう

用意するもの　浅いバット（なければ大きな平たい皿）、水、こしょう（またはちぎった紙くず）、スポイト 2 本

1. バットに深さ 1 cm ほど水を入れ、こしょうを水面にうすくふる。
2. まん中で、スポイトから水をゆっくり出す。こしょうの動きを、ノートに矢印でスケッチしよう。
3. 水が静かになったら、こんどはスポイトで水をゆっくり吸いこむ。同じようにスケッチしよう。
4. 2 本のスポイトで、出すのと吸うのを同時にやってみよう。



横から見たところ



上から見たところ

水を出した所のまわりでは、こしょうは四方へ広がり、矢印はみな**外向き**になります。吸いこんだ所のまわりでは、矢印はみな**内向き**です。2 本を同時に使うと、出した所から吸った所へ、ぐるっと回りこむ流れができます。はてな？の池とよく似た流れです。

水がわいて出てくる所を**わき出し**（わきだし）、水が消えていく所を**吸いこみ**（すいこみ）といいます。スポイトのように口が見えていればすぐわかります。でも、池の底の口は見えません。見えるのは、水面の矢印だけです。矢印から口を見つける方法を考えましょう。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 8-8　面を通りぬける量（流束）は、流れの「面に直角な成分」×面積。向きは、面の法線ベクトル $\vec{n}$ で決める。閉じた面では $\vec{n}$ を外向きにとり、外へ出る量を正にする。
- 8-2　偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は、ほかの文字（y や z）を止めて、x だけを動かしたときの変化の割合。止めた文字は数と同じに扱う。
- 8-5　主役の場：広がる $(x,\ y)$、集まる $(-x,\ -y)$、そろった流れ $(1,\ 0)$、うず $(-y,\ x)$、ずれ $(y,\ 0)$、側溝 $(x,\ 0)$。$(x,\ y)$ は場所、出てくる組 $(v_x,\ v_y)$ は矢印。
- 8-4　ナブラ $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$。$\nabla f$ は $\mathrm{grad}\, f$ と同じ。
- 4-12　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$。成分どうしをかけて、たす。答えは 1 つの数。

数学の道具

目でわかる　小さな箱を置いてみる　★★★

① 箱から出る量と入る量をくらべる

流れの中に、目に見えない小さな箱を置いてみます。平面の流れなら、箱は方眼の 1 マスです。マスの 4 つの辺を通って、1 秒間に

（外へ出ていく水の量）－（中へ入ってくる水の量）

を数えます。この差を「出－入」とよぶことにします。3 つの場合を図にしました。

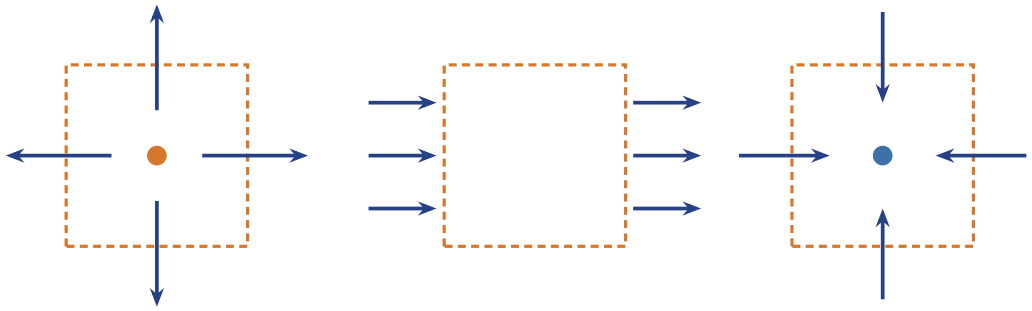


図 1　点線のマスの辺を通る矢印を数える（矢印 1 本を「1」と数えた）。左はマスの中に水の出る口、右は吸いこむ口がある。中は口がなく、入った分だけ出ていく。

- 「出－入」が**正**なら、マスの中で水が生まれています。マスの中は**わき出し**です。
- 「出－入」が**負**なら、マスの中で水が消えています。マスの中は**吸いこみ**です。
- 「出－入」が **0** なら、入った分だけ出ていきます。わき出しでも吸いこみでもありません。

なぜ、これでわかるのでしょう。水は、勝手にふえたり消えたりしません。マスの中に口がなければ、マスに入った水は、どこかの辺から必ず出ていきます。だから「出－入」は 0 です。0 でないのは、マスの中に、水を足したり取ったりする口があるときだけです。

大きさをそろえる：1 平方メートルあたりにする

出入りの量は、箱の大きさでも変わります。同じ流れの中でも、大きな箱ほど、たくさんの量が出入りします。たとえば、**雨水がどこにでも少しずつ流れこむ**みぞでは、長さ 1 m の区間の出入りの差より、2 m の区間の差のほうが 2 倍大きくなります。これでは、場所どうしをくらべられません。

そこで、「出－入」を箱の面積でわって、**1 平方メートルあたり**の量にそろえます。人口を面積でわって「1 平方キロメートルあたりの人数（人口密度）」にするのと同じ考え方です。こうすれば、箱の大きさがちがっても、同じ物差しでくらべられます。

たいせつ

小さな箱から出ていく量（出－入）を、箱の大きさ（平面なら面積、空間なら体積）でわったものを、その場所の発散（はっさん）といいます。

$$\text{発散} = \frac{\text{出} - \text{入}}{\text{箱の大きさ}}$$

記号は $\operatorname{div}\vec{v}$（ダイバージェンス）

発散が正の所がわき出し、負の所が吸いこみ。

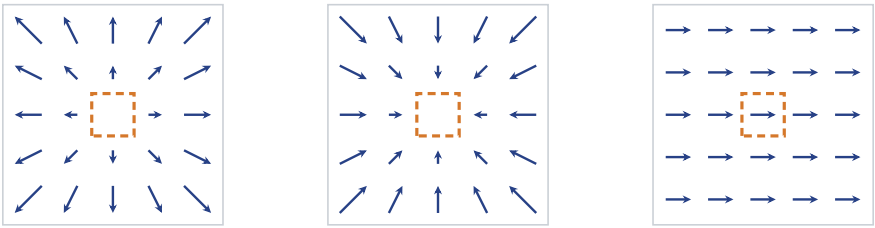
div は、英語の divergence（ダイバージェンス：広がって出ていくこと）の頭の 3 文字です。$\vec{v}$ は流れの速さの矢印（速度）です。「$\vec{v}$ という矢印の場の、発散」と読みます。

コラム　「発散」という名前

divergence ということばを、いまの意味で使ったのは、イギリスの数学者クリフォードで、1878 年の本『動力学の要素（Elements of Dynamic）』だと伝えられています。それより前に、電磁気学の式を整えたマクスウェルは、符号を反対にした量を convergence（集まること：収束）とよんでいました。吸いこみの強さをはかる、という向きの名前です。日本語の「発散」は、divergence を訳したことばです。（数学には、数列が限りなく大きくなる「発散」もあります。名前は同じですが、別の意味です。）

② いろいろな流れでくらべる

8-5 の主役の場 6 つに、同じ大きさのマス（点線）を置いて、出入りをくらべてみます。矢印は、見やすいように縮めてかいてあります。



（ア）広がる $(x,\ y)$　　（イ）集まる $(-x,\ -y)$　　（ウ）そろった流れ $(1,\ 0)$

出＞入：発散は正　　出＜入：発散は負　　出＝入：発散は 0

図 2　主役の場（ア）～（ウ）。

1 つずつ、マスの辺を見ていきます。

① （ア）広がる

マスのどの辺でも、矢印は外へ向いています。出る一方なので「出－入」は正です。マスをどこに置いても同じで、どの場所も少しずつわき出しています。

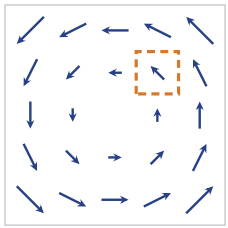
② （イ）集まる

（ア）の矢印を全部逆向きにした流れです。入る一方なので「出－入」は負。どこも吸いこみです。

③ （ウ）そろった流れ

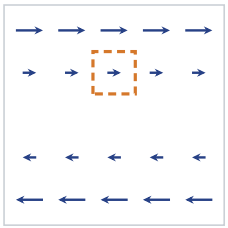
左の辺から入った水が、同じだけ右の辺から出ます。上と下の辺は、水が辺にそって流れるだけで、通りぬけません。だから「出－入」は 0 です。

残りの 3 つの場も、同じように見ていきます。



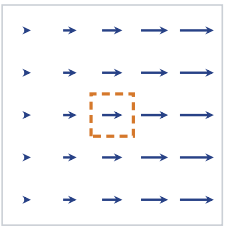
（エ）うず $(-y,\ x)$

出＝入：発散は 0



（オ）ずれ $(y,\ 0)$

出＝入：発散は 0



（カ）側溝 $(x,\ 0)$

出＞入：発散は正

図 3　主役の場（エ）～（カ）。（カ）は、右へ行くほど速い流れの一部を、矢印がみな右向きになるようにずらしてかいた。

4 （エ）うず

水はぐるぐる回っています。それでも、マスに入った分は、反対側の辺からちょうど同じだけ出ていきます。回るようすは、8-10 の「回転 rot」で調べます。**回っていても、発散は 0** です。

5 （オ）ずれ

上へ行くほど右向きに速い流れです。左の辺から入る量と右の辺から出る量は、同じ高さでは同じ速さなので、等しくなります。上と下の辺は、水が辺にそって流れるだけです。発散は 0 です。

6 （カ）側溝

矢印はみな右向きです。ところが、右へ行くほど長い（速い）ので、右の辺から出る量は、左の辺から入る量より多くなります。発散は正です。

向きがそろっていても、わき出しがある

（カ）は、雨の日の道路わきのみぞ（側溝）に似ています。雨水が、みぞ全体に少しずつ流れこみます。そのため、下流ほど水が多く、速く流れます。

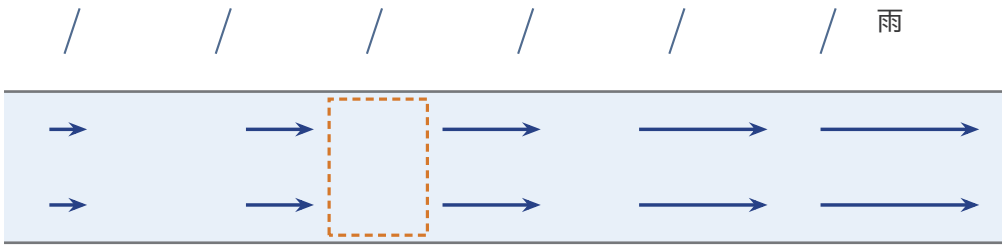


図 4 側溝の流れ。点線のマスでは、右の辺から出る量のほうが多い。雨水が、マスの中で流れに加わっているから。

矢印はみな右向きで、広がっても集まってもいません。それでも、どのマスでも出る量が入る量より多く、発散は正です。雨水が、みぞのどこでも少しずつ「わき出し」になっているのです。

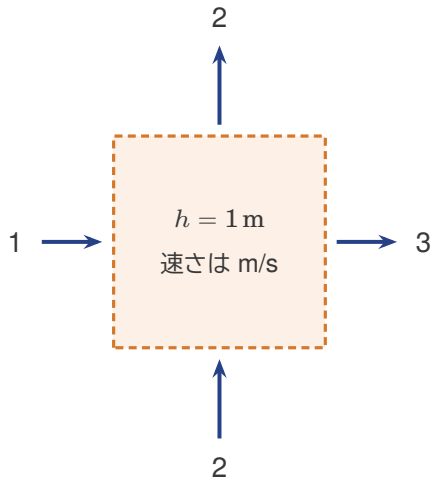
たいせつ

発散は、矢印の向きではなく、出る量と入る量の差で決まる。
回っていても 0（エ）。向きがそろっていても正のことがある（カ）。

手でわかる マスの 4 つの辺で数える ★★★★

③ 速さ×辺の長さで、通る量を数える

こんどは、数で計算します。1 辺 $h = 1\,\mathrm{m}$ のマスの 4 つの辺で、辺をまっすぐ通りぬける水の速さがわかっているとします。



右の辺では、水が 3 m/s で外へ出ています。左の辺では 1 m/s で中へ入っています。上の辺では 2 m/s で出て、下の辺では 2 m/s で入っています。

図 5　1 辺 1 m のマス。数は、辺をまっすぐ通りぬける水の速さ（m/s）。

1 秒間に 1 つの辺を通る水の量は、「**速さ×辺の長さ**」です。3 m/s なら、水は 1 秒間に 3 m 進みます。はば 1 m の辺を通った水は、たて 3 m・横 1 m の長方形の分です。8-8 の流束（速さ×面積）と同じ考え方です。平面の流れなので、量は面積（m^2）で数えます（深さ 1 m ぶんの水の体積と考えてもかまいません）。

出る量をプラス、入る量をマイナスにして、4 つの辺を合計します。

$$(+3\times 1)+(-1\times 1)+(+2\times 1)+(-2\times 1)$$

出る量はプラス、入る量はマイナス

$$=3-1+2-2=2$$

1 秒間の「出－入」は $2\,\mathrm{m}^2$

マスの面積は $1\times 1=1\,\mathrm{m}^2$ なので、1 平方メートルあたりにすると、

$$\text{発散}=\frac{2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}}{1\,\mathrm{m}^2}=2\,/\mathrm{s}$$

正なので、このマスはわき出しです。単位の「/s」は「毎秒」と読みます。「1 秒間に、1 平方メートルあたり $2\,\mathrm{m}^2$ の水が生まれている」という意味です。m^2 と m^2 が約分されて、/s だけが残りました。

❹ 右向き・上向きを正にして書く

表計算でたくさんのマスを計算するには、「出る・入る」をいちいち決めるのは大変です。そこで、8-5 と同じように、x 方向（右向き）の速さを v_x、y 方向（上向き）の速さを v_y と書きます。**左向きなら v_x はマイナス、下向きなら v_y はマイナス**です。すると、4 つの辺はこうなります。

辺	外へ向かう向き	v_x・v_y が正のとき	外へ出る量（出－入への足し方）
右の辺	右	右へ流れる＝出る	$+(\text{右の } v_x) \times h$
左の辺	左	右へ流れる＝**入る**	$-(\text{左の } v_x) \times h$
上の辺	上	上へ流れる＝出る	$+(\text{上の } v_y) \times h$
下の辺	下	上へ流れる＝**入る**	$-(\text{下の } v_y) \times h$

表 1 左と下の辺は、外へ向かう向きが、v_x・v_y の正の向きと反対。だから、ひく。

左の辺で水が左向きに流れていれば、v_x はマイナスです。「マイナスの数をひく」ので、たすことになり、ちゃんと「出る」の分になります。符号は、自動でそろうのです。4 つをたして、面積 $h \times h$ でわると、

$$\text{発散} \approx \frac{(\text{右の } v_x) - (\text{左の } v_x)}{h} + \frac{(\text{上の } v_y) - (\text{下の } v_y)}{h}$$

（$h \times h$ でわるとき、辺の長さ h と約分されて、h が 1 つ残ります。）「$\approx$」は「ほぼ等しい」です。マスの辺の上で速さが変わるとき、辺のまん中の速さを使うと、よい近さになります（⑤で、等号になるわけを見ます）。

図 5 のマスでは、$\frac{3-1}{1} + \frac{(-2)-(-2)}{1}$ ではありません。下の辺の水は上向きに流れて入っているので、下の v_y は $+2$ です。だから $\frac{3-1}{1} + \frac{2-2}{1} = 2$ で、前と同じ答えになります。

5 表計算で、池の口をさがす

いよいよ、❓はてな？の池です。池を 1 辺 1 m のマス 6 × 4 に分けます。マスの辺を 1 秒間に通る水の量（辺にそった速さの平均×辺の長さ）を、流れの計算から求めて、表計算のシートに入れました。8-1 と同じように、シートの行は北（上）から、列は西（左）から並べてあります。

たての辺を右向きに通る量（v_x の量。右向きが正）は、7 本の線 $x = 0, 1, \ldots, 6$ の上の、4 つの段の辺です。

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
2	−0.18	−0.16	0.45	0.45	0.30	0.09	−0.02
3	−0.28	−0.83	1.22	0.70	0.55	−0.11	−0.15
4	−0.15	−0.11	0.55	0.70	1.22	−0.83	−0.28
5	−0.02	0.09	0.30	0.45	0.45	−0.16	−0.18

表 2　2 行めは y が 3〜4 の段、3 行めは 2〜3、4 行めは 1〜2、5 行めは 0〜1 の段（単位は m^2/s。小数第 2 位までに丸めて見せた）。

横の辺を上向きに通る量（v_y の量。上向きが正）は、5 本の線 $y = 4, 3, 2, 1, 0$ の上の、6 つの列の辺です。

	A	B	C	D	E	F
6	0〜1	1〜2	2〜3	3〜4	4〜5	5〜6
7	0.22	0.30	0.14	−0.06	−0.17	−0.17
8	0.24	0.91	0.14	−0.22	−0.37	−0.28
9	−0.32	−1.04	−0.37	−0.37	−1.04	−0.32
10	−0.28	−0.37	−0.22	0.14	0.91	0.24
11	−0.17	−0.17	−0.06	0.14	0.30	0.22

表 3　7 行めは $y = 4$ の線、8 行めは $y = 3$、9 行めは $y = 2$、10 行めは $y = 1$、11 行めは $y = 0$ の線（6 行めの「0〜1」などは x の範囲。単位は m^2/s）。

左上のマス（x が 0〜1、y が 3〜4）を考えます。右の辺は B2、左の辺は A2、上の辺は A7、下の辺は A8 です。表 1 のとおり「右−左＋上−下」なので、13 行めの A13 に

```
=(B2-A2)+(A7-A8)
```

と入れます（マスの面積は $1\,\mathrm{m}^2$ なので、わる計算は省きました）。この式を、右へ F13 まで、下へ 16 行めまでコピーします。右へコピーすると、B と A が C と B に 1 つずつずれて、となりのマスの計算になります。下へコピーすると、1 つ下の段のマスの計算になります。

結果を、池と同じ並びの「**発散の地図**」にしました。

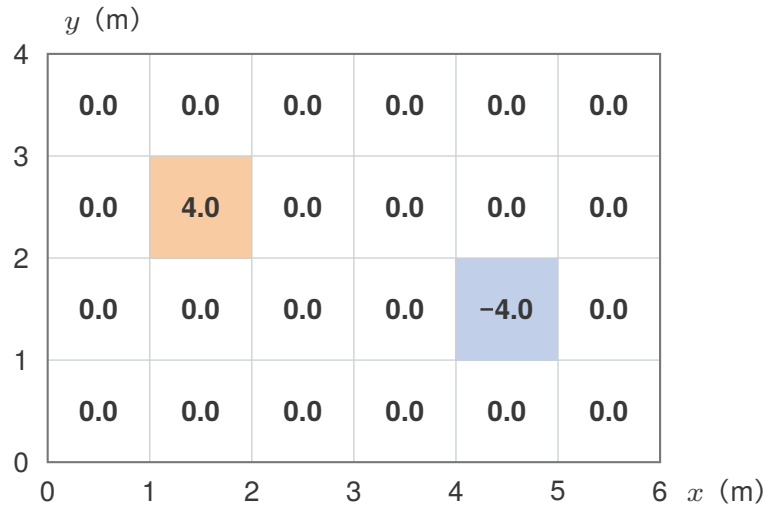


図 6 各マスの発散（単位 /s、小数第 1 位まで）。オレンジのマスは正（わき出し）、青のマスは負（吸いこみ）。

0 でないマスは 2 つだけです。x が 1〜2、y が 2〜3 のマスは +4.0 で、ここに**わき出す口**があります。x が 4〜5、y が 1〜2 のマスは −4.0 で、ここに**吸いこむ口**があります。これが ❓はてな？ の答えです。

わき出す口のマスを、たしかめ算してみましょう。右 C3、左 B3、上 B8、下 B9 です。

$$(1.22-(-0.83))+(0.91-(-1.04)) \qquad \text{「右−左＋上−下」}$$

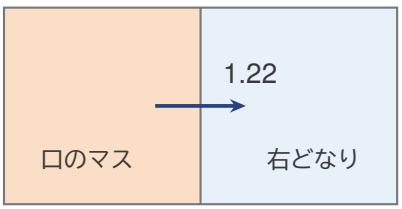
$$=1.22+0.83+0.91+1.04 \qquad \text{マイナスをひく＝たす}$$

$$=4.00 \qquad \text{1 秒に } 4\,\mathrm{m}^2 \text{ わき出す}$$

左の辺（-0.83）と下の辺（-1.04）は、マイナスです。水が左向き・下向き、つまりマスの外へ流れているからです。4 つの辺のどれからも、水は外へ出ています。

全部のマスをたすと？

池の 24 マスの発散を全部たすと、$4.0+(-4.0)=0$ です。いっぽう、池の外まわり（いちばん外の辺）を通って出る量を全部たしても、0 になります（A 列と G 列、7 行めと 11 行めの数で確かめられます）。となりどうしのマスでは、共通の辺の水が「片方から出て、もう片方に入る」ので、たすと打ち消し合うからです。



口のマス：右の辺から出る $+1.22$
右どなり：左の辺から入る -1.22
2 つをたすと $+1.22-1.22=0$

図 7　となりどうしのマスの共通の辺（池の、$x=2$・y が 2〜3 の辺）。片方の「出る」は、もう片方の「入る」。

マスの発散の合計が、外まわりから出る量に等しい。このことは 8-11 の「ガウスの定理」で、くわしく学びます。

コンピュータで、マスの出入りを数える

辺を通る量は、「辺を細かく分けて、速さ×小さな長さをたす」と求められます（8-8 の、データだけのときのやり方と同じ）。Python で、池の流れの式から、24 マスの発散を計算してみます。プログラムの中の 1.5, 2.5 と 4.5, 1.5 は口の場所、4.0 は 1 秒間にわき出す量 Q です。式の形（なぜ 2π でわるのか）は、8-11 で学びます。

Python

```
import numpy as np
def v(x, y):     # 池の流れの速さ (vx, vy)
    ax, ay = x - 1.5, y - 2.5     # わき出す口から見た場所
    bx, by = x - 4.5, y - 1.5     # 吸いこむ口から見た場所
    a2, b2 = ax**2 + ay**2, bx**2 + by**2
    k = 4.0 / (2 * np.pi)         # Q = 4
    return k*(ax/a2 - bx/b2), k*(ay/a2 - by/b2)
t = (np.arange(100) + 0.5) / 100     # 辺を 100 こに分けた、まん中の点
for j in [3, 2, 1, 0]:               # 北（上）の段から
    row = ""
    for i in range(6):
        d = (v(i+1, j+t)[0].mean() - v(i, j+t)[0].mean()
             + v(i+t, j+1)[1].mean() - v(i+t, j)[1].mean())
        row += f"{round(d, 1) + 0.0:6.1f}"
    print(row)
```

実行結果

```
   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0
   0.0   4.0   0.0   0.0   0.0   0.0
   0.0   0.0   0.0   0.0  -4.0   0.0
   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0
```

t は、0 から 1 までを 100 こに分けた小さな区間の、まん中の点です。v(i+1, j+t)[0] は、マスの右の辺（$x = i + 1$）の上の 100 か所の v_x で、.mean() はその平均です。平均に辺の長さ 1 m をかけると、辺を通る量になります（1 をかけても変わらないので、かけていません）。d が「右－左＋上－下」です。+ 0.0 は、-0.0 と表示されないようにするためのくふうです。表計算と同じ地図が出てきました。

ここまでで十分

小さなマスを置いて「出－入」を数え、表計算でわき出しと吸いこみの場所を見つけられれば十分です。この先は、マスを小さくしていって、式で発散を求めます。

∂ 式でわかる　マスを小さくしていく　★★★★★

6 マスを小さくすると、偏微分の和になる

マスを大きくとると、「マスの中のどこに口があるか」まではわかりません。マスを小さくしていくほど、場所ごとの発散がくわしくわかります。そこで、マスをどこまでも小さくしたときに、発散の式がどうなるかを調べます。

マスの中心を $(x,\ y)$、1 辺を h とします。右の辺は中心から右へ $\frac{h}{2}$、左の辺は左へ $\frac{h}{2}$ の所にあります。辺のまん中の速さを使って、④の式を書き直します。

$$\frac{(\text{右の } v_x) - (\text{左の } v_x)}{h}$$

④の式の 1 つめの項

$$= \frac{v_x\left(x+\frac{h}{2},\ y\right) - v_x\left(x-\frac{h}{2},\ y\right)}{h}$$

右の辺のまん中は $\left(x+\frac{h}{2},\ y\right)$、左は $\left(x-\frac{h}{2},\ y\right)$

分子の 2 つの点は、y が同じで、x だけがちがいます。x のちがいは、ちょうど h です。だから、この分数は「**y を止めて、x だけを h 動かしたときの、v_x の変化の割合**」です。h を 0 に近づけると、8-2 で学んだ偏微分 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ になります。

2 つめの項も同じです。上の辺と下の辺のまん中は $\left(x,\ y+\frac{h}{2}\right)$ と $\left(x,\ y-\frac{h}{2}\right)$ で、x が同じで y だけがちがいます。h を 0 に近づけると $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ になります。

数で確かめる：h を小さくすると、近づく

$v_x = x^3$ の流れで、$x = 1$ の所の 1 つめの項を、h を小さくしながら計算します。

h	$\dfrac{(1+\frac{h}{2})^3 - (1-\frac{h}{2})^3}{h}$	計算の答え
1	$\dfrac{1.5^3 - 0.5^3}{1} = \dfrac{3.375 - 0.125}{1}$	3.25
0.5	$\dfrac{1.25^3 - 0.75^3}{0.5}$	3.0625
0.1	$\dfrac{1.05^3 - 0.95^3}{0.1}$	3.0025
0.01	$\dfrac{1.005^3 - 0.995^3}{0.01}$	3.000025

表 4 h を小さくすると、3 に近づく。

いっぽう、$v_x = x^3$ を x で微分すると $3x^2$、$x = 1$ では $3 \times 1^2 = 3$ です。表の数は、ちょうどこの 3 に近づいています。（式で計算すると、表の数は $3 + \frac{h^2}{4}$ になっています。$h = 0.1$ なら $3 + 0.0025$。h が小さいほど、おまけの $\frac{h^2}{4}$ は小さくなります。）

たいせつ

平面の流れ $\vec{v} = (v_x,\ v_y)$ の発散は

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

v_x は x で、v_y は y で偏微分して、たす。答えは、場所ごとに 1 つの数。

「v_x は x で」の組み合わせには、わけがあります。x 方向（左右）の出入りは、左右の辺の v_x のちがいで決まりました。左右の辺は、x だけがちがう 2 つの場所です。だから、v_x を x で微分します。v_x を y で微分した量（上下で v_x がどう変わるか）は、出入りには関係しません。それは、（オ）のずれのように、辺にそって流れる水の速さのちがいだからです。

❼ 主役の場で、目と式をくらべる

図 2・図 3 の 6 つの場を、式で計算します。たとえば（ア）$(x,\ y)$ では、$v_x = x$、$v_y = y$ なので、$\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$、$\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{\partial y}{\partial y} = 1$。たして 2 です。

流れ	$(v_x,\ v_y)$	$\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$	$\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$	$\mathrm{div}\,\vec{v}$	目で見た結果
（ア）広がる	$(x,\ y)$	1	1	2	正
（イ）集まる	$(-x,\ -y)$	−1	−1	−2	負
（ウ）そろった流れ	$(1,\ 0)$	0	0	0	0
（エ）うず	$(-y,\ x)$	0	0	0	0
（オ）ずれ	$(y,\ 0)$	0	0	0	0
（カ）側溝	$(x,\ 0)$	1	0	1	正

表 5　目で見た結果と、式で計算した結果が一致する。

（エ）の $v_x = -y$ には x が入っていないので、x で偏微分すると 0 です（y を止めると、$-y$ はただの数）。$v_y = x$ を y で偏微分しても 0 です。（オ）も同じです。

（ア）では、マスの大きさによらず、右の辺と左の辺の v_x の差がいつも h です（$(x + \frac{h}{2}) - (x - \frac{h}{2}) = h$）。だから、④の近い式でも $\frac{h}{h} + \frac{h}{h} = 2$ となり、式の答えとぴったり同じです。v_x・v_y が 1 次式なら、マスが大きくても④の式は「≈」でなく「=」になります。

❽ 空間（3 次元）の流れ

空間では、マスのかわりに 1 辺 h の立方体の箱を置きます。面は 6 つ。向かい合う面が 3 組あります。

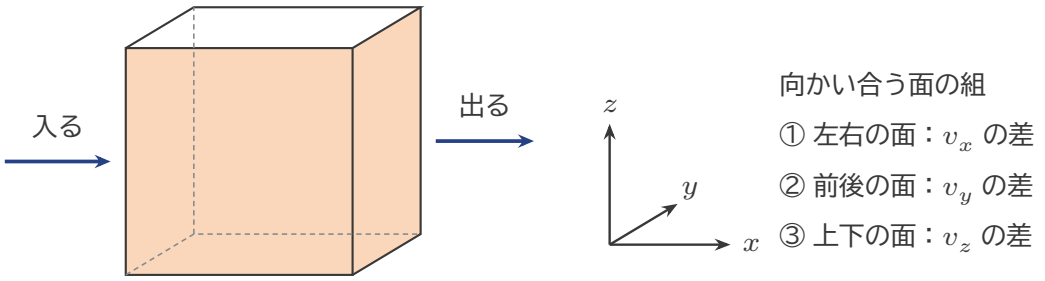


図 8　1 辺 h の立方体の箱。オレンジの左右の面では、v_x が出入りを決める。前後・上下の面も同じように数える。

1 つの面の面積は h^2 です。左右の面の組では、「出－入」は次のようになります。

$$\{(\text{右の } v_x) - (\text{左の } v_x)\} \times h^2$$

前後・上下の組も同じように数えて 3 つをたし、箱の体積 h^3 でわります。$h^2 \div h^3 = \frac{1}{h}$ なので、

$$\text{発散} \approx \frac{(\text{右の } v_x) - (\text{左の } v_x)}{h} + \frac{(\text{奥の } v_y) - (\text{手前の } v_y)}{h} + \frac{(\text{上の } v_z) - (\text{下の } v_z)}{h}$$

$h \to 0$ で、平面と同じく偏微分の和になります。

たいせつ

空間の流れ $\vec{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ の発散は

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

平面の式に、z の項が 1 つふえるだけ。

物理の本（力-13）の「$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$」は、この式です。

9 ナブラで書く：$\nabla \cdot \vec{v}$

8-4 で、ナブラ ∇ を、偏微分を並べた「微分の矢印」として使いました。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

この ∇ と $\vec{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ の内積（4-12）を、ふつうのベクトルと同じ形で計算してみます。内積は「成分どうしをかけて、たす」でした。ただし、∇ の成分は数ではなく「〜で偏微分する」という**操作**なので、「かける」を「右の量を偏微分する」と読みかえます。

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

内積の形：1 つめどうし、2 つめどうし、3 つめどうし

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

「かける」を「偏微分する」と読んだ

$$= \operatorname{div} \vec{v}$$

発散の式と同じ

内積の形にすると、「1 つめどうし」なので v_x は $\frac{\partial}{\partial x}$ と組になります。成分と文字の組み合わせを、自然にまちがえない書き方です。この本では $\operatorname{div} \vec{v}$ を主に使い、すぐ横に $\nabla \cdot \vec{v}$ も並べて書きます。専門書では、どちらの書き方も使われます。

grad と div：矢印と数の行き来

8-4 の勾配 $\operatorname{grad} f = \nabla f$ と、この章の発散 $\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$ は、記号がにています。でも、入れる物と出てくる物が反対です。

記号	入れる物	出てくる物	たとえ
$\operatorname{grad} f = \nabla f$	数の場（高さ・温度）	矢印の場	いちばん急な上り坂の矢印
$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$	矢印の場（流れ）	数の場	わき出しの強さ

表 6 grad は数から矢印を、div は矢印から数を作る。∇ のうしろに「・」があれば内積なので、答えは数。

記号カード 初めて出た章 **8-9**

div

読み方 ダイバージェンス
意味 発散。小さな箱から出ていく量（出－入）を、箱の大きさでわったもの。答えは数
英語 divergence

記号カード 初めて出た章 **8-9**

$\nabla\cdot$

読み方 ナブラ ドット
意味 div と同じ。∇ と矢印の場の内積の形で書く
英語 nabla dot（del dot）

10 流束で決める：発散のせいかくな定義

ここまで、箱を「マス」や「立方体」にしてきました。では、箱の形を球や円柱にしたら、ちがう答えになるのでしょうか。また、8-8 で学んだ「閉じた面の流束」を使うと、発散はどう書けるでしょうか。

8-8 では、閉じた面 S から外へ出ていく量（流束）を

$$\oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

名前

と書きました。オレンジの点線の枠と「名前」の札は、この式が**操作の名前**で、まだ計算できる形ではないという印です（8-6・8-8 と同じ）。「閉じた面 S を小さなタイルに分け、1 枚ずつ『$\vec{v}$ の外向きの成分×タイルの面積』を求めて、全部たし合わせる」という操作の名前です。$\oiint$ の◯は「**閉じている**」という印で、球の形や面積を表すのではありません。どの面かは、下の S が決めます。

この「出－入」を、箱の体積 ΔV でわって、箱を小さくしていった先が、発散です。

せいかくに言うと

発散の定義

点 P を囲む小さな閉じた面 S（中の体積 ΔV）を考え、S から外へ出ていく流束を ΔV でわります。S を点 P に向けて小さくしていったときに近づく値を、点 P の発散といいます。

$$(\mathrm{div}\,\vec{v})(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$\vec{n}$ は面に直角で外向きの、長さ 1 の矢印です（8-8）。

実際の操作

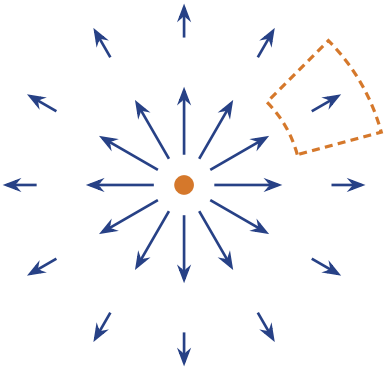
この式は「名前」なので、そのままでは計算できません。実際には、8-8 の場合分けの表から、やり方を選びます。S を立方体にとると、場合分けの表 8-8 の G（閉じた面が平らな面の組み合わせ：面ごとに求めてたす）です。左右・前後・上下の 6 つの面で $\vec{v}\cdot\vec{n}$ は $\pm v_x$、$\pm v_y$、$\pm v_z$ になり、⑧の計算そのものになります。だから、この定義から $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ が出てきます（例題 6 で、面ごとに計算します）。

箱の形によらない

$v_x \cdot v_y \cdot v_z$ がなめらかに変わる（偏微分できて、その偏微分も連続な）場なら、S を球や円柱など、どんな形にしても同じ値に近づきます。この定義は座標の軸の向きにもよらないので、物理の本では、この形で発散を考えることがよくあります。

11 点のわき出し：口の外では発散 0

池の発散の地図では、口のある 2 マスだけが 0 でなく、ほかのマスは全部 0 でした。では、口のあるマスを、さらに小さなマスに分けたら、どうなるでしょう。



口から r の所で、速さは $\dfrac{Q}{2\pi r}$

1 つの口から 1 秒間に Q の水がわき出すと、水は四方へ同じように広がります。口から r はなれた円（周の長さ $2\pi r$）を、1 秒間に Q の水が通りぬけます。だから、そこでの速さは $\dfrac{Q}{2\pi r}$ です。遠くほど遅く、矢印は短くなります。

図 9 1 つの口からのわき出し。点線のように口をふくまない箱では、内側の弧から入る量と、外側の弧から出る量が等しい。

点線の箱を見てください。外側の弧は、内側の弧より長いです。でも、外側では矢印が短い（遅い）ので、「速さ×長さ」は同じになります。$\dfrac{Q}{2\pi r} \times 2\pi r = Q$ で、半径によらないからです。口をふくまない箱では、「出－入」は 0 です。

式でも確かめます。口を原点に置くと、速さの矢印は $\vec{v} = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{(x,\ y)}{x^2+y^2}$ です（向きは原点から外向き、長さは $\dfrac{Q}{2\pi r}$）。$\dfrac{Q}{2\pi}$ はただの数なので、$\dfrac{(x,\ y)}{x^2+y^2}$ の発散を計算します。商の微分（5-6 のもっと知りたい：$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$）を使います。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1 \times (x^2+y^2) - x \times 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

y を止めて x で微分（分母を x で微分すると $2x$）

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

分子を整理した

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

同じように、x を止めて y で微分

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{(y^2 - x^2) + (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

たすと、分子が 0

原点以外のどこでも、発散は 0 です。原点では $x^2 + y^2 = 0$ で、分母が 0 になるので計算できません。

つまり、池の「4」は、マスの中のどこかに広がっているのではなく、**口の 1 点だけに集まっている**のです。口をふくむマスを、どんなに小さくしても、出る量は $Q = 4$ のままです。面積でわると、マスが小さくなるほど、発散はどこまでも大きくなります。このような 1 点だけのわき出しを、**点のわき出し**といいます。点のわき出しは、8-11 で「口のまわりを小さな円でくりぬく」方法で調べます。

空間の点のわき出し：点電荷の電場

空間でも同じです。プラスの電気をもつ小さな粒（点電荷）のまわりの電場は、原点から外向きで、大きさは距離 r の 2 乗に反比例します（8-5）。向きと大きさをまとめると、$\dfrac{(x,\ y,\ z)}{r^3}$ に比例します（$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$。長さ r の矢印 $(x,\ y,\ z)$ を r^3 でわると、長さは $\frac{1}{r^2}$）。これも、原点以外では発散が 0 です。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

積の微分（5-6）。下の説明

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

同じ形

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

同じ形

$$3\text{ つの和} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

3 行をたした

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

$x^2+y^2+z^2 = r^2$

1 行めの計算を、ていねいに見ます。$\dfrac{x}{r^3} = x \times r^{-3}$ と見て、積の微分を使います。まず、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を x で微分すると、合成関数の微分（5-6）で $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \times 2x = \dfrac{x}{r}$ です。だから r^{-3} を x で微分すると $-3r^{-4} \times \dfrac{x}{r} = -\dfrac{3x}{r^5}$ です。積の微分は「x の微分$\times\ r^{-3} + x \times r^{-3}$ の微分」なので、$1 \times \dfrac{1}{r^3} + x \times \left(-\dfrac{3x}{r^5}\right) = \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}$ です。

電場のわき出しは、電荷のある点だけにあります。電荷のない所では、電場の発散は 0 です。

⑫ 連続の式：物は勝手に生まれも消えもしない

空気のように縮む物の流れでは、場所ごとに密度（$1\,\mathrm{m}^3$ あたりの質量）ρ（ロー）がちがい、時間とともに変わることもあります。小さな箱（体積 ΔV）について、質量の出入りを考えます。

1. 箱の中の質量は $\rho\,\Delta V$ です。1 秒間にふえる量は $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\Delta V$ です（場所を止めて、時間だけ動かした変化なので ∂）。
2. 1 秒間に、1 平方メートルの面を通る質量は「密度×速さ」です。だから、質量の流れの矢印は $\rho\vec{v}$ です。箱から 1 秒間に出ていく質量（出－入）は、発散の決め方から $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) \times \Delta V$ です。
3. 質量は、生まれも消えもしません。だから、箱の中でふえる量は、入ってきた量（出ていく量のマイナス）と等しくなります。

③を式にして、ΔV でわります。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta V = -\mathrm{div}(\rho\vec{v})\,\Delta V \qquad \text{ふえる量＝－（出ていく量）}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \Delta V \text{でわって、右辺を左へうつした}$$

これを**連続の式**（れんぞくのしき）といいます。物理の本（力-13）と同じことばで、「**その点の密度が増える速さ＋その点からのわき出し＝0**」と読みます。

水のように、ほとんど縮まない（密度がどこでも同じで変わらない）物では、$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ で、ρ は数として外に出せます。ρ でわると

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

縮まないことを**非圧縮**（ひあっしゅく）といいます。非圧縮の流れには、どこにも、わき出しも吸いこみもありません。（池の口は、池の底から水を足したり取ったりしているので、例外の点です。）

もっと知りたい ★★★★★

密度が場所で変わるとき：$\mathrm{div}(\rho\vec{v})$ をほどく

$\rho\vec{v} = (\rho v_x,\ \rho v_y,\ \rho v_z)$ の発散を、積の微分（5-6）で 1 つずつ計算します。ρ も v_x も場所で変わるので、両方を微分します。

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

積の微分。y・z も同じ形

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

3 つをたして、

$$+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

2 つの組に分けた

$$= \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

1 つめは内積（4-12・8-4）

1 つめの項は「密度のちがう所から、流れが物を運んでくる分」、2 つめは「流れが広がって、うすまる分」です。連続の式は $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho = -\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}$ と書けます。左辺は、8-13 で学ぶ**物質微分**（水のつぶといっしょに動きながら見た変化）です。つまり「つぶといっしょに動いて見ると、流れが広がる所（$\mathrm{div}\,\vec{v} > 0$）では密度が下がる」という意味です。

縮まない流れで、速くなるわけ

ホースの先を指でつまむと、水は勢いよく飛び出します。ホースの中の水は縮まないので、$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ です。

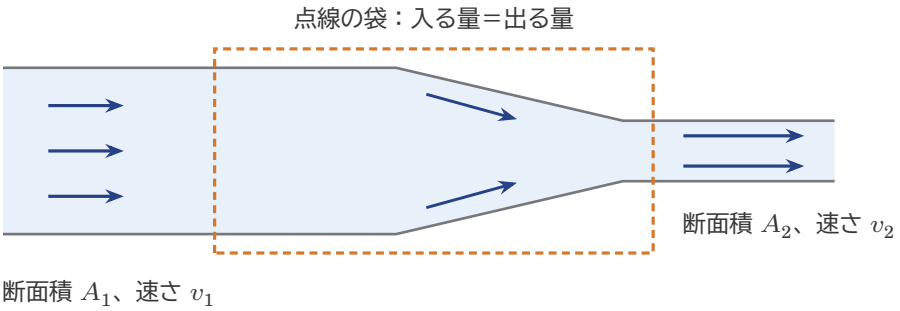


図 10 ホースの先が細くなる所。流れは横に集まり（$\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ が負）、そのぶん前に速くなる（$\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ が正）。

先が細くなる所では、水は横から押されて、まん中へ集まります。横の向きの $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$（と $\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$）は負です。発散が 0 なので、そのぶん $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ が正になり、水は前へ進むほど速くなります。

ホース全体で見ると、点線の袋の中のどこでも発散は 0 なので、袋から出る量と入る量は等しくなります（池の外まわりと同じ。8-11）。管の壁からは水が出入りしないので、入口と出口だけを数えればよく、

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad （1\ 秒間に入る量＝出る量）$$

断面積が半分なら、速さは 2 倍になります。物理の本（力-13）の $A_1 v_1 = A_2 v_2$ と同じ式です（例題 8）。

⑬ 熱の流れと電場の発散

発散は、水の流れだけの道具ではありません。「何かが流れていく矢印の場」なら、どれにでも使えます。

熱の流れ $\vec{q}$

8-4 で、熱の流れの矢印 $\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$（$1\,\mathrm{m}^2$ を 1 秒間に通る熱。単位は $\mathrm{W/m^2}$）を学びました。$\mathrm{div}\,\vec{q}$ は、$1\,\mathrm{m}^3$ あたり、1 秒間に外へ出ていく熱（$\mathrm{W/m^3}$）です。単位は $\mathrm{W/m^2} \div \mathrm{m} = \mathrm{W/m^3}$ になります（偏微分は「÷長さ」の量だから）。

- 6-3 のかべ（厚さ 0.2 m、両面が 20 ℃と 0 ℃）では、どこでも $q_x = 160\,\mathrm{W/m^2}$ で一定でした。$\dfrac{\partial q_x}{\partial x} = 0$ なので、発散は 0。かべの中で熱は生まれず、入った熱がそのまま出ていきます。
- 電気を流して熱を出している板（電熱線やヒーターの板）では、熱がその場で生まれます。板の中で $q_x = 5000x$〔$\mathrm{W/m^2}$〕（x は板のまん中からの距離〔m〕）なら、$\mathrm{div}\,\vec{q} = 5000\,\mathrm{W/m^3}$。1 L（$0.001\,\mathrm{m}^3$）あたり 5 W の熱が生まれ、両側へ流れ出ています。

熱が生まれる所で $\mathrm{div}\,\vec{q}$ は正、熱がたまって温度が上がる所では負になります。この考えで、8-13 の熱方程式を作ります。

電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$

電場の発散は、その場所の電荷の密度 ρ（$1\,\mathrm{m}^3$ あたりの電気の量。密度と同じ文字を使います）に比例します。

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon_0 \text{ は自然の定数：真空の誘電率})$$

プラスの電荷がある所は電場のわき出し、マイナスの電荷の所は吸いこみです。電荷のない所では 0 で、⑪の点電荷の計算と同じです。いっぽう、磁場の発散はどこでも 0 です（$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$）。磁石を細かく切っても、N 極だけ、S 極だけの磁石はできません。磁力線にはわき出しも吸いこみもなく、いつも輪になってつながっています。2 つの式は、8-14 で「マクスウェル方程式」として読みます。

もっと知りたい ★★★★★

流れをたし合わせると、発散もたし合わせになる

池の流れは、口 $(1.5,\ 2.5)$ から広がるだけの流れ $\vec{v}_1$ と、口 $(4.5,\ 1.5)$ へ集まるだけの流れ $\vec{v}_2$ を、場所ごとにたしたものです（Python の式の `ax/a2 - bx/b2` の 2 つの項）。偏微分は、たし算の 1 つずつにできるので（和の微分 5-4 と同じ）、

$$\operatorname{div}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \operatorname{div}\vec{v}_1 + \operatorname{div}\vec{v}_2$$

$\vec{v}_1$ の発散は口 $(1.5,\ 2.5)$ 以外で 0、$\vec{v}_2$ の発散は口 $(4.5,\ 1.5)$ 以外で 0（⑪）。だから、池の流れの発散は、2 つの口以外のどこでも 0 です。発散の地図で、0 でないマスが 2 つだけだったのは、このためです。数をかけた流れも同じで、$\operatorname{div}(c\vec{v}) = c\operatorname{div}\vec{v}$（$c$ は数）。「たしてから発散を求めても、発散を求めてからたしても同じ」という性質は、7-2 の行列の「線形」と同じ考え方です。

たいせつ

発散	小さな箱から出ていく量（出－入）÷箱の大きさ。
答えは数	
平面	$\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}$
空間	$\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$
マスの近い式	（右－左）÷ h ＋（上－下）÷ h（右向き・上向きを正）
定義	$\lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$（8-8 の流束）
連続の式	$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$。縮まなければ $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

まとめ：発散を求める 3 つの方法

段	方法	使う道具	例題
目でわかる	マスを置いて、出る矢印と入る矢印をくらべる	図・実験	1
手でわかる	4 つの辺を通る量で「右−左＋上−下」を計算し、面積でわる	表計算・Python	2・3
式でわかる	偏微分の和 $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\left(+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$	偏微分（8-2）	4・5・7
定義	小さな閉じた面の流束 $\oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を体積でわる。実際には面ごとに計算（表 8-8 の G）	流束（8-8）	6

表 7　どの方法でも、同じ「発散」を求めている。マスや箱を小さくするほど、上の段の答えは下の段の答えに近づく。

この章で出てきたことば

発散（divergence）　小さな箱から出ていく量を、箱の大きさでわったもの。$\mathrm{div}\,\vec{v}$、$\nabla\cdot\vec{v}$ と書く。

わき出し・吸いこみ　発散が正の所・負の所。物が生まれる所・消える所。

点のわき出し　1 点だけに集まったわき出し。その点では式で発散を計算できない（8-11）。

連続の式　物が勝手に生まれも消えもしないことを、発散で書いた式。

非圧縮　水のように縮まないこと。非圧縮の流れでは $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$。

スカラー　向きをもたず、大きさだけをもつ量。発散はスカラー。

専門書をのぞいてみよう 大学の教科書ふうの書き方

定義 2.5 ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x,\, A_y,\, A_z)$ に対して

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.15}$$

を $\mathbf{A}$ の発散という。

訳 $\mathbf{A}$ という矢印の場について、各成分を自分の向きの文字で偏微分して、たしたものを「発散」とよぶ。太字の $\mathbf{A}$ は、この本の $\vec{A}$。$\equiv$ は「こう決める」という記号。(2.15) は、あとで引用するための式の番号。

真空中のガウスの法則は、微分形で

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.8}$$

と表される。

訳 電場の発散（わき出し）は、その場所の電荷の密度 ρ に比例する。「微分形」は、場所ごとの式（この章の形）という意味。袋全体で書いた「積分形」は 8-11 で。

質量保存則より、連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ。特に非圧縮性流体では $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ である。

訳 「質量保存則」は、質量は生まれも消えもしないというきまり。⑫と同じ式。「非圧縮性流体」は、水のように縮まない流れる物。

デルタ

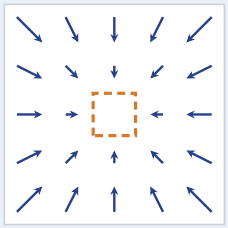
専門書の式も、「小さな箱から出ていく量」と読めば、こわくないよ。

3

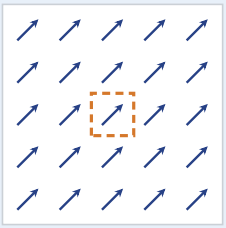
例題でたしかめよう

例題 1　図を読む

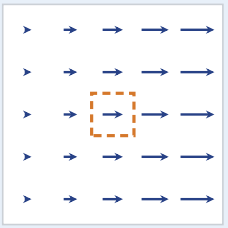
3 つの流れ（A）～（C）で、点線のマスの発散は、正・負・0 のどれでしょう。



（A）



（B）



（C）

考え方　マスの辺を通って「出る量」と「入る量」をくらべる（①②）。矢印の向きではなく、出入りの差を見る。

式　（A）矢印がマスへ集まる。どの辺からも入る。入る量のほうが多い

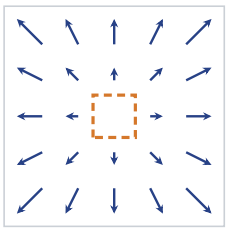
（B）ななめにそろった流れ。左と下の辺から入った分だけ、右と上の辺から出る

（C）右へ行くほど矢印が長い。右の辺から出る量が、左の辺から入る量より多い

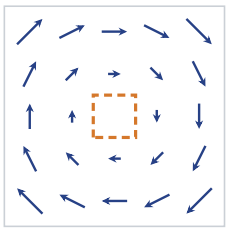
答え　（A）負　（B）0　（C）正

じぶんでとこう 1

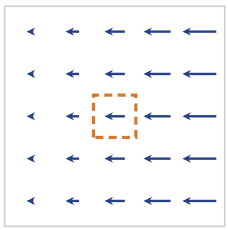
3 つの流れ（D）～（F）で、点線のマスの発散は、正・負・0 のどれでしょう。



（D）



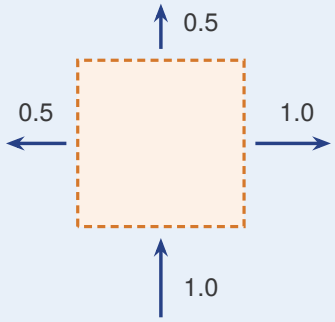
（E）



（F）

例題 2　マスの 4 つの辺から計算する

1 辺 $h = 0.5\,\mathrm{m}$ のマスで、辺を通る水の速さ（右向き・上向きを正）が、次のようにわかっています。このマスの発散を求め、わき出しか吸いこみかを答えましょう。



右の辺　$v_x = 1.0\,\mathrm{m/s}$

左の辺　$v_x = -0.5\,\mathrm{m/s}$（左向き）

上の辺　$v_y = 0.5\,\mathrm{m/s}$

下の辺　$v_y = 1.0\,\mathrm{m/s}$（上向き）

考え方　④の式「（右－左）÷ h ＋（上－下）÷ h」に入れる。左向きの速さはマイナスのまま入れる。

式
$$\frac{1.0-(-0.5)}{0.5}+\frac{0.5-1.0}{0.5}$$
$$=\frac{1.5}{0.5}+\frac{-0.5}{0.5}=3+(-1)=2$$

答え　2 /s（正なので、わき出し）

例題 3　表計算で発散の地図を作る

1 辺 1 m のマス 4 つ（2 × 2）で、辺を通る量（$\mathrm{m^2/s}$）が表のようにわかっています。4 つのマスの発散と、いちばん強いわき出しのマスを答えましょう。また、4 つの発散の合計と、外まわりから出る量をくらべましょう。

たての辺（右向きが正）

段	$x=0$	$x=1$	$x=2$
上の段	0.5	1.0	0.5
下の段	0.2	0.6	0.6

横の辺（上向きが正）

線	左の列	右の列
$y=2$	0.3	0.4
$y=1$	0.1	−0.2
$y=0$	0.1	0.0

考え方　⑤の表計算と同じ。マスごとに「右−左+上−下」。面積は $1\,\mathrm{m^2}$ なので、そのまま発散。上の段のマスの上の辺は $y=2$、下の辺は $y=1$ の線。

式　左上：$(1.0-0.5)+(0.3-0.1)=0.7$

右上：$(0.5-1.0)+(0.4-(-0.2))=0.1$

左下：$(0.6-0.2)+(0.1-0.1)=0.4$

右下：$(0.6-0.6)+(-0.2-0.0)=-0.2$

合計：$0.7+0.1+0.4+(-0.2)=1.0$

外まわり：右 $0.5+0.6$、左 $0.5+0.2$、上 $0.3+0.4$、下 $0.1+0.0$

「右−左+上−下」で $1.1-0.7+0.7-0.1=1.0$

答え　左上 0.7、右上 0.1、左下 0.4、右下 −0.2（単位 /s）。いちばん強いわき出しは左上。合計も外まわりも 1.0 で等しい

じぶんでとこう 2

1 辺 $h = 2\,\mathrm{m}$ のマスで、辺を通る水の速さ（右向き・上向きを正）は、右の辺 $v_x = -1\,\mathrm{m/s}$（左向き）、左の辺 $v_x = 1\,\mathrm{m/s}$（右向き）、上の辺と下の辺はどちらも $v_y = 1\,\mathrm{m/s}$（上向き）です。このマスの発散を求め、わき出しか吸いこみかを答えましょう。

じぶんでとこう 3

例題 3 と同じ並びの 4 つのマスで、たての辺（右向きが正）は上の段が 0.4、0.2、0.3、下の段が 0.0、0.5、0.1、横の辺（上向きが正）は $y = 2$ が 0.2、0.1、$y = 1$ が 0.3、-0.1、$y = 0$ が -0.1、0.2 です（$\mathrm{m^2/s}$）。4 つのマスの発散と、いちばん強いわき出しのマスを答え、発散の合計と外まわりから出る量をくらべましょう。

例題 4　式で表された平面の流れ

(1) 平面の流れ $\vec{v} = (3x,\ -y)$ の発散を求めましょう。

(2) 流れ $\vec{v} = (ax,\ -y)$ が、どこでも発散 0 になるのは、a がいくつのときでしょう。

考え方 ⑥の式。v_x は x で、v_y は y で偏微分する。

式 (1) $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial (3x)}{\partial x} = 3$、$\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{\partial (-y)}{\partial y} = -1$

$\mathrm{div}\,\vec{v} = 3 + (-1) = 2$

(2) $\mathrm{div}\,\vec{v} = \dfrac{\partial (ax)}{\partial x} + \dfrac{\partial (-y)}{\partial y} = a - 1$

$a - 1 = 0$ より $a = 1$

答え (1) $\mathrm{div}\,\vec{v} = 2$（どこでも正なので、どこでもわき出し）(2) $a = 1$

例題 5　場所によって変わる発散（空間）

空間の流れ $\vec{v} = (x^2,\ xy,\ -z)$ について答えましょう。

(1) 発散を求めましょう。

(2) 点 $(1,\ 0,\ 0)$ と点 $(0,\ 2,\ 5)$ は、わき出しと吸いこみのどちらでしょう。

(3) 発散が 0 になる点は、どんな所に集まっていますか。

考え方　⑧の式。微分する文字以外は、数と同じに扱う（$\frac{\partial(xy)}{\partial y}$ では x を止めるので x）。

式　(1) $\dfrac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$、$\dfrac{\partial(xy)}{\partial y} = x$、$\dfrac{\partial(-z)}{\partial z} = -1$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 2x + x - 1 = 3x - 1$$

(2) 点 $(1,\ 0,\ 0)$：$3 \times 1 - 1 = 2 > 0$

点 $(0,\ 2,\ 5)$：$3 \times 0 - 1 = -1 < 0$

(3) $3x - 1 = 0$ より $x = \frac{1}{3}$（$y \cdot z$ は何でもよい）

答え　(1) $3x - 1$　(2) $(1,\ 0,\ 0)$ はわき出し、$(0,\ 2,\ 5)$ は吸いこみ

(3) $x = \frac{1}{3}$ の平面の上（その右側はわき出し、左側は吸いこみ）

じぶんでとこう 4

(1) 平面の流れ $\vec{v} = (x + 2y,\ 4x - 3y)$ の発散を求めましょう。

(2) 平面の流れ $\vec{v} = (2x,\ by)$ が、どこでも発散 0 になるのは、b がいくつのときでしょう。

じぶんでとこう 5

空間の流れ $\vec{v} = (xy,\ y^2,\ z)$ について答えましょう。

(1) 発散を求めましょう。

(2) 点 $(2,\ 1,\ 0)$ と点 $(0,\ -1,\ 3)$ は、わき出しと吸いこみのどちらですか。

(3) 発散が 0 になる点は、どんな所に集まっていますか。

例題 6　小さな箱の面ごとの流束から求める

空間の流れ $\vec{v} = (x^2,\ xy,\ -z)$ の中で、点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$ を中心に、1 辺 h の立方体の箱を、面が軸に直角になるように置きます。6 つの面から外へ出る量を面ごとに求めてたし、体積 h^3 でわって、点 P の発散を求めましょう。例題 5 の答えとくらべましょう。

考え方　**場合：**閉じた面が立方体の 6 つの平らな面（表 8-8 の G）

名前　$\displaystyle\oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：箱の面全体で「外向きの成分×タイル」をたす。

楽をする　面ごとに分ける。成分が面の上で 1 次式で変わるときは「面のまん中の値×面積 h^2」でよい（平均がまん中の値になるから）。

直す　6 つの面それぞれで、$\vec{n}$ と外向きの成分を表にする。

面	$\vec{n}$	外向きの成分	面のまん中の値
右（$x = 1 + \frac{h}{2}$）	$(1,\ 0,\ 0)$	$v_x = x^2$	$\left(1 + \frac{h}{2}\right)^2$
左（$x = 1 - \frac{h}{2}$）	$(-1,\ 0,\ 0)$	$-v_x$	$-\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2$
奥（$y = \frac{h}{2}$）	$(0,\ 1,\ 0)$	$v_y = xy$	$1 \times \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$
手前（$y = -\frac{h}{2}$）	$(0,\ -1,\ 0)$	$-v_y$	$-1 \times \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}$
上（$z = \frac{h}{2}$）	$(0,\ 0,\ 1)$	$v_z = -z$	$-\frac{h}{2}$
下（$z = -\frac{h}{2}$）	$(0,\ 0,\ -1)$	$-v_z = z$	$-\frac{h}{2}$

式　左右：$\left\{\left(1 + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{h}{2}\right)^2\right\} \times h^2 = 2h \times h^2 = 2h^3$

奥と手前：$\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) \times h^2 = h^3$

上下：$\left(-\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \times h^2 = -h^3$

合計 $2h^3 + h^3 - h^3 = 2h^3$。体積でわって $\dfrac{2h^3}{h^3} = 2$

答え　2。例題 5 の $3x - 1$ に $x = 1$ を入れた 2 と同じ

例題 6 の左右の $\left(1+\frac{h}{2}\right)^2-\left(1-\frac{h}{2}\right)^2$ は、$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ を使うと $4\times1\times\frac{h}{2}=2h$ です。この場では、h がどんな大きさでも答えが 2 になりました。場が 2 次式までなら、箱の大きさによらず、ちょうどの値が出ます。

じぶんでとこう 6

空間の流れ $\vec{v}=(xy,\ y^2,\ z)$ の中で、点 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ 0)$ を中心に、1 辺 h の立方体の箱を置きます。6 つの面から外へ出る量を面ごとに求めてたし、体積 h^3 でわって、点 P の発散を求めましょう。

例題 7　点のわき出しの場の発散

平面の流れ $\vec{v}=\dfrac{(x,\ y)}{x^2+y^2}$ の発散を、原点以外の点で求めましょう。また、点 $(1,\ 2)$ での $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ の値を求めましょう。

考え方　⑪と同じ。商の微分（5-6）で、止める文字に気をつける。

式
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x\times2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-y\times2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
たして $\dfrac{(y^2-x^2)+(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0$

点 $(1,\ 2)$：$\dfrac{4-1}{5^2}=\dfrac{3}{25}=0.12$、$\dfrac{1-4}{5^2}=-0.12$

答え　原点以外で 0。点 $(1,\ 2)$ では 0.12 と -0.12（たすと 0）

例題 8　ホースの先：縮まない流れ

庭のホースの中を、水が速さ 1.5 m/s で流れています。ホースの断面積は $2.0\,\mathrm{cm}^2$ です。先を指でつまんで、出口の断面積を $0.5\,\mathrm{cm}^2$ にしました。

（1）出口での水の速さを求めましょう。

（2）1 分間に出る水は何 L でしょう。

考え方　**場合：**管の断面は平らで、流れはそろっている（表 8-8 の **A**）

水は縮まないので $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$。袋の中で生まれも消えもしないので、入る量＝出る量（⑫）。断面を通る量＝速さ×断面積。単位をそろえる：$1\,\mathrm{cm}^2 = 0.0001\,\mathrm{m}^2$。

式　（1）$v_1 A_1 = v_2 A_2$ より $1.5 \times 2.0 = v_2 \times 0.5$

$$v_2 = \frac{1.5 \times 2.0}{0.5} = 6.0$$

（2）1 秒間：$1.5\,\mathrm{m/s} \times 0.0002\,\mathrm{m}^2 = 0.0003\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

1 分間：$0.0003\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \times 60\,\mathrm{s/min} = 0.018\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$

$0.018\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min} \times 1000\,\mathrm{L/m}^3 = 18\,\mathrm{L/min}$

答え　（1）6.0 m/s（断面積が $\frac{1}{4}$ なので 4 倍）　（2）18 L

（1）の式では、両辺の断面積を cm^2 のまま使いました。両辺に同じ単位が出てくるので、m^2 に直さなくても比は同じだからです。（2）は量そのものを求めるので、m^2 に直しました。

じぶんでとこう 7

平面の流れ $\vec{v} = \dfrac{(-2x,\ -2y)}{x^2 + y^2}$
（原点に吸いこみ口がある流れ）
の発散を、原点以外の点で求めましょう。また、点 $(2,\ 1)$ での $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ の値を求めましょう。

じぶんでとこう 8

ホースの中を、水が速さ 0.8 m/s で流れています。ホースの断面積は 2.5 cm^2、ノズルの出口の断面積は 0.4 cm^2 です。（1）出口での水の速さ、（2）1 分間に出る水の量（L）を求めましょう。

3

例題 9　熱の流れの発散：生まれる熱

電気を流して熱を出している金属のブロックの中で、熱の流れの矢印が $\vec{q} = (2000x,\ 2000y,\ 2000z)$（$\mathrm{W/m^2}$）でした（$x$・$y$・$z$ はブロックのまん中からの場所〔m〕）。

（1）$\mathrm{div}\,\vec{q}$ を求め、単位をつけて答えましょう。

（2）ブロックの体積は 0.5 L です。ブロック全体で、1 秒間に生まれる熱は何 W でしょう。

考え方　⑬。$\mathrm{div}\,\vec{q}$ は「1 $\mathrm{m^3}$ あたり、1 秒間に出ていく熱」。出ていく熱は、その場で生まれた熱。偏微分は「÷長さ」なので、単位は $\mathrm{W/m^2 \div m = W/m^3}$。

式　（1）$\dfrac{\partial(2000x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(2000y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(2000z)}{\partial z} = 2000 \times 3 = 6000$

（2）$0.5\,\mathrm{L} = 0.0005\,\mathrm{m^3}$（$1\,\mathrm{L} = 0.001\,\mathrm{m^3}$）

どこでも同じ $6000\,\mathrm{W/m^3}$ なので、

$6000\,\mathrm{W/m^3} \times 0.0005\,\mathrm{m^3} = 3\,\mathrm{W}$

答え　（1）$6000\,\mathrm{W/m^3}$（どこでも熱が生まれている）　（2）3 W

じぶんでとこう 9

電気を流して熱を出している板の中で、熱の流れの矢印 $\vec{q}$〔W/m²〕の成分は、$q_x = 1500x$、$q_y = 1500y$、$q_z = 0$ でした。(1) $\mathrm{div}\,\vec{q}$ を単位をつけて求め、(2) 板の体積が 2 L のとき、板全体で 1 秒間に生まれる熱は何 W か答えましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 広がる矢印なら、どこでもわき出し？

× 1 つの口から水がわき出す池では、矢印はどこでも外向きなので、どこでも発散は正

○ 口からはなれた所では、発散は 0（図 9 の点線の箱）

外へ行くほど矢印は短くなりますが、そのぶん外側の辺が長くなり、出る量と入る量は等しくなります。わき出しは口の 1 点だけです。発散は、矢印の向きではなく、出入りの差で決まります。

⚠ まちがえやすいところ

② 成分と文字の組み合わせをまちがえる

✕ $\vec{v}=(y,\ x)$ の発散を $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}=1+1=2$

○ $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0+0=0$

左右の出入りは v_x の左右の差、上下の出入りは v_y の上下の差で決まります。だから v_x は x で、v_y は y で微分します。$\nabla\cdot\vec{v}$ の「1 つめどうし」と覚えてもよいです。

⚠ まちがえやすいところ

③ 発散を矢印で答える

✕ $\vec{v}=(3x,\ -y)$ の発散は $(3,\ -1)$

○ $\operatorname{div}\vec{v}=3+(-1)=2$

発散は、場所ごとに 1 つの数（スカラー）です。成分ごとの偏微分を、最後に必ずたします。矢印が出てくるのは grad（8-4）と rot（8-10）です。

⚠ まちがえやすいところ

④ 左と下の辺も、たしてしまう

✕ 右 3、左 1、上 2、下 2（どれも右向き・上向き）で、$3+1+2+2=8$

○ $(3-1)+(2-2)=2$

左の辺で右向きに流れる水は、マスに「入る」水です。右向き・上向きを正にしたら、左と下の辺は**ひく**（表 1）。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 口の外が 0 なら、わき出しはない？

✕ 点のわき出しの場は、式で発散が 0 なので、水はどこからもわいていない

○ 原点（口）の 1 点に、わき出し Q が集まっている

原点では式が使えません。口を囲めば、外へ出る量は Q です（8-11）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $\oiint$ の○を球だと思う

✕ 定義の $\oiint_S$ は、球の面でしか使えない

○ ○は「閉じている」という印。立方体でも球でもよい

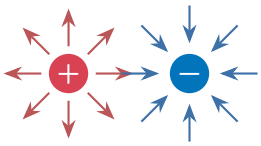
どの面かは下の S で決めます。小さくすれば、どの形でも同じ発散になります。

コラム　天気予報の「発散」と「収束」

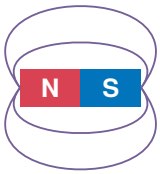
天気予報では、地面の近くの風が外へ広がる所を「発散」、集まる所を「収束」とよびます。高気圧の中心付近の地面近くでは、風が外へ吹き出し（発散）、上から空気が下りてきて、晴れやすくなります。低気圧では地面近くの風が集まり（収束）、行き場のない空気が上へのぼって、雲ができやすくなります。空気の連続の式（⑫）で、地面近くの発散・収束と、上下の空気の動きが結びついているのです。

物理・工学ではこう使う

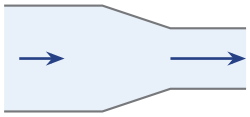
発散は、「何かが生まれたり、消えたりしている場所」を見つける道具です。



電荷と電場



磁石と磁場



細い所で速くなる

電気と磁気

電場の発散は電荷の密度に比例し、プラスの電荷はわき出し、マイナスの電荷は吸いこみです（$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$）。半導体の中の電場や電位の計算（トランジスタの設計）も、この式から始まります。磁場には、わき出しも吸いこみもありません（$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$）。磁力線は、いつも輪になっています。

水の流れ

水はほとんど縮まないので $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$。管が細い所で水が速くなるのは、このためです。水道管・ポンプ・ノズルの設計や、コンピュータで流れを計算するとき（流体の数値計算）は、「どの小さな箱でも、入る量＝出る量」になるように計算を組み立てます。

熱

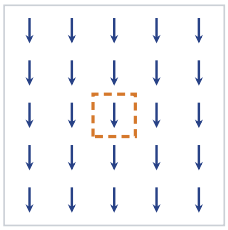
熱の流れの発散は、そこから出ていく熱の割合です。電子機器の部品のように熱が生まれる所で正になります。基板の設計では、熱がどこで生まれ、どこへ流れ出るかを、この考えで計算します（8-12・8-13）。

章末問題

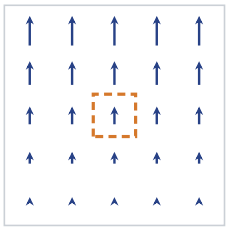
8-9 のまとめ

基本 ★★★★★

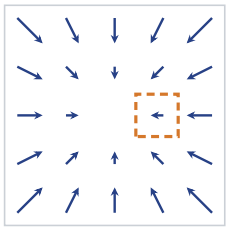
1 3 つの流れ（ア）～（ウ）で、点線のマスの発散は、正・負・0 のどれでしょう（例題 1）。



（ア）



（イ）



（ウ）

2 次のマスの発散を求め、わき出しか吸いこみかを答えましょう（右向き・上向きを正）（例題 2）。

（1）1 辺 $h = 1\,\mathrm{m}$ のマスで、右の辺 $v_x = 4\,\mathrm{m/s}$、左の辺 $v_x = 1\,\mathrm{m/s}$、上の辺 $v_y = 0\,\mathrm{m/s}$、下の辺 $v_y = 2\,\mathrm{m/s}$

（2）1 辺 $h = 0.2\,\mathrm{m}$ のマスで、右の辺 $v_x = 0.3\,\mathrm{m/s}$、左の辺 $v_x = 0.5\,\mathrm{m/s}$、上の辺 $v_y = -0.2\,\mathrm{m/s}$、下の辺 $v_y = 0.1\,\mathrm{m/s}$

3 例題 3 と同じ並びの 4 つのマスで、たての辺を右向きに通る量は、上の段が $x = 0$ から順に 0.1、0.6、0.2、下の段が 0.3、0.3、0.5 です。横の辺を上向きに通る量は、$y = 2$ の線が左の列から 0.4、0.0、$y = 1$ の線が 0.2、0.1、$y = 0$ の線が 0.0、0.2 です（単位は $\mathrm{m^2/s}$）。4 つのマスの発散を求めましょう。また、4 つの発散の合計と、外まわりから出る量をくらべましょう（例題 3）。

4 次の平面の流れの発散を求めましょう（例題 4）。

（1）$\vec{v} = (5x,\ 2y)$

（2）$\vec{v} = (y^2,\ x^2)$

(3) $\vec{v} = (2x - y,\ x + y)$

5 平面の流れ $\vec{v} = (4x + y,\ cy - x)$ が、どこでも発散 0（縮まない流れ）になるのは、c がいくつのときでしょう（例題 4）。

6 空間の流れ $\vec{v} = (xz,\ 2y,\ -z^2)$ について答えましょう（例題 5）。

(1) 発散を求めましょう。

(2) 点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(0,\ 5,\ 3)$ は、わき出しと吸いこみのどちらでしょう。

(3) 発散が 0 になる点は、どんな所に集まっていますか。

7 ホースの中を、水が速さ 1.2 m/s で流れています。ホースの断面積は $3.0\,\mathrm{cm}^2$、ノズルの出口の断面積は $0.6\,\mathrm{cm}^2$ です。(1) 出口での水の速さ、(2) 1 分間に出る水の量（L）を求めましょう（例題 8）。

8 電気を流して熱を出している部品の中で、熱の流れの矢印 $\vec{q}$〔W/m²〕の成分は、$q_x = 800x$、$q_y = 800y$、$q_z = 800z$ でした。(1) $\mathrm{div}\,\vec{q}$ を単位をつけて求め、(2) 部品の体積が 1.5 L のとき、部品全体で 1 秒間に生まれる熱は何 W か答えましょう（例題 9）。

チャレンジ ★★★★★

9 平面の流れ $\vec{v} = (x^2,\ -2xy)$ について答えましょう（例題 4）。

(1) 発散を求めましょう。

(2) この流れの中に、わき出しや吸いこみはあるでしょうか。

10 空間の流れ $\vec{v} = (xy,\ yz,\ zx)$ について答えましょう（例題 5）。

(1) 発散を求めましょう。

(2) 点 $(1,\ 2,\ 3)$ での発散の値を求めましょう。

(3) 点 $(1,\ -2,\ 0)$ は、わき出しと吸いこみのどちらでしょう。

11 空間の流れ $\vec{v} = (x^2,\ xy,\ -z)$ の中で、点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心に 1 辺 h の立方体の箱を置きます。6 つの面から外へ出る量を面ごとに求めてたし、体積 h^3 でわって、この点の発散を求めましょう。例題 5 の式の値とくらべましょう（例題 6）。

12 平面の流れ $\vec{v} = \dfrac{(3x,\ 3y)}{x^2 + y^2}$ の発散を、原点以外の点で求めましょう。また、点 $(1,\ 2)$ での $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ の値を求めましょう（例題 7）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 矢印の図にマスを置いて、わき出しと吸いこみを見分けられる。 → 353 ページ
- ☐ マスの辺を通る量から、表計算で発散を求められる。 → 357 ページ
- ☐ 発散を偏微分の和で計算し、流束や連続の式と結びつけられる。 → 364 ページ

ミナ

矢印を見ているだけではわからなかった池の口が、たし算とひき算で見つかったね。次は、矢印が「回る」ようすを調べよう。

第 3 部　発散と回転

★★★★★

8-10 うず：回転 rot

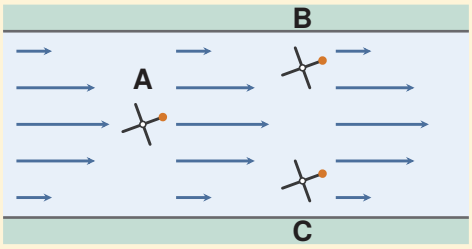
道しるべ　この章の前に 4-14 7-4 8-2 8-5 8-7 8-9　この章の先に 8-11 8-12 8-14

この章でできるようになること

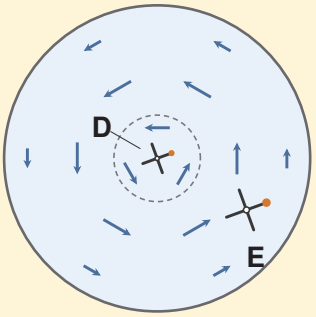
- ★★★ 矢印の場の図から、小さな風車が回るかどうかと、その向きを見分けられる。
- ★★★★ マスのまわりを 1 周してたす量（循環）を表計算で求め、面積でわって回転を見積もれる。
- ★★★★★ 平面と 3 次元の rot を偏微分で計算し、保存力の見分けや、電流のまわりの磁場に使える。

はてな？

紙の風車を水にうかべると、水といっしょに流れていきます。風車 A〜E のうち、くるくる回るのはどれでしょう。回るとしたら、どちら向きでしょう（左は用水路で、まん中ほど速い。右は排水口のうずで、点線の円の外では、中心に近いほど速い。D はうずのまん中）。



用水路（上から見た図）



排水口のうず（上から見た図）

8-9 では、矢印の場の中に小さなマスを置き、「出る量－入る量」でわき出し（発散 div）を調べました。でも、矢印の場には、わき出しのほかに、もう 1 つ大事な形があります。8-5 の主役の場の（エ）うず $(-y,\ x)$ は、発散が 0 なのに、ぐるぐる回っていました。この章では、水や風の「回り方」を数で表します。

道具は、小さな風車です。風車は、まわりの流れが「回す働き」をもっているときだけ回ります。その回す働きを、場所ごとの数（3 次元では矢印）にしたものが、この章の**回転**（rot）です。台風のうず、川の岸近くの流れ、電流のまわりの磁場、そして物理第 1 巻（力-4）で使った「保存力の見分け方」が、すべてこの 1 つの考えでつながります。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、風車の絵と、表計算のかけ算・たし算だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、8-2 の偏微分を使います。1 回で分からなくても大丈夫です。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

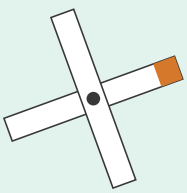
- 8-5　矢印の場：場所 $(x,\ y)$ を入れると矢印 $\vec{F}=(F_x,\ F_y)$ が出てくる。主役の場は（ア）広がる $(x,\ y)$、（イ）集まる $(-x,\ -y)$、（ウ）そろった $(1,\ 0)$、（エ）うず $(-y,\ x)$、（オ）ずれ $(y,\ 0)$、（カ）側溝 $(x,\ 0)$。
- 8-9　発散 div：小さなマスの「出る量－入る量」を面積でわる。マスの 4 辺で「右－左＋上－下」。式では $\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}$。
- 8-7　線積分 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$：道を小さな 1 歩に分け、1 歩ごとの内積 $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ をたす。横に進む区間は $F_x\,\mathrm{d}x$、たてに進む区間は $F_y\,\mathrm{d}y$（場合 A）。閉じた道は $\displaystyle\oint_C$。
- 8-2　偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$：ほかを止めて 1 つだけ動かしたときの変化の割合。2 回の偏微分は、順番によらない。
- 4-14　外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の成分は $(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$。向きは右ねじ。
- 7-4　3×3 の行列式は、サラスの方法で 6 つの項をたしひきする。

やってみよう　紙の風車をうかべてみよう

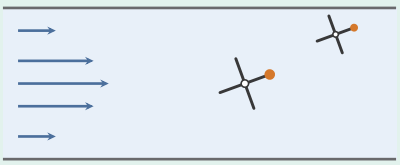
用意するもの

厚紙（牛乳パックを切ったものがよい）、つまようじ、油性ペン、洗面器、雨どいのような細長い入れ物（なければ、細長い食品の容器）

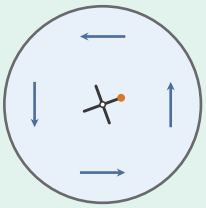
1. 厚紙を、長さ 3 cm・はば 5 mm の細長い板 2 枚に切り、十字に重ねて、まん中につまようじをさす。1 枚の羽根の先に、油性ペンで印をつける。
2. 細長い入れ物をかたむけて水をゆっくり流し、風車をまん中にうかべる。印の羽根の向きが変わるかを見よう。
3. こんどは、風車を岸（入れ物のかべ）の近くにうかべる。右岸と左岸で、回る向きをくらべよう。
4. 洗面器の水をスプーンで大きくかきまぜ、まん中と外側に風車をうかべよう。かきまぜるのをやめてしばらくしたら、もう一度見よう。



① 羽根を十字に



②③ 細長い入れ物



④ 洗面器

②のまん中の風車は、流れていくだけで、ほとんど回りません。③の岸の近くでは、風車は回りながら流れていきます。右岸と左岸では、回る向きが反対です。④でかきまぜた直後は、水全体がコップごと回すように回り、風車もどこでも回ります。しばらくすると、外側の風車は、ぐるっと回っていくのに、印の向きがあまり変わらなくなることがあります（水の動き方によって、少しずつ回ることもあります）。

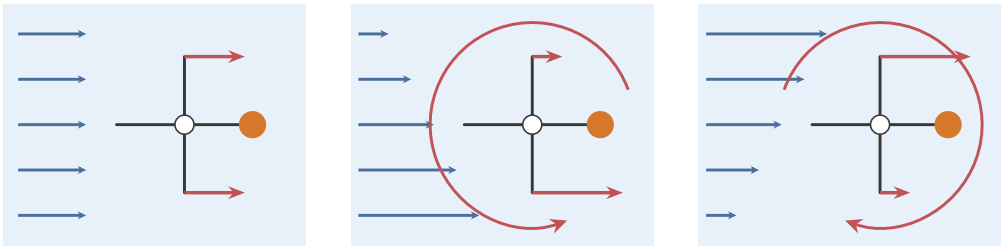
「流れていること」と「回ること」は、別のことのようです。なぜ岸の近くでは回るのでしょう。

数学の道具

目でわかる 小さな風車を置いてみる ★★★

1 風車が回るわけ：両側の速さのちがい

風車の羽根は、まわりの水に押されて動きます。羽根 4 枚が同じ速さで同じ向きに押されれば、風車は回らずに、そのまま流されるだけです。風車が回るのは、**羽根によって、押される強さがちがうとき**です。



上も下も同じ強さ
→ 回らない

下が強い
→ 左回り

上が強い
→ 右回り

図 1 青い矢印は水の流れ、赤い矢印は上と下の羽根が押される強さ。流れの向きがみな同じでも、上と下で速さがちがうと風車は回る。

図 1 のまん中では、下の羽根が強く右へ押され、上の羽根は弱く右へ押されます。下を右へ、上を（くらべると）左へ押されるので、風車は**左回り**（時計の針と反対の向き）に回ります。右の図はその反対で、**右回り**です。

つまり、風車が回るかどうかは、流れの向きではなく、**となりどうしの速さのちがい**で決まります。たての羽根（左と右の羽根）でも同じです。右の羽根が上へ強く押され、左の羽根が上へ弱く押されれば、やはり左回りです。

「回る」と「回らない」は、はじめての人がよくまちがえる

「流れが曲がっているから回る」「まっすぐ流れているから回らない」と考えたくなります。でも、図 1 のまん中と右の流れは、どれもまっすぐ右向きなのに、風車は回ります。反対に、ぐるっと曲がって流れていても、回らない風車もあります（❓はてな？の E。⑨で調べます）。風車が回るかどうかは、羽根 1 枚 1 枚が押される強さで考えます。

❷ 主役の 6 つの場に、風車を置く

8-5 の主役の 6 つの場に、風車を置いてみます。風車は、どの図も右上（$x = 1.5$、$y = 1.5$）の場所に置きました（その近くの 4 本の矢印は、風車が見えるように省いています）。

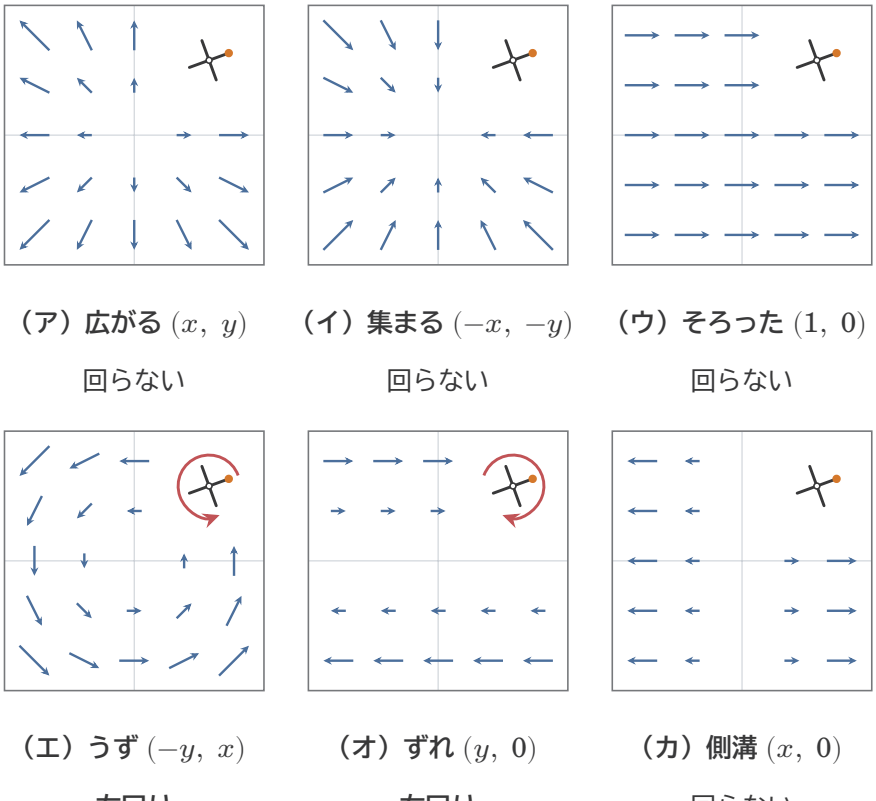


図 2　主役の 6 つの場と、右上に置いた風車。赤い矢印は回る向き。回るのは（エ）と（オ）だけ。

1 つずつ、羽根の押され方で確かめます。

- **（ア）広がる**　上の羽根も下の羽根も右上へ押されますが、横向きの押され方（x 成分）は、上と下で同じです（x 成分は x だけで決まり、上と下で x は同じ）。たての羽根も、上向きの押され方が左右で同じです。だから回りません。
- **（イ）集まる・（ウ）そろった・（カ）側溝**　どれも、上と下の羽根の横向きの押され方が同じで、左と右の羽根のたて向きの押され方も同じです。回りません。（カ）は右へ行くほど速くなりますが、それは左右の羽根の**横向き**の押され方のちがいで、回す働きにはなりません（8-9 では、これがわき出しになりました）。
- **（エ）うず**　上の羽根は左へ、下の羽根は右へ押されます。右の羽根は上へ、左の羽根は下へ押されます。4 枚とも左回りの向きに押されるので、よく回ります。
- **（オ）ずれ**　流れはまっすぐ右向きなのに、上ほど速いので、上の羽根が強く右へ押されます。右回りです。

たいせつ

風車が回るかどうかは、流れの向きではなく、羽根の両側の速さのちがいで決まる。

・上下の羽根では、横向きの速さのちがい

・左右の羽根では、たて向きの速さのちがい

③ 1 周して、流れにそって進む量をたす：循環

風車の羽根を見るかわりに、もう 1 つの見方をします。小さなマスのふちを、左回りに 1 周する道を考えます。1 周しながら、「流れが、進む向きにどれだけ押してくれるか」をたし合わせます。

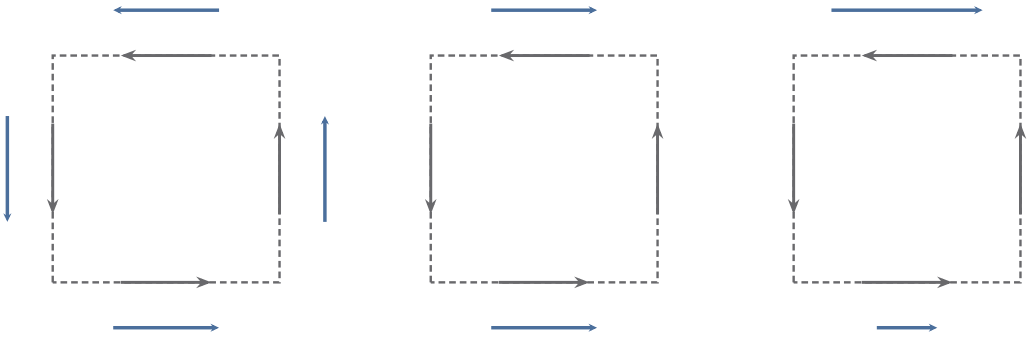


図 3　灰色の点線と矢印は、マスのふちを左回りに 1 周する道。青い矢印は、辺のまん中での流れ。

うずでは、4 つの辺のどこでも、流れが進む向きに押してくれます。1 周の合計は大きな正の数です。そろった流れでは、下の辺（右へ進む）では進む向きに押されますが、上の辺（左へ進む）では同じだけ逆に押され、合計は 0 です。ずれでは、上の辺の逆向きのほうが大きいので、合計は負です。

1 周の合計が正なら左回り、負なら右回り、0 なら回らない。風車の結果（図 2）と、ぴったり合っています。この「1 周して、流れにそって進む量をたしたもの」を**循環**（じゅんかん）といいます。8-7 の言葉でいえば、閉じた道 C にそった線積分 $\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ です。

> **せいかくに言うと**
>
> 羽根で見る見方（①）と、1 周する見方（③）は、同じことを見ています。マスの下の辺で「進む向きに押される」のは、下の羽根が右へ押されるのと同じです。上の辺では、左へ進むので、上の羽根が右へ押されると、進む向きには逆になります。だから「1 周の合計」は、「下の羽根を右へ押す強さ－上の羽根を右へ押す強さ＋右の羽根を上へ押す強さ－左の羽根を上へ押す強さ」と同じ形になり、風車を左回りに回す働きそのものになります。

手でわかる マスのまわりを１周して数える ★★★★

4 マスの４辺で、循環を計算する

１辺 h のマスを左回りに１周します。辺が短いので、１つの辺の上では、流れはほぼ同じとみて、**辺のまん中の値**で代表させます（8-9 で、辺を通りぬける量を計算したときと同じ考え）。１つの辺で「進む向きに押す量」は、8-7 の場合 A（軸に平行な道）のとおり、進む向きの成分×辺の長さ h です。

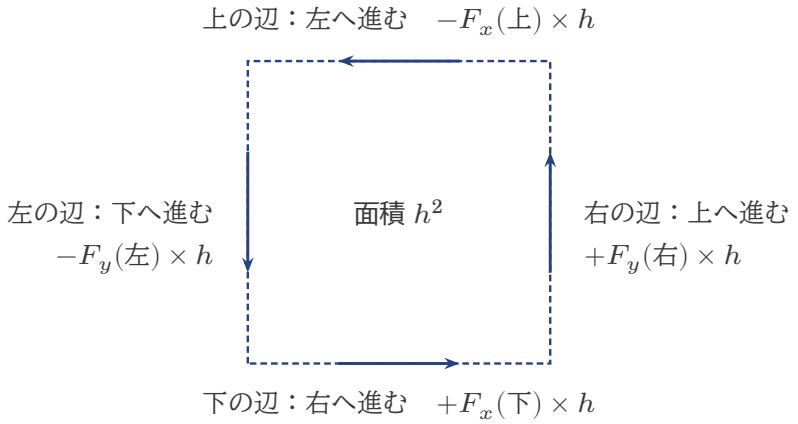


図 4　１辺 h のマスを左回りに１周する。上の辺は左へ、左の辺は下へ進むので、そこでは成分にマイナスがつく。

$$循環 \quad = \quad \{F_x(下)+F_y(右)-F_x(上)-F_y(左)\}\times h$$

上の辺でマイナスがつくのは、上の辺では左（x の負の向き）へ進むからです。流れの x 成分が正（右向き）なら、進む向きとは逆なので、引かれます。左の辺も、下へ進むのでマイナスです。8-9 の発散では「右－左＋上－下」でしたが、循環では「下＋右－上－左」です。発散は辺を**通りぬける**成分（辺に直角な成分）、循環は辺に**そう**成分（辺に平行な成分）を使います。

面積でわって、「回る強さ」にそろえる

循環は、マスが大きいほど大きくなります（辺が長くなるから）。そこで、8-9 と同じように、マスの面積 h^2 でわって、**1 平方メートルあたり**の量にそろえます。この値を、その場所の**回転**（かいてん）といい、$\mathrm{rot}\,\vec{F}$ と書きます。「ローテーション」と読みます（rotation は「回転」という意味）。

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} \approx \frac{\text{循環}}{h^2} \qquad \text{（正なら左回り、負なら右回り）}$$

流れの速さ（m/s）の矢印なら、循環の単位は（m/s）× m = m²/s、回転の単位は m²/s ÷ m² = 1/s です。

主役の 6 つの場を、表計算で

1 辺 $h = 1$ のマス（$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 1$）で、6 つの場の循環を計算します。下の辺のまん中は $(0.5,\ 0)$、右の辺は $(1,\ 0.5)$、上の辺は $(0.5,\ 1)$、左の辺は $(0,\ 0.5)$ です。たとえば（エ）うず $(-y,\ x)$ では、下の辺のまん中の F_x は $-0 = 0$、右の辺の F_y は $x = 1$、上の辺の F_x は -1、左の辺の F_y は $x = 0$ です。

	A	B	C	D	E	F	G
1	場	下 F_x	右 F_y	上 F_x	左 F_y	循環	回転
2	（ア）	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0
3	（イ）	−0.5	−0.5	−0.5	−0.5	0	0
4	（ウ）	1	0	1	0	0	0
5	（エ）	0	1	−1	0	2	2
6	（オ）	0	0	1	0	−1	−1
7	（カ）	0.5	0	0.5	0	0	0

表 1　F2 に `=(B2+C2-D2-E2)*1`（$h = 1$）、G2 に `=F2/1`（面積 $h^2 = 1$）と入れ、下へコピーした。回転が 0 でないのは（エ）と（オ）だけで、風車の結果と同じ。

（エ）の回転は 2 で正（左回り）、（オ）は −1 で負（右回り）です。風車の絵（図 2）と同じ結果が、数で出てきました。

物理第 1 巻の道 A・道 B と同じ計算

（エ）の場 $(-y,\ x)$ は、物理第 1 巻（力-4）の $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ と同じです。力-4 では、$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$ まで、道 A（右へ進んでから上へ）と道 B（上へ進んでから右へ）で仕事を計算し、A は 1 J、B は −1 J でした。マスを左回りに 1 周する道は、「道 A で行って、道 B を逆にもどる」道です。逆にもどると符号が変わるので（8-7）、

$$\text{循環} = 1 - (-1) = 2$$

で、表の（エ）の循環 2 と同じです。力-4 で「rot の値 2 ×囲んだ面積 1」と書いたのは、このことです。

一方、$\vec{F}_1 = (y,\ x)$ では、道 A も道 B も 1 J なので、循環は $1 - 1 = 0$ です。辺のまん中の値で計算しても、下 $F_x = 0$、右 $F_y = 1$、上 $F_x = 1$、左 $F_y = 0$ で、$0 + 1 - 1 - 0 = 0$ になります。

「循環」は名前。計算するときは、ふつうの定積分に直す

循環 $\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ は、8-7 で学んだ「閉じた道の線積分」の**名前**です。記号を見ただけでは、まだ計算できません。正方形の道なら、4 つの辺に分け（表 8-7 の E）、それぞれを軸に平行な道（表 8-7 の A）として、ふつうの定積分に直します。1 辺 1、左下の角が原点の正方形では、次のようになります。

$$\underbrace{\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1 F_x(x,\ 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F_y(1,\ y)\,\mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}}$$

$$- \underbrace{\int_0^1 F_x(x,\ 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F_y(0,\ y)\,\mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}}$$

下の辺では $y=0$ に止めて x を 0 から 1 へ、右の辺では $x=1$ に止めて y を 0 から 1 へ進みます。上の辺は x を 1 から 0 へ（左へ）進むので、$\int_1^0 = -\int_0^1$ でマイナスがつきます。左の辺も同じです。（エ）の場 $(-y,\ x)$ なら、

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}y - \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 0\,\mathrm{d}y = 0+1+1-0 = 2$$

で、表の循環 2 とぴったり同じです。④の「辺のまん中の値×はば」は、この 4 つの定積分を、長方形 1 つで見積もったものだったのです（5-10 の細い長方形と同じ考え）。（エ）の場は 1 次式なので、まん中の値でちょうど同じ値になりました。

5 用水路の回転の地図

❓はてな？の用水路を、数で調べます。用水路のはばは 2 m で、まん中を $y=0$、北の岸を $y=1$、南の岸を $y=-1$ とします。水の速さは、まん中で 1 m/s、岸で 0 とし、次の式で表されるとします。

$$\vec{v} = (1-y^2,\ 0)\quad (\mathrm{m/s})$$

$y=0$ で 1、$y=\pm 1$ で 0 です。岸では、水が岸にくっついて止まるからです（水のねばりのため。くわしくは物理 力-14）。

たての辺では $v_y=0$ なので、循環は上と下の辺だけで決まります。

$$\text{循環} = \{v_x(\text{下}) - v_x(\text{上})\} \times h$$

$h=0.5\,\mathrm{m}$ のマスで、北の岸から南の岸まで計算します。表計算では、行を北から南へ並べます（上の行が北）。

	A	B	C	D
1	y（m）	v_x（m/s）	循環（m²/s）	回転（1/s）
2	1.0	0		
3	0.5	0.75	0.375	1.5
4	0	1	0.125	0.5
5	−0.5	0.75	−0.125	−0.5
6	−1.0	0	−0.375	−1.5

表 2 B2 に `=1-A2^2`。C3 に `=(B3-B2)*0.5`（B3 がマスの下の辺、B2 が上の辺）、D3 に `=C3/0.25`（面積 0.5^2）。3 行め・4 行め…は、その行と 1 つ上の行のあいだのマス。

北の半分のマスでは回転が正（左回り）、南の半分では負（右回り）です。そして、岸に近いほど回転が大きくなります。D 列の数は、どれもマスのまん中の y の 2 倍になっています（たとえば 3 行めのマスは $y = 0.5$ と 1 のあいだで、まん中は 0.75、その 2 倍が 1.5）。マスを $h = 0.25\,\mathrm{m}$ と細かくしても、やはり「マスのまん中の y の 2 倍」になります（北の岸のマスで 1.75）。

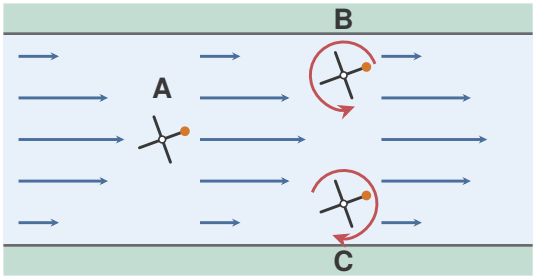


図 5 ❓はてな？の答え（用水路）。まん中の A は回らない。北の岸に近い B は左回り、南の岸に近い C は右回り。

❓はてな？の答えの前半です。まん中の風車 A は回りません（$y = 0$ をはさむマスは、上と下で速さが同じ）。北の岸に近い B は左回り、南の岸に近い C は右回りです。岸の近くでは、岸側がおそく、まん中側が速いので、風車は「まん中側の羽根が強く押される」向きに回るのです。やってみようの③で、右岸と左岸で回る向きが反対だったのは、このためです。

コラム　雨どいでは、岸の近くほどよく回る

用水路の流れは、岸で 0、まん中でいちばん速くなります。速さのグラフは、岸の近くでいちばん急です。回転の大きさは、この「速さのグラフの傾き」で決まるので、岸に近いほど風車はよく回ります。川を下る木の葉が、岸の近くでくるくる回りながら流れていくのを見たことがあるでしょうか。あれも同じしくみです。

ここまでで十分

風車が回るかを羽根の押され方で見分け、マスの 4 辺で循環を計算して面積でわれば、回転の大きさと向きがわかります。ここまでで十分です。この先は、偏微分の式で、回転をぴったり求めます。

∂ 式でわかる　偏微分で書く　★★★★★

6 マスを小さくすると：平面の rot

左下の角が $(x,\ y)$、1 辺 h のマスで、循環を式で書きます。辺のまん中の点は、下 $(x+\frac{h}{2},\ y)$、右 $(x+h,\ y+\frac{h}{2})$、上 $(x+\frac{h}{2},\ y+h)$、左 $(x,\ y+\frac{h}{2})$ です。たての辺どうし（右と左）、横の辺どうし（上と下）をまとめます。

$$\text{循環} \approx \{F_x(\text{下}) + F_y(\text{右}) - F_x(\text{上}) - F_y(\text{左})\}h \qquad \text{④の式}$$

$$= \{F_y(\text{右}) - F_y(\text{左})\}h - \{F_x(\text{上}) - F_x(\text{下})\}h \qquad \text{組にした}$$

$$\frac{\text{循環}}{h^2} \approx \frac{F_y(\text{右}) - F_y(\text{左})}{h} - \frac{F_x(\text{上}) - F_x(\text{下})}{h} \qquad \text{面積 } h^2 \text{ でわった}$$

右の辺と左の辺のまん中は、y が同じ $y+\frac{h}{2}$ で、x だけが h ちがいます。だから、1 つめの分数は「y を止めて、x を h だけ動かしたときの F_y の変化の割

合」です。h を小さくした先は、8-2 の偏微分 $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ です。2 つめの分数は、x を止めて y を動かしたときの F_x の変化の割合で、$\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ になります。

平面の回転　　$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$

物理第 1 巻（力-4）で「平面の力なら、確かめるのは $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0$ かどうか」と書いたのは、この式です。

①の風車の言葉で読むと、1 つめの項 $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ は「左右の羽根のたて向きの速さのちがい」、2 つめの項 $\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ は「上下の羽根の横向きの速さのちがい」です。上の羽根のほうが右へ強く押されると右回りなので、2 つめの項にはマイナスがつきます。

6 つの場と用水路で確かめる

場 $\vec{F} = (F_x,\ F_y)$	$\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$	$\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$	$\mathrm{rot}\,\vec{F}$	風車
（ア）$(x,\ y)$	0	0	$0-0=0$	回らない
（イ）$(-x,\ -y)$	0	0	$0-0=0$	回らない
（ウ）$(1,\ 0)$	0	0	$0-0=0$	回らない
（エ）$(-y,\ x)$	1	-1	$1-(-1)=2$	左回り
（オ）$(y,\ 0)$	0	1	$0-1=-1$	右回り
（カ）$(x,\ 0)$	0	0	$0-0=0$	回らない
用水路 $(1-y^2,\ 0)$	0	$-2y$	$2y$	北：左、南：右

表 3　偏微分で計算した回転。④の表計算と同じ値（用水路は、マスのまん中の y の 2 倍）。

（ア）の $F_y = y$ を x で偏微分すると、y は止めた数なので 0 です（8-2）。（エ）の $F_x = -y$ を y で偏微分すると -1 なので、引くと $+1$ になり、2 つの項がたし合わさって 2 になります。用水路の $F_x = 1 - y^2$ を y で偏微分すると $-2y$

です。回転は $2y$ で、表計算の「マスのまん中の y の 2 倍」とぴったり合います。（この場は y の 2 次式なので、辺のまん中の値で計算しても、ちょうど同じ値になります。）

> **せいかくに言うと**
>
> 回転は、次のように決めます。点 P をかこむ小さな道 C をとり、その道でかこまれた面積を ΔS とします。
>
> $$\mathrm{rot}\,\vec{F}(\mathrm{P}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
>
> 道は左回りに 1 周します。$\vec{F}$ がなめらかに変わる場なら、道が正方形でも円でも、小さくした先は同じ値になり、それが $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ に等しいことが知られています。8-9 の発散が「出入り÷面積」の極限だったのと同じ形の決め方です。

7 風車の回る速さは、rot の半分

水が、コップごと回すように、全体がいっしょに回っているとします。回転台にのせた水そうの水が、台といっしょに回るときです。角速度を ω〔rad/s〕とすると、点 $(x,\ y)$ の水の速度は、次のとおりです。

$$\vec{v} = \omega\,(-y,\ \ x)$$

点 $(x,\ y)$ は、原点から距離 r の円の上を回ります。速さは $r\omega$ で（4-8 の円運動）、向きは位置の矢印 $(x,\ y)$ を左に 90° 回した $(-y,\ x)$ の向きです（7-6：90° 回す行列）。$(-y,\ x)$ の長さは r なので、ω 倍すれば、ちょうど速さ $r\omega$ になります。

回転を計算します。

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\omega x) = \omega \qquad v_y = \omega x、\ \omega \text{ は定数}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y) = -\omega \qquad v_x = -\omega y$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \omega - (-\omega) = 2\omega \qquad 2 \text{ つの項が同じだけ効く}$$

水そうの水は角速度 ω で回っているのに、回転は 2ω です。なぜ 2 倍なのでしょう。

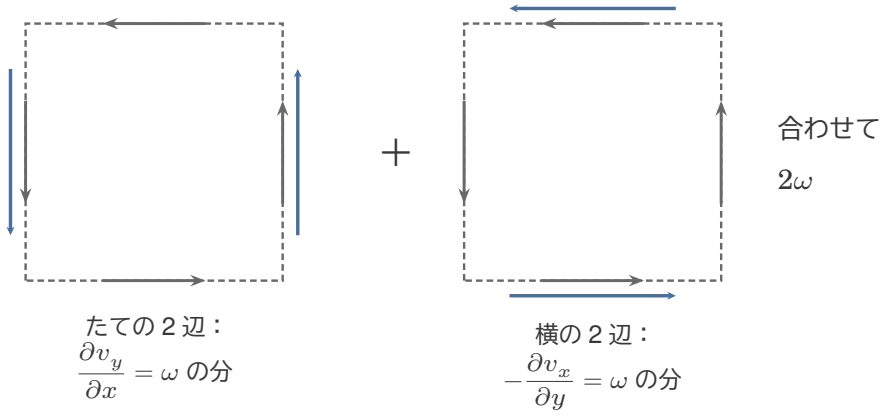


図 6 全体がいっしょに回る水の中の、原点のまわりのマス。たての 2 辺の分と横の 2 辺の分が、どちらも ω ずつ、左回りに効く（どこに置いたマスでも同じ）。

回転は、「たての 2 辺の分」と「横の 2 辺の分」の和です。全体がいっしょに回る水では、どちらの分も ω ずつ左回りに効くので、たして 2ω になります。一方、風車（水といっしょに回る小さな板）が回る角速度は、水そのものの角速度 ω です。だから、

$$\text{風車が回る角速度} \quad = \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$$

です。この関係は、全体がいっしょに回る水でなくても、小さな風車なら成り立ちます（たての羽根の回り方と横の羽根の回り方の平均が、風車の回り方になるため）。たとえば（オ）ずれ $(y,\ 0)$ の回転は -1 なので、そこに置いた風車は、$0.5\,\mathrm{rad/s}$ で右回りに回ります。

せいかくに言うと

（オ）ずれでは、横の羽根（上下の羽根）だけが強く右回りに押され、たての羽根（左右の羽根）は押されません。このとき、横の羽根は角速度 1 で回されようとし、たての羽根は回されようとしません。十字の風車は 1 つのかたまりなので、その平均の 0.5 で回ります。「$\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}$」の $\frac{1}{2}$ は、この「2 組の羽根の平均」の $\frac{1}{2}$ です。

8 3 次元の rot：3 つの軸のまわりの回り方

3 次元の流れ $\vec{F} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$ では、風車を置く向きが 3 通りあります。軸を z 軸に平行にして置くと（羽根は xy の面の中）、z 軸のまわりの回り方がわかります。それは、平面の回転と同じ $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ です。軸を x 軸、y 軸に平行にして置いても、同じように計算できます。

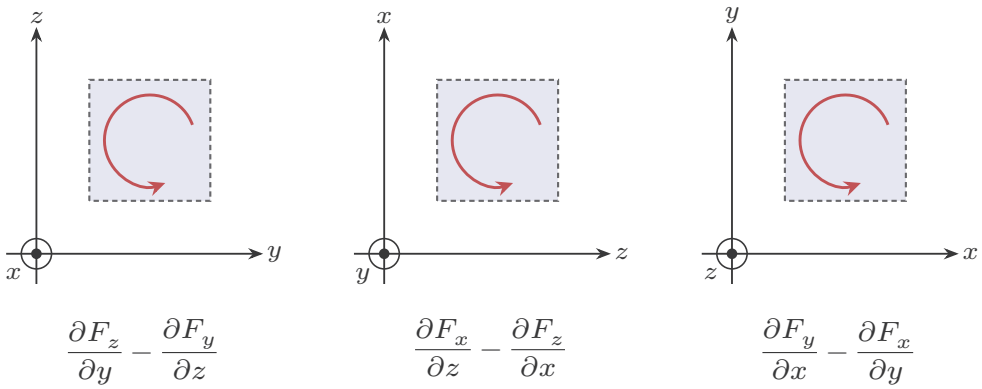


図 7　左から、x 軸・y 軸・z 軸のまわりの回り方。どの図も、残りの軸（原点の $\odot$）が紙の手前に向かっている。手前から見て左回りが正（右ねじが手前に進む向き：4-14）。

図 7 の 3 つの図は、文字が $x \to y \to z \to x$ と 1 つずつずれているだけです。右へのびる軸を「横の軸」、上へのびる軸を「たての軸」とすると、どの図でも

$$\frac{\partial(\text{たての軸の成分})}{\partial(\text{横の軸})} - \frac{\partial(\text{横の軸の成分})}{\partial(\text{たての軸})}$$

です。3 つの回り方を、それぞれの軸の向きの成分として並べた矢印を、3 次元の**回転** $\operatorname{rot}\vec{F}$ とします。

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} & \leftarrow x \text{ 成分} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} & \leftarrow y \text{ 成分} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} & \leftarrow z \text{ 成分} \end{pmatrix}$$

矢印 $\operatorname{rot}\vec{F}$ の**向き**は、そこに置いた風車がいちばんよく回る軸の向き（右ねじの進む向き）、**長さ**は、その軸で回したときの回転の強さです。3 次元の回転は、数

ではなく**矢印**です。平面の流れ（$F_z = 0$ で、F_x、F_y が z によらない）なら、x 成分と y 成分は 0 になり、z 成分だけが残ります。平面の回転は、3 次元の回転の z 成分なのです。

外積と行列式の形で覚える

この 3 つの成分は、4-14 の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の成分

$$(a_y b_z - a_z b_y,\ \ a_z b_x - a_x b_z,\ \ a_x b_y - a_y b_x)$$

と、まったく同じ形です。$\vec{a}$ のかわりに 8-4 のナブラ $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ を、$\vec{b}$ のかわりに $\vec{F}$ を入れ、「$\dfrac{\partial}{\partial y}$ と F_z をかける」を「F_z を y で偏微分する」と読みかえると、$\mathrm{rot}\,\vec{F}$ になります。そこで、

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} \qquad （ナブラ・クロス・エフ）$$

とも書きます。また、7-4 の 3×3 の行列式の形でも覚えられます。1 行めに $x \cdot y \cdot z$ の向きの長さ 1 の矢印 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$（4-13 の $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ と同じもの）、2 行めに ∇ の 3 つ、3 行めに $\vec{F}$ の 3 つの成分を並べます。

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

サラスの方法（7-4）で 6 つの項を作ると、次のようになります。2 行めと 3 行めをかけるところは、「3 行めの成分を、2 行めの文字で偏微分する」と読みます。

$$+\vec{e}_x \frac{\partial F_z}{\partial y} + \vec{e}_y \frac{\partial F_x}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \text{右下へ向かうななめの 3 つ（たす）}$$

$$-\vec{e}_z \frac{\partial F_x}{\partial y} - \vec{e}_x \frac{\partial F_y}{\partial z} - \vec{e}_y \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \text{左下へ向かうななめの 3 つ（ひく）}$$

$\vec{e}_x$ の項を集めると $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}$ で、x 成分です。$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ の項も、上の式の y 成分・z 成分になります。

せいかくに言うと

この「行列式」は、覚えるための形です。本当の行列式ではありません。1 行めは矢印、2 行めは「偏微分せよ」という命令で、ふつうの数ではないからです。とくに、かける順番を入れかえてはいけません。$\dfrac{\partial}{\partial y}F_z$ は「F_z を y で偏微分する」ですが、$F_z\dfrac{\partial}{\partial y}$ と書くと、「F_z に、あとで何かを偏微分したものをかける」という別の意味になります。かならず「2 行めの命令を、3 行めの成分にはたらかせる」順で書きます。

3 次元で、全体がいっしょに回る流れ

全体が、角速度の矢印 $\vec{\omega}=(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)$ のまわりに回っているとき、点 $\vec{r}=(x,\ y,\ z)$ の速度は、外積を使って $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ と書けます（4-14：回る向きを右ねじの軸の矢印で表す）。$\vec{\omega}=(0,\ 0,\ \omega)$ なら、

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=(0\times z-\omega y,\ \ \omega x-0\times z,\ \ 0\times y-0\times x)=(-\omega y,\ \ \omega x,\ \ 0)$$

で、⑦の流れと同じです。回転は、3 つの成分を 1 つずつ計算して $(0,\ 0,\ 2\omega)$ になります。どんな向きの $\vec{\omega}$ でも、同じように計算すると、

$$\mathrm{rot}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})=2\vec{\omega}$$

となります（例題 6 で、$\vec{\omega}=(1,\ 1,\ 0)$ のときを確かめます）。回転の矢印は、回る軸の向きで、長さは角速度の 2 倍です。

⑨ 回りながら流れても回らない：うずなし流れ

❓はてな？の排水口のうずを調べます。お風呂の栓をぬいたときのうずや、竜巻のまわりの風は、中心に近いほど速く回ります。中心から距離 r の所の速さが $\dfrac{k}{r}$（k は定数）のように、距離に反比例しているとします。向きは $(-y,\ x)$ の向きで、その長さは r なので、

$$\vec{v}=\frac{k}{r}\times\frac{(-y,\ x)}{r}=k\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

です（$r^2=x^2+y^2$）。この場の回転を、$k=1$ として計算します。分数の偏微分は、5-6 の商の微分（y を止めて x で微分）で求めます。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x\times 2x}{(x^2+y^2)^2}$$ 商の微分。y は止めた数

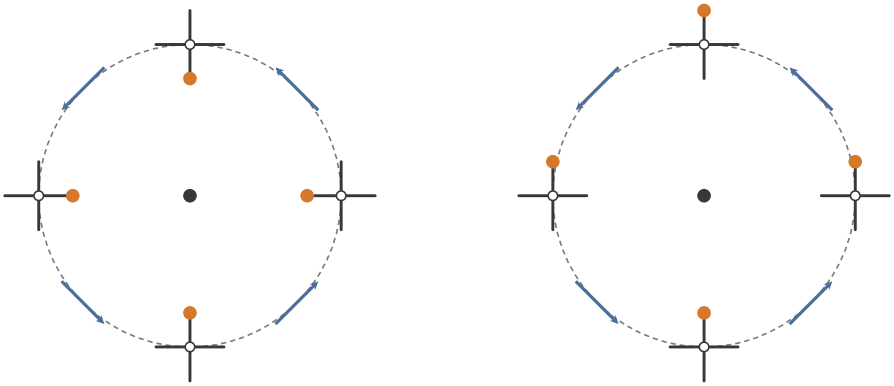
$$=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 分子を整理した

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\times 2y}{(x^2+y^2)^2}$$ 商の微分。x は止めた数

$$=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 分子を整理した（符号に注意）

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$ 引くと 0

ぐるぐる回っている流れなのに、回転は（中心以外の）どこでも 0 です。このような流れを**うずなし流れ**といいます。



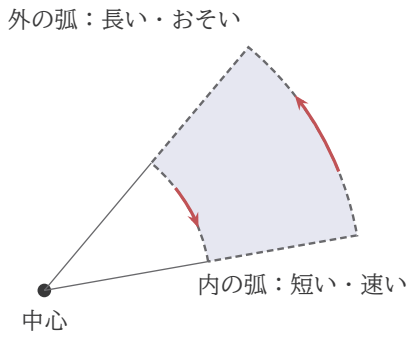
コップごと回す流れ
印はいつも中心を向く（回る）

うずなし流れ
印はいつも上を向く（回らない）

図 8 同じ風車が、円にそって 1 周するあいだのようす（4 か所をかいた）。左は、コップごと回す流れ。風車は 1 周するあいだに 1 回転する。右は、うずなし流れ。風車はぐるっと回っていくが、印の羽根の向きは変わらない。

なぜ回らないのか：おうぎ形のマスで考える

マスを、正方形のかわりに、中心のまわりのおうぎ形の一部（図 9）にして、循環を計算します。まっすぐな 2 辺は、流れに直角なので、進む向きに押す量は 0 です。外側の弧では左回りに進み、内側の弧では右回りにもどります。



半径 r_1 の内の弧と、半径 r_2 の外の弧のあいだのマスで、角を $\Delta\theta$ とします。弧の長さは、半径×角（4-2）です。

外の弧：速さ $\dfrac{k}{r_2}$ × 長さ $r_2\Delta\theta = k\Delta\theta$

内の弧：速さ $\dfrac{k}{r_1}$ × 長さ $r_1\Delta\theta = k\Delta\theta$

循環 $= k\Delta\theta - k\Delta\theta = 0$

図 9　おうぎ形のマス。外の弧は長いがおそく、内の弧は短いが速い。「速さ×長さ」がちょうど同じになり、循環は 0。

外の弧は長いけれどおそく、内の弧は短いけれど速いので、「速さ×長さ」はどちらも $k\Delta\theta$ で、ちょうど打ち消し合います。速さが $\dfrac{k}{r}$（距離に反比例）だからこそ、ぴったり 0 になるのです。コップごと回す流れ（速さ $r\omega$）なら、外の弧は $r_2\omega \times r_2\Delta\theta$、内の弧は $r_1\omega \times r_1\Delta\theta$ で、外の弧のほうが大きく、循環は正になります。

風車の羽根で言えば、うずなし流れでは 2 つの働きが打ち消し合っています。1 つは、流れが曲がっていくので、風車も向きを変えようとする働き（左回り）。もう 1 つは、中心側の羽根が速く、外側の羽根がおそいので、右回りに回そうとする働きです。

❓はてな？の答えの後半です。排水口のうずの外側にある風車 E は、ぐるっと回っていきますが、羽根の向きは変わりません（回らない）。うずの中心にある D は、中心の近く（点線の円の中）が、コップごと回すように回っているので、左回りに回ります。本物のうずでは、中心の近くはコップごと回す流れ、外側はうずなし流れに近くなっていることが多いのです。

せいかくに言うと

うずなし流れの式は、中心（原点）では分母が 0 になり、矢印が決まりません。原点をかこむ道を 1 周すると、循環は 0 ではなく、半径によらず $2\pi k$ になります（8-7）。「回転はどこでも 0 なのに、1 周の循環は 0 でない」のは、原点という「穴」があるためです。この穴のふしぎは、8-11 で調べます。本物のうずでは、中心にコップごと回す部分があり、そこに回転が集まっています。

Python で、マスを小さくして確かめる

④・⑤の表計算と同じ計算を、Python でします。前半は用水路（$h = 0.25$）、後半はうずなし流れの中の、左下の角が $(1,\ 0.5)$ のマスです。

Python

```
import numpy as np
h = 0.25
y = np.arange(1, -1.01, -h)       # 北の岸から南の岸へ
vx = 1 - y**2
circ = (vx[1:] - vx[:-1]) * h     # 下の辺 -  上の辺
print(circ / h**2)                # 回転
def F(x, y):                      # うずなし流れ
    r2 = x*x + y*y
    return -y/r2, x/r2
for h in [0.1, 0.01]:
    x0, y0 = 1.0, 0.5             # マスの左下の角
    c = (F(x0+h/2, y0)[0] + F(x0+h, y0+h/2)[1]
         - F(x0+h/2, y0+h)[0] - F(x0, y0+h/2)[1]) * h
    print(h, c / h**2)
```

実行結果

```
[ 1.75  1.25  0.75  0.25 -0.25 -0.75 -1.25 -1.75]
0.1 0.0008905181312857111
0.01 8.986314903314252e-06
```

用水路の回転は、マスのまん中の y の 2 倍（1.75、1.25、…）です。`vx[1:]` は 2 番め以降（マスの下の辺）、`vx[:-1]` は最後をのぞいたもの（マスの上の辺）で、ひき算が 1 回で全部のマスについてできます。うずなし流れのマスでは、回転の見積もりは $h = 0.1$ で約 0.0009、$h = 0.01$ で約 0.000009 と、マスを 10 分の 1 にすると 100 分の 1 になり、0 に近づいていきます（e-06 は $\times 10^{-6}$）。辺のまん中の値で代表させた分のずれが、マスを小さくすると消えていくのです。

⑩ 坂をくだる流れには、うずがない

8-4 で、高さ h の地図から、いちばん急な上りの向き $\mathrm{grad}\, h$ を作りました。ボールが転がる向きの矢印 $-\mathrm{grad}\, h$ の場に、風車を置くと回るでしょうか。主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ で計算します。

$$-\mathrm{grad}\, h = \left(-\frac{\partial h}{\partial x},\ -\frac{\partial h}{\partial y}\right) = (0.02x,\ \ 0.04y) \qquad \text{8-4 の勾配に} -$$

$$\mathrm{rot} = \frac{\partial}{\partial x}(0.04y) - \frac{\partial}{\partial y}(0.02x) = 0 - 0 = 0 \qquad \text{止めた文字の式}$$

回りません。じつは、**どんな関数 f でも、$\mathrm{grad}\, f$ の回転は 0** です。平面なら、次のとおりです。

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{8-4}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \text{平面の rot の式に入れた}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 0 \qquad \text{2 回の偏微分は順番によらない (8-2)}$$

3 次元でも、3 つの成分のどれも、同じ理由で 0 になります。

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \vec{0} \qquad \text{（坂の矢印の場には、うずがない）}$$

物理第 1 巻（力-4）で「$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ と書ける力では $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$ になり」と書いたのは、このことです。

うずの矢印の場には、わき出しがない

反対の組み合わせも調べます。どんな $\vec{F}$ でも、回転の矢印 $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ の場の発散 (8-9) は 0 です。

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

かっこを開くと 6 つの項が出ます。$\dfrac{\partial^2 F_z}{\partial x\,\partial y}$ と $-\dfrac{\partial^2 F_z}{\partial y\,\partial x}$ のように、同じ 2 回の偏微分が＋と－で 1 組ずつ出てきて、8-2 の「順番によらない」で、3 組とも打ち消し合います。

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0 \qquad \text{（うずの矢印の場には、わき出しがない）}$$

8-14 で読む電気と磁気の式で、この 2 つの関係が大事な役目をします。

11 電流のまわりの磁場

4-14 のもっと知りたいで、まっすぐな導線のまわりの磁場は「くわしい式（外積が出てきます）は、8-10 で学びます」と約束しました。導線を z 軸にとり、電流 I〔A〕が z の正の向き（紙の手前に向かう向き）に流れているとします。導線から距離 r の所の磁場（磁束密度）$\vec{B}$ の大きさは、物理の実験から

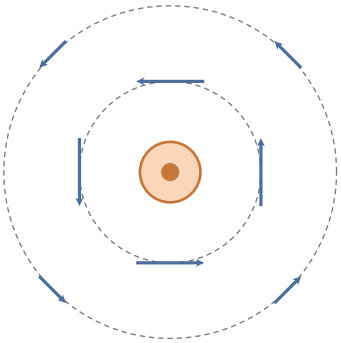
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

とわかっています（高校物理の $H = \dfrac{I}{2\pi r}$ に、真空の透磁率 μ_0 をかけたもの）。$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$ N/A² （= T·m/A。2019 年の SI の改定からは測って決める値で、ほぼこの値）です。向きは右ねじの法則で、電流の向きに右ねじが進むとき、ねじを回す向きです。この向きは、導線から見た点の向き $\vec{e}_r = \dfrac{(x,\ y,\ 0)}{r}$ と、電流の向き $\vec{e}_z = (0,\ 0,\ 1)$ の外積で書けます。

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \frac{(0\times 0 - 1\times y,\ \ 1\times x - 0\times 0,\ \ 0\times y - 0\times x)}{r} = \frac{(-y,\ x,\ 0)}{r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \ \frac{x}{x^2+y^2},\ \ 0\right)$$

これは、⑨のうずなし流れと同じ形（$k = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}$）です。だから、**導線の外では** $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$ です。磁場は導線のまわりをぐるっと回っているのに、導線の外のどこにも「うず」はありません。



導線（電流は手前へ）と $\vec{B}$

上から見た図（電流は紙の手前に向かう）。磁場の向きは左回りで、導線から遠いほど弱い（$\frac{1}{r}$ に比例）。

10 A の電流から 5 cm（0.05 m）の所では、

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.05} = 4 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

で、地球の磁場（日本ではおよそ 4.5×10^{-5} T）と同じくらいです。

図 10　まっすぐな導線のまわりの磁場。形は、⑨のうずなし流れと同じ。

導線の中では、回転は電流の強さ

導線の中（半径 a の円の中）を、電流が一様に流れているとします。半径 r（$r < a$）の円の内側を流れる電流は、面積の割合で $I \times \frac{r^2}{a^2}$ です。磁場の大きさは、この内側の電流だけで決まり（8-11 で、その理由を学びます）、

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \times \frac{Ir^2}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, r$$

となります。距離 r に比例するので、導線の中の磁場は「コップごと回す流れ」と同じ形 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}(-y,\ x,\ 0)$ です。⑦から、回転は z の向きに

$$2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} = \mu_0 \times \frac{I}{\pi a^2}$$

です。$\frac{I}{\pi a^2}$ は、導線の断面 1 m^2 あたりの電流で、**電流密度** j〔A/m²〕といいます。

導線の中では　$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	導線の外では　$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$

磁場のうずは、電流が流れている所にだけあり、その強さと向きは電流そのものです。これが、8-11 のアンペールの法則と、8-14 で読む電気と磁気の式の 1 つになります。

専門書をのぞいてみよう ベクトル解析・流体力学の教科書ふうの書き方

ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転を $\operatorname{curl}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ で定める。速度場 $\mathbf{v}$ に対し $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ を渦度という。$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である流れを渦なし流れという。任意のスカラー場 φ に対し $\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{0}$、任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ に対し $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ が成り立つ。

訳 太字の $\mathbf{A}$ はこの本の $\vec{A}$。curl（カール）は rot の別の書き方で、英語の本で多い（「巻き毛・うず巻き」という意味）。渦度（うずど）は、速度の場の回転のこと。「渦なし流れ」は⑨のうずなし流れ。2 つの式は⑩の $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ と $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ で、$\nabla\varphi$ は $\operatorname{grad}\varphi$（この φ は球座標の角ではなく、ただの関数の名前）。

もっと知りたい ★★★★★

$\operatorname{rot} = \vec{0}$ なら、力は $-\operatorname{grad} U$ と書ける（すきまのない広がりの中なら）

⑩で、$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$ と書ける力（保存力）では $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ になることを見ました。反対に、$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ なら、どんな閉じた道の循環も 0 になり、線積分は道によらず、$-\operatorname{grad} U$ と書けます。閉じた道でかこまれた面を小さなマスに分けると、となりどうしのマスの共通の辺は、逆向きに 1 回ずつ通るので打ち消し合い、「マスの循環の合計＝外の 1 周の循環」になるからです（くわしくは 8-11 のストークスの定理）。どのマスの循環も 0 なら、外の 1 周も 0 です。

ただし、この話は、道でかこまれた所がすべて場の中にあるとき（**すきまのない広がりの中**）だけです。⑨のうずなし流れのように、原点に「穴」があると、原点をかこむ道は、マスで埋めつくせません。だから、回転が 0 でも、原点をかこむ 1 周の循環は $2\pi k$ になれるのです（8-11）。物理第 1 巻（力-4）の「（すきまのない広がりの中なら）」は、このことです。

たいせつ

循環	**左回りに 1 周して、辺にそう成分×長さをたす（$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$）**
回転	**循環÷面積。正なら左回り、負なら右回り**
平面	$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$
3 次元	$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$**（矢印。向きは回る軸）**
風車	**角速度は** $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$**。** $\mathrm{rot}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})=2\vec{\omega}$
いつも 0	$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=\vec{0}$**、** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{F})=0$

この章で出てきたことば

循環　閉じた道を 1 周しながら、流れ（矢印の場）が進む向きに押す量をたしたもの。閉じた道の線積分。

回転（rot）　小さなマスの循環を面積でわったもの。その場所に置いた風車を回す働きの強さ。3 次元では、回る軸の向きの矢印。

うずなし流れ　回転がどこでも 0 の流れ。ぐるぐる回っていても、風車は向きを変えない。

電流密度　導線の断面 1 m^2 あたりに流れる電流。単位は $\mathrm{A/m}^2$。

curl　rot の別の書き方（英語の本で多い）。

記号カード　初めて出た章 8-10

$\mathrm{rot}\,\vec{F}$

読み方　ローテーション・エフ
意味　回転。小さなマスの循環÷面積。3 次元では矢印。英語の本では curl
英語　rotation, curl

記号カード　初めて出た章 8-10

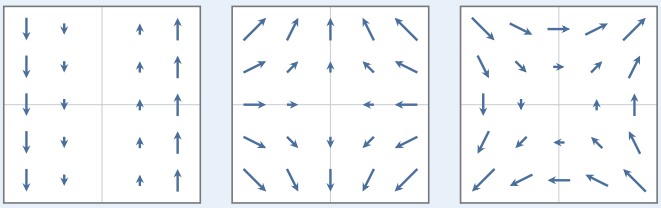
$\nabla\times\vec{F}$

読み方　ナブラ・クロス・エフ
意味　rot $\vec{F}$ と同じもの。外積の形で書いた
英語　curl, del cross

例題でたしかめよう

例題 1　図から、風車が回るかを読む

次の（1）～（3）の場に風車を置くと、回りますか。回るなら、向きも答えましょう。



（1）$(0,\ x)$　　（2）$(-x,\ y)$　　（3）$(y,\ x)$

考え方　上下の羽根では横向きの速さのちがい、左右の羽根ではたて向きの速さのちがいを見る（①）。

式　（1）横向きの速さはどこも 0。たて向きの速さは、右ほど上向きに大きい。右の羽根が上へ強く押されるので、左回り。

（2）横向きの速さは $-x$ で、上と下で同じ。たて向きの速さは y で、左と右で同じ。どちらもちがいがないので、回らない。

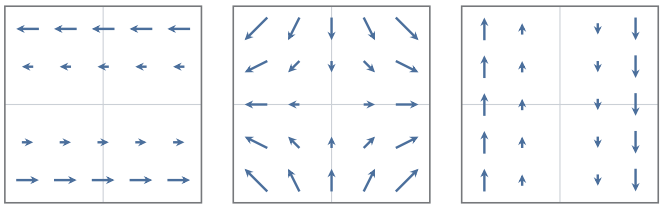
（3）上ほど右向きに速い（右回りの働き）。右ほど上向きに速い（左回りの働き）。同じ強さで打ち消し合うので、回らない。

答え　（1）左回り　（2）回らない　（3）回らない

式で確かめると、（1）は $1-0=1$、（2）は $0-0=0$、（3）は $1-1=0$ です。（3）は物理第 1 巻の $\vec{F}_1=(y,\ x)$ です。

じぶんでとこう 1

次の（1）～（3）の場に風車を置くと、回りますか。回るなら、向きも答えましょう。



（1）$(-y,\ 0)$　　（2）$(x,\ -y)$　　（3）$(0,\ -x)$

例題 2　マスのまわりを 1 周して数える

1 辺 0.5 m のマスの 4 つの辺のまん中で、水の速度をはかると、下の辺の v_x が 1.2 m/s、右の辺の v_y が 0.3 m/s、上の辺の v_x が 0.8 m/s、左の辺の v_y が 0.1 m/s でした。循環と回転を求め、そこに置いた風車の回る向きと角速度を答えましょう。

考え方　循環＝（下＋右－上－左）×辺の長さ（④）。回転＝循環÷面積。風車の角速度は回転の半分（⑦）。

式　循環 $= (1.2 + 0.3 - 0.8 - 0.1) \times 0.5 = 0.6 \times 0.5 = 0.3$〔m²/s〕

回転 $\approx \dfrac{0.3}{0.5^2} = \dfrac{0.3}{0.25} = 1.2$〔1/s〕（正なので左回り）

風車の角速度 $= \dfrac{1}{2} \times 1.2 = 0.6$〔rad/s〕

答え　循環 0.3 m²/s、回転 1.2（1/s）。風車は左回りに 0.6 rad/s

じぶんでとこう 2

1 辺 0.2 m のマスの 4 つの辺のまん中で、下の辺の v_x が 0.6 m/s、右の辺の v_y が −0.2 m/s、上の辺の v_x が 1.0 m/s、左の辺の v_y が 0.2 m/s でした。循環と回転を求め、風車の回る向きと角速度を答えましょう。

例題 3　平面の rot を式で計算する

次の場の回転を求めましょう。(2) は、点 $(2,\ 1)$ での値も求めましょう。

(1) $\vec{F} = (-2y,\ 3x)$　　(2) $\vec{F} = (xy,\ x^2 + y)$

考え方　$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ (⑥)。F_y を先に x で、F_x を y で偏微分する。止めた文字は数と同じ。

式　(1) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x) = 3$、$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2$

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 3 - (-2) = 5$

(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) = 2x$（$y$ は止めた数なので、微分すると 0）

$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(xy) = x$（$x$ は止めた数）

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 2x - x = x$。点 $(2,\ 1)$ では 2

答え　(1) 5（どこでも左回り）　(2) x、点 $(2,\ 1)$ で 2

じぶんでとこう 3

次の場の回転を求めましょう。(2) は、点 $(2,\ 3)$ での値も求めましょう。

(1) $\vec{F} = (4y,\ -x)$　　(2) $\vec{F} = (x^2y,\ y^2 + x)$

例題 4　用水路の風車

はば 4 m の用水路で、まん中を $y=0$、岸を $y=\pm 2$〔m〕とします。水の速度が $\vec{v}=\left(1.2\left(1-\dfrac{y^2}{4}\right),\ 0\right)$（m/s）のとき、(1) 回転を y の式で表しましょう。(2) $y=1$ m の所に置いた風車は、どちら向きに何 rad/s で回りますか。1 回転するのに何秒かかりますか。

考え方　$v_y=0$ なので、回転は $-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ だけ。風車の角速度は回転の半分。1 回転は 2π rad。

式　(1) $v_x=1.2-0.3y^2$。$\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=-0.6y$

$\mathrm{rot}\,\vec{v}=0-(-0.6y)=0.6y$〔1/s〕

(2) $y=1$ で回転は 0.6（正なので左回り）。風車の角速度

$=\dfrac{0.6}{2}=0.3$〔rad/s〕

1 回転の時間 $=\dfrac{2\pi}{0.3}=20.9$〔s〕

答え　(1) $0.6y$〔1/s〕　(2) 左回りに 0.3 rad/s、1 回転に約 21 秒

じぶんでとこう 4

はば 6 m の用水路（岸は $y=\pm 3$）で、水の速度が $\vec{v}=\left(0.8\left(1-\dfrac{y^2}{9}\right),\ 0\right)$（m/s）のとき、(1) 回転を y の式で表しましょう。(2) $y=-2.25$ m の所に置いた風車は、どちら向きに何 rad/s で回りますか。1 回転するのに何秒かかりますか。

例題 5　3 次元の rot

次の場の回転を求めましょう。

(1) $\vec{F}=(y,\ z,\ x)$　　(2) $\vec{F}=(yz,\ xz,\ xy)$

考え方　⑧の式で、成分を 1 つずつ。x 成分は $\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}$、あとは文字を $x\to y\to z\to x$ とずらす。

式　(1) x 成分：$\dfrac{\partial x}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial z}=0-1=-1$

y 成分：$\dfrac{\partial y}{\partial z}-\dfrac{\partial x}{\partial x}=0-1=-1$

z 成分：$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial y}{\partial y}=0-1=-1$

(2) x 成分：$\dfrac{\partial(xy)}{\partial y}-\dfrac{\partial(xz)}{\partial z}=x-x=0$

y 成分：$\dfrac{\partial(yz)}{\partial z}-\dfrac{\partial(xy)}{\partial x}=y-y=0$

z 成分：$\dfrac{\partial(xz)}{\partial x}-\dfrac{\partial(yz)}{\partial y}=z-z=0$

答え　(1) $(-1,\ -1,\ -1)$　(2) $(0,\ 0,\ 0)$

(1) の回転の矢印は、どこでも $(-1,\ -1,\ -1)$ の向きです。この場は、$(1,\ 1,\ 1)$ の向きの軸のまわりに、右ねじの逆向きに回っています。(2) は、$f=xyz$ の勾配 $\mathrm{grad}\,f=(yz,\ xz,\ xy)$ なので、⑩から回転は 0 になるはずで、そのとおりになりました。

じぶんでとこう 5

次の場の回転を求めましょう。

(1) $\vec{F}=(z,\ x,\ y)$　　(2) $\vec{F}=(y^2z,\ 2xyz,\ xy^2)$

例題 6　全体がいっしょに回る流れ

(1) 回転台が 6 秒で 1 回転し、台の上の水そうの水がいっしょに回っています。水の速度 $\vec{v}=\omega(-y,\ x)$ の ω と回転を求めましょう。

(2) $\vec{\omega}=(1,\ 1,\ 0)$ (rad/s) のとき、$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ を成分で書き、回転が $2\vec{\omega}$ になることを確かめましょう。そこに置いた小さな風車は、どの向きの軸のまわりに、何 rad/s で回りますか。

考え方　(1) 1 回転は 2π rad。平面の回転は 2ω (⑦)。(2) 4-14 の外積の成分で $\vec{v}$ を 1 成分ずつ作り、⑧の式で回転を計算する。風車の軸は回転の矢印の向き、角速度は回転の大きさ (4-10：矢印の長さ) の半分。

式　(1) $\omega=\dfrac{2\pi}{6}=1.047$〔rad/s〕。回転 $=2\omega=2.09$〔1/s〕

(2) $\vec{v}$ の x 成分：$\omega_y z-\omega_z y=1\times z-0\times y=z$

$\vec{v}$ の y 成分：$\omega_z x-\omega_x z=0\times x-1\times z=-z$

$\vec{v}$ の z 成分：$\omega_x y-\omega_y x=1\times y-1\times x=y-x$

回転の x 成分：$\dfrac{\partial(y-x)}{\partial y}-\dfrac{\partial(-z)}{\partial z}=1-(-1)=2$

回転の y 成分：$\dfrac{\partial z}{\partial z}-\dfrac{\partial(y-x)}{\partial x}=1-(-1)=2$

回転の z 成分：$\dfrac{\partial(-z)}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0-0=0$

回転は $(2,\ 2,\ 0)=2\vec{\omega}$。大きさは $\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$

風車は $(1,\ 1,\ 0)$ の向きの軸のまわりに、$\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\approx 1.41$〔rad/s〕で回る

答え　(1) $\omega=1.05$ rad/s、回転 2.09 (1/s)　(2) $\vec{v}=(z,\ -z,\ y-x)$、回転 $(2,\ 2,\ 0)=2\vec{\omega}$、風車は $(1,\ 1,\ 0)$ の向きの軸のまわりに約 1.41 rad/s

(1) の水そうにうかべた風車は、回転 2.09 の半分の 1.047 rad/s、つまり水そうと同じ角速度で回り、6 秒で 1 回転します。風車は、水そうのどこに置いて

も同じように回ります（回転はどこでも 2ω）。(2) の回転の矢印 $(2,\ 2,\ 0)$ は、$\vec{\omega} = (1,\ 1,\ 0)$ と同じ向き（x 軸と y 軸のまん中の向き）です。回転の矢印は、いつも回る軸の向きを指しているのです。

じぶんでとこう 6

(1) ドラム式洗濯機のドラムが、1 分に 1200 回転しています。中の水と洗たく物がドラムといっしょに回るとして、ω と回転を求めましょう。(2) $\vec{\omega} = (0,\ 2,\ 2)$（rad/s）のとき、$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ を成分で書き、回転を求めましょう。そこに置いた小さな風車は、どの向きの軸のまわりに何 rad/s で回りますか。

もっと知りたい ★★★★★

台風やうずの中心と外側：回転があるのはどこ？

台風や、ふろの栓をぬいたときのうずでは、中心に近い所の水や空気は、全体がいっしょに回ります。例題 6 と同じで、そこでの回転は 2ω です。ところが外側では、速さが中心からの距離 r に反比例して（$v = k/r$、k は定数）遠いほど遅くなり、回転を計算すると、ちょうど 0 になります。外側を 1 周する道の線積分は、どの道でも中心の部分をかこんだ分だけで決まります（8-11 の場合 S3 と同じ考え）。大きく回るうずでも、本当に「回転」をもっているのは、中心の近くだけなのです。

例題 7　保存力かを調べて、位置エネルギーを作る

物理第 1 巻（力-4）の力 $\vec{F}_1=(y,\ x)$ と $\vec{F}_2=(-y,\ x)$（N）について、(1) 回転を求め、保存力かどうかを答えましょう。(2) 保存力のほうについて、$\vec{F}=-\mathrm{grad}\,U$ となる U を作り、$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$（m）まで動かすときの仕事を求めましょう。

考え方　回転が 0 なら（すきまのない広がりの中なので）保存力（もっと知りたい）。$-\dfrac{\partial U}{\partial x}=F_x$ を x で積分して、残りの y の式を F_y で決める。仕事は U(はじめ) $-$ U(おわり)（8-7）。

式　(1) $\vec{F}_1$: $\dfrac{\partial x}{\partial x}-\dfrac{\partial y}{\partial y}=1-1=0$。$\vec{F}_2$: $\dfrac{\partial x}{\partial x}-\dfrac{\partial(-y)}{\partial y}=1-(-1)=2$

(2) $\vec{F}_1$ で、$-\dfrac{\partial U}{\partial x}=y$ より $\dfrac{\partial U}{\partial x}=-y$

y を止めて x で積分：$U=-xy+g(y)$（$g(y)$ は y だけの式。x で微分すると 0）

$-\dfrac{\partial U}{\partial y}=x-g'(y)$。これが $F_y=x$ と等しいので、$g'(y)=0$、g は定数（0 にとる）

$U=-xy$。仕事 $=U(0,\ 0)-U(1,\ 1)=0-(-1)=1$〔J〕

答え　(1) $\vec{F}_1$ は回転 0 で保存力、$\vec{F}_2$ は回転 2 で保存力ではない。

(2) $U=-xy$、仕事 1 J（力-4 の道 A・道 B と同じ）

じぶんでとこう 7

力 $\vec{F}_3=(2x+y,\ \ x+2y)$ と $\vec{F}_4=(y,\ -x)$（N）について、(1) 回転を求め、保存力かどうかを答えましょう。(2) 保存力のほうについて U を作り、$(0,\ 0)$ から $(1,\ 1)$（m）まで動かすときの仕事を求めましょう。

例題 8　$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=\vec{0}$ を確かめる

$f=x^2y+y^3$ について、grad f を求め、その回転が 0 になることを確かめましょう。また、例題 5（1）の場 $(y,\ z,\ x)$ の回転 $(-1,\ -1,\ -1)$ の発散を求めましょう。

考え方　grad は 2 つの偏微分を並べた矢印（8-4）。その回転を⑥の式で。発散は 8-9 の式。

式　$\mathrm{grad}\,f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=(2xy,\ \ x^2+3y^2)$

$$\text{回転}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x-2x=0$$

$$\mathrm{div}\,(-1,\ -1,\ -1)=\frac{\partial(-1)}{\partial x}+\frac{\partial(-1)}{\partial y}+\frac{\partial(-1)}{\partial z}=0$$

答え　grad $f=(2xy,\ x^2+3y^2)$、回転 0。回転の矢印の発散も 0

じぶんでとこう 8

$f=x^3+xy^2$ について、grad f を求め、その回転が 0 になることを確かめましょう。また、場 $(z,\ x,\ y)$ の回転 $(1,\ 1,\ 1)$ の発散を求めましょう。

例題 8 とじぶんでとこう 8 のように、grad で作った場は、どんな f でも回転が 0 です。山の坂を下る向きの矢印（8-4）は、うずを巻かないのです。

例題 9　電流のまわりの磁場と、その回転

まっすぐな導線（半径 1 mm）に、10 A の電流が z の正の向きに一様に流れています。(1) 導線の中心から 5 cm はなれた点 $(0.05,\ 0,\ 0)$（m）の磁場の大きさと向きを求めましょう。(2) その点と、導線の中の回転 $\mathrm{rot}\,\vec{B}$ を求めましょう（$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A）。

考え方　大きさは $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$、向きは $\vec{e}_z \times \vec{e}_r$（⑪）。導線の外はうずなし流れの形で回転 0、中は $\mu_0 j$。

式　(1) $B = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.05} = \dfrac{2 \times 10^{-6}}{0.05} = 4 \times 10^{-5}$〔T〕

$\vec{e}_r = (1,\ 0,\ 0)$ なので、向きは $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = (0,\ 1,\ 0)$（$y$ の正の向き）

(2) 点 $(0.05,\ 0,\ 0)$ は導線の外なので、$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$

導線の中：$j = \dfrac{10}{\pi \times (0.001)^2} = 3.18 \times 10^6$〔A/m²〕

$\mu_0 j = 4\pi \times 10^{-7} \times \dfrac{10}{\pi \times 10^{-6}} = \dfrac{4 \times 10^{-6}}{10^{-6}} = 4$〔T/m〕

答え　(1) 4×10^{-5} T、y の正の向き。(2) その点では $\vec{0}$、導線の中では z の向きに 4 T/m

じぶんでとこう 9

まっすぐな導線（半径 0.5 mm）に、5 A の電流が z の正の向きに一様に流れています。(1) 導線から 2 cm はなれた点 $(0,\ 0.02,\ 0)$（m）の磁場の大きさと向きを求めましょう。(2) その点と、導線の中の回転を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① ぐるぐる回る流れは、回転があると思う

✕ うずなし流れ $\dfrac{(-y,\ x)}{x^2+y^2}$ は回っているので、回転は正

○ 中心以外では回転は 0（風車は向きを変えない）

回転は「流れが回っているか」ではなく、「マスの 1 周の循環」で決まります。外がおそく内が速いので、打ち消し合います（⑨）。

まちがえやすいところ

② まっすぐな流れは、回転が 0 だと思う

✕ $(y,\ 0)$ はまっすぐ右へ流れるので、回転は 0

○ 上ほど速いので、回転は -1（右回り）

向きがそろっていても、となりどうしの速さがちがえば、風車は回ります（①）。

まちがえやすいところ

③ 引く順番を逆にする

✕ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$

○ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$

逆にすると、左回りと右回りが入れかわります。「y 成分を x で」が先です。うず $(-y,\ x)$ で 2（正、左回り）になるかで確かめられます。

⚠ まちがえやすいところ

④ 3 次元の回転を数で答える

✕ $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$ の回転は -3

○ 回転は $(-1,\ -1,\ -1)$（矢印）

3 次元の回転は、3 つの軸のまわりの回り方を並べた矢印です。成分をたしてはいけません。数で答えるのは、平面のときだけです（それは z 成分）。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 行列式の形で順番を変える

✕ $F_z \dfrac{\partial}{\partial y}$ と書いて計算する

○ $\dfrac{\partial F_z}{\partial y}$（2 行めの命令を 3 行めに）

行列式の形は覚えるための形です。偏微分の記号は、かならず成分の左に書きます（⑧）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ div と rot を取りちがえる

✕ rot は $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y}$

○ rot は $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$

div は「同じ文字」どうし（F_x を x で）のたし算、rot は「ちがう文字」どうしの引き算です。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 循環（名前）を、そのままかけ算にする

✕ 用水路のマスの循環 ＝（流れの速さ）×（マスの周の長さ）

○ 4 つの辺に分け、辺にそう成分×長さを、向きの符号をつけてたす

$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ は「1 周してたす」という名前です。計算するときは、4 つの辺のふつうの定積分（または辺のまん中の値×はば）に直します（④）。上の辺と左の辺では、進む向きが逆なのでマイナスがつきます。速さ×周の長さでは、回らない（ウ）そろった流れでも 0 になりません。

コラム　お風呂のうずは、北半球ならいつも左回り？

「北半球では、お風呂の栓をぬいたときのうずは、地球の自転のためにいつも左回りになる」という話を聞いたことがあるかもしれません。地球の自転は、台風のように何百 km もの大きなうずの向きは決めますが（4-14 のコラム）、お風呂のような小さなうずでは、その働きはとても小さく、水を入れたときに残った流れのほうがずっと強く効きます。だから、ふつうのお風呂では、右回りにも左回りにもなります。水を 1 日近くも静かに置いて、残った流れをなくしてから注意深く栓をぬいた実験では、北半球で左回りになったと報告されています（1960 年代のアメリカの実験など）。小さな回転を見るには、それほどの注意が必要なのです。

物理・工学ではこう使う

台風と天気図の「渦度」

北半球の台風は、上から見て左回りのうずです（4-14 のコラム）。風の速度の回転は、気象では**渦度**（うずど）とよばれ、左回りのうずの所で正です。気象庁は、上空の風から計算した渦度の天気図を作っていて、低気圧や台風の発達を調べるのに使われています。中心から 50 km の所で風速 40 m/s の台風の中心部が、コップごと回すように回っているとすると、渦度は $2 \times \dfrac{40}{50\,000} = 1.6 \times 10^{-3}$〔1/s〕です（およその例）。

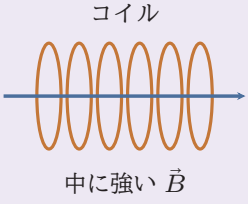
台風（上から）

飛行機の翼と循環

翼の上側の空気は下側より速く流れるので、翼をかこむ道の循環は 0 になりません。翼の長さ 1 m あたりの揚力（もち上げる力）は、空気の密度×飛行機の速さ×循環で計算できます（クッタ・ジュコーフスキーの定理、物理 力-15）。「1 周の線積分」が、飛行機をうかせる力を決めているのです。

モーターと電磁石： $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

磁場のうずは、電流そのものでした（⑪）。導線を巻いたコイルでは、たくさんの導線の磁場が重なり、中に強い磁場ができます。モーター・電磁石・スピーカーは、このしくみを使っています。コイルの中の磁場の強さは、$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ から計算できます（8-11 のアンペールの法則、物理 電-6）。



章末問題

8-10 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次の（1）～（3）の場に風車を置くと、回りますか。回るなら、向きも答えましょう（例題 1）。

（1）$(2y,\ 0)$

（2）$(0,\ 2x)$

（3）$(-y,\ -x)$

2 次のマスの循環と回転を求めましょう（例題 2）。

（1）1 辺 0.4 m のマスの 4 つの辺のまん中で、下の辺の v_x が 0.9 m/s、右の辺の v_y が 0.4 m/s、上の辺の v_x が 0.5 m/s、左の辺の v_y が 0 m/s でした。風車の回る向きと角速度も答えましょう。

（2）1 辺 0.3 m のマスの 4 つの辺のまん中で、下の辺の v_x が 0.5 m/s、右の辺の v_y が 0.2 m/s、上の辺の v_x が 0.8 m/s、左の辺の v_y が −0.1 m/s でした。風車が回るかも答えましょう。

3 次の場の回転を求めましょう。（2）は点 $(1,\ 2)$ での値も求めましょう（例題 3）。

（1）$\vec{F} = (5y,\ -2x)$

（2）$\vec{F} = (xy^2,\ x^3)$

4 用水路の水の流れで、風車の回り方を調べましょう（例題 4）。

（1）はば 2 m の用水路（岸は $y = \pm 1$）で、水の速度が $\vec{v} = (0.5(1 - y^2),\ 0)$ (m/s) です。（ア）回転を y の式で表しましょう。（イ）$y = -0.6$ m の所の風車は、どちら向きに何 rad/s で回りますか。

（2）はば 3 m の用水路（岸は $y=\pm 1.5$）で、水の速度が $\vec{v}=(0.9-0.4y^2,\ 0)$（m/s）です（まん中で 0.9 m/s、岸で 0）。$y=1$ m の所の風車は、どちら向きに何 rad/s で回りますか。1 回転するのに何秒かかりますか。

5 次の場の回転を求めましょう（例題 5）。

（1）$\vec{F}=(-z,\ 0,\ x)$

（2）$\vec{F}=(2x,\ 3z,\ 3y)$

6 回転台が 4 s で 1 回転し、水そうの水がいっしょに回っています。（1）ω と回転を求めましょう。（2）$\vec{\omega}=(0,\ 0,\ 5)$（rad/s）のとき、$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ を成分で書き、回転を求めましょう（例題 6）。

7 力 $\vec{F}=(3y,\ 3x+2y)$（N）の回転を求めて保存力かどうかを答え、保存力なら U を作って、$(0,\ 0)$ から $(2,\ 1)$（m）まで動かすときの仕事を求めましょう（例題 7）。

8 まっすぐな導線（半径 2 mm）に 20 A の電流が z の正の向きに一様に流れています。（1）導線から 10 cm の点 $(0,\ -0.1,\ 0)$（m）の磁場の大きさと向きを求めましょう。（2）導線の中の回転を求めましょう（例題 9）。

チャレンジ ★★★★★

9 $f=x^2y^2+2xy$ について、grad f を求め、その回転が 0 になることを確かめましょう。また、例題 6（2）の回転 $(2,\ 2,\ 0)$ の発散を求めましょう（例題 8）。

10 $\vec{\omega}=(2,\ 0,\ 2)$（rad/s）のとき、$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ を成分で書き、回転が $2\vec{\omega}$ になることを確かめましょう。また、そこに置いた小さな風車は、どの向きの軸のまわりに、何 rad/s で回りますか（例題 6）。

11 力 $\vec{F} = (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy)$（N）の回転を求めて保存力かどうかを答え、保存力なら U を作って、$(0,\ 0)$ から $(1,\ 2)$（m）まで動かすときの仕事を求めましょう（例題 7）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- [ ] 矢印の場の図から、小さな風車が回るかどうかと、その向きを見分けられる。 → 399 ページ
- [ ] マスのまわりを 1 周してたす量（循環）を表計算で求め、面積でわって回転を見積もれる。 → 403 ページ
- [ ] 平面と 3 次元の rot を偏微分で計算し、保存力の見分けや、電流のまわりの磁場に使える。 → 408 ページ

ソラ

風車 1 つで、川の流れも、台風も、磁場も読めるんだね。次は、マスの循環を全部たして、大きな 1 周とつなげてみよう。

第 3 部　発散と回転

★★★★★

8-11 中と外をつなぐ：ガウスの定理とストークスの定理

道しるべ　この章の前に 4-14 8-6 8-7 8-8 8-9 8-10　この章の先に 8-12 8-14

この章でできるようになること

- ★★★ マスごとのわき出し（うず）を全部たすと、外のふちから出る量（外の 1 周）になることを、表計算で確かめられる。
- ★★★★ 閉じた面や閉じた道の積分を、2 つの定理で「計算が楽な側」の積分に取りかえて求められる。
- ★★★★★ 対称性に合った袋や道を選び、ガウスの法則・アンペールの法則で、場の大きさを求められる。

はてな？

8-9 の池の発散の地図では、わき出す口のマスは $+4$、吸いこむ口のマスは -4、ほかは 0 でした（1 秒あたりの m^2）。

（1）24 マスの発散を全部たすと？

（2）池のふち（オレンジの点線）から、1 秒間に外へ出ていく水の量は？

（3）わき出す口だけを円（緑の点線）でかこむと、その円から出ていく量は？ 円を大きくすると？

0	0	0	0	0	0
0	+4	0	0	0	0
0	0	0	0	−4	0
0	0	0	0	0	0

池の発散の地図（8-9）

8-9 の発散 div と 8-10 の回転 rot は、どちらも「小さなマスの出入り（または 1 周）を、マスの大きさでわったもの」でした。場所ごとに決まる、小さな量です。この章では、反対に、小さなマスの量を**全部たし合わせる**と何が起きるかを調べます。

答えは、とても簡単です。中のマスのわき出しを全部たすと、外のふちから出ていく量になります（ガウスの定理）。中のマスのうずを全部たすと、外のふちを 1 周する循環になります（ストークスの定理）。中と外が、1 本の式でつながるのです。

この 2 つの定理は、計算の**道具**としても大切です。8-6〜8-8 で見たように、$\iint \cdot \iiint \cdot \oint \cdot \oiint$ は「タイルに分けてたし合わせる」という**名前**で、実際の値は、ふつうの定積分に直して求めます。定理は、「閉じた面の積分」と「中の体積の積分」のように、2 つの名前を等号で結びます。だから、**どちらの側を直すほうが楽か**を選べるのです。電気の力の大きさを求めるガウスの法則では、「袋の形を変えても答えは中の電荷だけで決まる」ことを使い、計算がいちばん楽な袋を選びます。

この章は、路線②「たし合わせ」（細かく分けてたす 4-5 → 定積分 5-10 → 重積分・線積分・面積分 8-6〜8-8）の終点です。★★★★★の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、マスの図と、表計算のたし算・ひき算だけで読めます。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。例題を流れ図でたどりながら、何度でも読み返してください。

やってみよう　マスの出入りを、全部たしてみよう

流れ $\vec{F} = (x^2,\ y)$ の中の、はば 3・高さ 2 の長方形 $(0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 2)$ を、1 辺 1 のマス 6 つに分けます。

1. たての辺を右向きに通る量は $F_x = x^2$ です。$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ の辺で、0、1、4、9。横の辺を上向きに通る量は $F_y = y$ です。$y = 0,\ 1,\ 2$ の辺で、0、1、2（どれも辺の長さは 1）。
2. 6 つのマスそれぞれで、「右－左＋上－下」(8-9) を計算し、表にしよう。
3. 6 つのマスの値を、全部たそう（SUM）。
4. こんどは、長方形の外のふちだけを見て、外へ出ていく量をたそう。右のふち（$x = 3$）、上のふち（$y = 2$）、左のふち（$x = 0$）、下のふち（$y = 0$）。
5. ③と④をくらべよう。

たとえば左上のマス（x が 0〜1、y が 1〜2）は、右 1 − 左 0 + 上 2 − 下 1 = 2 です。

	A	B	C	D	E
1	段	x：0〜1	x：1〜2	x：2〜3	段の合計
2	y：1〜2	2	4	6	12
3	y：0〜1	2	4	6	12
4				全部の合計	24

表 1　マスごとの「右－左＋上－下」。E2 に =SUM(B2:D2)、E4 に =SUM(E2:E3)。

④の外のふちは、右のふちが $9 \times 2 = 18$（1 の長さの辺 2 つ）、上のふちが $2 \times 3 = 6$、左のふちと下のふちは 0 なので、合計 $18 + 6 + 0 + 0 = 24$ です。③の「マスの合計」と、④の「外のふちから出る量」が、ぴったり同じ 24 になりました。どうしてでしょう。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

8-9 発散 div：小さなマスの「出る量－入る量」を面積（体積）でわる。マスの 4 辺で「右－左＋上－下」。$\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}$。

8-10 回転 rot：小さなマスの循環（左回りに 1 周）を面積でわる。平面では $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$。風車の角速度はその半分。

8-8 流束 $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$。閉じた面は $\displaystyle\oiint_S$ で、$\vec{n}$ は外向きの単位ベクトル。場合 D：場が面に直角で大きさが一定なら「大きさ×面積」。場合 G：箱は面ごとに。

8-7 線積分 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$。閉じた道は $\displaystyle\oint_C$。場合 A：軸に平行な道。場合 D：円は角 θ で。

8-6 重積分 $\iint$・$\iiint$ は、場所を数で表して、ふつうの定積分を 2 回・3 回。場合 C：円は極座標、場合 E：球は球座標。

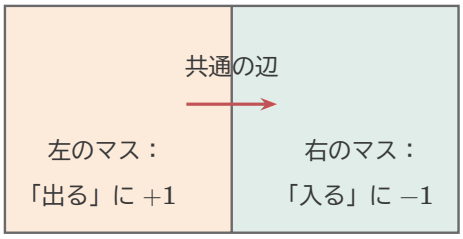
4-14 右ねじ：左回りに回すと、手前に進む。外積の向き。

数学の道具

目でわかる となりどうしが打ち消し合う ★★★

1 マスの出入りを全部たすと、外のふちだけが残る

やってみようの 2 つのマスを、ならべて見ます。左のマスの右の辺は、右のマスの左の辺と同じ辺です。この辺を右向きに通る水は、左のマスから見ると「出る」、右のマスから見ると「入る」です。



2 つのマスの「出－入」をたすと $(+1)+(-1)=0$ で、共通の辺の分は消える。残るのは、外のふちの辺だけ。

図 1 となりどうしのマスの共通の辺。片方の「出る」は、もう片方の「入る」で、たすと打ち消し合う。

マスが 6 つでも、24 でも、1000 でも同じです。中の辺は、どれも 2 つのマスにはさまれていて、片方で ＋、もう片方で － に数えられます。全部のマスの「出－入」をたすと、中の辺の分はすべて消え、**外のふちの辺だけが残ります**。

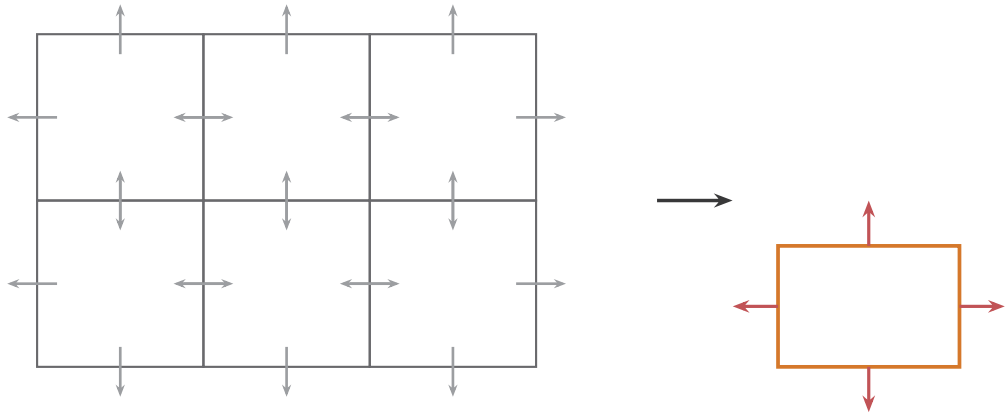


図 2　6 つのマスの「出－入」（灰色の矢印）を全部たすと、中の辺の矢印は 2 本ずつ向きが反対で消え、外のふち（オレンジ）を出る分だけが残る。

中のマスの「出－入」の合計　＝　外のふちから出ていく量

これが、やってみようで「マスの合計」と「外のふち」が同じ 24 になったわけです。

❓はてな？の池でも同じです。（1）24 マスの発散の合計は、口のマスの 4 と −4 をたし、ほかは 0 なので、0 です。（2）だから、池のふちを通って外へ出ていく量も 0 です。わき出す口から出た水は、すべて吸いこむ口へ流れこみ、池のふちから出ていく水と入ってくる水が、ちょうど同じなのです。8-9 の表計算で、外まわりの辺の数をたしても 0 になりました。（3）は⑧で答えます。

❷ マスのうずを全部たすと、外の 1 周が残る

8-10 の循環（マスのふちを左回りに 1 周して、流れにそって進む量をたしたもの）でも、同じことが起きます。となりどうしのマスの共通の辺は、左のマス

では上へ進み、右のマスでは下へ進みます。進む向きが反対なので、たすと打ち消し合います。

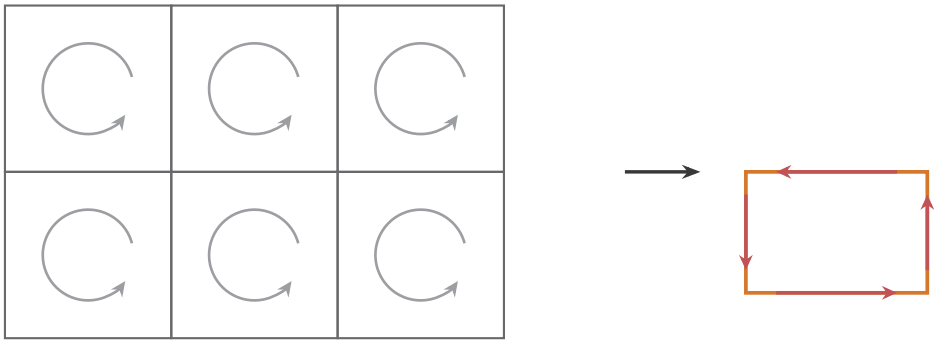


図 3 6 つのマスの循環を全部たすと、中の辺は 2 回ずつ反対向きに通るので消え、外のふちを 1 周する分だけが残る。

中のマスの循環の合計　＝　外のふちを 1 周する循環

たとえば、流れ $\vec{F} = (0,\ x^2)$ の同じ長方形（はば 3・高さ 2）で確かめます。マスの循環は「下＋右－上－左」(8-10) で、$F_x = 0$ なので「右－左」だけが残ります。x が 0〜1、1〜2、2〜3 の列のマスでは、$1-0=1$、$4-1=3$、$9-4=5$ です。2 段あるので、合計は $(1+3+5)\times 2 = 18$ です。外の 1 周では、右のふち（$x=3$）を上へ進む分 $9\times 2 = 18$ だけが残り（ほかのふちでは 0）、やはり 18 になります。

たいせつ

中の小さなマスの量を全部たすと、となりどうしの共通の辺が打ち消し合い、外のふちの分だけが残る。

・わき出し（div）の合計 ＝ 外のふちから出る量

・うず（rot）の合計 ＝ 外のふちを 1 周する循環

手でわかる 両側を計算して、くらべる ★★★★

❸ 物理第 1 巻の正方形と、8-8 の立方体

①・②の「中の合計＝外のふち」を、マスを細かくした式の形で、2 つの例で確かめます。どちらも、すでに前の章で一方の側を計算してあります。

正方形の 1 周（物理第 1 巻 力-4 の約束）

力 $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ で、1 辺 1 の正方形（$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 1$）を左回りに 1 周する仕事を考えます。

- **外の 1 周**　物理第 1 巻（力-4）で、道 A（右へ進んでから上へ）の仕事は 1 J、道 B（上へ進んでから右へ）は –1 J でした。1 周は「道 A で行って、道 B を逆にもどる」ので、$1-(-1)=2$ です（8-10 でも、4 つの辺の定積分で 2 を出しました）。
- **中のうずの合計**　8-10 で、$\vec{F}_2$ の回転はどこでも $1-(-1)=2$ でした。1 平方メートルあたりの循環が 2 で、面積が 1 なので、中の合計は $2 \times 1 = 2$ です。

両側が同じ 2 です。物理第 1 巻で「A で行って B でもどる 1 周の仕事は $1-(-1)=2$ で、『rot の値 2 ×囲んだ面積 1』と同じです（8-11 のストークスの定理）」と書いたのは、このことです。

立方体の 6 つの面（8-8 の場合 G）

流れ $\vec{F} = (x^2,\ xy,\ -z)$ で、1 辺 1 の立方体（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から出ていく量を考えます。

- **外の面から出る量**　8-8 で、面ごとに計算しました。$x=1$ の面で 1、$y=1$ の面で 0.5、$z=1$ の面で -1、残りの 3 つの面（$x=0$、$y=0$、$z=0$）で 0。合計 $1+0.5-1=0.5$ です。
- **中のわき出しの合計**　8-9 で、この流れの発散は次のとおりでした。

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = 2x + x - 1 = 3x - 1$$

立方体の中で、これを全部たします（8-6 の 3 重積分）。

$$\iiint (3x-1)\,\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

定積分を 3 回（8-6 の場合 E）

$$= \int_0^1 (3x-1)\,\mathrm{d}x \times 1 \times 1$$

y・z の積分は 1 ずつ

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = 0.5$$

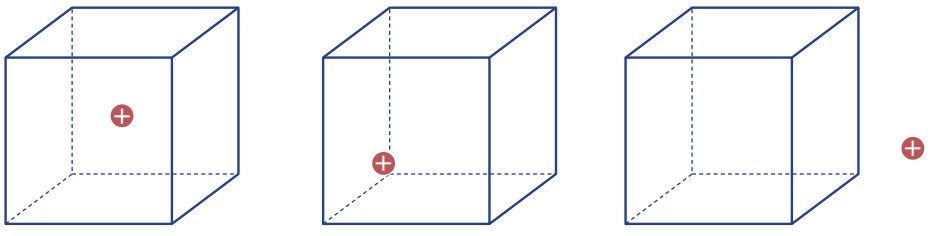
原始関数に 1 と 0 を入れてひく

外の面の合計も、中の合計も 0.5 です。立方体の 6 つの面を 1 つずつ計算するより、発散を 1 回積分するほうが楽でした。これが、定理を「楽な側を選ぶ道具」として使う考え方です。

4 袋の形を変えても、中の量は同じ

①で、「外のふちから出る量」は「中のわき出しの合計」で決まることを見ました。ということは、**わき出しのない所で袋（閉じた面）の形を変えても、出ていく量は変わりません**。この考えを、電気の力で確かめます。

電気の力の矢印（電場 $\vec{E}$）は、＋の電荷からわき出しています。1 つの点の電荷 Q〔C〕から出る電場の流束 Φ_E〔N·m²/C〕は、8-8 で、どんな半径の球でも $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ でした（ε_0 は真空の誘電率 8.85×10^{-12}〔C²/(N·m²)〕）。電荷のない所では、電場の発散は 0 です（8-9）。



まん中
どの面も $\frac{1}{6}$

中でずらす
6 つの面の合計は 1

外に出す
6 つの面の合計は 0

図 4 立方体の袋と点の電荷。数は、全体の流束 $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ のうち、袋を通って出ていく割合。

1 電荷が立方体の袋のまん中にあるとき

電荷を中心とする大きな球の袋と、立方体の袋のあいだには、電荷がありません。だから、立方体の袋から出る電場の流束も $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ です。立方体の 6 つの面は、電荷から見てまったく同じ形なので、1 つの面を通るのは、ちょうど $\dfrac{1}{6}$ です。面の上の積分を 1 回もしないで、答えが出ました。

2 電荷を袋の中でずらしたとき

電荷に近い面を通る量はふえ、遠い面ではへります。でも、袋の中に電荷が Q あることは変わらないので、6 つの面の合計は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ のままです。

3 電荷を袋の外に出したとき

袋の中には、わき出しがありません。電場の矢印は、袋のどこかから入って、どこかから出ていきます。入る量と出る量が同じなので、合計は 0 です。

袋の形は、答えには関係しません。**答えを決めるのは、袋の中にある電荷だけ**です。だから、計算するときは、いちばん楽な形の袋を選んでよいのです。

数値でたしても、$\frac{1}{6}$

8-8 の⑫では、1 辺 2 の立方体のまん中に電荷を置き、上の面（$z = 1$）をタイルに分けて、流束を Python でたしました。タイル 1 枚の流束は、電場の大きさ（距離の 2 乗に反比例して $\frac{1}{r^2}$）に、面に直角な成分の割合 $\cos = \frac{z}{r}$ をかけた $\frac{z}{r^3}$ に、タイルの面積をかけたものでした。答えは 1 つの面で約 2.0944、全体（どの方向にも出る量）は $4\pi \approx 12.566$ でした。

$$\frac{2.0944}{4\pi} = \frac{2.0944}{12.566} = 0.1667$$

で、ちょうど $\frac{1}{6} = 0.16666\cdots$ です。面の積分をまじめに計算すると大変ですが、「袋の形を変えても同じ」と「6 つの面は同じ形」の 2 つの考えを使えば、計算なしで $\frac{1}{6}$ がわかります。

ここまでで十分

マスの出入りを全部たすと外のふちだけが残ること、うずを全部たすと外の1周だけが残ること、袋の形を変えても中の量で決まることがわかれば、ここまでで十分です。この先は、2つの定理を式で書き、計算の道具として使います。

式でわかる 2つの定理と、楽な側の選び方 ★★★★★

5 ガウスの定理

①を、3次元の立体で、マスを小さくした形に書きます。立体 V を、小さな箱に分けます。1つの箱の「出－入」は、8-9の発散の決め方から、

$$\text{箱の「出－入」} \approx \operatorname{div}\vec{F} \times \Delta V$$

です（ΔV は箱の体積）。全部の箱についてたすと、となりどうしの共通の面は打ち消し合い、V をつつむ外の面 S から出る量だけが残ります。箱を小さくした先は、左が8-8の閉じた面の流束、右が8-6の3重積分です。

ガウスの定理　$\displaystyle\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V$

（S は V をつつむ閉じた面、$\vec{n}$ は外向きの単位ベクトル）

この式を**ガウスの定理**（または**発散定理**）といいます。左は「外の面から出ていく量」、右は「中のわき出しの合計」です。平面（2次元）なら、閉じた面が閉じた道 C に、体積が面積に、$\mathrm{d}S$ が道の長さ $\mathrm{d}s$ になります。

平面のガウスの定理　$\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}A$

やってみようで確かめたのは、この平面の形です（$\vec{n}$ は道の外向きの単位ベクトル）。

両側とも「名前」。どちらを直すかを選ぶ

ガウスの定理の左も右も、$\oiint \cdot \iiint$ の**名前**です。等号は、「どちらの名前で計算しても、同じ値になる」という意味です。だから、計算するときは、次の 3 つの段で考えます。

$$\underbrace{\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{名前}} = \underbrace{\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V}_{\text{名前}}$$

①名前の段　記号を読む

何を（$\vec{F}\cdot\vec{n}$ と $\mathrm{div}\,\vec{F}$）、どこで（閉じた面 S と、その中の立体 V）、1 枚の量（向きのついたタイル $\vec{n}\,\mathrm{d}S$ と、小さな箱 $\mathrm{d}V$）を読みます。$\oiint$ の◯は「閉じている」という印で、形（球）を表すのではありません。どの面かは、下の S が決めます。

③楽をする段　楽な側を選ぶ（直す前に）

面が曲がっていて面の積分が大変でも、$\mathrm{div}\,\vec{F}$ が定数なら、右は「div ×体積」で終わりです。反対に、$\mathrm{div}\,\vec{F}$ が複雑でも、面が平らな箱なら左が楽なこともあります。

②直す段　選んだ側を、ふつうの定積分に直す

左を選んだら 8-8 の表、右を選んだら 8-6 の表の場合で、ふつうの定積分に直します。

③の立方体では、左（6 つの面）より右（3 重積分 1 つ）が楽でした。

$$\underbrace{\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{名前}} = \underbrace{\iiint_V (3x-1)\,\mathrm{d}V}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{ふつうの定積分}} = 0.5$$

ガウスの定理の場合分け

ガウスの定理は、どんなときに、どう使えばよいでしょう。場合ごとに表にしました。この章の例題は、1 行めにこの表の記号を書いてあります。

場合分けの表 8-11　ガウスの定理：どんなときに、どう使う？

記号	こんなとき	手順（楽な側に取りかえて、直す）	例題
G1	div は簡単（閉じた面の流束がほしい。面は曲がっていて大変）	面の積分を体積の積分に取りかえる。div が定数なら「div ×体積」。体積の積分は 8-6 の表で	1・2
G2	開いた面（ドーム・おわんの流束がほしい）	ふたをして閉じ、G1 で全体を出す。ふたの分（平らな面：8-8 の場合 B）をひく	3
G3	対称な場の**大きさ**を知りたい（球・円柱・平らな板の対称で、袋の上で一定）	対称に合った袋を選ぶ（球・円柱・平らな箱）。流束＝大きさ×面積（8-8 の場合 D）＝中の量	4・5
G4	袋の**一部**の面の流束（同じ形の面の 1 つ）	袋全体の流束は中の量だけで決まる（袋の形によらない）。同じ形の面に等分する。楽な袋に取りかえる	6
G5	div が決まらない点がある（閉じた袋の中に点のわき出し）	その点を小さな球（平面なら円）でくりぬく。外の袋の流束＝小さな球の流束	7
G6	平面（2 次元）の流れ（ふちの線を通る量）	$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}A$	8
G7	圧力のような数の面の積分（数で決まる量＝スカラー）	$\oiint_S p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$（もっと知りたい）	9

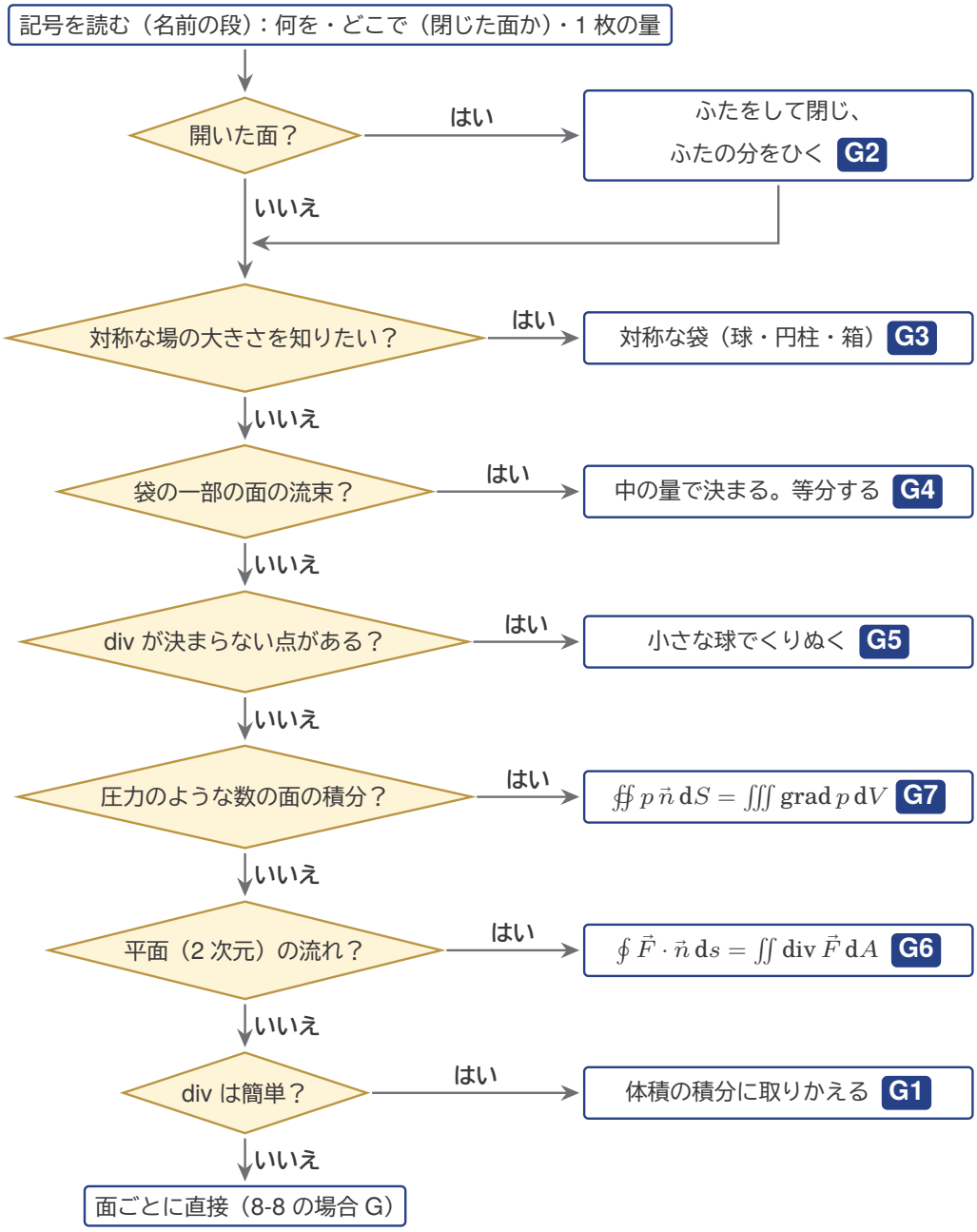
表の G1・G2 は「計算を楽にする」使い方、G3・G4 は「計算しないで答えを出す」使い方、G5 は「定理が使えない点をよける」使い方、G6・G7 は形を変えた使い方です。どの順で問いかければよいかを、図 5 の流れ図にしました。どの問いも、はい・いいえが 1 つに決まるように書いてあります。たとえば③の立方体 $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（$\vec{F}=(x^2,\ xy,\ -z)$）なら、開いた面？ いいえ。対称な場の大きさを知りたい？ いいえ（ほしいのは流束）。袋の一部の面の流束？ いいえ（6 つの面の全部）。div が決まらない点がある？ いいえ（矢印は全部の点で決まる）。圧力のような数の面の積分？ いいえ。平面（2 次元）の流れ？ いいえ。div は簡単？ はい（$3x-1$）。こうして G1 に着き、③で計算したとおり、体積の積分に取りかえるのが楽でした。

やってみよう　流れ図でたどってみよう

次の（ア）～（エ）は、図 5 の流れ図のどの四角に着くでしょう。いちばん上の問いから順に、はい・いいえを答えてみましょう。

（ア）球の面から出ていく流れ $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（$\vec{F}=(2x,\ 3y,\ z)$）
（イ）地球の外の、重力の場の大きさ
（ウ）原点に水の出る口がある池で、原点をかこむ曲線から出ていく水の量
（エ）水の中の物体にはたらく、圧力の力の合計

答え：（ア）div は簡単？ はい（$\mathrm{div}\,\vec{F}=6$）で G1。（イ）対称な場の大きさを知りたい？ はいで G3。（ウ）div が決まらない点がある？ はい（口の点）で G5。（エ）圧力のような数の面の積分？ はいで G7。



確かめ（答えが出たら）：両側を別々に計算しても、同じ答えか

図 5 ガウスの定理を使うときの流れ図。ひし形は問い、四角はすること。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ。G2 の四角からは、閉じた全体を次の問いでたどる。

6 G1・G2：面の積分を、体積の積分に取りかえる

G1　流れ $\vec{F}=(x,\ y,\ z)$ が、半径 $R=2$ の球の面から出ていく量を、両側で計算します。

- **左（面の積分）**　球の面の上では、$\vec{F}=(x,\ y,\ z)$ は中心から外向きで、長さは R です。外向きの単位ベクトル $\vec{n}$ と同じ向きなので、$\vec{F}\cdot\vec{n}=R$（どこでも同じ）。8-8 の場合 D（対称性で外に出す）で、$R\times 4\pi R^2=4\pi R^3=32\pi$。
- **右（体積の積分）**　$\operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$（定数）。$3\times\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3=32\pi$。

両側とも $32\pi\approx 100.5$ です。この例では両側とも楽でしたが、$\vec{F}=(2x,\ 3y,\ z)$ のように球の上で $\vec{F}\cdot\vec{n}$ が場所で変わると、左は 8-8 の場合 **F**（球面を 2 つの角で表す）で重積分をしなければなりません。右なら、$\operatorname{div}\vec{F}=2+3+1=6$ で、すぐ「6× 体積」です（例題 1）。

G2　開いた面（ドーム）には、ガウスの定理をそのまま使えません。閉じた面ではないからです。そこで、**ふたをして閉じます**。

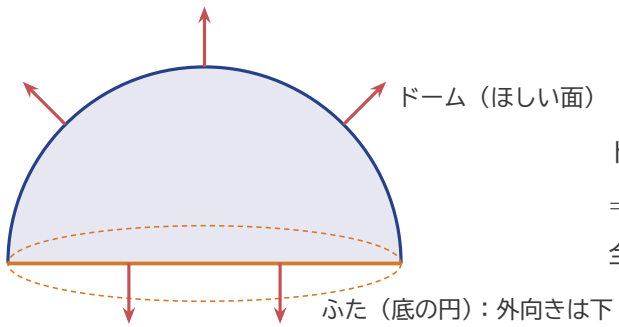


図 6　ドームに、底の円でふたをする。閉じた全体の外向きは、ドームでは外側、ふたでは下向き。

$$\text{ドーム}+\text{ふた}=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V \qquad \text{閉じた全体に G1}$$

$$\text{ドーム}=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V-\text{ふた} \qquad \text{ふたの分を右へ移す}$$

ふたは平らな面なので、8-8 の場合 B（軸に直角な平らな面）で簡単に計算できます。**ふたの外向きは下向き**であることに気をつけます（例題 3）。

7 G3：ガウスの法則は、袋を選ぶ

電荷 Q のまわりの電場について、ガウスの定理と④の考えをまとめると、次のようになります。袋の中の電荷の合計を $Q_{\text{中}}$ とします。

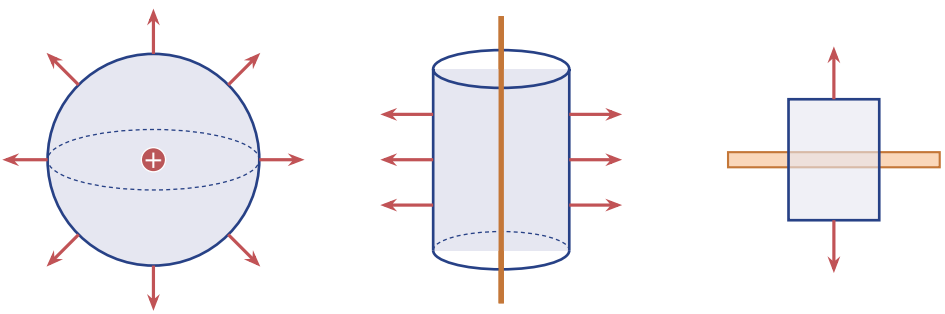
ガウスの法則　$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$$

これを**ガウスの法則**といいます。どんな形の袋でも成り立ちます。この法則を使うと、場の**大きさ**を、積分をほとんどしないで求められることがあります。こつは、**袋の形を選ぶ**ことです。

袋を選ぶ 3 つの条件

1. 袋の面の上で、場の矢印が面に**直角**（または平行で流束 0）。
2. 直角な所では、場の**大きさが同じ**。
3. そのような袋を、対称性から見つける：**点（球対称）なら同じ中心の球、まっすぐな線なら同じ軸の円柱、広い平らな板なら板をはさむ平らな箱**。

①②がそろうと、8-8 の場合 D のとおり、流束は「大きさ×面積」になり、積分が消えます。



点の電荷
→ 同じ中心の球

まっすぐな線の電荷
→ 同じ軸の円柱

広い平らな板
→ はさむ平らな箱

図 7　対称性に合った袋（青）。赤い矢印は電場。どの袋でも、矢印は面に直角（円柱の上下の面と、箱の横の面は平行で、流束 0）。

点の電荷：高校物理の「電気力線の本数」

点の電荷 Q を中心に、半径 r の球の袋を選びます。対称性から、電場は中心から外向きで、球の上ではどこでも同じ大きさ E です。

$$\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = E\times 4\pi r^2 \qquad \text{直角で大きさが同じ（8-8 の場合 D）}$$

$$E\times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{ガウスの法則}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad 4\pi r^2 \text{ でわる}$$

高校物理のクーロンの法則の定数 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.0\times 10^9$〔N·m²/C²〕を使うと $E = \dfrac{kQ}{r^2}$ で、高校物理と同じ式です。高校物理で「電荷 Q から出る電気力線の本数は $4\pi kQ$ 本」と習ったのは、電場の流束 $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi kQ$ のことです。どの半径の球でも同じ本数なので、球の面積 $4\pi r^2$ が大きくなるほど、$1\ \mathrm{m}^2$ あたりの本数（電場の強さ）は $\dfrac{1}{r^2}$ でへっていくのです。

地球の重力：全部の質量が中心にあるのと同じ（物理第 1 巻 力-2 の約束）

重力の矢印 $\vec{g}$ についても、同じ形の法則があります。質量 M の点のまわりの重力は、中心向きで大きさ $\dfrac{GM}{r^2}$（G は万有引力定数）なので、球の袋の流束は $-\dfrac{GM}{r^2}\times 4\pi r^2 = -4\pi GM$（内向きなのでマイナス）で、半径によりません。これをたし合わせて、どんな袋でも

$$\iint_S \vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -4\pi G\,M_{\text{中}} \qquad （M_{\text{中}} \text{ は袋の中の質量}）$$

です。地球が「中心からの距離だけで密度が決まる球」なら、重力は中心向きで、同じ半径の球の上では同じ大きさです。半径 r の球の袋を選ぶと、

$$g\times 4\pi r^2 = 4\pi G\,M_{\text{中}} \qquad \text{より} \qquad g = \frac{G\,M_{\text{中}}}{r^2}$$

地球の外（$r \geqq R$）では、$M_{\text{中}}$ は地球全体の質量 M です。だから、**地球の外では、全部の質量が中心の 1 点に集まっているときと同じ**重力になります。物理第 1 巻（力-2）で「数学 8-11 のガウスの定理で示せます」と書いたのは、このことです。地面（$r = R$）では、$GM = 3.986 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$、$R = 6.371 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ から $g = \dfrac{GM}{R^2} = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$ です（地球の自転の効果は入れない値）。

地球の中ではどうでしょう。もし地球の密度がどこでも同じなら、半径 r の球の中の質量は、体積の割合で $M_{\text{中}} = M \times \dfrac{r^3}{R^3}$ です。$g = \dfrac{GM}{R^3}\,r$ となり、中心からの距離に比例します。半分の深さ（$r = \frac{R}{2}$）では $9.82 \div 2 = 4.91\,\mathrm{m/s^2}$ です。ただし、本物の地球は中心ほど密度が高い（中心の核は、重い鉄が多い）ので、このようにはなりません。地面から深くもぐっても、g はほぼ同じか、むしろ少し大きくなると考えられています。

まっすぐな線の電荷と、広い平らな板

長いまっすぐな導線に、1 m あたり λ〔C/m〕の電荷があるとき、導線を軸とする半径 r・長さ L の円柱の袋を選びます。電場は軸から外向きで、側面に直角です。上下の面では電場が面に平行なので、流束は 0 です。

$$E \times 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \qquad \text{より} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

広い平らな板に、$1\,\mathrm{m^2}$ あたり σ〔C/m²〕の電荷があるときは、板をはさむ平らな箱（上下の面の面積 A）を選ぶと、$E \times 2A = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ で、$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ になります。板からの距離によりません（コンデンサーの中の電場が一様なのは、このためです：物理 電-3）。

> **せいかくに言うと**
>
> ガウスの法則の左の流束には、袋の外の電荷は効きません（④の③）。でも、袋の上の電場 $\vec{E}$ そのものには、外の電荷も効きます。「流束＝大きさ×面積」が使えるのは、外の電荷もふくめて、場全体が袋の形と同じ対称性をもつときだけです。対称でないときは、ガウスの法則は正しくても、それだけでは場の大きさは決まりません。

8 G5・G6：点のわき出しは、くりぬく

はてな？の（3）を考えます。池の流れは、わき出す口と吸いこむ口の 2 点で、矢印が決まりません（8-9 の点のわき出し）。口の上では発散を計算できないので、ガウスの定理の右（中のわき出しの合計）を、そのままでは計算できません。8-9 でも、口をふくむマスの「出－入」は、マスをどんなに小さくしても 4 のままでした。

そこで、口のまわりを小さな円で**くりぬきます**。くりぬいた残り（外の道と小さな円のあいだ）には、口がふくまれないので、どこでも発散は 0 です。残りの部分に平面のガウスの定理を使うと、

$$（外の道から出る量）-（小さな円から出る量）= 0$$

$$外の道から出る量 = 小さな円から出る量$$

1 つめの式の左は、残りの部分から出る量です。小さな円の上では、残りの部分の外向きは口のほう（内向き）なので、小さな円から（口から見て外へ）出る量をひきます。右の 0 は、残りの中の発散が 0 だからです。外の道の形がどうであっても、小さな円から出る量と同じです。口をかこんでいれば、どんな道でも、出ていく量は同じ $Q = 4$〔m²/s〕なのです。これが（3）の答えです。円を大きくしても、小さくしても、4 のままです（ただし、吸いこむ口までかこむと、$4 + (-4) = 0$ になります）。

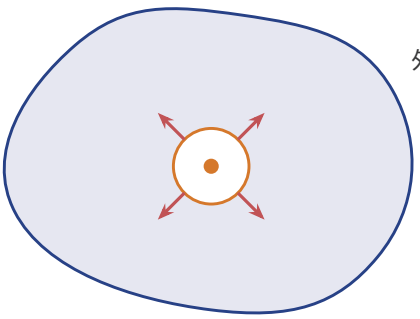


図 8　わき出す口のまわりを小さな円でくりぬく。残りの青い所には口がないので、発散は 0。

8-9 の池の式の「2π」

口だけがある池（吸いこむ口がないとき）を考えます。口を中心とする半径 r の円を道に選ぶと、対称性から、流れは中心から外向き（道に直角）で、円の上では同じ速さ v です（G3 と同じ考え）。円から 1 秒に出る量は、速さ×円周の長さです。

$$v \times 2\pi r = Q \qquad \text{より} \qquad v = \frac{Q}{2\pi r}$$

8-9 の Python で、池の流れの式を 2π でわっていたのは、このためです（池の流れは、わき出す口の流れと、吸いこむ口の流れのたし算）。たとえば $Q = 4$ なら、口から $0.5\,\mathrm{m}$ の所の速さは $\dfrac{4}{2\pi \times 0.5} = 1.27\,\mathrm{m/s}$ です。3 次元の点のわき出し（点の電荷）なら、円周 $2\pi r$ のかわりに球の面積 $4\pi r^2$ でわるので、$\dfrac{1}{r^2}$ でへります。

このように、平面では「閉じた道から出る量」が「中の面のわき出しの合計」と等しくなります（G6）。

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}A$$

$\vec{n}\,\mathrm{d}s$ は、道の小さな 1 歩（長さ $\mathrm{d}s$）の外向きの単位ベクトルです。長方形の道なら、辺ごとに「辺に直角な成分×長さ」をたせば左になります（やってみようの④）。

9 ストークスの定理とグリーンの定理

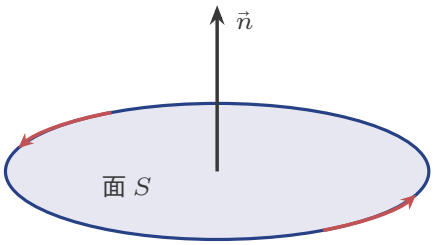
②を、マスを小さくした形に書きます。面 S を小さなマスに分けると、1 つのマスの循環は、8-10 の回転の決め方から「（回転の、面に直角な成分）×マスの面積」です。全部のマスについてたすと、共通の辺は打ち消し合い、面のふちの道 C を 1 周する循環だけが残ります。

ストークスの定理　$\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$

（C は面 S のふち。C を回る向きと $\vec{n}$ の向きは右ねじ）

これを**ストークスの定理**といいます。右の $\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}$ は、3 次元の回転の矢印（8-10）のうち、面に直角な成分です。

向きの約束：右ねじ



上（$\vec{n}$ の先）から見て、C を左回り。
右ねじを左回りに回すと、
$\vec{n}$ の向きに進む（4-14）。

図 9　道 C を回る向きと、面 S の向き $\vec{n}$ は、右ねじの関係にとる。

道を逆向きに回ると、左の線積分は符号が変わります（8-7）。そのときは、$\vec{n}$ も逆向き（下向き）にとります。平らな面（xy の面）の上で、$\vec{n}$ を真上の $(0,\ 0,\ 1)$ にとると、$\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}$ は回転の z 成分、つまり平面の回転です。

グリーンの定理　$$\oint_C (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$
（C は D のふちを左回り）

これを**グリーンの定理**といいます。ストークスの定理の、平面の場合です（左の $F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y$ は、$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ を成分で書いたもの）。

ここでも、両側とも「名前」

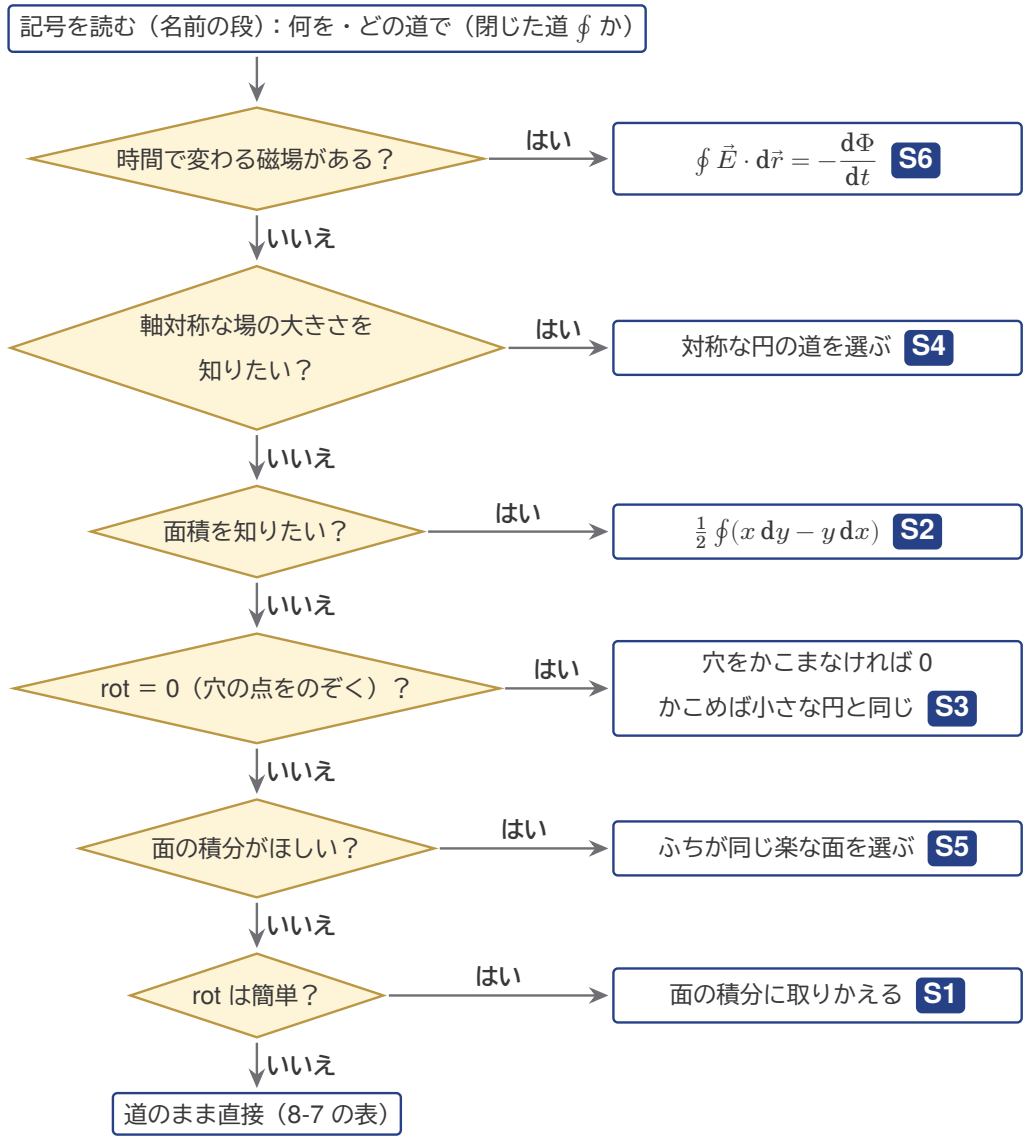
$$\underbrace{\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}_{\text{名前}} = \underbrace{\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{名前}}$$

左は閉じた道の線積分（8-7 の表で直す）、右は面積分（8-8 の表、平らなら 8-6 の表で直す）です。どちらが楽かを選んでから直します。

場合分けの表 8-11 ストークスの定理：どんなときに、どう使う？

記号	こんなとき	手順（楽な側に取りかえて、直す）	例題
S1	rot は簡単（閉じた道の線積分がほしい。道は面倒）	線積分を面積分に取りかえる。rot が一定なら「rot ×面積」	10
S2	面積を知りたい（ふちの道で求める）	$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$。多角形は、くつひもの式	11
S3	rot $= 0$（穴の点をのぞく）。その場の 1 周	穴（場が決まらない点）をかこまなければ 0。穴をかこむときは、穴のまわりの小さな円の 1 周と同じ	12
S4	軸対称な場の**大きさ**を知りたい（円の上で一定）	同じ軸の円を道に選ぶ。$B \times 2\pi r = \mu_0 I$（アンペールの法則）	13
S5	面の積分がほしい（ふちの道は同じで、面は自由に選べる）	計算が楽な面（平らな円板など）を選ぶ	14
S6	時間で変わる磁場がある（そのまわりの電場。読むだけ）	$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$（ファラデーの法則）。対称なら S4 と同じ考え	15

表の S1・S5 は「計算を楽にする」使い方、S4 は「計算しないで場の大きさを出す」使い方、S3 は「穴をよける」使い方、S2 は「定理を反対向きに使う」使い方です。たとえば物理第 1 巻の正方形の 1 周 $\oint \vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ なら、図 10 の流れ図で、時間で変わる磁場がある？ いいえ。軸対称な場の大きさを知りたい？ いいえ（ほしいのは 1 周の線積分）。面積を知りたい？ いいえ。rot $= 0$（穴の点をのぞく）？ いいえ（どこでも 2）。面の積分がほしい？ いいえ。rot は簡単？ はい。こうして S1 に着き、「2× 面積 1= 2」です。



確かめ（答えが出たら）：両側を別々に計算しても、同じ答えか

図 10　ストークスの定理を使うときの流れ図。ひし形は問い、四角はすること。「はい」は右へ、「いいえ」は下へ。時間で変わる磁場（S6）の意味は 8-14 で読む。

⑩ S1・S5：道の積分を、楽な面の積分に取りかえる

S1　力 $\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ で、半径 3 の円を左回りに 1 周する仕事を求めます。8-7 では、道を角 θ で表して（場合 D）、ふつうの定積分に直しました。

$$\oint_C \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} \{(-3\sin\theta)(-3\sin\theta) + (3\cos\theta)(3\cos\theta)\}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 9\,\mathrm{d}\theta = 18\pi$$

グリーンの定理を使えば、回転はどこでも 2 なので、

$$\oint_C \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_D 2\,\mathrm{d}A = 2 \times (\text{円の面積 } 9\pi) = 18\pi$$

で、積分をしなくても「回転×面積」で終わりです。8-7 で「半径 3 で 18π（$= 2$ ×面積）」と書いたのは、このことです。道が正方形でも、三角形でも、だ円でも、$\vec{F}_2$ の 1 周は「2× 囲んだ面積」です。

S5　ストークスの定理の右の面 S は、ふちが C でありさえすれば、どんな面でもかまいません（ふちが同じ 2 つの面のうち、片方の $\vec{n}$ を逆向きにして合わせると、外向きの閉じた面になります。8-10 の「回転の矢印には、わき出しがない」から、その閉じた面の流束は 0 です。だから、同じ向きにそろえた 2 つの面の流束は等しいのです）。だから、計算が楽な面を選べます。

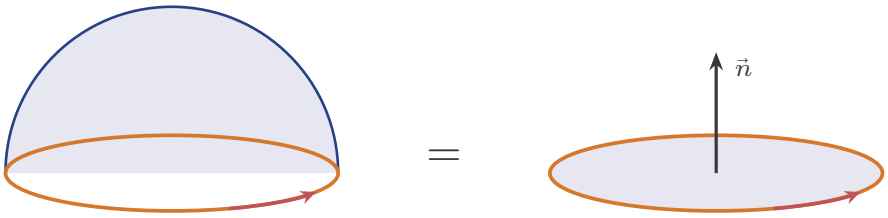


図 11　ふち（オレンジの円）が同じなら、半球の面でも平らな円板でも、$\mathrm{rot}\,\vec{F}$ の流束は同じ。平らな円板のほうが計算が楽。

たとえば $\vec{F} = (-y,\ x,\ 0)$ の回転は、どこでも $(0,\ 0,\ 2)$ です（8-10）。半径 1 の円をふちとする半球の面で流束を計算すると、8-8 の場合 F（球面を 2 つの角で表す）の重積分になります。平らな円板なら、$\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ で $\mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n} = 2$ が一定なので、$2 \times \pi = 2\pi$ で終わりです（例題 14 で、半球でも同じになることを確かめます）。

11 S2：面積を、ふちの道で求める

グリーンの定理を、反対向きに使います。回転がどこでも 1 になる場、たとえば $\vec{F}=\left(-\dfrac{y}{2},\ \dfrac{x}{2}\right)$（回転は $\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$）を選ぶと、右は「1× 面積」です。

$$\text{面積 } A=\frac{1}{2}\oint_C (x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x) \qquad (C \text{ は左回り})$$

ふちの道の上の点の座標だけで、面積がわかります。

くつひもの式

多角形のふちは、まっすぐな辺の集まりです。点 $(x_1,\ y_1)$ から $(x_2,\ y_2)$ へのまっすぐな辺を、$x=x_1+t(x_2-x_1)$、$y=y_1+t(y_2-y_1)$（$0\leqq t\leqq 1$。8-7 の場合 B）で表します。

$$x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\{x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)\}\mathrm{d}t$$

$\mathrm{d}x=(x_2-x_1)\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}y=(y_2-y_1)\mathrm{d}t$

$$=\{x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)\}\mathrm{d}t$$

x、y に入れると、t の項は消える

$$\int_0^1 (\cdots)\,\mathrm{d}t=x_1y_2-x_2y_1$$

定数を 0 から 1 まで積分

1 つの辺の分は、$x_1y_2-x_2y_1$（たすきにかけてひく：7-4 の行列式と同じ形）です。多角形の頂点を左回りに $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、…、$(x_n,\ y_n)$ とすると、

$$A=\frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)\}$$

です。頂点の座標をたすきにかけていく形が、くつひもを交差させて通すようすに似ているので、**くつひもの式**とよばれます。測量で土地の面積を計算するときに、今でも使われています（座標法）。

コラム　面積計（プラニメーター）

地図の上の池や土地の面積を、ふちをなぞるだけではかる機械があります。**面積計**（プラニメーター）といいます。腕の先の針でふちを 1 周なぞると、腕についた小さな車輪が、なぞった道にそって回ります。車輪の回った量は、ふちにそった線積分になっていて、グリーンの定理によって、それが中の面積に比例するのです。コンピュータがなかった時代、設計図や地図の面積をはかるのに広く使われました。

12 S3：回転が 0 でも、穴をかこむと 0 にならない

8-10 のうずなし流れ $\vec{F} = \dfrac{(-y,\ x)}{x^2 + y^2}$ は、原点以外では回転が 0 でした。でも、原点をかこむ円を 1 周すると、8-7 では半径によらず 2π でした。グリーンの定理で「回転 0 ×面積＝ 0」にならないのは、なぜでしょう。

原点では、$\vec{F}$ の分母が 0 になり、矢印が決まりません。円の中の面には、この「穴」がふくまれるので、グリーンの定理の右を計算できないのです（G5 の点のわき出しと同じ）。そこで、G5 と同じように、原点のまわりを小さな円でくりぬきます。

- くりぬいた残りの面には穴がなく、回転は 0 です。だから、「外の道の 1 周」＝「小さな円の 1 周」です。原点をかこむ道なら、正方形でも三角形でも、1 周は 2π です。
- 原点をかこまない道なら、中に穴がないので、1 周は「回転 0 ×面積＝ 0」です。

8-10 のもっと知りたいで、「回転が 0 なら、力は $-\mathrm{grad}\, U$ と書ける（すきまのない広がりの中なら）」と書きました。「すきまのない広がり」とは、どんな閉じた道でも、その中の面に穴がない広がりのことです。物理第 1 巻（力-4）の「（すきまのない広がりの中なら）」も、この意味です。

⑬ S4・S6：アンペールの法則は、道を選ぶ

8-10 で、電流のまわりの磁場の回転は、導線の外では 0 でした。導線の中では、回転は電流密度の μ_0 倍（$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$）でした。ストークスの定理を使うと、道 C が囲む面を通る電流の合計を $I_{\text{中}}$ として、

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 I_{\text{中}}$$

アンペールの法則　　$\displaystyle\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\text{中}}$

です。これを**アンペールの法則**といいます。ガウスの法則で袋を選んだように、ここでは**道を選びます**。まっすぐな導線なら、導線を中心とする円の道を選ぶと、対称性から、磁場は道にそっていて、円の上ではどこでも同じ大きさ B です。

$$B \times 2\pi r = \mu_0 I \qquad \text{より} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

8-10 で「物理の実験からわかっている」とした式が、アンペールの法則から出てきました。高校物理の $H = \dfrac{I}{2\pi r}$（$H = \dfrac{B}{\mu_0}$）の $2\pi r$ は、円の道の長さだったのです。導線の中（半径 $r < a$）では、道が囲む電流が $I \times \dfrac{r^2}{a^2}$ なので、$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$ です（8-10 で「8-11 で、その理由を学びます」と書いた式）。

S6：変わる磁場のまわりの電場（8-14 で読む）

磁場が時間で変わると、そのまわりに電場のうずができます。面 S を通る磁場の流束（磁束）を Φ とすると、

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

です（ファラデーの電磁誘導の法則）。左は、道にそって電荷を 1 周運ぶときの仕事を電荷でわったもので、コイルに生まれる電圧（起電力）です。IH 調理器や発電機は、このしくみを使っています。この式の意味は 8-14 で読みます。磁

場が円の中で一様で、円の道を選べば、S4 と同じ考えで、道の上の電場の大きさが求められます（例題 15）。

もっと知りたい ★★★★★

圧力の面の積分と浮力（G7）

水の中の物には、まわりの水から圧力 p がはたらきます。小さな面 $\mathrm{d}S$ には、外向きの $\vec{n}$ と反対向き（物を押す向き）に $p\,\mathrm{d}S$ の力がはたらくので、物全体にかかる力は $-\oiint_S p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S$ です。ガウスの定理には、数（スカラー）p の形もあります。

$$\oiint_S p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$$

（成分ごとに見ると、x 成分は $\vec{F}=(p,\ 0,\ 0)$ のガウスの定理そのもの。）止まった水の中では、深いほど圧力が大きく、$\mathrm{grad}\,p=\rho\vec{g}$（$\rho$ は水の密度、$\vec{g}=(0,\ 0,\ -g)$）でした（物理 力-12）。だから、物全体にかかる力は

$$-\oiint_S p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\iiint_V \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V = -\rho\vec{g}V = (0,\ 0,\ \rho gV)$$

で、上向きに ρgV、つまり「物がおしのけた水の重さ」です。これが**浮力**（アルキメデスの原理）です。物理第 1 巻（力-12）で「ガウスの定理（8-11）の形の 1 つ」と書いたのは、この式です。物の形がどんなに複雑でも、面の積分をしないで、体積 V だけで浮力がわかります（例題 9）。

せいかくに言うと

積分形と微分形

ガウスの定理を電場に使うと、ガウスの法則（袋の形）と 8-9 の場所ごとの式が、同じことの 2 つの書き方だとわかります。電荷の密度（1 m³ あたりの電荷）を ρ とすると、どんな袋でも、

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V$$

が成り立ちます（1 つめの等号がガウスの定理、2 つめがガウスの法則）。袋は、どこに、どんなに小さくとってもよいので、両はしの中身が等しくなければなりません。小

さな箱の中で $\mathrm{div}\,\vec{E}$ と $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ がちがうと、その箱だけで両はしがちがってしまうからです。こうして $\mathrm{div}\,\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$（8-9 の微分形）が出てきます。物理第 1 巻（力-13）で、連続の式を「検査体積はどこにどんな大きさでとってもよいので、中身どうしが等しくなり」と導いたのも、同じ考えです。袋全体で書いた形を**積分形**、場所ごとの形を**微分形**といいます。

専門書をのぞいてみよう　ベクトル解析の教科書ふうの書き方

有界領域 V の境界を ∂V とし、その外向き単位法線を $\mathbf{n}$ とする。ベクトル場 $\mathbf{A}$ に対し、$\displaystyle\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \oint_{\partial V}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS}$（ガウスの発散定理）。曲面 S の境界 ∂S に S の向きと整合的な向きを入れるとき、$\displaystyle\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{dS}=\oint_{\partial S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dr}$（ストークスの定理）。

訳　∂V は「V の境目（ふち）」という意味で、偏微分の ∂ とは別の使い方。$\mathbf{dS}$ はこの本の $\vec{n}\,dS$。「向きと整合的」は「右ねじの関係」。物理の本や多くの専門書では、閉じた面にも $\oint$ を 1 つ書き、$\int$ 1 つで体積の積分を書く。この本の $\oiint$・$\iiint$ と同じもので、○はどちらも「閉じている」という印。

コラム　定理の名前と、それを見つけた人たち

ガウスの定理（発散定理）は、ラグランジュ（1762 年ごろ）やガウス（1813 年ごろ）が、とくべつな場合を使っていたことが知られています。どんな立体でも成り立つ形で示したのは、ロシアのオストログラツキー（1826 年ごろ）だと伝えられています。イギリスのグリーンは、1828 年に自分で出版した本に、グリーンの定理につながる式を書きました。ストークスの定理は、トムソン（のちのケルビン）が 1850 年にストークスへの手紙で伝え、ストークスが 1854 年に大学の賞の試験問題に出したと伝えられています。そのときの受験者の中に、のちに電気と磁気の 4 つの式（8-14）をまとめるマクスウェルがいました。

たいせつ

使うときの 3 つの段（ガウスもストークスも、両側とも名前）

名前 記号を読む：何を・どこで（閉じた面・閉じた道か）・1 枚の量

楽をする 楽な側を選ぶ：流れ図の問いを上から順に

直す 選んだ側を、8-6・8-7・8-8 の表の場合で、ふつうの定積分に直す

場合分けの表 8-11（まとめ）

記号	こんなとき	使い方
G1	div は簡単	体積の積分に。定数なら div ×体積
G2	開いた面	ふたをして閉じ、ふたの分をひく
G3	対称な場の大きさを知りたい	対称な袋：大きさ×面積＝中の量
G4	袋の一部の面の流束	全体は中の量で決まる。等分する
G5	div が決まらない点がある	小さな球でくりぬく
G6	平面（2 次元）の流れ	$\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}A$
G7	圧力のような数の面の積分	$\oiint p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$
S1	rot は簡単	面の積分に。一定なら rot ×面積
S2	面積を知りたい	$\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$、くつひもの式
S3	rot ＝ 0（穴の点をのぞく）	かこまなければ 0、かこめば小円と同じ
S4	軸対称な場の大きさを知りたい	円の道：$B\times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{中}}$
S5	面の積分がほしい	楽な面（平らな円板）を選ぶ
S6	時間で変わる磁場がある	$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

この章で出てきたことば

ガウスの定理　閉じた面から出る量＝中のわき出し（div）の合計。発散定理ともいう。

ストークスの定理　閉じた道の 1 周の循環＝その道をふちとする面の、回転（rot）の流束。

グリーンの定理　ストークスの定理の、平面の場合。

ガウスの法則　閉じた面の電場の流束 Φ_E ＝中の電荷 $\div \varepsilon_0$。袋の形によらない。

アンペールの法則　閉じた道にそった磁場の線積分＝ $\mu_0 \times$ 道が囲む電流。

くつひもの式　多角形の面積を、頂点の座標から求める式。

積分形・微分形　袋全体で書いた形と、場所ごとの形。同じことの 2 つの書き方。

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、この章の場合分けの表（G1〜G7、S1〜S6）のどの場合かを書きました。そのあとの札は、名前 が名前の段、楽をする が楽をする段（どちらの側を使うか）、直す が直す段（選んだ側を、ふつうの定積分に直す）です。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜15 を流れ図（図 5・図 10）でたどると、次のとおりです（書いていない問いは「いいえ」）。

例題	「はい」と答えた問い（ガウス）	札	例題	「はい」と答えた問い（ストークス）	札
1・2	div は簡単？	G1	10	rot は簡単？	S1
3	開いた面？	G2	11	面積を知りたい？	S2
4・5	対称な場の大きさを知りたい？	G3	12	rot ＝ 0（穴の点をのぞく）？	S3
6	袋の一部の面の流束？	G4	13	軸対称な場の大きさを知りたい？	S4
7	div が決まらない点がある？	G5	14	面の積分がほしい？	S5
8	平面（2 次元）の流れ？	G6	15	時間で変わる磁場がある？	S6
9	圧力のような数の面の積分？	G7			

表 2　例題 1〜15 の流れ図の道すじ。どれも、考え方の 1 行めの場合に着く。

例題 1　div が定数なら、div ×体積

流れ $\vec{F} = (2x,\ 3y,\ z)$ が、原点を中心とする半径 1 の球の面から出ていく量を求めましょう。

考え方　**場合：**閉じた面（球）で、div が定数（表 8-11 の G1）

名前　$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：球の面で「$\vec{F}$ の外向きの成分×タイル」をたす。

楽をする　球の上で $\vec{F}\cdot\vec{n}$ は場所で変わるので、面の積分は大変。div を調べると定数なので、体積の積分に取りかえる。

直す　定数×球の体積（8-6 の場合 E：$\frac{4}{3}\pi R^3$）。

式　$\mathrm{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial(2x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(3y)}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 2+3+1 = 6$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V 6\,\mathrm{d}V = 6\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3 = 8\pi$$

答え　8π（約 25.1）

じぶんでとこう 1

流れ $\vec{F} = (x,\ 2y,\ 3z)$ が、原点を中心とする半径 2 の球の面から出ていく量を求めましょう。

例題 2　立方体の両側を計算する

流れ $\vec{F} = (x^2,\ y^2,\ z^2)$ が、1 辺 1 の立方体（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から出ていく量を、面ごとの計算と、ガウスの定理の両方で求めましょう。

考え方　**場合：**閉じた面（立方体）（表 8-11 の G1）

名前　左：6 つの面で「外向きの成分×面積」をたす。右：立方体の中で div をたす。

直す　左は 8-8 の場合 G（面ごと）。右は 8-6 の場合 E（定積分を 3 回）。

式　左：$x = 1$ の面は $\vec{n} = (1,\ 0,\ 0)$、$F_x = 1^2 = 1$ で $1 \times 1 = 1$。$x = 0$ の面は $F_x = 0$ で 0

$y \cdot z$ の面も同じで、1 と 0。合計 $1 + 1 + 1 = 3$

右：$\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 2y + 2z$

$$\iiint (2x + 2y + 2z)\,\mathrm{d}V = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 2z\,\mathrm{d}z$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

答え　どちらも 3

右の 3 重積分では、たとえば $2x$ の項は $y \cdot z$ によらないので、y と z の積分はそれぞれ 1（立方体のはば）になり、$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 1$ だけが残ります。

じぶんでとこう 2

流れ $\vec{F} = (xy,\ yz,\ zx)$ が、1 辺 1 の立方体（$0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1$）から出ていく量を、面ごとの計算と、ガウスの定理の両方で求めましょう。

例題 3　ドームに、ふたをする

流れ $\vec{F}=(x,\ y,\ z+1)$ が、半径 2 の半球のドーム（$z \geqq 0$。底はふくまない）を内側から外側へ通りぬける量を求めましょう。

考え方　**場合：**開いた面（ドーム）（表 8-11 の G2）

名前　$\iint_{\text{ドーム}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$。閉じていないので、ガウスの定理はそのままでは使えない。

楽をする　底の円でふたをして閉じる。閉じた全体は G1、ふたは平らな面（8-8 の場合 B）。

直す　ふたの外向きは下向き $\vec{n}=(0,\ 0,\ -1)$。

式　閉じた全体：$\mathrm{div}\,\vec{F}=1+1+1=3$、$3\times\dfrac{2}{3}\pi\times 2^3=16\pi$

ふた（$z=0$）：$\vec{F}\cdot\vec{n}=-(z+1)=-1$。$-1\times$（円の面積 4π）$=-4\pi$

ドーム $=16\pi-(-4\pi)=20\pi$

答え　20π（約 62.8）

半球の体積は、球の体積の半分 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{2}{3}\pi R^3$ です。ドームの面の上で直接重積分をしても（8-8 の場合 F）、同じ 20π になります（Python で確かめた）。

じぶんでとこう 3

流れ $\vec{F}=(x,\ y,\ z)$ が、放物面 $z=1-x^2-y^2$（$z \geqq 0$ の部分。底はふくまない）を下から上へ通りぬける量を、ふたをする方法で求めましょう。放物面の下の立体の体積は $\dfrac{\pi}{2}$ です（8-6 の場合 D：高さ z の切り口は半径 $\sqrt{1-z}$ の円）。

例題 4　地球の重力を、袋を選んで求める

地球を半径 $R = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$ の球とし、$GM = 3.986 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$ とします。(1) 地面での重力の大きさ g を求めましょう。(2) 地球の密度がどこでも同じだとすると、半分の深さ（中心から $\frac{R}{2}$）での g はいくつでしょう。

考え方　**場合：**場の大きさを知りたい、球対称（表 8-11 の G3）

名前　$\iint \vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -4\pi G\,M_{\text{中}}$。名前は $\iint$ だが、ここでは積分しない（対称で外に出す）。

楽をする　同じ中心の球の袋を選ぶ。$\vec{g}$ は面に直角で、大きさは同じ（8-8 の場合 D）。

直す　流束 $= -g \times 4\pi r^2$ なので、$g = \dfrac{G\,M_{\text{中}}}{r^2}$。

式　(1) $r = R$ で $M_{\text{中}} = M$。$g = \dfrac{GM}{R^2} = \dfrac{3.986 \times 10^{14}}{(6.371 \times 10^6)^2} = 9.82$

(2) $M_{\text{中}} = M \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{M}{8}$、$r = \dfrac{R}{2}$

$$g = \frac{G \times \frac{M}{8}}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{GM}{R^2} \times \frac{4}{8} = 9.82 \times \frac{1}{2} = 4.91$$

答え　(1) $9.82\,\mathrm{m/s^2}$　(2) $4.91\,\mathrm{m/s^2}$（本物の地球は中心ほど密度が高いので、実際はこれより大きい）

じぶんでとこう 4

月を半径 $R = 1.737 \times 10^6\,\mathrm{m}$ の球とし、$GM = 4.90 \times 10^{12}\,\mathrm{m^3/s^2}$ とします。(1) 月の表面での重力の大きさを求めましょう。(2) 月の密度がどこでも同じだとすると、中心から $\frac{R}{2}$ の所での重力の大きさはいくつでしょう。

例題 5　点の電荷と、まっすぐな線の電荷

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \times 10^9$〔N·m²/C²〕とします。(1) 点の電荷 $Q = 1.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ から 0.1 m の所の電場の大きさを求めましょう。(2) 長いまっすぐな導線に、1 m あたり $\lambda = 1.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m}$ の電荷があるとき、導線から 0.1 m の所の電場の大きさを求めましょう。

考え方　**場合：**場の大きさを知りたい、球対称と軸対称（表 8-11 の G3）

名前　ガウスの法則 $\oiint \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$。名前は $\oiint$ だが、ここでは積分しない（対称で外に出す）。

楽をする　(1) は同じ中心の球、(2) は導線を軸とする半径 r・長さ L の円柱を袋に選ぶ。

直す　(1) $E \times 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$。(2) 上下の面は流束 0、側面で $E \times 2\pi r L = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$。

式　(1) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{kQ}{r^2} = \dfrac{9.0\times10^9\times1.0\times10^{-9}}{0.1^2} = \dfrac{9.0}{0.01} = 900$

(2) $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2k\lambda}{r} = \dfrac{2\times9.0\times10^9\times1.0\times10^{-9}}{0.1} = \dfrac{18}{0.1} = 180$

答え　(1) 900 N/C　(2) 180 N/C

(2) の $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ を k で書くと、$\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} = 2\times\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 2k$ なので $\dfrac{2k\lambda}{r}$ です。点の電荷は $\dfrac{1}{r^2}$、線の電荷は $\dfrac{1}{r}$ でへります。袋の面積が、球では r^2 に、円柱の側面では r に比例するからです。

じぶんでとこう 5

$k = 9.0 \times 10^{9}$〔N·m²/C²〕とします。(1) 点の電荷 $Q = 2.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ から 0.2 m の所の電場の大きさを求めましょう。(2) 長いまっすぐな導線に、1 m あたり $\lambda = 2.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m}$ の電荷があるとき、導線から 0.05 m の所の電場の大きさを求めましょう。

例題 6　立方体の袋の、1 つの面

1 辺 0.2 m の立方体の袋のまん中に、点の電荷 $Q = 1.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ があります（$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/(N·m²)）。(1) 袋の 1 つの面を通る電場の流束を求めましょう。(2) 電荷を袋の中で、まん中から少しずらしました。6 つの面の電場の流束の合計はいくつでしょう。(3) 電荷を袋の外に出すと、合計はいくつでしょう。

考え方　**場合：**袋の形を変えても、中の量は同じ（表 8-11 の G4）

名前　$\oiint \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$（ガウスの法則）。名前は $\oiint$ だが、ここでは積分しない（同じ形の面に分ける）。

楽をする　全体は、袋の形によらず $\frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$。6 つの面は、まん中の電荷から見て同じ形なので、6 等分。面の積分はしない。

式　全体：$\dfrac{1.0 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} = 113$

(1) $113 \div 6 = 18.8$

(2) 中の電荷は Q のままなので、113

(3) 中の電荷は 0 なので、0

答え　(1) 約 18.8 N·m²/C　(2) 約 113 N·m²/C　(3) 0

じぶんでとこう 6

正四面体（4 つの面が同じ正三角形の立体）の袋のまん中に、点の電荷 $Q = 1.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ があります。(1) 袋の 1 つの面を通る電場の流束を求めましょう。(2) 電荷を袋の外に出すと、4 つの面の電場の流束の合計はいくつでしょう（$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}$）。

例題 7　池の口を、くりぬいてかこむ

8-9 の池（わき出す口から $Q = 4$〔m²/s〕、吸いこむ口へ -4）で、次の量を求めましょう。(1) わき出す口だけをかこむ半径 0.5 m の円と、半径 1 m の円から出ていく量。(2) 池のふち（6 m × 4 m の長方形）から出ていく量。(3) 吸いこむ口だけをかこむ円から出ていく量。(4) 口だけがある池（吸いこむ口がない）で、口から 0.5 m の所の水の速さ。

考え方　**場合：**中に点のわき出し（口）（表 8-11 の G5）

名前　$\oint_C \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$：道で「外向きの成分× 1 歩の長さ」をたす。名前は $\oint$ だが、ここでは積分しない。

楽をする　口のまわりを小さな円でくりぬく。残りは発散 0 なので、口をかこむ道なら、形と大きさによらず、口から出る量と同じ。

直す　(4) は対称な円の道を選び、「速さ×円周の長さ＝ Q」。

式　(1) どちらの円も、口から出る量 $Q = 4$

(2) 2 つの口をかこむので、$4 + (-4) = 0$

(3) 吸いこむ口から出る量は -4

(4) $v \times 2\pi \times 0.5 = 4$ より $v = \dfrac{4}{\pi} = 1.27$

答え　(1) どちらも 4 m²/s　(2) 0　(3) −4 m²/s（4 だけ入ってくる）　(4) 1.27 m/s

じぶんでとこう 7

1 秒に $Q = 6$〔m²/s〕わき出す口と、6 吸いこむ口がある池で、次の量を求めましょう。(1) わき出す口だけをかこむ正方形の道から出ていく量。(2) 2 つの口をどちらもかこむ道から出ていく量。(3) 口だけがある池（吸いこむ口がない）で、口から 1 m の所の水の速さ。

例題 8　平面のガウスの定理

流れ $\vec{F} = (x^2,\ y)$ で、長方形 $0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq 2$ のふちから出ていく量を、ふちの積分と、中の発散の積分の両方で求めましょう。

考え方　**場合**：平面の流れ（表 8-11 の G6）

名前　左 $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$：ふちで「外向きの成分×長さ」。右 $\iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}A$。

直す　左は 4 つの辺ごと（8-7 の場合 E）。右は長方形で定積分を 2 回（8-6 の場合 A）。

式　左：右の辺 $x = 3$ は $\vec{n} = (1,\ 0)$、$F_x = 9$、$\int_0^2 9\,\mathrm{d}y = 18$

上の辺 $y = 2$ は $\vec{n} = (0,\ 1)$、$F_y = 2$、$\int_0^3 2\,\mathrm{d}x = 6$

左の辺 $x = 0$ は $F_x = 0$、下の辺 $y = 0$ は $F_y = 0$ で、どちらも 0。

合計 24

右：$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 1$、$\int_0^2 \left(\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^2 (9+3)\,\mathrm{d}y = 24$

答え　どちらも 24（やってみようの表計算と同じ）

じぶんでとこう 8

流れ $\vec{F} = (xy,\ y^2)$ で、正方形 $0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 2$ のふちから出ていく量を、ふちの積分と、中の発散の積分の両方で求めましょう。

例題 9　浮力を、面の積分なしで求める

水（密度 $1000\,\mathrm{kg/m^3}$、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）の中で、(1) 1 辺 $0.1\,\mathrm{m}$ の立方体（上の面の深さ $0.5\,\mathrm{m}$）にかかる浮力を、上と下の面の圧力から求め、$\rho g V$ とくらべましょう。(2) 半径 $0.1\,\mathrm{m}$ の球にかかる浮力を求めましょう。

考え方　**場合：**圧力の面の積分（スカラーの形）（表 8-11 の G7）

名前　浮力は $-\oiint_S p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S$（面を押す力の合計）。名前は $\oiint$ だが、球では面の積分をしない。

楽をする　G7 で $-\iiint \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V = \rho g V$（上向き）。球の面の積分はしない。

式　(1) 横の 4 つの面の力は、向かい合う面どうしで打ち消し合う

上の面は下向きに $(p_0 + \rho g \times 0.5) \times 0.01$、下の面は上向きに $(p_0 + \rho g \times 0.6) \times 0.01$（$p_0$ は大気圧）

上向きの合計

$= \rho g \times (0.6 - 0.5) \times 0.01 = 1000 \times 9.8 \times 0.001 = 9.8$

$\rho g V = 1000 \times 9.8 \times 0.1^3 = 9.8$（同じ）

(2) $\rho g V = 1000 \times 9.8 \times \dfrac{4}{3}\pi \times 0.1^3 = 41.0$

答え　(1) $9.8\,\mathrm{N}$（$\rho g V$ と同じ）　(2) $41.0\,\mathrm{N}$

じぶんでとこう 9

水（密度 $1000\,\mathrm{kg/m^3}$、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）の中で、(1) 1 辺 $0.2\,\mathrm{m}$ の立方体（上の面の深さ $1\,\mathrm{m}$）にかかる浮力を、上と下の面の圧力から求め、$\rho g V$ とくらべましょう。(2) 半径 $0.05\,\mathrm{m}$ の球にかかる浮力を求めましょう。

例題 10　道の 1 周を、rot ×面積で

力 $\vec{F} = (-3y,\ 2x)$ について、(1) 正方形 $0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 2$ のふちを左回りに 1 周する線積分を、4 つの辺の計算と、グリーンの定理の両方で求めましょう。(2) 原点を中心とする半径 1 の円を、左回りに 1 周する線積分を求めましょう。

考え方　**場合：**閉じた道で、rot が一定（表 8-11 の S1）

名前　$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$：1 周して「力× 1 歩」をたす。

楽をする　回転 $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 2 - (-3) = 5$ が一定なので、「5× 面積」。

直す　(1) の確かめは、4 つの辺ごとに 8-7 の場合 A。

式　(1) 下の辺（$y = 0$、右へ）：$F_x = 0$ で 0。右の辺（$x = 2$、上へ）：$\int_0^2 4\,\mathrm{d}y = 8$

上の辺（$y = 2$、左へ）：$F_x = -6$、$-\int_0^2 (-6)\,\mathrm{d}x = 12$。左の辺（$x = 0$、下へ）：$F_y = 0$ で 0

合計 $0 + 8 + 12 + 0 = 20$。グリーンの定理：$5 \times (2 \times 2) = 20$

(2) $5 \times (\pi \times 1^2) = 5\pi$

答え　(1) 20（どちらでも同じ）　(2) 5π（約 15.7）

じぶんでとこう 10

力 $\vec{F} = (-2y,\ 2x)$ について、(1) 正方形 $0 \leqq x \leqq 3$、$0 \leqq y \leqq 3$ のふちを左回りに 1 周する線積分を、4 つの辺の計算と、グリーンの定理の両方で求めましょう。(2) 原点を中心とする半径 2 の円を、左回りに 1 周する線積分を求めましょう。

例題 11　面積を、ふちの道で求める

(1) 頂点が (0, 0)、(4, 0)、(4, 3) の三角形の面積を、$A=\frac{1}{2}\oint_C(x\,dy-y\,dx)$ で求めましょう。(2) だ円 $x=3\cos t$、$y=2\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ の面積を求めましょう。

考え方　**場合：**面積を、ふちの道で（表 8-11 の **S2**）

名前　回転が 1 の場 $\left(-\frac{y}{2},\ \frac{x}{2}\right)$ のグリーンの定理で、右が「1× 面積」。

直す　(1) は辺ごとに、くつひもの式の 1 つの辺の分 $x_1y_2-x_2y_1$。(2) は t で表した道（8-7 の場合 D と同じ考え）。

式　(1) $(0,\ 0)\to(4,\ 0)$：$0\times 0-4\times 0=0$

$(4,\ 0)\to(4,\ 3)$：$4\times 3-4\times 0=12$。$(4,\ 3)\to(0,\ 0)$：

$4\times 0-0\times 3=0$

$$A=\frac{1}{2}(0+12+0)=6$$

(2) $dx=-3\sin t\,dt$、$dy=2\cos t\,dt$

$$x\,dy-y\,dx=(6\cos^2 t+6\sin^2 t)\,dt=6\,dt$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}6\,dt=6\pi$$

答え　(1) 6（底辺 4 ×高さ 3 ÷ 2 と同じ）　(2) 6π（約 18.8）

だ円の面積は、半径 a・b のとき πab で、(2) は $\pi\times 3\times 2=6\pi$ です（8-6 のだ円の座標と同じ答え）。

じぶんでとこう 11

(1) 頂点が (0, 0)、(5, 0)、(5, 2)、(0, 4) の四角形の面積を、くつひもの式で求めましょう。(2) だ円 $x=4\cos t$、$y=\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ の面積を求めましょう。

例題 12　穴をかこむ道、かこまない道

$\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ について、左回りに 1 周する線積分を求めましょう。(1) 原点を中心とする半径 2 の円。(2) 4 つの頂点が $(\pm 1,\ \pm 1)$ の正方形。(3) 中心 $(3,\ 0)$、半径 1 の円。

考え方　**場合：**rot $= 0$（原点以外）の場の 1 周（表 8-11 の S3）

名前　$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$：道を 1 周して「$\vec{F}$ × 1 歩」をたす。

楽をする　原点（穴）をかこむかどうかを先に見る。かこむなら、小さな円の 1 周と同じ。かこまなければ 0。

直す　(1) は円を角 θ で表す（8-7 の場合 D）。

式　(1) $x = 2\cos\theta$、$y = 2\sin\theta$ で、$\vec{F} = \dfrac{(-2\sin\theta,\ 2\cos\theta)}{4}$、$\mathrm{d}\vec{r} = (-2\sin\theta,\ 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}{4}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta。\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

(2) 原点をかこむので、(1) と同じ 2π

(3) 原点をかこまない。中の回転は 0 なので 0

答え　(1) 2π　(2) 2π　(3) 0

じぶんでとこう 12

$\vec{F} = 5 \times \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ について、左回りに 1 周する線積分を求めましょう。(1) 原点を中心とする半径 1 の円。(2) 原点をかこむ三角形。(3) 中心 $(0,\ 4)$、半径 1 の円。

例題 13　アンペールの法則で、磁場を求める

半径 2 mm のまっすぐな導線に、10 A の電流が一様に流れています（$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A）。(1) 導線の中心から 5 cm の所、(2) 導線の中で中心から 1 mm の所の、磁場の大きさを求めましょう。

考え方　**場合：**場の大きさを知りたい、軸対称（表 8-11 の S4）

名前　$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\text{中}}$（アンペールの法則）。名前は $\oint$ だが、ここでは積分しない（対称で外に出す）。

楽をする　導線を中心とする円を道に選ぶ。$\vec{B}$ は道にそっていて、大きさは同じ。

直す　線積分 $= B \times 2\pi r$。

式　(1) $I_{\text{中}} = 10$。$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.05} = 4 \times 10^{-5}$

(2) $I_{\text{中}} = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.5$（面積の割合）

$B = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 2.5}{2\pi \times 0.001} = 5 \times 10^{-4}$

答え　(1) 4×10^{-5} T　(2) 5×10^{-4} T

じぶんでとこう 13

半径 2 mm のまっすぐな導線に、20 A の電流が一様に流れています。(1) 導線の中心から 10 cm の所、(2) 導線の中で中心から 1 mm の所の、磁場の大きさを求めましょう（$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A）。

例題 14　面の選び方を変えても同じ

$\vec{F} = (-y,\ x,\ 0)$ の回転は $(0,\ 0,\ 2)$ です。xy の面の上の、原点を中心とする半径 1 の円 C（上から見て左回り）について、$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を、(1) 平らな円板、(2) 上半分の半球の面（$\vec{n}$ は外向き）で求めましょう。

考え方　**場合：**ふちは同じで、面は自由（表 8-11 の S5）

名前　$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$：面で「回転の、面に直角な成分×タイル」をたす。

楽をする　ふちが同じなら、どの面でも同じ値。平らな円板が楽。

直す　(2) は球面を 2 つの角で表す（8-8 の場合 F）：$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$、$\mathrm{d}S = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。

式　(1) $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$、$\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n} = 2$。$2\times\pi\times 1^2 = 2\pi$

(2) $\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n} = 2\cos\theta$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi$$

答え　(1) 2π　(2) 2π（どちらも同じ。8-7 で円を 1 周した 2π とも同じ）

(2) の内側の積分は、$2\cos\theta\sin\theta$ が $\sin^2\theta$ の微分であること（5-6 の合成関数の微分）を使いました。半球では計算がふえますが、答えは同じです。

じぶんでとこう 14

$\vec{F} = (-y,\ x,\ 0)$ で、xy の面の上の原点を中心とする半径 2 の円（上から見て左回り）について、$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を、(1) 平らな円板、(2) 上半分の半球の面で求めましょう。

例題 15　変わる磁場のまわりの電場

半径 0.05 m の円の中に、一様な磁場が面に直角にあり、1 秒に 0.4 T ずつ強くなっています。(1) この円にそって 1 周する電場の線積分（起電力）の大きさを求めましょう。(2) 円の上の電場の大きさを求めましょう。

考え方　**場合：**時間で変わる磁場、軸対称（表 8-11 の S6）

名前　$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$。磁束 $\Phi = B\times$ 円の面積。

楽をする　対称性から、電場は円にそっていて、大きさは同じ（S4 と同じ考え）。

式　(1) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \pi \times 0.05^2 \times 0.4 = 3.14 \times 10^{-3}$

(2) $E \times 2\pi \times 0.05 = 3.14 \times 10^{-3}$ より $E = \dfrac{3.14 \times 10^{-3}}{0.314} = 0.01$

答え　(1) 約 3.14×10^{-3} V　(2) 0.01 V/m

じぶんでとこう 15

半径 0.1 m の円の中に、一様な磁場が面に直角にあり、1 秒に 0.2 T ずつ強くなっています。(1) この円にそって 1 周する電場の線積分（起電力）の大きさを求めましょう。(2) 円の上の電場の大きさを求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 開いた面に、ガウスの定理をそのまま使う

✕　ドームの流束 $=\operatorname{div}\vec{F}\times$（半球の体積）$=16\pi$

○　ふたの分をひいて、$16\pi-(-4\pi)=20\pi$

ガウスの定理は、閉じた面だけの式です。開いた面は、ふたをして閉じてから使い、ふたの分をひきます（例題 3）。

まちがえやすいところ

② 点のわき出しがあるのに「div は 0」とする

✕　点の電荷のまわりでは $\operatorname{div}\vec{E}=0$ なので、球の袋の電場の流束は 0

○　電荷の点で div は決まらない。くりぬいて、電場の流束は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

div が 0 なのは、電荷の点以外です。袋の中に、場が決まらない点があるときは、小さな球でくりぬきます（G5）。

まちがえやすいところ

③ ふたや道の向きを逆にする

✕　ドームのふたの $\vec{n}$ を上向きにして、ふたの分を $+4\pi$ とする

○　閉じた面の外向きなので、ふたの $\vec{n}$ は下向き。-4π

閉じた面では、どの面も外向きです。ストークスの定理では、道の向きと $\vec{n}$ を右ねじの関係にそろえます。

⚠ まちがえやすいところ

④ 対称でないのに「大きさ×面積」にする

✕ 電荷が 2 つあっても、袋の上の電場は $\dfrac{Q_{\text{中}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

○ 場全体が球対称のときだけ、大きさは一定

袋の外の電荷は流束には効きませんが、袋の上の電場の大きさには効きます。ガウスの法則はいつも正しいのですが、場の大きさを出せるのは対称なときだけです。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ $\oiint$ を「球の面」と思う

✕ 立方体の袋は球ではないので、$\oiint$ は使えない

○ ○は「閉じている」印。どの面かは下の S

$\oiint$ は、どんな形の閉じた面にも使います（例題 6）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 名前を、そのままかけ算にする

✕ $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = (\vec{F}\cdot\vec{n})\times$（面積）

○ $\vec{F}\cdot\vec{n}$ が面の上で一定のときだけ

一定でなければ、ふつうの定積分に直すか、定理で取りかえます。

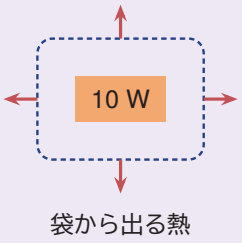
物理・工学ではこう使う

電気と磁気の 4 つの式（8-14 へ）

この章で出てきた、ガウスの法則（電場）・アンペールの法則・ファラデーの法則に、「磁場の流束は、どんな閉じた面でも 0（N 極だけの磁石はない）」を加えた 4 つの式が、電気と磁気のすべての現象のもとになる式です（マクスウェル方程式）。積分形は「袋や道を選んで計算する」ための形、微分形（div と rot）は「場所ごとに何が起きているか」を見るための形です。8-14 で、この 4 つを読みます。

流れの検査体積と、熱の出入り

物理第 1 巻（力-13）では、流れの中に「検査体積」という袋を置き、ガウスの定理で連続の式を導きました。同じ考えで、熱の流れ $\vec{q}$〔W/m²〕の袋から出る量は、袋の中で 1 秒に生まれる熱になります（温度が変わらないとき）。パソコンの中で 10 W の熱を出す部品を袋でかこめば、袋のどんな面からも、合計 10 W の熱が出ていきます。冷やす設計は、この「袋から出る量」を、どの面から、どう逃がすかを考えることです（物理 熱-11）。



章末問題

8-11 のまとめ

基本 ★★★★★

1 閉じた面から出ていく量を、ガウスの定理を使って求めましょう。

(1) 流れ $\vec{F} = (4x,\ y,\ z)$ が、原点を中心とする半径 3 の球の面から出ていく量を求めましょう(例題 1)。

(2) 流れ $\vec{F} = (x+y,\ y+z,\ z+x)$ が、1 辺 1 の立方体 $(0 \leqq x,\ y,\ z \leqq 1)$ から出ていく量を、面ごとの計算と、ガウスの定理の両方で求めましょう(例題 2)。

2 流れ $\vec{F} = (x,\ y,\ z+2)$ が、半径 1 の半球のドーム（$z \geqq 0$。底はふくまない）を内側から外側へ通りぬける量を求めましょう(例題 3)。

3 対称な場の大きさを、ガウスの法則の考えで求めましょう。

(1) 火星を半径 $R = 3.39 \times 10^6\,\mathrm{m}$ の球とし、$GM = 4.28 \times 10^{13}\,\mathrm{m^3/s^2}$ とします。(ア) 表面での重力の大きさを求めましょう。(イ) 密度がどこでも同じだとすると、中心から $\frac{R}{2}$ の所での重力の大きさはいくつでしょう(例題 4)。

(2) $k = 9.0 \times 10^9$〔N·m²/C²〕とします。(ア) 点の電荷 $Q = 4.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ から 0.3 m の所の電場の大きさを求めましょう。(イ) 長いまっすぐな導線に 1 m あたり $\lambda = 3.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m}$ の電荷があるとき、導線から 0.2 m の所の電場の大きさを求めましょう(例題 5)。

4 立方体の袋のまん中に、点の電荷 $Q = 2.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ があります（$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/(N·m²)）。(1) 袋の 1 つの面を通る電場の流束を求めましょう。(2) 電荷を袋の外に出すと、6 つの面の電場の流束の合計はいくつでしょう(例題 6)。

5　1 秒に $Q = 2$〔m²/s〕わき出す口だけがある池で、(1) 口をかこむ半径 0.25 m の円から出ていく量と、(2) 口から 0.25 m の所の水の速さを求めましょう(例題 7)。

6　流れ $\vec{F} = (x^2,\ 2y)$ で、長方形 $0 \leqq x \leqq 2$、$0 \leqq y \leqq 1$ のふちから出ていく量を、ふちの積分と、中の発散の積分の両方で求めましょう(例題 8)。

7　グリーンの定理（平面のストークスの定理）を使って求めましょう。

(1) 力 $\vec{F} = (-y,\ 3x)$ で、原点を中心とする半径 3 の円を左回りに 1 周する線積分を求めましょう(例題 10)。

(2) 頂点が $(0,\ 0)$、$(6,\ 0)$、$(0,\ 4)$ の三角形の面積を、くつひもの式で求めましょう(例題 11)。

8　まっすぐな導線に 5 A の電流が流れています。導線から 1 cm の所の磁場の大きさを、アンペールの法則で求めましょう（$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A）(例題 13)。

チャレンジ ★★★★★

9　半径 0.2 m の球が、水（密度 1000 kg/m³、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）の中に全部しずんでいます。球にかかる浮力を求めましょう(例題 9)。

10　$\vec{F} = 2 \times \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ について、左回りに 1 周する線積分を求めましょう。(1) 原点を中心とする半径 3 の円。(2) 長方形 $1 \leqq x \leqq 3$、$1 \leqq y \leqq 2$ のふち(例題 12)。

11　$\vec{F} = (-y,\ x,\ 0)$ で、xy の面の上の原点を中心とする半径 3 の円（上から見て左回り）について、$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$ を、平らな円板と、上半分の半球の面の両方で求めましょう(例題 14)。

12 半径 0.2 m の円の中に、一様な磁場が面に直角にあり、1 秒に 0.05 T ずつ強くなっています。(1) 円にそって 1 周する起電力の大きさと、(2) 円の上の電場の大きさを求めましょう(例題 15)。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ マスごとのわき出し（うず）を全部たすと、外のふちから出る量（外の 1 周）になることを、表計算で確かめられる。 → 443 ページ
- ☐ 閉じた面や閉じた道の積分を、2 つの定理で「計算が楽な側」の積分に取りかえて求められる。 → 449 ページ
- ☐ 対称性に合った袋や道を選び、ガウスの法則・アンペールの法則で、場の大きさを求められる。 → 455 ページ

ミナ

中のわき出しを全部たすと、外へ出る量になる。袋の形を自由に選べるから、計算がこんなに楽になるんだね。

第 3 部　発散と回転

★★★★★

8-12 ならす働き：ラプラシアン

道しるべ　この章の前に 4-15 6-3 6-11 8-2 8-4 8-6 8-9 8-10 8-11
この章の先に 8-13 8-14

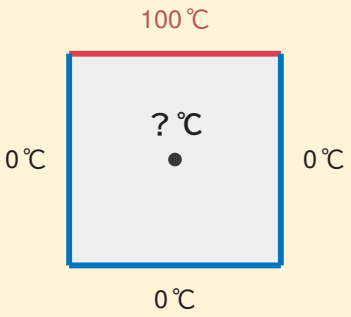
この章でできるようになること

- ★★★ 表計算で、マスの値と「まわりの平均」との差を出し、温まる所と冷える所を見分けられる。
- ★★★★ 「どのマスも、まわりの平均と同じ」のくり返しで、板の温度が落ち着いた形を求められる。
- ★★★★★ ラプラシアン $\nabla^2 f$ を偏微分で計算し、球や円柱の形の場合にも使える。

はてな？

正方形のうすい金属の板があります。上のふちだけを **100 ℃**のお湯にひたし、ほかの 3 つのふちは **0 ℃**の氷水にひたしておきます。長い時間がたつと、板の温度はもう変わらなくなります。

そのとき、板の**まん中**は何℃になっているでしょう。4 つのふちの温度の平均の $(100+0+0+0)\div 4 = 25$ かな？ それとも、ちがうかな？



物理シリーズ『力学』の 力-15 では、水のねばりの力を $\mu\nabla^2\vec{v}$ と書き、「ラプラシアン（8-12）は『**まわりの平均との差**』なので、ねばりは速さをまわりの平均にならそうとする」と読みました。この章は、その「まわりの平均との差」を作る章です。

熱いみそ汁は冷め、冷たいジュースはぬるくなります。どちらも、まわり（部屋の空気）と同じ温度に近づいていきます。板の中でも同じです。まわりより熱い所は冷え、まわりより冷たい所は温まります。だから、ある場所が温まるか冷えるかを知るには、その場所の温度と**まわりの温度の平均**をくらべればよいのです。この「まわりの平均との差」を、表計算で出すことから始めましょう。

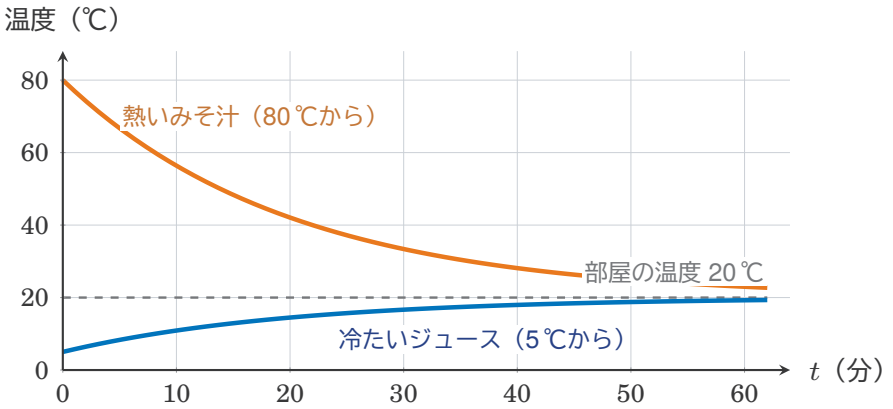


図 1 熱いものも冷たいものも、まわり（部屋）の温度に近づいていく（6-4 の冷めるお湯と同じ形）。まわりとの差が大きいほど、温度は速く変わる。

図 1 のように、温度が変わる速さは、まわりとの差が大きいほど速く、差が 0 になると止まります。みそ汁やジュースでは「まわり」は部屋の空気でした。板の中の 1 つの場所にとっては、「まわり」はとなりの場所です。

やってみよう　まわり 4 マスの平均とくらべよう

うすいアルミの板のまん中に、ドライヤーの熱い風を当てています。板の温度を 1 cm おきにはかって、表計算の A1:E5 に入れました（1 行が北から南へ 1 cm、1 列が西から東へ 1 cm。ふちは部屋と同じ 20 ℃）。

1. 1 行め～5 行めに、表 1 の温度を入れる。
2. B7 に =AVERAGE(B1,A2,C2,B3)-B2 を入れる。B2 の北（B1）・西（A2）・東（C2）・南（B3）の 4 マスの平均から、B2 自身をひいた数です。
3. B7 をコピーして、B7:D9 の 9 マスに貼る。1～5 行めの B2:D4 の「まわりの平均との差」が、同じ並びで出る。

B7　=AVERAGE(B1,A2,C2,B3)-B2

	A	B	C	D	E
1	20	20	20	20	20
2	20	35	40	35	20
3	20	40	80	40	20
4	20	35	40	35	20
5	20	20	20	20	20
6					
7		ア	イ	−5	
8		2.5	ウ	2.5	
9		−5	2.5	−5	

表 1　1～5 行めが板の温度（℃）。B7:D9 が、B2:D4 の「まわり 4 マスの平均−自分」。

アからウをうめよう。差が正のマスと負のマスは、それぞれ温まるかな、冷えるかな？

B7 の式は、B2 から見て北・西・東・南の 4 マスを指しています。B7 を C7 に貼ると、指す場所も 1 列ずつ右へずれて `=AVERAGE(C1,B2,D2,C3)-C2` になります（2-18 の、コピーすると指す場所がずれるしくみ）。だから、B7:D9 の 9 マスは、それぞれ上の表の B2:D4 の同じ並びの場所について計算します。手で確かめます。

$$\text{ア}：\frac{20+20+40+40}{4}-35=30-35=-5 \qquad \text{B2（35℃）の差}$$

$$\text{イ}：\frac{20+35+35+80}{4}-40=42.5-40=2.5 \qquad \text{C2（40℃）の差}$$

$$\text{ウ}：\frac{40+40+40+40}{4}-80=40-80=-40 \qquad \text{C3（80℃）の差}$$

分子の 4 つの数は、北・西・東・南の順です。たとえばアの B2 なら、北の B1 が 20、西の A2 が 20、東の C2 が 40、南の B3 が 40 です。まん中の 80℃のマスは −40 です。まわりの平均（40℃）より 40℃も熱いので、これから冷えていきます（ドライヤーを止めれば）。

おもしろいのは、イ（40℃のマス）とア（35℃のマス）です。40℃のマスのほうが熱いのに、40℃のマスは +2.5 で**温まり**、35℃のマスは −5 で**冷え**ます。40℃のマスは、南に 80℃の熱いマスがとなり合っているからです。温まるか冷えるかは、自分の温度が高いか低いかでは決まりません。**まわりとくらべて**高いか低いかで決まるのです。

もう 1 つ、ためしてみましょう。表の温度を全部 10℃ずつ上げても（ふちを 30℃、まん中を 90℃にしても）、B7:D9 の数は 1 つも変わりません。まわりの平均も自分も同じだけ上がるので、差は変わらないからです。「まわりの平均との差」は、温度そのものではなく、**でこぼこのようす**を表す数です。

この章では、この「まわりの平均との差」を、**ラプラシアン**（8-2 の偏微分を 2 回使う量）として式にします。熱の伝わり方・電気の場・水のねばり・画像の輪郭さがしまで、場所で値が変わるいろいろな量の「ならす働き」が、この 1 つの量で表せます。

★★★★★ の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、表計算と電卓だけで読めます。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。表でつかんだ感じが、あとから式とつながります。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-15　球座標 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ の r は原点からの距離、円柱座標の r は軸からの距離。
- 6-3　かべの温度が変わらない（定常）とき $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$。答えは直線 $T=20-100x$。両はしの温度（境界条件）で決まる。
- 6-11　冷却フィンの温度差 θ は $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}=\beta^2\theta$。$\beta=20$〔1/m〕、根もと 40 K。
- 8-2　偏微分は、ほかを止めて 1 つだけ動かす。$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は x で 2 回偏微分したもの。
- 8-4　$\mathrm{grad}\,f$ は、いちばん急に増える向きの矢印。熱の流れは $\vec{q}=-k\,\mathrm{grad}\,T$（$k$ は熱伝導率）。
- 8-9　$\mathrm{div}\,\vec{F}$ は、小さな箱から出ていく量÷箱の体積（わき出し）。
- 8-11　中のわき出しを全部たすと、外の面から出ていく量になる（ガウスの定理）。

数学の道具

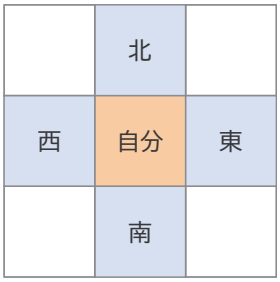
目でわかる　まわりより高いか、低いか　★★★

1 まわりの平均との差

やってみようで出した数を、もう一度ことばにします。場所で値が変わる量（温度・高さ・電位など）を表計算の表にしたとき、

（まわり 4 マスの平均）−（自分の値）

を、この本では「**まわりの平均との差**」とよびます。この数の符号で、そのマスのようすがわかります。



青い 4 マスの平均
－オレンジのマス

正（＋）：まわりより冷たい。
まわりから熱が入ってきて、温まる。

負（－）：まわりより熱い。
まわりへ熱が出ていき、冷える。

0：まわりの平均と同じ。
入る熱と出る熱がつり合い、変わらない。

図 2 まわり 4 マス（北・南・西・東）の平均と、自分をくらべる。ななめのマスは使わない。

なぜ「正なら温まる」のでしょう。6-3 で学んだように、熱は温度の高い所から低い所へ流れ、その量は温度の差に比例します（フーリエの法則）。自分のマスに、北のマスから入ってくる熱は「北の温度－自分の温度」に比例します。西・東・南も同じです。4 つをたすと、

$$(\text{北} - \text{自分}) + (\text{西} - \text{自分}) + (\text{東} - \text{自分}) + (\text{南} - \text{自分})$$

$$= (\text{北} + \text{西} + \text{東} + \text{南}) - 4 \times \text{自分} = 4 \times ((\text{まわりの平均}) - (\text{自分}))$$

です。**まわりから入ってくる熱の合計は、「まわりの平均との差」の 4 倍に比例する**のです。差が正なら、入ってくる熱のほうが多いので温まり、負なら出ていく熱のほうが多いので冷えます。

山の高さでも同じ数が作れる

「まわりの平均との差」は、温度だけの数ではありません。表になっていれば、高さ・電位・水の深さ・画像の明るさなど、どんな量でも計算できます。量がちがえば、意味のことばが変わるだけです。高さなら、正の所は「まわりよりくぼんでいる（谷・おわんの底）」、負の所は「まわりより出っぱっている（山・尾根）」です。

② 主役の山は、どこでも「まわりより高い」

8-1 から使ってきた主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$（m。$x$ は東へ、y は北へ）で、まわりの平均との差を計算します。10 m おきの地図にして、点 $(30,\ 20)$ を自分のマスにします。

$$h(30,\ 20) = 100 - 9 - 8 = 83 \qquad \text{自分}$$

$$h(40,\ 20) = 76, \quad h(20,\ 20) = 88 \qquad \text{東と西}$$

$$h(30,\ 30) = 73, \quad h(30,\ 10) = 89 \qquad \text{北と南}$$

$$\frac{76 + 88 + 73 + 89}{4} - 83 = 81.5 - 83 = -1.5 \qquad \text{まわりの平均との差}$$

東は x を 10 ふやした点、北は y を 10 ふやした点です。高さは、東なら $100 - 16 - 8 = 76$ のように、自分のときと同じように計算します。差は -1.5 m です。点 $(30,\ 20)$ は、まわり 4 点の平均より 1.5 m 高い、つまり**出っぱっています**。山の形として、あたりまえですね。

同じ計算を、頂上 $(0,\ 0)$ でも、ずっと南東の点 $(50,\ -30)$ でもしてみます。頂上では $h = 100$、まわりの平均は 98.5 で、差は -1.5。点 $(50,\ -30)$ では $h = 57$、まわりの平均は 55.5 で、差はやはり -1.5 です（じぶんで 1 つ確かめてみましょう）。**主役の山は、どこでも差が** -1.5 なのです。

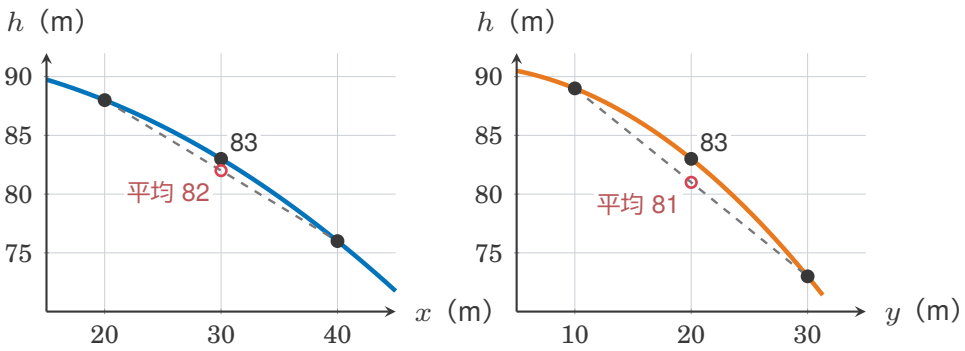


図 3　主役の山を、点 $(30,\ 20)$ を通る 2 つの切り口で見る。左は東西の切り口（$y = 20$）、右は南北の切り口（$x = 30$）。点線は、となり 2 点を結んだ線。赤い丸は、となり 2 点の平均（点線のまん中）。どちらも、山の点（83）が平均より上にある。

なぜ、どこでも同じ数になるのでしょう。図 3 のように、4 つのまわりの点を「東西の 2 点」と「南北の 2 点」に分けてみます。東西の 2 点の平均は $(76+88)\div 2 = 82$ で、自分の 83 より 1 低い。南北の 2 点の平均は $(73+89)\div 2 = 81$ で、2 低い。4 点の平均 81.5 は、82 と 81 の平均なので、差は 1 と 2 の平均の 1.5 になります。

$$-1.5 = \frac{(-1)+(-2)}{2}$$

東西の切り口は、放物線 $h = 92 - 0.01x^2$ です。南北の切り口は、放物線 $h = 91 - 0.02y^2$ です（8-1 の切り口）。放物線は、どこでも同じ曲がり方をしているので、「となり 2 点の平均との差」がどこでも同じになるのです。北向きの切り口のほうが、y^2 の係数が 2 倍なので、2 倍強く曲がっています。この「曲がり方」が 2 階微分だ、ということを④で確かめます。

手でわかる 表計算でならす ★★★★

③ 板の温度が落ち着く形

？はてな？の板を、表計算で調べます。板を 4×4 のマスに分けると、マスの角の点が 5×5 個できます。ふちの点は、上が 100℃、ほかが 0℃で決まっています（境界条件。6-3）。まん中の 3×3 の点の温度を求めます。

長い時間がたって温度がもう変わらない（定常）とき、どの点でも、入ってくる熱と出ていく熱がつり合っています。①から、それは**まわりの平均との差が 0**、つまり

どの点も、まわり 4 点の平均と同じ温度

ということです。この条件をみたす温度を、次の「ならす」くり返しでさがします。

「ならす」くり返し

1. まん中の 9 点を、てきとうな温度（ここでは全部 0 ℃）にしておく。
2. 9 点それぞれを、「まわり 4 点の平均」に置きかえた新しい表を作る。ふちは 100 ℃と 0 ℃のまま。
3. ②を何回もくり返す。表がもう変わらなくなったら、それが答え。

0 回め

		100		
	0	0	0	
	0	0	0	
	0	0	0	
		0		

1 回め

		100		
	25	25	25	
	0	0	0	
	0	0	0	
		0		

2 回め

		100		
	31	38	31	
	6	6	6	
	0	0	0	
		0		

30 回め

		100		
	43	53	43	
	19	25	19	
	7	10	7	
		0		

図 4　ならすくり返し（小数第 1 位を四捨五入）。上のふちの赤は 100 ℃、ほかの 3 つのふちの青は 0 ℃。まん中の 9 点の色が濃いほど熱い。30 回で、ほとんど変わらなくなる。

1 回めは、上の段の 3 点だけが 25 になります。北どなりが 100 ℃のふちなので $(100+0+0+0)\div 4=25$ です。2 回めには、その 25 が下の段へしみこんで、まん中の段が 6.25 になります。熱が上から少しずつ広がっていくようすが、くり返しの中に見えます。

表計算では、1 回の置きかえを 1 つの表（5 行）にして、下へ並べていきます。

1. 1〜5 行めに、はじめの表を入れる。
2. A7 に `=A1` を入れ、A7:E11 のふちのマス全部に貼る（7 行め・11 行め・A 列・E 列）。
3. B8 に `=AVERAGE(B1,A2,C2,B3)` を入れ、B8:D10 に貼る。B8 は、1 つ前の表（1〜5 行め）の B2 の北・西・東・南の 4 点の平均です。
4. A7:E12（空いた 12 行めもふくめた 6 行）をコピーして、A13・A19・A25・…に、次々に貼る。貼るたびに、1 回ずつならした表ができる。

④で貼った式は、指す場所が 6 行ずつ下へずれるので、どの表も「1 つ前の表」をならしたものになります。

B8 =AVERAGE(B1,A2,C2,B3)

	A	B	C	D	E
1	0	100	100	100	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6					
7	0	100	100	100	0
8	0	25	25	25	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0

表 2 1〜5 行めがはじめの表（0 回め）、7〜11 行めが 1 回ならした表。ふち（白いマス）は、7 行めなら =A1 のように、1 つ前の表の同じ場所を指す式にしておく。

くり返しを続けた結果を、表にします（小数第 3 位まで）。

回数	上の段	まん中の段	下の段
1	25・25・25	0・0・0	0・0・0
2	31.25・37.5・31.25	6.25・6.25・6.25	0・0・0
5	39.648・47.852・…	14.063・18.75・…	4.102・5.273・…
10	42.271・51.897・…	17.969・23.828・…	6.557・9.041・…
30	42.857・52.678・…	18.749・24.999・…	7.142・9.821・…
50	42.857・52.679・…	18.75・**25**・…	7.143・9.821・…

表 3 ならすくり返しの結果。「…」は、左右対称なので左のはしと同じ数。

50 回めには、表はもう変わりません。**まん中の点は 25 ℃**です。落ち着いた表で、まわりの平均と同じになっているかを、まん中の点で確かめます。北 52.679、西 18.75、東 18.75、南 9.821 なので、

$$\frac{52.679 + 18.75 + 18.75 + 9.821}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

たしかに、まわりの平均と同じです。

Python で確かめる

同じくり返しを、Python の numpy（2-19・7-1）で書くと、次のようになります。表の行と列をそのまま 2 次元の配列 T にします。T[0, 1:4] は「0 行めの、1 列めから 3 列めまで」という意味です（1:4 は 4 の手前まで）。

Python

```
import numpy as np
T = np.zeros((5, 5))           # 5 × 5 の点。はじめは全部 0
T[0, 1:4] = 100                # 上のふち（角はのぞく）を 100
for n in range(50):            # 50 回ならす
    U = T.copy()               # 新しい表 U を、T を写して作る
    U[1:4, 1:4] = (T[0:3, 1:4] + T[2:5, 1:4]
                   + T[1:4, 0:3] + T[1:4, 2:5]) / 4
    T = U                      # 新しい表を、次の「1 つ前の表」に
print(T[1:4, 1:4].round(3))    # まん中の 9 点を小数第 3 位まで
```

実行結果

```
[[42.857 52.679 42.857]
 [18.75  25.    18.75 ]
 [ 7.143  9.821  7.143]]
```

いちばん長い行が「ならす」の 1 行です。T[0:3, 1:4] は、まん中の 9 点を 1 行ずつ上にずらした場所、つまり 9 点それぞれの**北どなり**の値を集めたものです。同じように、T[2:5, 1:4] が南どなり、T[1:4, 0:3] が西どなり、T[1:4, 2:5] が東どなりです。4 つをたして 4 でわるので、9 点を一度に「まわり 4 点の平均」に置きかえられます。表計算の =AVERAGE(B1,A2,C2,B3) を 9 マスに貼ったのと同じことです。

はてな？ の答え：25℃。でも、平均したからではない

？はてな？ の答えは 25℃でした。4 つのふちの平均と同じ数ですが、「ふちの平均をとったから」25 になったのではありません。たとえば上のふちのすぐ下の点（上の段のまん中）は 52.679℃で、ふちの平均とはまったくちがいます。まん中だけが 25 になるわけを、図 5 の 4 枚の板で考えます。

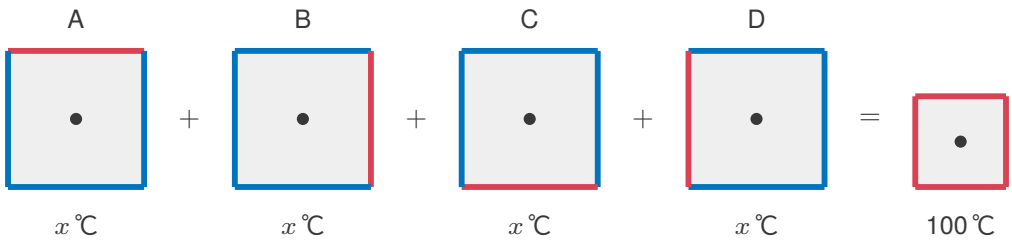


図 5 赤いふちが 100℃、青いふちが 0℃の板が 4 枚。B・C・D は、A を 90° ずつ回したもの。4 枚の温度を点ごとにたすと、4 つのふちがどれも 100℃の板になる。

1. 板 B・C・D は、板 A を 90°・180°・270° 回しただけなので、**まん中の温度は 4 枚とも同じ**です。それを x℃とします。
2. 4 枚の落ち着いた温度を、点ごとにたした表を作ります。どの点でも「まわりの平均と同じ」が 4 枚ともなり立っているので、たした表でもなり立ちます（4 つの式「自分＝まわりの平均」を、そのままたせばよい）。
3. たした表のふちは、どの辺も「100 が 1 枚と 0 が 3 枚」なので 100℃です。4 つのふちがどれも 100℃なら、どの点も 100℃のとき、「まわりの平均と同じ」がなり立ちます。落ち着いた形はこの 1 つしかないので（せいかくに言うと）、たした表はどこも 100℃です。
4. まん中では $x+x+x+x=100$ なので、$x=25$。

まん中の 25 は、ふちの温度の平均だから出たのではなく、「4 つの向きが同じ形」という**対称性**と、「たし合わせても平均の性質がくずれない」という性質から出てきたのです。同じ考えで、上 100℃・右 60℃・ほか 0℃の板のまん中は $\frac{100+60}{4}=40$℃になります（例題 5）。

せいかくに言うと

③で「落ち着いた形はこの 1 つしかない」と書きました。わけは次のとおりです。ふちの温度が同じ 2 つの落ち着いた表があったとして、その差の表を作ります。差の表も「どの点もまわりの平均と同じ」をみたし、ふちはどこも 0 です。差の表でいちばん大きい値の点を考えると、その点はまわりの平均と同じなので、まわりの 4 点もすべて同じいちばん大きい値でなければなりません（1 つでも小さい点があれば、平均は自分より小さくなる）。これをくり返すと、いちばん大きい値はふちまで続くので、0 です。いちばん小さい値も同じく 0 です。だから、差はどこも 0 で、2 つの表は同じです。この「いちばん大きい値・小さい値は、ふちにしかない」性質は、⑥でもう一度出てきます。

④ 1 次元：となり 2 つの平均との差は、2 階微分

こんどは、棒やかべのような 1 次元の場合です。まわりは「左右のとなり 2 点」になります。②の山の切り口で見たように、となり 2 点の平均との差は、グラフの**曲がり方**を表しています。

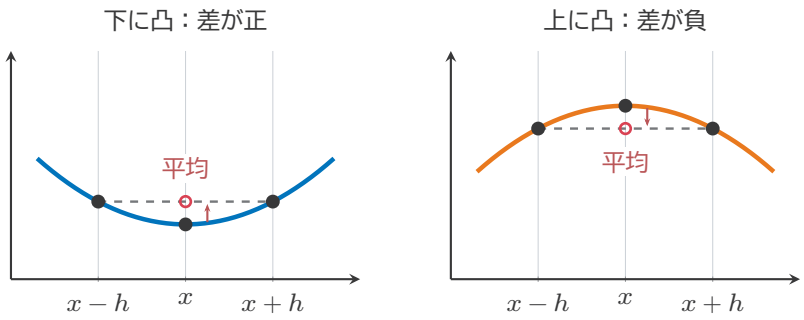


図 6　となり 2 点（$x-h$ と $x+h$）を結んだ点線のまん中の高さが、となり 2 点の平均（赤い丸）。下に凸なら平均は自分より上、上に凸なら下。まっすぐなら、ちょうど自分と同じ。

となりとの間かくを h として、$f(x-h)$、$f(x)$、$f(x+h)$ の 3 つの値を使います。となり 2 点の平均との差は、

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}-f(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2}$$

です。右辺の分子 $f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$ を、「となりとの差」の形に分けてみます。

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=\big(f(x+h)-f(x)\big)-\big(f(x)-f(x-h)\big)$$

右の点との差から、左の点との差をひいたもの、つまり**差の差**です。

差の差を、表で見る

$f(x) = x^2$、$h = 1$ で、差と差の差を表にします。

x	1	2	3	4	5
$f(x) = x^2$	1	4	9	16	25
右どなりとの差	3	5	7	9	
差の差	2	2	2		

表 4 「右どなりとの差」は、右の値から自分をひいた数（$x = 1$ なら $4 - 1 = 3$）。「差の差」は、右どなりの差から自分の差をひいた数（$5 - 3 = 2$）。

差は 3、5、7、9 と、2 ずつふえています。差の差は、どこでも $5 - 3 = 2$、$7 - 5 = 2$、$9 - 7 = 2$ です。5-3 で学んだように、となりとの差 $\div h$ は、傾き（微分 f'）の近い値でした。だから、差の差 $\div h$ は「傾きの変わり方」で、それをもう一度 h でわると、**2 階微分** f'' の近い値になります。

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \approx \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

x^2 なら、左辺は $2 \div 1^2 = 2$、右辺は $(x^2)'' = 2$ で、ぴったり同じです（放物線では、どの h でも等号。せいかくに言うと）。

この式を使うと、となり 2 点の平均との差は

$$\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x) \approx \frac{h^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

と書けます。**となり 2 点の平均との差は、2 階微分に $\frac{h^2}{2}$ をかけたもの**です。2 階微分が正（下に凸）なら差は正、負（上に凸）なら差は負。図 6 のとおりです。②の山の切り口で、東西の差が -1 だったのは、$\frac{10^2}{2} \times (-0.02) = -1$（東西の切り口 $92 - 0.01x^2$ の 2 階微分は -0.02）だからです。

6-3 のかべ・6-11 のフィンをもう一度

6-3 のかべでは、定常の温度が $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$ をみたしました。これは「どの点も、となり 2 点の平均と同じ」ということです。となりの平均と同じ点が並ぶと、グラフはまっすぐになります。だから答えが直線 $T=20-100x$ だったのです。かべの 0.05 m おきの温度 20、15、10、5、0（℃）は、たしかにどれも、となり 2 つの平均です。

6-11 の冷却フィンは $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}=\beta^2\theta$ でした。右辺は正（板は部屋より温かいので $\theta>0$）なので、どの点も「となりの平均より低い」、つまり下に凸です。フィンの点は、となりから熱をもらって、その分を横（表面）から空気へ逃がしています。だから、となりの平均より少し低い温度でつり合うのです（例題 6）。

ここまでで十分

温まるか冷えるかは、「まわりの平均との差」の符号で決まります。どの点もまわりの平均と同じになると、温度は落ち着きます。1 次元なら、となりの平均との差は 2 階微分の $\frac{h^2}{2}$ 倍です。この先は、2 次元・3 次元の式（ラプラシアン）を作ります。

∂ 式でわかる ラプラシアン　★★★★★

5 ラプラシアンの式

2 次元の「まわり 4 点の平均との差」を、④の 1 次元の結果で書きなおします。間かく h の方眼で、自分を f、東・西・北・南を $f_{東}$・$f_{西}$・$f_{北}$・$f_{南}$ とします。②の山と同じように、4 点を東西の 2 点と南北の 2 点に分けます。

$$\frac{f_{東}+f_{西}+f_{北}+f_{南}}{4}-f$$ まわり 4 点の平均との差

$$=\frac{(f_{東}-2f+f_{西})+(f_{北}-2f+f_{南})}{4}$$ $-f$ を $-\frac{4f}{4}$ にして、2 つに分ける

$$\approx\frac{h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{4}$$ ④の式を、東西と南北に使う

$$=\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$ $\frac{h^2}{4}$ でくくる

2 行めから 3 行めで、偏微分（8-2）になったのは、東西の 3 点では y が同じ（y を止めて x だけ動かしている）からです。南北の 3 点では x を止めています。

最後の行のかっこの中を、f の**ラプラシアン**といい、$\nabla^2 f$ と書きます。読み方は「ナブラ 2 乗 f」または「ラプラシアン f」です。

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\qquad\left(3\text{ 次元では }+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

まわりの平均との差 $\approx\dfrac{h^2}{4}\nabla^2 f$　（3 次元は、まわり 6 点で $\dfrac{h^2}{6}\nabla^2 f$）

3 次元では、まわりは東西・南北・上下の 6 点です。6 点の平均との差は、3 組の「差の差」を 6 でわるので $\dfrac{h^2}{6}$ がかかります。数（4 や 6）は、まわりの点の数です。

主役の山で確かめる

$h=100-0.01x^2-0.02y^2$ を偏微分します（8-2）。

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-0.02x,\quad\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-0.02$$ y を止めて、x で 2 回

$$\frac{\partial h}{\partial y}=-0.04y,\quad\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-0.04$$ x を止めて、y で 2 回

$$\nabla^2 h=-0.02+(-0.04)=-0.06$$ たす

$\nabla^2 h = -0.06$ は、x も y も入っていない数なので、山のどこでも同じです。方眼の間かくは $h = 10$ なので（山の高さの h と同じ文字ですが、ここだけ間かくの意味）、まわりの平均との差は $\dfrac{10^2}{4} \times (-0.06) = 25 \times (-0.06) = -1.5$。②の表計算の -1.5 とぴったり合います（2 次式なので、ぴったり。例題 3）。

名前のわけ：div grad

ラプラシアンには、もう 1 つの見方があります。8-4 の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ は、成分が $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ の矢印でした。この矢印の場の発散（8-9）を計算します。発散は「x 成分を x で、y 成分を y で、z 成分を z で偏微分してたす」でした。

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \text{8-9 の発散の式}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f \qquad \text{2 回の偏微分の書き方}$$

$$\boxed{\nabla^2 f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \nabla \cdot \nabla f}$$

$\nabla \cdot \nabla$ は、ナブラ $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ と自分との内積（4-12）の形です。$(a,\ b,\ c) \cdot (a,\ b,\ c) = a^2 + b^2 + c^2$ と同じように「2 乗の和」になるので、∇^2 と書きます。

この見方は、熱の流れで意味がはっきりします。8-4 で、熱の流れの矢印は $\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\, T$ でした（k は熱伝導率）。8-9 で、小さな箱から出ていく熱は $\mathrm{div}\,\vec{q}$ でした。だから、

$$\mathrm{div}\,\vec{q} = \mathrm{div}\,(-k\,\mathrm{grad}\, T) = -k\,\nabla^2 T$$

$\nabla^2 T$ が正なら、$\mathrm{div}\,\vec{q}$ は負で、熱は**入ってくるほうが多い**。だから温まります。①で表計算から見つけた「差が正なら温まる」と同じことを、式が言っています。

6 ラプラス方程式とポアソン方程式

③の板のように、温度が落ち着いて、中で熱が生まれも消えもしないとき、どこでも $\mathrm{div}\,\vec{q}=0$ なので、

$$\nabla^2 T = 0 \qquad （どの点も、まわりの平均と同じ）$$

がなり立ちます。この形の式を**ラプラス方程式**といいます。6-3 のかべの $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$ は、その 1 次元の場合です。

ラプラス方程式は、熱だけの式ではありません。表にまとめます。

量	落ち着いたとき	そのわけ
温度 T	熱が生まれない所で $\nabla^2 T = 0$	熱の流れ $-k\,\mathrm{grad}\,T$ のわき出しが 0
電位 ϕ	電荷がない所で $\nabla^2 \phi = 0$	電場 $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$（8-4）のわき出しが 0
地下水の水位	水がわかない所で $\nabla^2(\text{水位}) = 0$	地下の水の流れは水位の傾きに比例
はったまくの高さ	押す力がない所で $\nabla^2(\text{高さ}) = 0$	引っぱる力で、まわりの平均にならされる

表 5 ラプラス方程式になる量。どれも「流れ（力）が傾きに比例し、わき出しがない」。

石けんのまく（シャボン玉のまく）を、ゆがんだ針金のわくにはると、まくの高さは、ほぼラプラス方程式をみたす形になります（まくのかたむきが小さいとき）。

いちばん高い所は、ふちにある

ラプラス方程式をみたす量は、どの点もまわりの平均と同じです。だから、中にまわりより高い点（山の頂上）も、まわりより低い点（谷の底）もありません。③のせいかくに言うとで見たように、**いちばん大きい値と小さい値は、ふち（境目）にしかない**のです。これを**最大値の原理**といいます。③の板でも、中の温度はどこも 0℃と 100℃のあいだでした。電気でいうと、電荷のない空間には、電位の頂上も谷底もありません。

わき出しがあるとき：ポアソン方程式

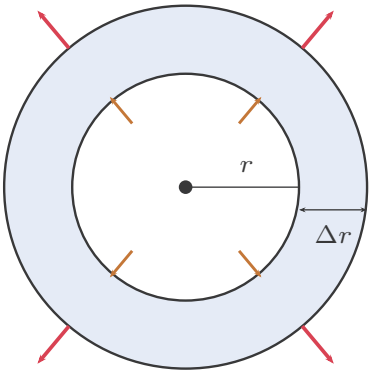
中で熱が生まれる（電気ヒーター・電子部品の発熱など）と、出ていく熱 $\operatorname{div}\vec{q}$ は、生まれる熱と同じになります。1 秒・1 m^3 あたりに生まれる熱を Q〔$\mathrm{W/m^3}$〕とすると、

$$-k\,\nabla^2 T = Q \qquad \text{だから} \qquad \nabla^2 T = -\frac{Q}{k}$$

です。電気では、電荷のある所で $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$（$\rho$ は電荷の密度〔$\mathrm{C/m^3}$〕、ε_0 は真空の誘電率）になります。右辺にわき出しの量が入ったこの形を**ポアソン方程式**といいます。熱が生まれる所では $\nabla^2 T < 0$、つまり、まわりより熱くなって（出っぱって）います。電子部品のチップがまわりの基板より熱くなるのは、このためです。

7 球や円柱の形のとき

点電荷のまわりの電位や、パイプを包む保温材の温度は、中心（または軸）からの距離 r だけで決まります。4-15 で約束したように、このような量は球座標・円柱座標の r で書くと、式が短くなります。f が r だけで決まるときのラプラシアンを、⑤の「div grad」と、8-11 の「出ていく量」で作ります。



内側の球面（短い矢印）から入る量：

$f'(r) \times 4\pi r^2$

外側の球面（長い矢印）から出る量：

$f'(r+\Delta r) \times 4\pi (r+\Delta r)^2$

青い殻の体積：$4\pi r^2\,\Delta r$

図 7 半径 r と $r+\Delta r$ の 2 つの球面ではさんだ、うすい殻（玉ねぎの皮のような形）。grad f の矢印は、どこでも球面に直角で、同じ大きさ。

f が r だけで決まるとき、grad f は中心から外向き（または内向き）で、大きさは $f'(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$ です（8-4：等値面は球面で、勾配はそれに直角）。半径 r の球面を外へ通りぬける量（8-8 の流束）は、grad f が球面の上でどこでも同じ大きさで面に直角なので、積分の外に出せます（表 8-8 の D：一定×面積）。

$$G(r) = f'(r) \times 4\pi r^2$$

殻から出ていく量は、「外の球面から出る量」から「内の球面から入る量」をひいた

$$G(r+\Delta r) - G(r)$$

です。8-9 の発散は「出ていく量÷体積」なので、

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f \approx \frac{G(r+\Delta r) - G(r)}{4\pi r^2\,\Delta r}$$ 出ていく量÷殻の体積

$$\to \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}$$ $\Delta r \to 0$（5-3 の微分の定義）

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$$ G を入れる

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$$ 4π を約分

円柱（長さ L）なら、球面のかわりに円柱の側面（面積 $2\pi rL$）、殻の体積は $2\pi rL\,\Delta r$ です。同じように計算して、次の 2 つの式ができます。

$$\text{球：}\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) \qquad \text{円柱：}\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$$

f が r だけの関数なので、∂ でなく d で書いています（8-2：変数が 1 つなら d）。

2 通りで確かめる

$f = x^2 + y^2 + z^2$ は、中心からの距離 r で書くと $f = r^2$ です。直角座標で計算すると、$\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$ でした。球の式で計算すると、次のようになります。

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 2r, \quad r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 2r^3 \qquad \text{内側から計算する}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(2r^3) = 6r^2 \qquad \text{もう一度 } r \text{ で微分}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \times 6r^2 = 6 \qquad \frac{1}{r^2} \text{ をかける}$$

どちらも 6 で、同じです（例題 7）。

点電荷の電位：$\nabla^2\frac{1}{r} = 0$

点電荷 Q のまわりの電位は $\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{r}$ です（物理シリーズ『電磁気』）。$\frac{1}{r}$ のラプラシアンを球の式で計算します。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \qquad r^{-1} \text{ の微分（5-4）}$$

$$r^2 \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -1 \qquad r^2 \text{ をかける}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(-1) = 0, \quad \nabla^2\frac{1}{r} = 0 \qquad \text{定数の微分は } 0 \ (r \neq 0)$$

原点（電荷のある所）以外では、ラプラス方程式をみたします。8-11 で、点電荷の電場の流束は「どの半径の球でも同じ」でした。殻の内と外で同じ量が通るので、殻の中にわき出しがない。それが $\nabla^2\frac{1}{r} = 0$ の意味です。ただし、

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{r^3}$ は 0 ではありません。球の式の $\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdots\right)$ を、$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}$ だけにしてはいけないのです（まちがえやすいところ）。

ラプラス方程式の答えの形

r だけで決まる量が $\nabla^2 f = 0$ をみたすときの形を求めます。球なら、$r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$ を微分して 0 なので、$r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$ は定数です。その定数を $-a$ とすると、

$$r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = -a, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = -\frac{a}{r^2} \qquad r^2 \text{ でわる}$$

$$f = \frac{a}{r} + b \qquad \text{積分する（}-\tfrac{a}{r^2}\text{ の原始関数は }\tfrac{a}{r}\text{）}$$

円柱なら $r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = a$ から $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{a}{r}$、積分して $f = a\ln r + b$ です（5-14：$\frac{1}{r}$ の原始関数は $\ln r$）。a と b は、6-3 と同じように、内と外の境界条件で決めます。

形	$\nabla^2 f = 0$ の答え	例
平らなかべ	$f = ax + b$	6-3 のかべの温度
円柱（軸からの距離）	$f = a\ln r + b$	パイプの保温材の温度、同軸ケーブルの電位
球（中心からの距離）	$f = \frac{a}{r} + b$	点電荷・帯電した球のまわりの電位

表 6 3 つの形の、ラプラス方程式の答え。

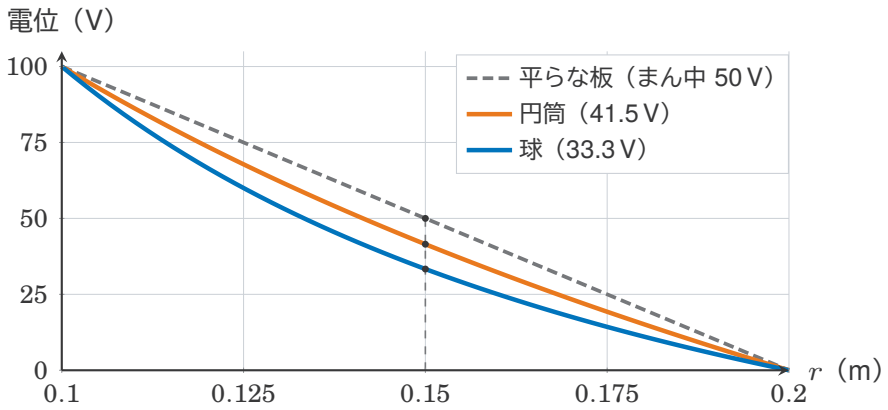


図 8　内側（$r = 0.1\,\mathrm{m}$）が 100 V、外側（$r = 0.2\,\mathrm{m}$）が 0 V のときの電位。灰色の点線は平らな 2 枚の板、オレンジは同じ軸の 2 本の円筒、紺は同じ中心の 2 つの球。黒い点は、まん中（$r = 0.15\,\mathrm{m}$）の電位。形によってちがう。

図 8 は、内側を 100 V、外側を 0 V にしたときの 3 つの形の電位です。平らな板ならまん中は 50 V、円筒なら 41.5 V、球なら 33.3 V（例題 8）。球や円筒では、外へ行くほど面積が広がり、同じ量の流れ（電気力線）がうすまるので、坂（電場）は内側ほど急になります。平らなかべでは、どこでも同じ坂でした。

8 矢印の量のラプラシアン

物理 力-15 のナビエ・ストークス方程式には、ねばりの力 $\mu\nabla^2\vec{v}$ が出てきました。矢印の量 $\vec{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ のラプラシアンは、**成分ごとにラプラシアンをとったもの**です。

$$\nabla^2\vec{v} = (\nabla^2 v_x,\ \nabla^2 v_y,\ \nabla^2 v_z)$$

x 成分の速さ v_x だけを見ると、まわりの平均より遅い所は、ねばりで前へ引っぱられ、速い所は後ろへ引きもどされます。力-15 の「ねばりは速さをまわりの平均にならそうとする」です。

管の中の流れで確かめる

8-6・8-8 の管の流れ（半径 $R = 1\,\mathrm{cm}$）では、速さは軸からの距離 r で決まり、$u = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$、$u_{\max} = 0.2\,\mathrm{m/s}$ でした。流れの向きの速さ u は r だけで決まるので、⑦の円柱の式が使えます。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{2u_{\max}}{R^2}\,r \qquad 1 - \tfrac{r^2}{R^2} \text{ を } r \text{ で微分}$$

$$r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{2u_{\max}}{R^2}\,r^2 \qquad r \text{ をかける}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{4u_{\max}}{R^2}\,r \qquad \text{もう一度 } r \text{ で微分}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \times \left(-\frac{4u_{\max}}{R^2}\,r\right) = -\frac{4u_{\max}}{R^2} \qquad \tfrac{1}{r} \text{ をかける}$$

数を入れると、$\nabla^2 u = -\frac{4\times 0.2}{0.01^2} = -8000$〔1/(m·s)〕で、管の中のどこでも同じです。管の流れは軸に近いほど速いので、どの場所の水も、まわりの平均より少し速くなっています。だから、ねばりの力は流れと逆向きに、どこでも同じ強さではたらきます。水のねばり $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$〔Pa·s〕（20 ℃）なら、1 m³ あたりの力は

$$\mu\nabla^2 u = 1.0 \times 10^{-3} \times (-8000) = -8\ [\mathrm{N/m^3}]$$

この力とつり合うのが、管の前後の圧力の差です。圧力は流れの向きに 1 m あたり 8 Pa 下がります。物理 力-14 のハーゲン・ポアズイユの式から、1 m あたりの圧力の下がりを出すと

$$\frac{4\mu u_{\max}}{R^2} = \frac{4 \times 1.0 \times 10^{-3} \times 0.2}{0.01^2} = 8\ [\mathrm{Pa/m}]$$

で、同じ数になります。

もっと知りたい ★★★★★

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$

電磁気の本で、電磁波の式を作るときに使う式です（物理 電-15）。x 成分だけ確かめます。$\mathrm{rot}\,\vec{A}$ の y 成分は $\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$、$z$ 成分は $\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ でした（8-10）。rot の x 成分の形（「z 成分を y で」ひく「y 成分を z で」）にあてはめます。

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A})_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

かっこを開きます（偏微分は順番によらない：8-2）。

$$= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$

$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ を足してひき、前の 3 つを $\frac{\partial}{\partial x}$ でくくります。

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \nabla^2 A_x$$

最後の行の 1 つめは $\mathrm{div}\,\vec{A}$ を x で偏微分したもの、つまり $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$ の x 成分です。y・z 成分も同じです。

せいかくに言うと

④の「差の差÷ h^2」と 2 階微分は、ふつうは近い値で、ぴったりではありません。5-17 のテイラー展開で $f(x \pm h) = f \pm hf' + \frac{h^2}{2}f'' \pm \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f'''' \pm \cdots$ と書いて 2 つをたすと、奇数回の項が消えて、

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f'' + \frac{h^2}{12}f'''' + \cdots$$

となります。ずれは h^2 に比例し、h を半分にすると約 $\frac{1}{4}$ になります。2 次式では $f'''' = 0$ なので、ずれは 0 です（主役の山の -1.5 がぴったりだったわけ）。また、ラプラス方程式をみたす関数は、どんな円（球）の上の平均も、中心の値と**ぴったり**同じになることが知られています（平均値の性質）。方眼の 4 点の平均と同じになるのは、近い値としてです。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

微分作用素 $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ をラプラス作用素（ラプラシアン）という。領域 Ω で $\Delta u = 0$ をみたす C^2 級関数 u を調和関数という。調和関数は平均値の性質をもち，Ω の内部で最大値・最小値をとらない（最大値原理）。

訳　Δ は、この本の ∇^2 と同じもの（数学の本は Δ、物理・工学の本は ∇^2 が多い。この本では Δ は「変化の量」に使う）。「作用素」は、関数に何かをする記号。「領域 Ω」は板や空間の中の部分。「C^2 級」は 2 回微分してもなめらか。$\Delta u = 0$ をみたす関数を調和関数（ちょうわかんすう）という。

たいせつ

ラプラシアン　$\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$

まわりの平均　**まわり 4 点の平均との差** $\approx \dfrac{h^2}{4}\nabla^2 f$ **（正なら温まる）**

落ち着いた形　$\nabla^2 T = 0$ **（ラプラス）**、$\nabla^2 T = -\dfrac{Q}{k}$ **（ポアソン）**

球・円柱　$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$・$\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$

この章で出てきたことば

ラプラシアン　$\nabla^2 f$。2 回の偏微分の和。「まわりの平均との差」を表す。

ラプラス方程式　$\nabla^2 f = 0$。どの点もまわりの平均と同じ。落ち着いた温度・電位。

ポアソン方程式　$\nabla^2 f =$（わき出しの量）。熱が生まれる所・電荷のある所。

最大値の原理　ラプラス方程式をみたす量の最大・最小は、ふち（境目）にある。

記号カード　　初めて出た章 **8-12**

$\nabla^2 f$

読み方　ナブラ 2 乗エフ、ラプラシアン・エフ
意味　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$。数学の本では Δf とも書く
英語　Laplacian

例題でたしかめよう

例題 1　まわりの平均との差

板の上のマス P は 50℃で、まわりは北 70℃・南 50℃・西 40℃・東 60℃です。マス Q は 30℃で、まわりは北 20℃・南 35℃・西 25℃・東 20℃です。それぞれ「まわりの平均との差」を求め、温まるか冷えるかを答えましょう。

考え方　まわり 4 マスの平均から自分をひく。正なら温まり、負なら冷える（①）。

式　$\mathrm{P}：\dfrac{70+50+40+60}{4}-50=\dfrac{220}{4}-50=55-50=5$

$\mathrm{Q}：\dfrac{20+35+25+20}{4}-30=\dfrac{100}{4}-30=25-30=-5$

答え　P は $+5$（温まる）、Q は -5（冷える）

例題 2　式のラプラシアン

次の関数のラプラシアンを求めましょう。(1) $f = 3x^2 + 2y^2$　(2) $g = x^2 - y^2 + 4xy + 3x$

考え方　x で 2 回偏微分したもの（y は止める）と、y で 2 回偏微分したもの（x は止める）をたす（⑤）。

式　(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$。$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$

$\nabla^2 f = 6 + 4 = 10$

(2) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + 4y + 3$、$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2$（$4y$ と 3 は x で微分すると 0）

$\dfrac{\partial g}{\partial y} = -2y + 4x$、$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2$（$4x$ は y で微分すると 0）

$\nabla^2 g = 2 + (-2) = 0$

答え　(1) 10　(2) 0（ラプラス方程式をみたす）

じぶんでとこう 1

マス P は 40℃で、まわりは北 30・南 50・西 45・東 55（℃）です。マス Q は 60℃で、まわりは北 54・南 50・西 56・東 52（℃）です。それぞれ「まわりの平均との差」を求め、温まるか冷えるかを答えましょう。

じぶんでとこう 2

次の関数のラプラシアン $\nabla^2 f$ と $\nabla^2 g$ を求めましょう。

$f = x^2 + 4y^2 + z^2$

$g = 2xy - 3x + y$

例題 3　方眼の差を ∇^2 で予想する

主役の山 $h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ を 10 m おきの方眼にしたとき、まわり 4 点の平均との差を $\nabla^2 h$ から予想しましょう。また、点 $(30,\ 20)$ で表の数と合うか確かめましょう。

考え方　まわり 4 点の平均との差 $\approx \dfrac{h^2}{4}\nabla^2 h$（$h$ は方眼の間かく 10）。

式　$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -0.02$、$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -0.04$ なので $\nabla^2 h = -0.06$

予想：$\dfrac{10^2}{4} \times (-0.06) = 25 \times (-0.06) = -1.5$

表：自分は 83、まわりは東 76・西 88・北 73・南 89

$\dfrac{76 + 88 + 73 + 89}{4} - 83 = 81.5 - 83 = -1.5$

答え　どこでも -1.5 m。表の数と同じ

例題 4　落ち着いた温度を連立方程式で

たてに並んだ 2 つのマス A（上）と B（下）があります。A のまわりは北が 100 ℃、西と東が 0 ℃、南が B。B のまわりは北が A、西・東・南が 0 ℃です。落ち着いた温度を求めましょう（小数第 1 位まで）。

考え方　落ち着いたら、どのマスもまわりの平均と同じ（③）。マスごとに式を作り、連立方程式（3-6）で解く。

式　A：$A = \dfrac{100 + 0 + 0 + B}{4}$ から $4A = 100 + B$

B：$B = \dfrac{A + 0 + 0 + 0}{4}$ から $A = 4B$

1 つめの式の A に $4B$ を入れて $16B = 100 + B$

両辺から B をひいて $15B = 100$、$B = 6.666\cdots$

$A = 4B = 26.666\cdots$

答え　A は約 26.7 ℃、B は約 6.7 ℃

じぶんでとこう 3

おわんの形の谷 $z = 0.03x^2 + 0.01y^2$〔m〕を 10 m おきの方眼にしたとき、まわり 4 点の平均との差を $\nabla^2 z$ から予想しましょう。また、点 $(20,\ 10)$ で確かめましょう。

じぶんでとこう 4

上の段に 2 つのマスがあります。上のマス A は北が 80 ℃、西が 20 ℃、東が 0 ℃、南がマス B。下のマス B は北が A、西が 20 ℃、東と南が 0 ℃です。落ち着いた温度を求めましょう。

例題 5　板のまん中の温度

正方形の板の上のふちが 100 ℃、右のふちが 60 ℃、下と左のふちが 0 ℃です。落ち着いたとき、板のまん中は何 ℃ですか。

考え方　1 つのふちだけが T ℃でほかが 0 ℃の板のまん中は $\dfrac{T}{4}$（③の重ね合わせ）。2 枚の板の温度をたす。

式　上だけ 100 ℃の板のまん中：$100 \div 4 = 25$

右だけ 60 ℃の板のまん中：$60 \div 4 = 15$

たした板のふちは、上 100・右 60・下 0・左 0 になるので、まん中は

$25 + 15 = 40$

答え　40 ℃

例題 6　となりの値から 2 階微分：冷却フィン

6-11 の冷却フィン（$\beta = 20$〔1/m〕）の温度差 θ を 0.01 m おきに計算すると、根もとから 40.00、34.67、30.73（K）でした。まん中の点で $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}$ の近い値を求め、$\beta^2\theta$ とくらべましょう。

考え方　$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \approx \dfrac{\theta(x+h) - 2\theta(x) + \theta(x-h)}{h^2}$（④）。$h = 0.01$。

式　分子：$30.73 - 2 \times 34.67 + 40.00 = 30.73 - 69.34 + 40.00 = 1.39$

$$\frac{1.39}{0.01^2} = \frac{1.39}{0.0001} = 13900$$

$$\beta^2\theta = 20^2 \times 34.67 = 400 \times 34.67 = 13868$$

答え　約 13900〔K/m²〕。$\beta^2\theta$ の 13868 とほぼ同じ（$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \beta^2\theta$ をみたす）

じぶんでとこう 5

正方形の板の上のふちが 80 ℃、左が 40 ℃、下が 20 ℃、右が 0 ℃です。落ち着いたとき、板のまん中は何 ℃ですか。

じぶんでとこう 6

棒の中の温度を 0.1 m おきにはかると、50 ℃、58 ℃、62 ℃でした。まん中の点での $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}$ の近い値を求め、まん中の点がとなり 2 点の平均より高いか低いかを答えましょう。

例題 7　球・円柱の式で計算する

(1) $f = r^2$（r は中心からの距離）の $\nabla^2 f$ を、球の式で求めましょう。

(2) $g = \ln r$（r は軸からの距離）の $\nabla^2 g$ を、円柱の式で求めましょう。

考え方　いちばん内側の $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$ から順に計算する（⑦）。

式　(1) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 2r$、$r^2 \times 2r = 2r^3$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(2r^3) = 6r^2$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \times 6r^2 = 6$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{r}$、$r \times \dfrac{1}{r} = 1$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1) = 0$

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r} \times 0 = 0$$

答え　(1) 6（$x^2 + y^2 + z^2$ で計算したのと同じ）　(2) 0

例題 8　同じ中心の球のあいだの電位

同じ中心の 2 つの金属の球があり、内側（半径 0.1 m）が 100 V、外側（半径 0.2 m）が 0 V です。あいだに電荷はありません。電位 ϕ は r だけで決まり、$\nabla^2\phi = 0$ をみたすので $\phi = \dfrac{a}{r} + b$ と書けます。a と b を求め、$r = 0.15$ m の電位を求めましょう。

考え方　内と外の境界条件で a と b を決める（⑦。6-3 と同じ）。

式　内側：$100 = \dfrac{a}{0.1} + b = 10a + b$

外側：$0 = \dfrac{a}{0.2} + b = 5a + b$

上の式から下の式をひいて $100 = 5a$、$a = 20$。下の式から $b = -100$

$r = 0.15$ では $\phi = \dfrac{20}{0.15} - 100 = 133.3 - 100 = 33.3$

答え　$a = 20$、$b = -100$。約 33.3 V（まん中でも 50 V ではない）

じぶんでとこう 7

(1) $f = r^4$（r は中心からの距離）の $\nabla^2 f$ を、球の式で求めましょう。

(2) $g = r^2$（r は軸からの距離）の $\nabla^2 g$ を、円柱の式で求めましょう。

じぶんでとこう 8

同じ中心の 2 つの球の、内側（半径 0.05 m）が 60 V、外側（半径 0.1 m）が 0 V です。あいだの電位を $\phi = \dfrac{a}{r} + b$ として a と b を求め、$r = 0.075\,\mathrm{m}$ の電位を求めましょう。

例題 9　パイプの保温材の中の温度

お湯のパイプ（半径 0.05 m）を、外の半径 0.1 m の保温材で包みました。保温材の内側は 80 ℃、外側は 20 ℃で、温度は落ち着いています。保温材の中の温度は $T = 80 + a \ln \dfrac{r}{0.05}$ と書けます。a を求め、$r = 0.075\,\mathrm{m}$ の温度を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$、$\ln 1.5 = 0.405$）。

考え方　円柱の形なので $T = a \ln r + b$（⑦）。$\ln r = \ln \dfrac{r}{0.05} + \ln 0.05$（3-12）なので、$a \ln r + b$ は $a \ln \dfrac{r}{0.05}+$（定数）と書ける。$r = 0.05$ では $\ln 1 = 0$ なので、その定数は内側の温度 80 になる。

式　外側：$20 = 80 + a \ln \dfrac{0.1}{0.05} = 80 + a \ln 2$

$$a = \frac{20 - 80}{0.693} = \frac{-60}{0.693} = -86.6$$

$$r = 0.075：T = 80 - 86.6 \times \ln \frac{0.075}{0.05} = 80 - 86.6 \times \ln 1.5$$

$$= 80 - 86.6 \times 0.405 = 80 - 35.1 = 44.9$$

答え　$a \approx -86.6$。約 44.9 ℃（まん中でも 50 ℃ではない）

じぶんでとこう 9

半径 $0.02\,\mathrm{m}$ のパイプを、外の半径 $0.04\,\mathrm{m}$ の保温材で包みました。内側は $100\,℃$、外側は $40\,℃$です。$T = 100 + a\ln\dfrac{r}{0.02}$ として a を求め、$r = 0.03\,\mathrm{m}$ の温度を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$、$\ln 1.5 = 0.405$）。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

∇^2 と Δ を取りちがえる

✕ 熱の式の ΔT を「T のラプラシアン」と読む

○ この本の ΔT は「T の変化の量」。ラプラシアンは $\nabla^2 T$

第 2 巻から、Δ は「変化の量」（Δt、Δx）の記号です。数学の本では、ラプラシアンを Δ と書くこともあるので、本ごとに確かめます（専門書をのぞいてみよう）。

まちがえやすいところ

$\nabla^2 f$ を矢印で答える

✕ $f = x^2 + y^2$ のとき $\nabla^2 f = (2,\ 2)$

○ $\nabla^2 f = 2 + 2 = 4$（1 つの数）

$\mathrm{grad}\, f$ は矢印ですが、$\nabla^2 f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f$ は発散なので、1 つの数です。

⚠ まちがえやすいところ

$(\nabla f)^2$ と $\nabla^2 f$ を同じと思う

✕　$f = x^2$ なら $\nabla^2 f = (2x)^2 = 4x^2$

○　$\nabla^2 f$ は「2 回微分」なので $(x^2)'' = 2$

∇^2 の「2」は、ナブラを 2 回はたらかせる印で、1 回微分した結果の 2 乗ではありません。

⚠ まちがえやすいところ

球の式を、2 階微分だけにする

✕　$f = \dfrac{1}{r}$ なら $\nabla^2 f = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{2}{r^3}$

○　$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \times \left(-\dfrac{1}{r^2}\right)\right) = 0$

球の殻は外ほど面積が広がるので、r^2 をかけてから微分します（⑦）。直角座標で計算しても 0 になります。

⚠ まちがえやすいところ

ふちのマスにも平均の式を入れる

✕　表計算で、ふちのマスにも `=AVERAGE(…)` を入れる

○　ふちのマスは、決まった温度（境界条件）のまま

ふちまで平均にすると、ふちの 100 ℃が下がってしまい、問題が変わります。ふちの値は、外から決まっています（6-3）。

⚠ まちがえやすいところ

熱い所は冷える、と思う

✕ 40℃のマスは35℃のマスより熱いから、先に冷える

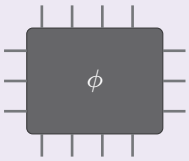
○ まわりの平均より熱いか冷たいかで決まる

やってみようの40℃のマスは、となりに80℃があるので温まります。温度の高さではなく、まわりとの差を見ます（①）。

物理・工学ではこう使う

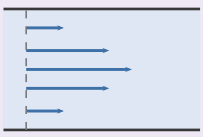
● **半導体の中の電位：ポアソン方程式**

トランジスタやダイオードの中では、電子や正の電荷（ホール）の分布で電位が決まります。設計では、チップの断面を細かいマスに分け、ポアソン方程式 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ を、③のようなくり返しや連立方程式でコンピュータに解かせます。



● **管の中のねばり**

⑧のように、管の中の水は、まわりより速い所ほどねばりでブレーキがかかります。点滴や血管、エンジンの油の通り道の設計では、$\mu\nabla^2 u$ と圧力の差のつり合いから、流れる量を計算します（物理 力-14・力-15）。



● **写真の輪郭をさがす**

写真は、明るさの数を並べた表です。どのマスにも「まわり4マスの平均との差」の4倍を計算すると、明るさが急に変わる所（物の輪郭）で大きな数が出ます。この計算は**ラプラシアンフィルター**とよばれ、画像処理の入門でよく使われます。

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

コラム　ラプラスとポアソン

ラプラス方程式の名前は、フランスの数学者ラプラス（1749〜1827 年）からきています。ラプラスは、惑星や地球のような大きな物が引き合う力を調べる中で、1780 年代にこの式を使いました。のちに、その弟子にあたるポアソン（1781〜1840 年）が、物の中（質量のある所）では右辺が 0 でなくなることを示し、1810 年代に今のポアソン方程式の形にしたと伝えられています。同じ式が、のちに電気・熱・流れでも使われるようになりました。

章末問題　8-12 のまとめ

基本 ★★★★★

1 板の上のマスは 30 ℃で、まわりは北 40・南 24・西 36・東 28（℃）です。「まわりの平均との差」を求め、温まるか冷えるかを答えましょう（例題 1）。

2 $f = 5x^2 - y^2 + 2z^2 + xy$ のラプラシアン $\nabla^2 f$ を求めましょう（例題 2）。

3 $f = 50 + 0.02x^2 + 0.02y^2$ を 5 m おきの方眼にしたとき、まわり 4 点の平均との差を $\nabla^2 f$ から予想しましょう（例題 3）。

4 たてに並んだ 2 つのマス A（上）と B（下）があります。A のまわりは北が 40 ℃、西・東が 0 ℃、南が B。B のまわりは北が A、西・東が 0 ℃、南が 20 ℃です。落ち着いた温度を求めましょう（例題 4）。

5 正方形の板の上・右のふちが 100 ℃、下が 40 ℃、左が 0 ℃です。落ち着いたとき、板のまん中は何 ℃ですか（例題 5）。

6 棒の温度を 0.02 m おきにはかると、20 ℃、26 ℃、30 ℃でした。まん中の点での $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}$ の近い値を求めましょう（例題 6）。

7 $f = r^3$ の $\nabla^2 f$ を、球の式で求めましょう。r は中心からの距離です（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

8 同じ中心の 2 つの球の内側（半径 0.2 m）が 50 V、外側（半径 0.4 m）が 0 V のとき、$r = 0.3$ m の電位を求めましょう（例題 8）。

9 内の半径 0.1 m、外の半径 0.2 m の保温材の内側が 90 ℃、外側が 30 ℃のとき、$r = 0.15$ m の温度を求めましょう（$\ln 2 = 0.693$、$\ln 1.5 = 0.405$）（例題 9）。

10 $f = \dfrac{1}{r^2}$（r は中心からの距離）の $\nabla^2 f$ を、球の式で求めましょう。f はラプラス方程式をみたしますか（例題 7）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ マスの値と「まわりの平均」との差を出し、温まる所と冷える所を見分けられる。 → 496 ページ
- ☐「どのマスもまわりの平均と同じ」のくり返しで、板の落ち着いた温度を求められる。 → 499 ページ
- ☐ ラプラシアンを偏微分で計算し、球や円柱の形の場合にも使える。 → 506 ページ

ソラ

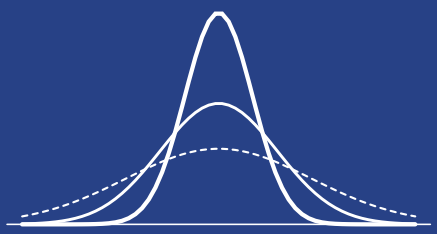
「まわりの平均との差」が、温まるか冷えるかを決めていた。次の 8-13 では、温度がならされていくようすを表計算で追いかけよう。

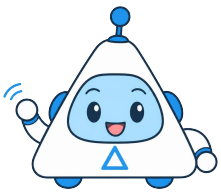
第 8 巻　第 4 部

偏微分方程式

4

- 金属の棒に、熱はどう広がる？
- 波の形は、どうやって伝わる？
- 電気と磁気の 4 つの式は、何を言っている？





場所と時間の両方で変わる量のルールが、偏微分方程式だよ。熱の広がりや波の伝わり方を表計算で再現し、電気と磁気の 4 つの式を「わき出し」と「うず」で読むよ。

この部で学ぶこと

8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式 ★★★★★ P.532

金属の棒に熱が広がるようすを、表計算で再現する

8-14 div と rot で書かれた式を読もう［読みもの］ ★★★★★ P.572

電気と磁気の 4 つの式を、「わき出し」と「うず」で読む

この部を読むと…

熱方程式・波動方程式を表計算で解き、マクスウェル方程式を div と rot のことばで読めるようになります。第 9 巻と物理シリーズの電磁気・流体の土台です。

第 4 部　偏微分方程式

★★★★★

8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式

道しるべ　この章の前に 6-1 6-2 6-3 6-11 6-15 7-10 8-3 8-4 8-9 8-12
この章の先に 8-14 9-1 9-3 9-11

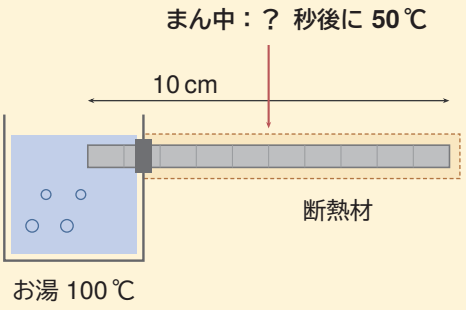
この章でできるようになること

- ★★★ 金属の棒の温度が変わるようすを、「となりとの差」の表計算でくり返し計算できる。
- ★★★★ 表計算がこわれない条件 $r \leqq \frac{1}{2}$ を、1 歩の倍率（7-10）で説明できる。
- ★★★★★ 熱方程式・波動方程式を作り、答えを代入して確かめられる。物質微分を計算できる。

はてな？

長さ 10 cm のアルミの棒があります。はじめは、どこも 20 ℃です。左はしを沸騰したお湯（100 ℃）につけ続けます。棒のまわりと右はしは断熱材でくるんであり、熱は逃げません。

棒の**まん中**が 50 ℃になるのは、何秒後でしょう。10 秒？ 1 分？ 10 分？



6-1 で、「変数が場所と時間の 2 つ以上あるものは偏微分方程式で、8-13 で学ぶ」と予告しました。棒の温度は、場所 x によっても、時刻 t によっても変わります。$T(x,\ t)$ のように、入力が 2 つの関数（8-1）です。この章では、そのような量のきまりを、これまでの 2 つの道具で読みときます。

1 つは、6-2 の**オイラー法**です。「次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt」を表計算で 1 行ずつ進めました。もう 1 つは、8-12 の**まわりの平均との差**です。まわりより冷たい所は温まり、熱い所は冷えました。この 2 つを組み合わせると、棒の熱の広がり方が表計算で計算できます。

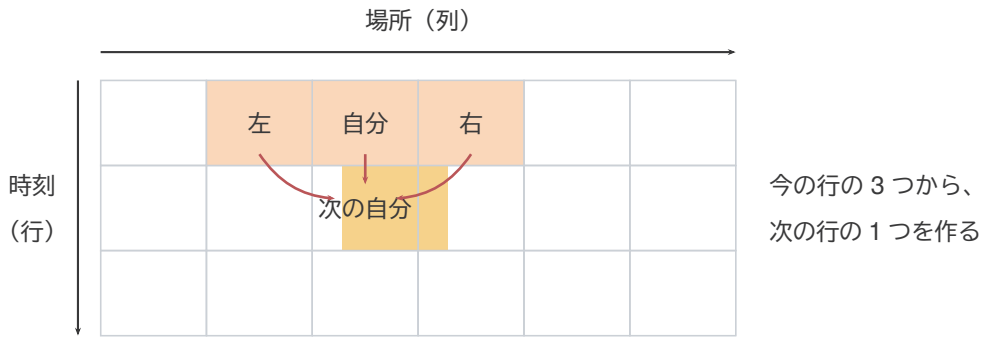


図 1　この章の表計算のしくみ。6-2 では 1 つ前の行の自分だけから次の行を作ったが、ここでは左右のとなりも使う（8-12 の「まわりの平均との差」）。

物理シリーズ『力学』の 力-16 では「となりとの差で式を書く方法を**差分法**といいます（8-13）」と書きました。天気予報のコンピュータも、空気をマスに分けて、となりとの差で次の時刻を計算しています（8-0）。この章の表計算は、その小さな見本です。

やってみよう　金属の棒の熱を、表計算で進めよう

棒を 1 cm ごとに区切り、区切りの点の温度を、0.25 秒ずつ進めて計算します。A 列が時刻 t〔s〕、1 行めが場所 x〔m〕です。

1. B1 から右へ場所 0, 0.01, …, 0.1（L1 まで）、A2 から下へ時刻 0, 0.25, 0.5, …を入れる。
2. 2 行め（$t = 0$）は、B2 が 100、C2 から L2 が 20。左はしの B 列は、下まで 100 のまま。
3. C3 に `=C2+0.25*(B2-2*C2+D2)` を入れ、K3 まで右へ、さらに下へコピーする。
4. 右はしの L3 には `=L2+0.25*(2*K2-2*L2)` を入れ、下へコピーする（わけは③で）。

C3　`=C2+0.25*(B2-2*C2+D2)`

	A	B	C	D	E	F	G
1	$t \diagdown x$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
2	0	100	20	20	20	20	20
3	0.25	100	40	20	20	20	20
4	0.5	100	ア	イ	20	20	20
5	0.75	100	ウ	30	21.25	20	20
			⋮				
63	15.25	100	88.59	77.56	67.26	57.97	49.91
64	15.5	100	88.69	77.74	67.51	58.27	50.26

表 1　左はしから棒のまん中（$x = 0.05$。G 列）まで。H 列から L 列（右半分）は、表のはばの都合で省いた。

アからウをうめよう。まん中（G 列）が 50 ℃をこえるのは、何行め（何秒後）かな？

C3 の式 `=C2+0.25*(B2-2*C2+D2)` は、「1 つ上の行（0.25 秒前）の自分の温度に、左右のとなりとの差を 0.25 倍してたす」という計算です。手で確かめます。

$$40 + 0.25 \times (100 - 2 \times 40 + 20) = 40 + 10 = 50 \qquad \text{ア（C4）}$$

$$20 + 0.25 \times (40 - 2 \times 20 + 20) = 20 + 5 = 25 \qquad \text{イ（D4）}$$

$$50 + 0.25 \times (100 - 2 \times 50 + 25) = 50 + 6.25 = 56.25 \qquad \text{ウ（C5）}$$

1 歩めでは $x = 0.01$ だけが 40 ℃になり、2 歩めで $x = 0.02$ が 25 ℃、3 歩めで $x = 0.03$ が 21.25 ℃になります。熱は、**1 歩に 1 マスずつ**となりへしみこんでいきます。

下へコピーを続けると、64 行め（$t = 15.5\,\mathrm{s}$）で G 列が 50.26 ℃になり、はじめて 50 ℃をこえます。❓はてな？の答えは、**約 15 秒**です（マスをもっと細かくすると 15.4 秒。②の Python で）。10 分もかかりません。アルミは熱をよく伝えるのです。

なぜ「0.25 倍」なのか、なぜ右はしだけ式がちがうのか。0.25 をもっと大きくすると、計算が速く進むのでは？ この章は、この表計算のしくみを 1 つずつ確かめ、最後に、熱と波の**偏微分方程式**を作ります。

★★★★★ の章ですが、「目でわかる」「手でわかる」の段は、表計算と電卓だけで読めます。「式でわかる」の段は、1 回で分からなくても大丈夫です。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 6-2　オイラー法：次の値＝今の値＋今の変わる速さ× Δt。表計算で 1 行ずつ進める。Δt が大きすぎると、ふらふらしてこわれる。
- 6-3　熱は、温度の傾きに比例して流れる（フーリエの法則）。両はしの温度（境界条件）で答えが決まる。
- 7-10　$\dot{x} = \lambda x$ をオイラー法で進めると、1 歩ごとに $1 + \lambda \Delta t$ 倍になる。この倍率の大きさが 1 より小さければ、こわれない。冷めるお湯では、$\Delta t < 40$ 分のとき。
- 8-3　連鎖律：$x(t)$ の道を歩くと $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。
- 8-4　熱の流れの矢印 $\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$（$k$ は熱伝導率〔W/(m·K)〕）。
- 8-12　まわりの平均との差が、温まるか冷えるかを決める。となりとの「差の差」$\div h^2$ は、2 階微分の近い値。

数学の道具

4

目でわかる　熱は、となりへ移っていく　★★★

1 棒をマスに分けて、熱の出入りを数える

棒を、はば $\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$ のマスに分けます。マスの中の温度は 1 つの数で代表させます。となりどうしのマスの間では、6-3 のフーリエの法則のとおり、**温度の差に比例して**熱が移ります。

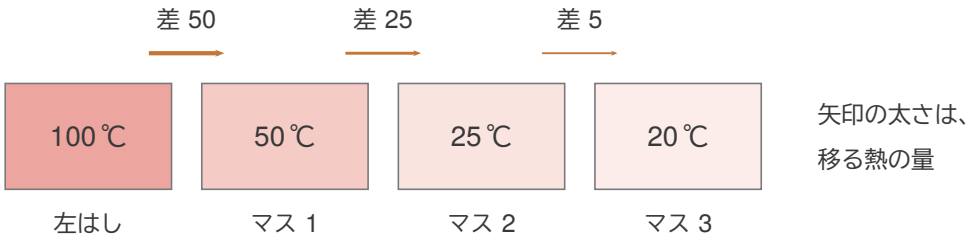


図 2　2 歩め（$t = 0.5\,\mathrm{s}$）の棒。となりとの温度の差が大きいほど、たくさんの熱が移る。マス 1 には左から差 50 ぶん入り、右へ差 25 ぶん出ていく。

図 2 のマス 1（50℃）で考えます。左からは「差 50」に比例する熱が入り、右へは「差 25」に比例する熱が出ていきます。入るほうが多いので、マス 1 は温まります。差し引きで入る熱は、

$$(100-50)-(50-25)=100-2\times 50+25=25$$

に比例します。これは、8-12 の「となり 2 点の平均との差」の 2 倍です（となりの平均は $(100+25)\div 2=62.5$ で、自分との差は 12.5）。

1 歩（Δt）のあいだにマスの温度が上がる量は、この「差し引き」に、ある数 r をかけたものになります。

次の温度＝今の温度＋ r×（左の温度 −2× 自分 ＋ 右の温度）

やってみようの 0.25 は、この r です。**温度の差の何割が、1 歩のあいだに移るか**を表す数です。

r は、何で決まる？

r の大きさを、6-3 のフーリエの法則から作ります。棒の断面積を A、熱伝導率を k〔W/(m·K)〕とします。

1. 左のマスから自分へ、1 秒に流れる熱は $kA\times\frac{(\text{左の温度}-\text{自分})}{\Delta x}$〔W〕。$\Delta x$ でわるのは、温度の**傾き**に比例するから（6-3）。
2. Δt 秒のあいだに、左右から差し引きで入る熱は、次のとおり。

$$\frac{kA\,\Delta t}{\Delta x}\times(\text{左}-2\times\text{自分}+\text{右})\text{〔J〕}$$

3. マスの体積は $A\,\Delta x$。密度を ρ〔kg/m³〕、比熱を c〔J/(kg·K)〕とすると、マスの温度を 1 K 上げるのに $\rho cA\,\Delta x$〔J〕の熱が要る。
4. だから、上がる温度は②÷③で、$\frac{k}{\rho c}\times\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\times(\text{左}-2\times\text{自分}+\text{右})$。

④の $\frac{k}{\rho c}$ を**熱拡散率**（ねつかくさんりつ）といい、α（アルファ）と書きます。単位は〔m²/s〕です。

$$r = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c}\ \text{（熱拡散率）}$$

アルミは $k \approx 237$、$\rho \approx 2700$、$c \approx 897$ なので、$\alpha = \frac{237}{2700\times 897} \approx 9.8\times 10^{-5}$。この章では、まるめて $\alpha = 1\times 10^{-4}$〔m²/s〕とします。$\Delta x = 0.01\,\text{m}$、$\Delta t = 0.25\,\text{s}$ なら、

$$r = \frac{1\times 10^{-4}\times 0.25}{0.01^2} = \frac{2.5\times 10^{-5}}{1\times 10^{-4}} = 0.25$$

で、やってみようの 0.25 です。単位は $\frac{\text{m}^2/\text{s}\times\text{s}}{\text{m}^2}$ で消え、r は単位のない数になります。

Δx が 2 乗で入っているのは、①で 1 回（傾き）、③で 1 回（マスの大きさ）、Δx でわっているからです。マスを半分の大きさにすると、となりとの温度の傾きを通る熱は 2 倍になり、それを受け取るマスの熱の入れ物は半分になるので、温度の上がり方は 4 倍になります。

② グラフで見る：熱が広がり、ならされていく

表計算の行（時刻）をいくつか選んで、温度を場所のグラフにします。

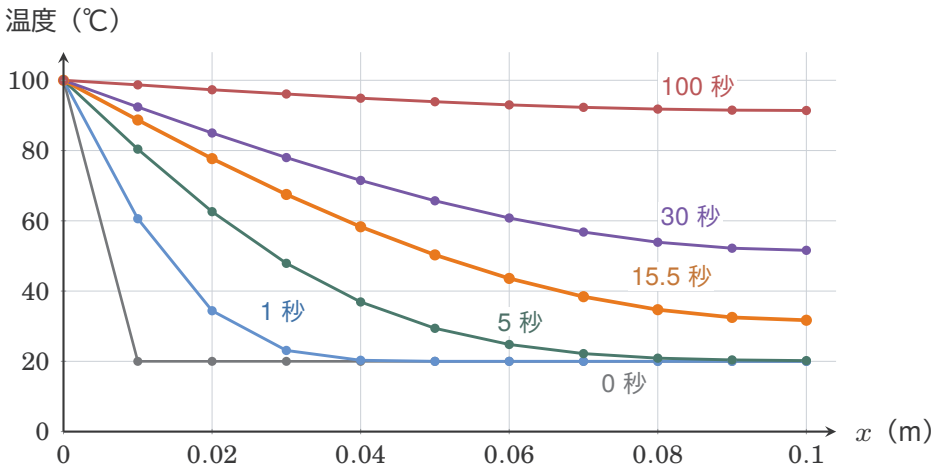


図 3　表計算の温度（$\Delta x = 0.01\,\text{m}$、$\Delta t = 0.25\,\text{s}$）。はじめは左はしだけが熱い。時間がたつと、熱が右へ広がり、どこも 100℃に近づく。

図 3 から、3 つのことが読みとれます。

1. **でこぼこは、すぐにならされる。**はじめの「左はしだけ 100 ℃、となりは 20 ℃」という急な段差は、1 秒でなめらかな坂になります。
2. **遠くへ行くほど、時間がかかる。**1 秒では $x = 0.03\,\mathrm{m}$ くらいまでしか温まりませんが、15 秒でまん中、30 秒で右はしまで熱がとどきます。
3. **最後は、どこも 100 ℃にそろう。**右はしから熱が逃げないので、棒全体がお湯と同じ温度になって落ち着きます。

もし右はしを 20 ℃の水につけておく（熱が右から逃げる）と、長い時間のあとの温度は、左 100 ℃から右 20 ℃への**直線**になります。6-3 のかべと同じ形です（どの点も、となりの平均と同じ：8-12 ④）。かべの温度は、この表計算を長く続けて落ち着いた先だったのです。このとき、まん中が 50 ℃になるのは約 16.5 秒後です（図 4）。

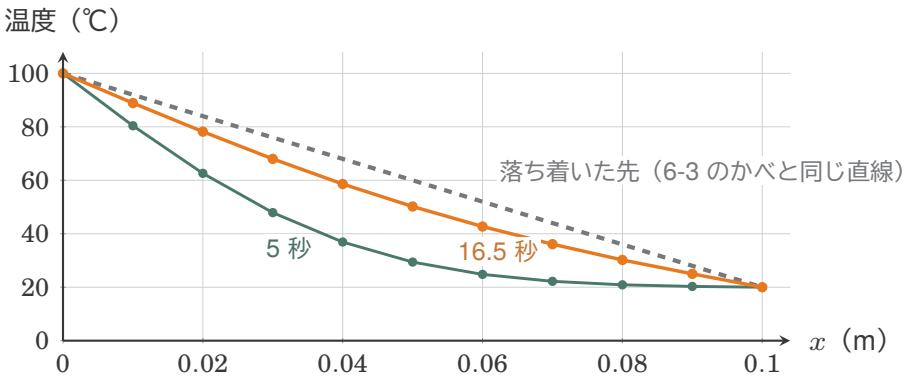


図 4 右はしを 20 ℃に保ったときの表計算。時間がたつと、灰色の点線（左 100 ℃から右 20 ℃への直線）に近づいていく。

Python で確かめる

表計算と同じ計算を、Python の numpy（2-19・7-1）で書きます。`T[1:10]` は 1 番めから 9 番めの点（中の点）、`T[0:9]` はその左どなり、`T[2:11]` は右どなりを、まとめて表します。

Python

```
import numpy as np
T = np.full(11, 20.0)                    # 11 点、はじめは全部 20 ℃
T[0] = 100                               # 左はしはお湯の 100 ℃
r = 1e-4 * 0.25 / 0.01**2                # r = α Δ t/Δ x²
t = 0
while T[5] < 50:                         # まん中が 50 ℃になるまで
    U = T.copy()
    U[1:10] = T[1:10] + r*(T[2:11] - 2*T[1:10] + T[0:9])
    U[10] = T[10] + 2*r*(T[9] - T[10])   # 右はし（断熱）
    T = U
    t = t + 0.25
print(r, t)
print(T.round(1))
```

実行結果

```
0.25 15.5
[100.   88.7  77.7  67.5  58.3  50.3  43.6  38.4  34.7  32.5  31.7]
```

while は「条件がなり立つあいだ、くり返す」命令です。表計算の 64 行めと同じ 15.5 秒が出ました。Δx を 0.001 m、Δt を 0.002 s（$r = 0.2$）にして同じ計算をすると 15.43 秒になり、さらに細かくしても 15.43 秒のままです。本当の答えは約 15.4 秒、表計算の 15.5 秒は、それに近い値だったのです。

手でわかる　1 歩の式と、こわれない条件　★★★★

③ 1 歩の式と、両はしの決まり

①の表計算の 1 行を、式で書きます。左から i 番めの点の、n 歩めの温度を T_i^n と書きます。右下の i は**場所の名札**、右上の n は**時刻の名札**です（6-2 の y_n に、場所の名札が加わった形。右上の n は n 乗ではありません）。

$$T_i^{n+1} = T_i^n + r\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right) \qquad r = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}$$

やってみようの C3 の式と見くらべると、C2 が T_i^n、B2 が T_{i-1}^n（左どなり）、D2 が T_{i+1}^n（右どなり）、C3 が T_i^{n+1}（次の時刻の自分）です。

かっこの中は、8-12 の「となり 2 点の平均との差」の 2 倍でした。だから、1 歩の式は

$$T_i^{n+1} = T_i^n + 2r \times (\text{となり 2 点の平均} - T_i^n)$$

とも書けます。**1 歩ごとに、となりの平均へ向かって、差の $2r$ 倍だけ近づく。** $r = 0.25$ なら、差の半分だけ近づきます。

両はしは、式でなく条件で決める

1 歩の式は、左右のとなりがある点にしか使えません。両はしの点は、となりが片方しかないからです。両はしの温度は、6-3 と同じく**境界条件**で決めます。

- **左はし（お湯につけた所）**：温度が 100℃に決まっている。だから B 列は、いつも 100。
- **右はし（断熱材でくるんだ所）**：熱が出ていかない。右はしの点は、左どなりからだけ熱をもらいます。

右はしの点が受け持つのは、棒のはしからマスの半分（0.005 m）だけです。熱の入れ物が半分なので、同じ熱をもらっても 2 倍温まります。だから、

$$T_{\text{右はし}}^{n+1} = T_{\text{右はし}}^n + 2r \times (T_{\text{左どなり}}^n - T_{\text{右はし}}^n)$$

です。やってみようの L3 の式 `=L2+0.25*(2*K2-2*L2)` は、これを書いたものです。

はじめの温度も要る

もう 1 つ、表計算の 2 行め（$t = 0$）には、**はじめの温度**を全部の点に入れました。これを**初期条件**といいます。6-2 の表計算では「はじめの値」が 1 つでしたが、ここでは場所ごとに 1 つずつ、つまり**はじめの温度の分布**（関数 $T(x, 0)$）が要ります。

条件	何を決めるか	表計算では
初期条件	はじめの時刻の、どの場所の温度も	2 行め（$t = 0$）の全部
境界条件	両はしの、どの時刻のふるまいも	B 列と L 列の式

表 2　熱の表計算には、2 種類の条件が両方とも要る。

4 Δt を大きくすると、どうなる？

やってみようでは、0.25 秒ずつ進めて、15 秒までに 62 行が必要でした。1 歩を大きくすれば、行数がへって楽になりそうです。ためしてみましょう。

$\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$（$r = 0.5$）

$r = 0.5$ では、$2r = 1$ なので、1 歩の式は「**次の温度＝となり 2 点の平均**」になります（③）。左の数から順に計算すると、簡単な数が並びます。

歩	$x = 0$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	100	20	20	20	20	20
1	100	60	20	20	20	20
2	100	60	40	20	20	20
3	100	70	40	30	20	20
4	100	70	50	30	25	20

表 3　$r = 0.5$ の表計算。どの点も、1 つ前の行の左右のとなりの平均になる（$x = 0.01$ の 1 歩めは $(100 + 20) \div 2 = 60$）。

1 歩ごとに、同じ値が 2 回続く「階段」のような形になりますが、こわれてはいません。

$\Delta t = 0.6\,\mathrm{s}$ $(r = 0.6)$

こんどは $r = 0.6$ です。$2r = 1.2$ なので、「となりの平均へ、差の 1.2 倍だけ近づく」、つまり**平均を通りこして行きすぎます**。

$$T_1^1 = 20 + 0.6 \times (100 - 2 \times 20 + 20) = 20 + 48 = 68$$

平均 60 を行きすぎ

$$T_1^2 = 68 + 0.6 \times (100 - 2 \times 68 + 48.8) = 58.4$$

$T_2^1 = 48.8$ を使う

$$T_1^3 = 77.6, \quad T_1^4 = 66.85, \quad T_1^5 = 83.51$$

上がり下がり

$x = 0.01$ の温度は、68、58.4、77.6、66.85、83.51、…と、上がったり下がったりします。となりの点も、反対向きに上がったり下がったりします。

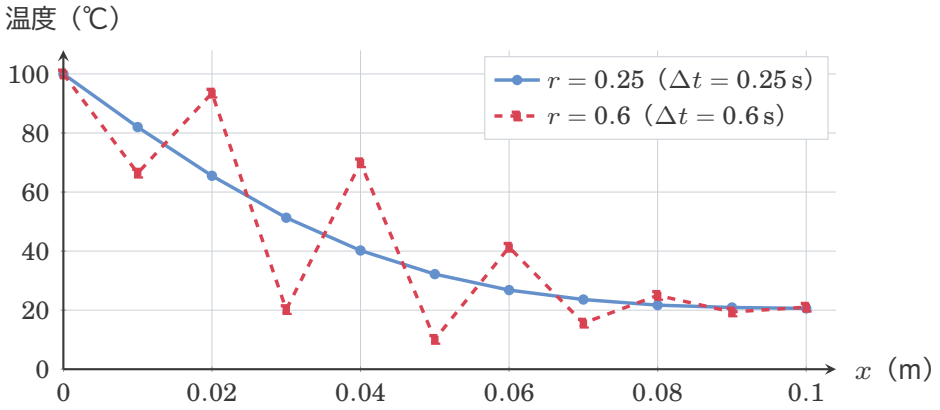


図 5　6 秒後の温度。$r = 0.25$（青）はなめらか。$r = 0.6$（赤の点線）は、となりどうしが上と下に交互にとび出すぎざぎざになる。

6 秒後（10 歩め）の温度を、図 5 にかきました。$r = 0.6$ では、となりどうしが交互に上と下にとび出す**ぎざぎざ**ができています。このぎざぎざは、歩を進めるごとに大きくなり、12 秒後（20 歩め）には −410 ℃から 519 ℃、120 秒後（200 歩め）には 10^{28} ほど（1 のあとに 0 が 28 こ）になります。熱いお湯につけた棒が −410 ℃になるはずはありません。**計算がこわれた**のです。

$r = 0.5$ では「ちょうど平均」、$r = 0.6$ では「平均の行きすぎ」。こわれるかどうかの境目は、$r = 0.5$ のあたりにありそうです。⑤で、7-10 の考え方を使って確かめます。

⑤ こわれない条件：$r \leqq \frac{1}{2}$

こわれた計算では、ぎざぎざが育っていました。そこで、**いちばん細かいでこぼこ**、つまり「$+a$、$-a$、$+a$、$-a$、…」と 1 点ごとに符号が入れかわる温度の形が、1 歩でどうなるかを調べます（温度は、どこかの基準の温度からの差とします）。

自分が $+a$ なら、左右のとなりはどちらも $-a$ です。1 歩の式に入れます。

$$T_i^{n+1} = a + r\left((-a) - 2a + (-a)\right) \qquad \text{1 歩の式に入れる}$$

$$= a + r \times (-4a) \qquad \text{かっこの中をまとめる}$$

$$= (1 - 4r)\, a \qquad a \text{ でくくる}$$

自分が $-a$ のときも、同じく $(1-4r) \times (-a)$ になります。だから、ぎざぎざの形は形を変えずに、**1 歩ごとに $1-4r$ 倍**されます。これは、7-10 ④ の「1×1 のくり返し $x_{n+1} = ax_n$」そのものです。

7-10 では、くり返しがこわれないのは、1 歩の倍率の大きさが 1 以下のときでした。

$$-1 \leqq 1 - 4r \leqq 1 \qquad \text{1 歩の倍率の大きさが 1 以下}$$

$$-2 \leqq -4r \qquad \text{左の不等式の両辺から 1 をひく}$$

$$r \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{両辺を } -4 \text{ でわる（向きが変わる）}$$

右の $1 - 4r \leqq 1$ は、$r \geqq 0$ ならいつもなり立ちます。

熱の表計算がこわれない条件　$r = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2} \leqq \dfrac{1}{2}$

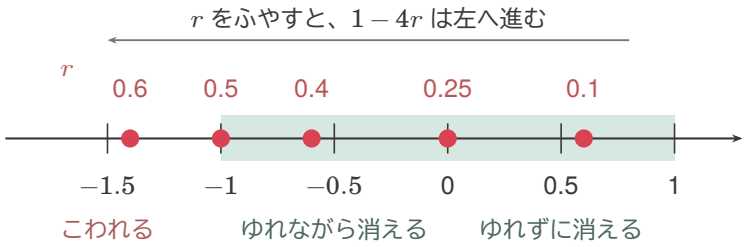


図 6　ぎざぎざの 1 歩の倍率 $1-4r$。赤い点の上の数は r。緑の区間（-1 から 1）に入っていれば、こわれない（7-10 の図と同じ形）。

$r = 0.25$ なら $1 - 4r = 0$ で、ぎざぎざは 1 歩で消えます。$r = 0.4$ なら -0.6 倍で、ゆれながら消えます。$r = 0.5$ でちょうど -1 倍（消えも育ちもしない境目）、$r = 0.6$ では -1.4 倍で、ゆれながら育ちます。④の表計算で見たとおりです。

7-10 の $|1 + \lambda\,\Delta t| < 1$ と同じこと

7-10 では、$\dot{x} = \lambda x$ のオイラー法の 1 歩の倍率が $1 + \lambda\,\Delta t$ でした。ぎざぎざの形は、1 歩の式の「かっこの中」が $-4a$ でした。$\frac{\alpha}{\Delta x^2}$ をかけた本当の変わる速さで書くと、

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \times (-4a) = \lambda a, \qquad \lambda = -\frac{4\alpha}{\Delta x^2}$$

です。1 歩の倍率は $1 + \lambda\,\Delta t = 1 - \frac{4\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2} = 1 - 4r$。7-10 の予告カードに書いた「1 歩の行列のくり返しと、こわれない条件」とは、このことだったのです。

細かく計算すると、手間は何倍？

こわれない一番大きい Δt は、$r = \frac{1}{2}$ から $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$ です。$\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$ なら $\frac{0.0001}{2 \times 0.0001} = 0.5\,\mathrm{s}$。マスを半分の $0.005\,\mathrm{m}$ にすると、Δt は $\frac{1}{4}$ の $0.125\,\mathrm{s}$ まで小さくしなければなりません。マスの数は 2 倍、歩の数は 4 倍なので、**計算の量は 8 倍**になります。細かく正確に計算するのは、思ったより大変なのです。

せいかくに言うと

本当は、1 歩の式は「棒の点の温度を並べたベクトルに、1 歩の行列をかける」くり返しです（7-10）。中の点が 9 つなら、1 歩の行列は 9×9 で、ななめに $1-2r$、そのすぐ上とすぐ下に r が並びます。この行列の固有ベクトルは、ぎざぎざではなく sin の形の温度で、固有値は $1-4r\sin^2\frac{m\pi}{20}$（$m=1,\ 2,\ \ldots,\ 9$）です。いちばん小さいのは $m=9$ の $1-4r\times 0.9755$ で、ぎざぎざの $1-4r$ にとても近い値です。だから条件は「ほぼ $r \leqq \frac{1}{2}$」で、点をふやすほど $\frac{1}{2}$ に近づきます。次の Python で、固有値の最小と最大を確かめます（7-10 の `eigvalsh` は、対称な行列の固有値を出す命令）。

Python

```
import numpy as np
N = 9                                   # 中の点の数
for r in [0.25, 0.5, 0.6]:
    A = (np.eye(N)*(1 - 2*r) + np.eye(N, k=1)*r
         + np.eye(N, k=-1)*r)           # 1 歩の行列
    lam = np.linalg.eigvalsh(A)         # 固有値（小さい順）
    print(r, lam.min().round(4), lam.max().round(4))
```

実行結果

```
0.25 0.0245 0.9755
0.5 -0.9511 0.9511
0.6 -1.3413 0.9413
```

`np.eye(N, k=1)` は、ななめの 1 つ上に 1 が並ぶ行列です。$r=0.6$ では、いちばん小さい固有値の大きさが 1.34 で 1 をこえるので、こわれます。$r=0.5$ では大きさが 0.95 で、こわれません。

ここまでで十分

熱の表計算は「となりとの差の r 倍をたす」のくり返しです。両はしは境界条件、はじめは初期条件で決めます。$r=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$ が $\frac{1}{2}$ をこえると、ぎざぎざが育って計算がこわれます。この先は、マスを細かくした先の「偏微分方程式」を作ります。

∂ 式でわかる 熱方程式と波動方程式 ★★★★★

6 熱方程式

1 歩の式を、時間の変化の形に書きなおします。T_i^n を両辺からひいて Δt でわり、r をもとの形にもどします。

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \qquad \text{1 歩の式から } T_i^n \text{ をひく}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha\,\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \qquad \text{両辺を } \Delta t \text{ でわる}$$

ここで、Δt と Δx を小さくしていきます。左辺は「同じ場所で、時間とともに変わる速さ」なので、x を止めて t で微分した $\frac{\partial T}{\partial t}$ に近づきます（8-2 の偏微分。5-3）。右辺の分数は、t を止めた「差の差 ÷ Δx^2」なので、8-12 ④ の $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ に近づきます。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

これを**熱方程式**（ねつほうていしき）といいます。においが部屋に広がる、インクが水に広がるなど、ものが「しみ広がる」ようすも同じ形の式になるので、**拡散方程式**ともいいます。このように、2 つ以上の変数での偏微分が入った微分方程式を**偏微分方程式**といいます（6-1 で予告したもの）。

熱方程式は、ことばで読むと「**温度が上がる速さは、まわりの平均との差（曲がり方）に比例する**」です。下に凸（$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$）の所は温まり、上に凸の所は冷えます。8-12 の「ならす働き」が、時間とともに進んでいく式なのです。

熱の流れから作る：8-4・8-9 で

もう 1 つの作り方です。熱の流れは $q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$（8-4。1 次元）。小さな区間に、1 秒・$1\,\mathrm{m}^3$ あたりにたまる熱は、出ていく熱の反対で $-\frac{\partial q}{\partial x}$（8-9 の発散の反対）。たまった熱で温度が上がるので、

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$ たまる熱＝温度を上げる熱

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ フーリエの法則を入れる

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ 両辺を ρc でわる

同じ式になりました。3 次元なら、$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$、たまる熱は $-\mathrm{div}\,\vec{q}$（8-9）で、$\mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \nabla^2$（8-12）なので、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\nabla^2 T \qquad （3 次元の熱方程式）$$

です（積分の形で、箱から出る熱の流束（表 8-8）とガウスの定理（8-11）を使って作ることもできます）。

これまでの式は、熱方程式の特別な場合

場面	式	学んだ章
温度が落ち着いた（定常）かべ	$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$	6-3（答えは直線）
落ち着いた板・空間	$\nabla^2 T = 0$	8-12（ラプラス方程式）
横から熱が逃げる棒（フィン）	$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \beta^2\theta$	6-11（落ち着いたとき）

表 4　「時間で変わらない」とき、熱方程式の左辺 $\frac{\partial T}{\partial t}$ は 0 になり、これまでの式にもどる。

フィンのように、棒の横（表面）から部屋へ熱が逃げるときは、熱方程式に「逃げる分」が加わって $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \beta^2\theta\right)$ になります（θ は部屋との温度差）。落ち着くと左辺が 0 で、6-11 の式です。

いろいろな物の熱拡散率

物	熱拡散率 α〔m²/s〕	10 cm に広がる時間のめやす
銅	1.2×10^{-4}	約 80 秒
アルミ	1.0×10^{-4}	約 100 秒
鉄	2.3×10^{-5}	約 7 分
ステンレス	4×10^{-6}	約 40 分
水（動かないとき）	1.4×10^{-7}	約 20 時間

表 5 およその値（$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ で計算）。時間のめやすは $\frac{L^2}{\alpha}$（$L = 0.1\,\mathrm{m}$）。

熱方程式の α の単位〔m²/s〕から、「長さ L に熱が広がる時間は、だいたい $\frac{L^2}{\alpha}$」とわかります。長さが 2 倍なら、時間は 4 倍です。ステンレスのなべの取っ手が熱くなりにくいのは、熱拡散率が小さいからです。お風呂のお湯の上が熱く下がぬるいのは、水の熱拡散率がとても小さく、熱がしみ広がる前に、温かい水が上へ動く（対流）からです。

7 答えを代入して確かめる

熱方程式の答えを、式の形で 1 つ見つけます。8-12 で、sin のグラフは「上に凸の所では値が正、下に凸の所では値が負」でした。$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin ax = -a^2 \sin ax$ だからです（5-15）。曲がり方が、いつも自分の $-a^2$ 倍です。だから、sin の形の温度は、**形を変えずに、全体が同じ割合で小さくなる**と予想できます。

$$T = e^{-\alpha a^2 t}\sin ax$$

を熱方程式に代入して確かめます（a は、でこぼこの細かさを表す数〔1/m〕）。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha a^2\, e^{-\alpha a^2 t} \sin ax$$ x を止めて t で微分（5-14）

$$\frac{\partial T}{\partial x} = a\, e^{-\alpha a^2 t} \cos ax$$ t を止めて x で微分（5-15）

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -a^2\, e^{-\alpha a^2 t} \sin ax$$ もう一度 x で微分

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\alpha a^2\, e^{-\alpha a^2 t} \sin ax$$ α をかけると、1 行めと同じ

左辺と右辺が同じなので、熱方程式をみたします。

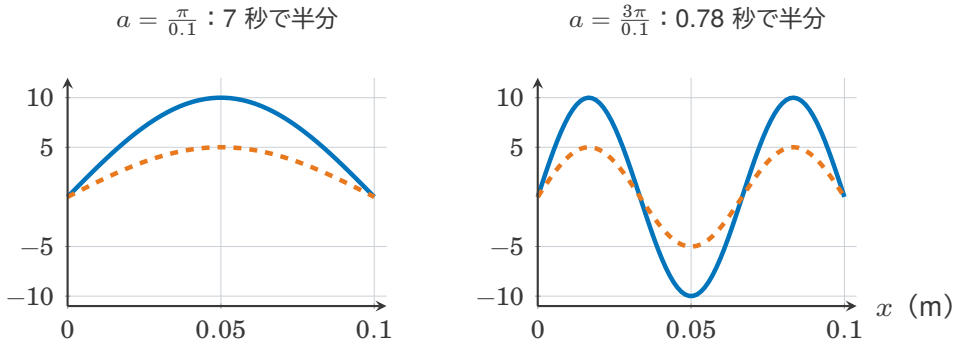


図 7　両はしを基準の温度（0）に保った 0.1 m の棒の、sin の形の温度のでこぼこ（基準からの差、℃）。青が 0 秒、オレンジの点線が「半分になったとき」。でこぼこが 3 倍細かいと、9 倍速く消える。

数を入れると

長さ 0.1 m の棒の両はしを基準の温度に保ち、まん中が 10 ℃高い sin の形の温度から始めます。$a = \frac{\pi}{0.1} \approx 31.4$〔1/m〕（$x = 0.1$ で $\sin \pi = 0$ になるように）。$\alpha a^2 = 1 \times 10^{-4} \times 31.4^2 \approx 0.0987$〔1/s〕なので、

$$T = 10\, e^{-0.0987 t} \sin 31.4x$$

です。$e^{-0.0987t} = \frac{1}{2}$ になるのは、$t = \frac{\ln 2}{0.0987} = \frac{0.693}{0.0987} \approx 7.0$ 秒後（3-12・5-14）。7 秒ごとに、でこぼこが半分になります。同じ $\Delta x \cdot \Delta t$（$r = 0.25$）の表計算で、はじめを sin の形、両はしを 0 にして計算すると、7 秒後のまん中は 4.997 ℃で、式の 5.011 ℃とよく合います。

でこぼこが 3 倍細かい $a = \frac{3\pi}{0.1}$ なら、αa^2 は $3^2 = 9$ 倍の 0.888 で、0.78 秒ごとに半分になります（図 7）。**細かいでこぼこほど、a^2 に比例して速く消える。**図 3 の「急な段差が 1 秒でならされる」のは、このためです。

もっと知りたい ★★★★★

第 9 巻（9-1）の予告：どんな形も、sin のたし算

どんな形の温度でも、いろいろな細かさの sin の形のたし算で書けることが知られています（フーリエ級数）。熱方程式では、sin の 1 つ 1 つが、それぞれ $e^{-\alpha a^2 t}$ の速さで小さくなります。だから、それをたし直せば、どんな初期条件の答えも式で書けます。この「分けて解いて、たし直す」方法（変数分離法とフーリエ級数）は、9-1 で学びます。⑤のぎざぎざは、表計算で表せるいちばん細かいでこぼこでした。本当の答えでは、いちばん速く消えるはずのものが、こわれた計算では逆に育っていたのです。

8 波動方程式：弦をゆらす

こんどは、ぴんと張った弦（ギターの弦や、なわとびのなわ）の波です。弦を小さな玉が並んだものと考え、玉 i の横からのずれ（高さ）を y_i とします。

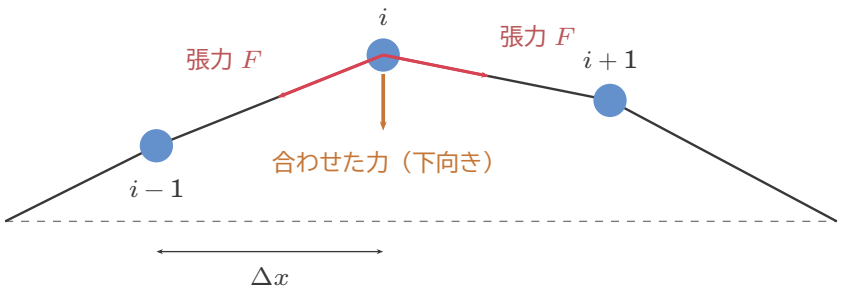


図 8 弦を玉の列と考える。玉 i は、左右の弦から張力 F で引かれる。玉 i がとなり 2 つの平均より高いと、合わせた力は下向きになる。

玉 i は、左右の弦に張力 F〔N〕で引かれます。弦のかたむきが小さいとき、左の弦が玉を引く力のたての成分は、張力×かたむき $= F \times \frac{y_{i-1}-y_i}{\Delta x}$、右の弦では $F \times \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$ です（4-6 の三角比で、小さい角では $\sin\theta \approx \tan\theta$）。たすと、

$$\text{たての力} = \frac{F}{\Delta x}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)$$

また「となりとの差の差」が出てきました。玉の質量は、弦の 1 m あたりの質量を μ〔kg/m〕として $\mu\,\Delta x$ です。運動方程式（質量×加速度＝力）から、

$$\mu\,\Delta x \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{\Delta x}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) \qquad \text{運動方程式}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad \text{両辺を } \mu\,\Delta x \text{ でわる}$$

玉を細かくすると（$\Delta x \to 0$）、右の分数は $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ になります。$\frac{F}{\mu}$ を c^2 と書くと、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

これを**波動方程式**（はどうほうていしき）といいます。c は⑨でわかるように、波が伝わる速さです（物理シリーズ『波』でくわしく学びます）。たとえば $F = 100\,\mathrm{N}$、$\mu = 0.01\,\mathrm{kg/m}$ の弦なら、$c = \sqrt{\frac{100}{0.01}} = \sqrt{10000} = 100\,\mathrm{m/s}$ です。c^2 と 2 乗で書くのは、⑨で c が速さになるようにするためです。

熱とのちがい：1 回微分か、2 回微分か

熱方程式では「まわりの平均との差」が温度の**変わる速さ**（1 回微分）を決めました。だから、でこぼこはならされて消えていきます。波動方程式では、同じ差が**加速度**（2 回微分）を決めます。5-15 のばねと同じで、平均へもどろうとした玉は、勢いあまって通りこし、ゆれ続けます。この「ゆれ」が、となりへとなりへと伝わっていくのが波です。

波の表計算

時刻も Δt ごとに区切ります。加速度は、8-12 ④ の「差の差」を時間で使って $\frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\Delta t^2}$ です。これを波動方程式の左辺に入れ、y_i^{n+1} について解くと、

$$y_i^{n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1} + s^2(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n), \qquad s = \frac{c\,\Delta t}{\Delta x}$$

です。次の行を作るのに、今の行と 1 つ前の行の 2 つを使います（2 回微分の式だから。6-14 で、2 回微分の式に「位置と速度」の 2 つのはじめの値が要ったのと同じ）。$s = 1$ にすると、$2y_i^n$ と $-2y_i^n$ が消えて、とても簡単になります。

$$y_i^{n+1} = y_{i+1}^n + y_{i-1}^n - y_i^{n-1} \qquad (s = 1 \text{ のとき})$$

はじめに山の形（2、4、2）を作って、そっと手をはなした弦を計算します。手をはなした瞬間は止まっているので、1 歩前の行は 1 歩めの行と同じとみなせます（時間を逆向きにしても同じ動き）。上の式で $y_i^{-1} = y_i^1$ とおくと、$2y_i^1 = y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0$、つまり 1 歩めの行は「0 歩めのとなり 2 つの平均」になります。

歩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	2	4	2	0	0	0	0
1	0	0	0	1	2	2	2	1	0	0	0
2	0	0	1	2	1	0	1	2	1	0	0
3	0	1	2	1	0	0	0	1	2	1	0
4	1	2	1	0	0	0	0	0	1	2	1

表 6　$s = 1$ の波の表計算（1 行めの数は玉の番号）。高さ 4 の山が、高さ 2 の 2 つの山に分かれ、1 歩に 1 つずつ左右へ進む。

たとえば 2 歩めの玉 3 は、1 歩めの玉 4 の 1 と玉 2 の 0 をたし、0 歩めの玉 3 の 0 をひいて 1 です。山は、2 つに分かれて **1 歩に 1 マス**ずつ左右へ走っていきます。1 歩で Δx 進むので、速さは $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$（$s = 1$ だから）。c が波の速さだとわかります。

波の表計算がこわれない条件

s が 1 より大きい（1 歩で、波が 1 マスより先へ進む）と、熱の表計算の $r > \frac{1}{2}$ と同じように、ぎざぎざが育ってこわれます。

$$c\,\Delta t \leqq \Delta x \qquad (s \leqq 1)$$

「1 歩のあいだに、波がマス 1 つより遠くへ行ってはいけない」。となりのマスしか見ない計算では、2 マス先へ一気に進む波を表せないからです。$c = 100\,\mathrm{m/s}$、$\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$ なら、$\Delta t \leqq \frac{0.01}{100} = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$ です（例題 5）。

9 ダランベールの解：形を保って走る波

表計算では、山が形を変えずに走りました。これを式で確かめます。どんな形の関数 f でも、

$$y = f(x - ct)$$

は波動方程式をみたします。8-3 の連鎖律（5-6 の合成関数の微分）で、$u = x - ct$ とおいて計算します。

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f'(u) \times \frac{\partial u}{\partial t} = -c\,f'(u) \qquad u \text{ を } t \text{ で微分すると } -c$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -c \times (-c)\,f''(u) = c^2 f''(u) \qquad \text{もう一度 } t \text{ で微分}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(u), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(u) \qquad u \text{ を } x \text{ で微分すると } 1$$

1 行め・2 行めの $c^2 f''(u)$ は、3 行めの $f''(u)$ の c^2 倍です。だから $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ がなり立ちます。

$f(x - ct)$ は、時刻 t では、$f(x)$ のグラフを右へ ct だけずらした形です（3-9：x を $x - p$ にすると、グラフは右へ p ずれる）。1 秒で c 進むので、**形を保った**

まま速さ c で右へ走る波です。同じように $g(x+ct)$ は左へ走る波です。2 つを合わせた

$$y = f(x-ct) + g(x+ct)$$

を、**ダランベールの解**といいます。表計算の「山が 2 つに分かれて左右へ走る」は、f と g がどちらも「はじめの山の半分」の場合でした。

⑩ 空間の波：波数 k

いちばん大切な波は、sin の形の波です。

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

ω（オメガ）は角振動数（1 秒に進む角〔rad/s〕。5-15）でした。k は、**1 m 進むごとに角が何ラジアン変わるか**を表す数で、**波数**（はすう）といいます。波長（となりの山までの長さ）を λ とすると、λ 進むと角が 2π 変わるので、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{周期}}} \text{ と同じ形}\right)$$

です。時間の ω と、場所の k が対になっています。（波数の k は、熱伝導率の k とは別のものです。どちらも k と書く習慣なので、場面で見分けます。）

波動方程式に代入すると、$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$、$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y$（5-15）なので、$-\omega^2 y = c^2 \times (-k^2 y)$。だから

$$\omega = ck \qquad (f\lambda = c \text{ と同じこと})$$

両辺を 2π でわると、$\frac{\omega}{2\pi} = f$（振動数）、$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$ なので、中学理科の「波の速さ＝振動数×波長」になります。

6-10 のオイラーの公式を使うと、sin と cos の波をまとめて $y = e^{j(\omega t - kx)}$ と書けます（本当の波はその実部）。時間で微分すると $j\omega$ がかかり、場所で微分すると $-jk$ がかかるので、微分が「かけ算」になります。6-13 の強制振動で $e^{j\omega t}$ を使ったのと同じ考えで、電磁波や音の専門書でよく使われる書き方です。

11 物質微分：流れといっしょに動いて見る

最後に、物理シリーズ『力学』の 力-13・力-15 で「数学 8-13 で学ぶ」と約束した**物質微分**です。

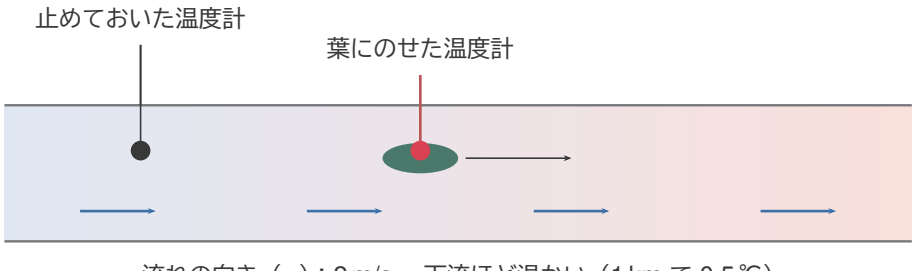


図 9　川の水温を 2 つの温度計ではかる。止めておいた温度計は「その場所」の変化、葉にのせて流れる温度計は「水といっしょに動きながら」の変化をはかる。

川の水温を考えます。水は下流へ 2 m/s で流れています。夕方で、どの場所でも水温は 1 時間に 1 ℃ずつ下がっています。一方、下流ほど水温が高く、1 km 下流へ行くと 0.5 ℃高くなっています。葉っぱにのせて流した温度計は、1 時間に何 ℃変わるでしょう。

止めておいた温度計は -1 ℃/h です。葉の温度計は、時間がたって冷える分に加えて、下流の温かい所へ運ばれる分も変わります。8-3 の連鎖律で、葉の場所 $x(t)$ での温度 $T(x(t),\ t)$ を時間で微分します。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x(t),\ t) = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

連鎖律（8-3）。t は 2 か所にある

$$= \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}$$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ は流れの速さ v

数を入れます。速さを〔km/h〕にそろえます。

$$2\,\mathrm{m/s} \times 3600\,\mathrm{s/h} = 7200\,\mathrm{m/h} = 7.2\,\mathrm{km/h}$$

$$v\frac{\partial T}{\partial x} = 7.2\,\mathrm{km/h} \times 0.5\,℃/\mathrm{km} = 3.6\,℃/\mathrm{h}$$

運ばれて変わる分

$$-1 + 3.6 = +2.6$$

その場の変化をたす

葉の温度計は、**1 時間に 2.6 ℃上がります**。その場では冷えているのに、流れにのると温かくなるのです。

このように、流れといっしょに動きながら見た変化を**物質微分**といい、$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ と立てた D で書きます。力-13 の言い方では「**水のつぶといっしょに動きながら見た変化**」です。3 次元では、流れの矢印 $\vec{v}$ と温度の勾配の内積（8-4）になります。

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,T = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,T$$

1 つめの項は「その場所で時間とともに変わる分」、2 つめの項は「流れに運ばれて、温度のちがう場所へ動くことで変わる分」です。$(\vec{v}\cdot\nabla)$ は、

$$(\vec{v}\cdot\nabla) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

という「はたらき」の記号で、$\vec{v}\cdot\mathrm{grad}$ と同じものです（力-13 は grad、力-15 は ∇ で書いています）。

水のつぶの加速度

温度 T のかわりに速さ $\vec{v}$ そのものを入れると、水のつぶの加速度になります（力-13・力-15）。

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\mathrm{grad})\,\vec{v}$$

たとえば、ホースの先のノズルで、流れが変わらない（$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$）のに、速さが $v = 1 + 10x$〔m/s〕（x はノズルの入口からの距離〔m〕）と下流ほど速くなっているとします。$x = 0.1\,\mathrm{m}$ では $v = 2$、$\frac{\partial v}{\partial x} = 10$ なので、水のつぶの加速度は $0 + 2\times 10 = 20\,\mathrm{m/s^2}$。その場所の速さは時間で変わらないのに、つぶは加速しているのです。

もっと知りたい ★★★★★

4 回の偏微分：板の曲げと、はりの振動

物理 力-10 で予告したように、床のような広い板の曲がり方は、たわみ $w(x,\ y)$ の **4 回の偏微分**が入った偏微分方程式で書けます。その中に出てくる

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2(\nabla^2 w)$$

は、ラプラシアンを 2 回はたらかせたものです。はりがゆれるときは、次の形になります（ρA は 1 m あたりの質量。物理『波』）。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ は「x で 4 回偏微分」の書き方です。

専門書をのぞいてみよう　大学の教科書ふうの書き方

拡散方程式 $u_t = \kappa u_{xx}$ を，陽的差分スキーム

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \mu\,(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \qquad \mu = \frac{\kappa\,\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

で解く。von Neumann の安定性解析より，安定条件は $\mu \leqq 1/2$ である。

訳　u_t は $\frac{\partial u}{\partial t}$、$u_{xx}$ は $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の短い書き方（この本では使わない：8-2）。κ（カッパ）はこの本の α、μ はこの本の r、j は場所の名札 i。「陽的差分スキーム」は、今の行だけから次の行を作る表計算の方法。「von Neumann の安定性解析」は、⑤のように、でこぼこの形ごとの 1 歩の倍率を調べる方法。

もっと知りたい ★★★★

差分法と有限要素法

この章のように、となりとの差で微分を置きかえて計算する方法を**差分法**といいます（物理 力-16）。形が四角くない物（車の部品、骨、橋）では、物を小さな三角形や四面体に分けて計算する**有限要素法**がよく使われます。どちらも、最後は「となりどうしの関係」を並べた大きな連立方程式や、1歩の行列のくり返し（7-5・7-10）になります。

たいせつ

1 歩の式 $T_i^{n+1} = T_i^n + r(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$、$r = \dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leqq \dfrac{1}{2}$

熱方程式 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$（3 次元は $\alpha \nabla^2 T$）

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$、答え $f(x-ct) + g(x+ct)$、$c\Delta t \leqq \Delta x$

物質微分 $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\, T$

この章で出てきたことば

熱方程式 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$。拡散方程式ともいう。

熱拡散率 $\alpha = \frac{k}{\rho c}$〔m²/s〕。熱のしみ広がりやすさ。

初期条件 はじめの時刻の、どの場所の値も決める条件。

波動方程式 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$。$c$ は波の速さ。

波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$。1 m で角が何ラジアン変わるか。

物質微分 流れといっしょに動きながら見た変化 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$。

差分法 となりとの差で微分を置きかえて計算する方法。

記号カード　初めて出た章 **8-13**

T_i^n

読み方　ティー・アイ・エヌ
意味　i 番めの場所の、n 歩めの値。右上の n は時刻の名札で、n 乗ではない
英語　grid value

記号カード　初めて出た章 **8-13**

$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$

読み方　ディー・ティー・ディー・ティー
意味　物質微分。流れといっしょに動いて見た変化。$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\, T$
英語　material derivative

例題でたしかめよう

例題 1　表計算の 1 歩

$r = 0.2$ の熱の表計算で、ある時刻の温度が左から 80（左はし）、50、30、20（℃）です。左はしは 80 ℃のままです。次の時刻の 2 番め（50 ℃の点）と 3 番め（30 ℃の点）の温度を求めましょう。

考え方　次の温度＝今の温度＋ r×（左 −2× 自分 ＋ 右）（③）。

式　2 番め：$50 + 0.2 \times (80 - 2 \times 50 + 30) = 50 + 0.2 \times 10 = 52$

3 番め：$30 + 0.2 \times (50 - 2 \times 30 + 20) = 30 + 0.2 \times 10 = 32$

答え　52 ℃と 32 ℃

じぶんでとこう 1

$r = 0.3$ の熱の表計算で、ある時刻の温度が左から 100（左はし）、60、40、30（℃）です。左はしは 100 ℃のままです。次の時刻の 2 番めと 3 番めの温度を求めましょう。

例題 2　こわれない Δt

銅の棒（$\alpha = 1.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$）を $\Delta x = 0.005\,\mathrm{m}$ のマスに分けて、$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ で表計算します。(1) r を求め、こわれないか判定しましょう。(2) こわれない一番大きい Δt を求めましょう。

考え方　$r = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}$。こわれないのは $r \leqq \frac{1}{2}$（⑤）。

式　(1) $r = \dfrac{1.2 \times 10^{-4} \times 0.1}{0.005^2} = \dfrac{1.2 \times 10^{-5}}{2.5 \times 10^{-5}} = 0.48$

$0.48 \leqq 0.5$ なので、こわれない

(2) $\Delta t = \dfrac{\Delta x^2}{2\alpha} = \dfrac{2.5 \times 10^{-5}}{2.4 \times 10^{-4}} = 0.104$

答え　(1) $r = 0.48$、こわれない。(2) 約 $0.104\,\mathrm{s}$

じぶんでとこう 2

ステンレスの板（$\alpha = 4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$）を $\Delta x = 0.002\,\mathrm{m}$ に分け、$\Delta t = 0.6\,\mathrm{s}$ で表計算します。(1) r を求め、こわれないか判定しましょう。(2) こわれない一番大きい Δt を求めましょう。

こわれない Δt の上限 $\Delta x^2/(2\alpha)$ は、Δx^2 に比例します。マスを半分の大きさにすると、Δt の上限は $\frac{1}{4}$ になります（例題 2 の銅の棒なら、$\Delta x = 0.0025\,\mathrm{m}$ で約 $0.026\,\mathrm{s}$）。細かいマスで計算するほど、たくさんの歩数が必要になるのです。

例題 3　ぎざぎざの 1 歩の倍率

熱の表計算で、温度が $+2$、-2、$+2$、-2、…と交互になっています（基準からの差）。(1) $r = 0.3$ のとき、$+2$ の点は 1 歩で何になりますか。1 歩の倍率も答えましょう。(2) $r = 0.55$ のとき、くり返すとどうなりますか。

考え方　ぎざぎざは 1 歩で $1 - 4r$ 倍（⑤）。大きさが 1 より大きいとこわれる（7-10）。

式　(1) $2 + 0.3 \times ((-2) - 2 \times 2 + (-2)) = 2 + 0.3 \times (-8) = -0.4$

倍率は $1 - 4 \times 0.3 = -0.2$（$2 \times (-0.2) = -0.4$ と合う）

(2) $1 - 4 \times 0.55 = 1 - 2.2 = -1.2$。大きさ 1.2 は 1 より大きい

答え　(1) -0.4、-0.2 倍（ゆれながら消える）。(2) -1.2 倍ずつ、ゆれながら育ってこわれる

じぶんでとこう 3

熱の表計算で、温度が $+3$、-3、$+3$、…と交互になっています。(1) $r = 0.1$ のとき、$+3$ の点は 1 歩で何になりますか。1 歩の倍率も答えましょう。(2) $r = 0.7$ のとき、くり返すとどうなりますか。

例題 4　熱方程式に代入する

$\alpha = 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$ の棒で、$T = 10\,e^{-0.0987t} \sin 31.4x$ が熱方程式をみたすことを確かめ、でこぼこが半分になる時間を求めましょう（$31.4^2 = 986$、$\ln 2 = 0.693$）。

考え方　t で微分した式と、x で 2 回微分して α をかけた式をくらべる（⑦）。

式　$\dfrac{\partial T}{\partial t} = -0.0987 \times 10\,e^{-0.0987t} \sin 31.4x = -0.0987\,T$

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -31.4^2\,T = -986\,T$

$\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1 \times 10^{-4} \times (-986\,T) = -0.0986\,T$（丸めのちがいだけで同じ）

半分：$e^{-0.0987t} = \frac{1}{2}$ から $t = \dfrac{\ln 2}{0.0987} = \dfrac{0.693}{0.0987} = 7.0$

答え　みたす。約 7.0 秒

じぶんでとこう 4

$\alpha = 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$ の棒で、$T = 10\,e^{-0.395t} \sin 62.8x$ が熱方程式をみたすことを確かめ、でこぼこが半分になる時間を求めましょう（$62.8^2 = 3944$、$\ln 2 = 0.693$）。

例題 5　波の表計算

$s = 1$ の波の表計算で、玉 1〜7 のずれが、1 つ前の時刻に 0、1、2、1、0、0、0、今の時刻に 0、0、1、2、1、0、0 でした。(1) 次の時刻の玉 2〜6 のずれを求めましょう（玉 1 と玉 7 は 0 のまま）。(2) $c = 100\,\mathrm{m/s}$、$\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$ のとき、$s = 1$ になる Δt を求めましょう。

考え方　次＝右どなり（今）＋左どなり（今）－自分（1 つ前）（⑧）。$s = \dfrac{c\,\Delta t}{\Delta x}$。

式　(1) 玉 2：$1+0-1=0$　玉 3：$2+0-2=0$　玉 4：$1+1-1=1$

玉 5：$0+2-0=2$　玉 6：$0+1-0=1$

(2) $\Delta t = \dfrac{s\,\Delta x}{c} = \dfrac{1 \times 0.01}{100} = 1 \times 10^{-4}$

答え　(1) 0、0、1、2、1（山が右へ 1 マス進んだ）。(2) $1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$

じぶんでとこう 5

$s = 1$ の波の表計算で、玉 1〜7 のずれが、1 つ前の時刻に 0、0、0、1、3、1、0、今の時刻に 0、0、1、3、1、0、0 でした。次の時刻の玉 2〜6 のずれを求めましょう（玉 1 と玉 7 は 0 のまま）。

例題 6　形を保って走る波

$y=\sin(2x-200t)$ が波動方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ をみたすときの c を求め、波がどちら向きに走るか答えましょう。

考え方　t で 2 回、x で 2 回微分してくらべる（⑨・⑩）。

式　$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-200^2\sin(2x-200t)=-40000\,y$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2^2\sin(2x-200t)=-4\,y$

$-40000\,y=c^2\times(-4\,y)$ から $c^2=10000$、$c=100$

$2x-200t=2(x-100t)$ なので、$f(x-ct)$ の形（$c=100$）

答え　$c=100\,\mathrm{m/s}$。右（x がふえる向き）へ走る

じぶんでとこう 6

$y=3\sin(5x+1500t)$ が波動方程式をみたすときの c を求め、波がどちら向きに走るか答えましょう。

例題 7　波長・波数・角振動数

音の速さを 340 m/s とします。440 Hz の音（ピアノのラの音）の波長 λ、波数 k、角振動数 ω を求めましょう。

考え方　$\lambda=\dfrac{c}{f}$、$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$、$\omega=2\pi f$。確かめに $\omega=ck$（⑩）。

式　$\lambda=\dfrac{340}{440}=0.773$

$k=\dfrac{2\pi}{0.773}=8.13$、$\omega=2\pi\times440=2765$

確かめ：$ck=340\times8.13=2764$（ω と、丸めのちがいだけで同じ）

答え　$\lambda\approx0.773\,\mathrm{m}$、$k\approx8.13$〔1/m〕、$\omega\approx2765$〔rad/s〕

じぶんでとこう 7

弦を伝わる波の速さが 100 m/s です。200 Hz の波の波長 λ、波数 k、角振動数 ω を求めましょう。

例題 8　流れにのった温度計

川が下流へ 2 m/s で流れています。どの場所でも水温は 1 時間に 1 ℃ずつ下がっていて、1 km 下流へ行くと水温は 0.5 ℃高くなります。流れにのった温度計の温度は、1 時間に何 ℃変わりますか。

考え方　$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + v\dfrac{\partial T}{\partial x}$（⑪）。単位を〔km〕と〔h〕にそろえる。

式　$v = 2\,\mathrm{m/s} \times 3600\,\mathrm{s/h} = 7200\,\mathrm{m/h} = 7.2\,\mathrm{km/h}$

$$v\frac{\partial T}{\partial x} = 7.2 \times 0.5 = 3.6\ 〔℃/\mathrm{h}〕$$

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = -1 + 3.6 = 2.6\ 〔℃/\mathrm{h}〕$$

答え　1 時間に 2.6 ℃上がる

じぶんでとこう 8

西風が東へ 5 m/s で吹いています。どの場所でも気温は 1 時間に 0.5 ℃上がっていて、100 km 東へ行くと気温は 1 ℃高くなります。風にのった空気の温度は、1 時間に何 ℃変わりますか。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

Δt を大きくすれば速く計算できる

✕ Δt を 10 倍にすれば、10 倍速く答えが出る

○ $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leqq \frac{1}{2}$ をこえると、計算がこわれる

こわれた計算は、ぎざぎざが育って意味のない数になります。Δt を変えたら、まず r を確かめます（⑤）。

まちがえやすいところ

r の Δx を 2 乗し忘れる

✕ $r = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{10^{-4} \times 0.25}{0.01} = 0.0025$

○ $r = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2} = \dfrac{10^{-4} \times 0.25}{0.01^2} = 0.25$

単位で確かめます。$\frac{\mathrm{m^2/s \times s}}{\mathrm{m}}$ では m が残り、r が単位のない数になりません（①）。

まちがえやすいところ

はしの点にも 1 歩の式を使う

✕ 左はしの B 列にも `=B2+0.25*(…)` を入れる

○ はしの点は、境界条件（100℃のまま、熱が出ないなど）で決める

はしの点には、片方のとなりがありません。はしでどうなっているかは、外から決まっています（③）。

⚠ まちがえやすいところ

$\dfrac{\partial T}{\partial t}$ と $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ を取りちがえる

✕ 流れにのった温度計も、その場の変化と同じ $-1\,℃/\mathrm{h}$

○ 流れにのると $\dfrac{\partial T}{\partial t}+v\dfrac{\partial T}{\partial x}=+2.6\,℃/\mathrm{h}$

$\dfrac{\partial T}{\partial t}$ は「同じ場所」で見た変化、$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ は「水といっしょに動いて」見た変化です（⑪）。

⚠ まちがえやすいところ

波の式で c と c^2 を取りちがえる

✕ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ で、$c=10000$ として速さ $10\,000\,\mathrm{m/s}$

○ $c^2=10000$ なので、速さは $c=100\,\mathrm{m/s}$

波動方程式の係数は c^2 です。$y=f(x-ct)$ を代入すると c^2 が出てくることで確かめられます（⑨）。

⚠ まちがえやすいところ

T_i^n の右上の n を、n 乗と読む

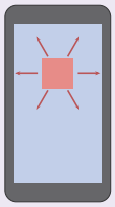
✕ T_3^2 は $T_3\times T_3$

○ T_3^2 は「3 番めの点の、2 歩めの温度」

右上は時刻の名札です。本によっては $T_3^{(2)}$ とかっこをつけて区別します。

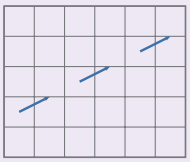
物理・工学ではこう使う

- **スマートフォンの熱をにがす**
  スマートフォンの中では、小さな部品が熱を出します。設計では、本体を細かいマスに分けて 3 次元の熱方程式（熱の生まれる分を加えたもの）をコンピュータで解き、銅の板やシートで熱を広げて、手でさわる面が熱くなりすぎないようにします。8-0 で見た場面です。



- **地震の波・楽器の弦**
  地震の波は、地下の岩の中を波動方程式にしたがって伝わります。ギターやピアノの弦の音の高さは、⑧の $c = \sqrt{F/\mu}$ と弦の長さで決まります。張力 F を強くすると c が大きくなり、音が高くなります（物理『波』）。

- **天気予報の計算**
  天気予報では、大気を何千万～何億ものマスに分け、風に運ばれる気温や水蒸気（⑪の物質微分）を、となりのマスとの差で少しずつ先の時刻へ進めます。マスを細かくすると、こわれないように Δt も小さくしなければならず、計算の量が大きくふえます（⑤）。



コラム　こわれない条件に名前をつけた 3 人

波の表計算の条件 $c\,\Delta t \leqq \Delta x$ は、ドイツのクーラン、フリードリッヒス、レヴィの 3 人が 1928 年の論文で示したことから、3 人の頭文字をとって**CFL 条件**とよばれています。コンピュータがまだない時代に、「となりのマスとの差で計算するとき、答えが正しく近づくのはどんなときか」を調べた研究でした。のちにコンピュータで天気や流れを計算するようになると、この条件は、計算をする人が最初に確かめる決まりになりました。弦の波の式を作ったのはダランベール（1747 年）、熱の式を作ったのはフーリエ（1822 年の本。6-3）と伝えられています。

章末問題　8-13 のまとめ

基本 ★★★★★

1　$r = 0.25$ の熱の表計算で、ある時刻の温度が左から 90（左はし）、60、40、30（℃）です。左はしは 90 ℃のままです。次の時刻の 2 番めと 3 番めの温度を求めましょう（例題 1）。

2　アルミの棒（$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$）を $\Delta x = 0.02\,\mathrm{m}$ に分け、$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ で表計算します。(1) r を求め、こわれないか判定しましょう。(2) こわれない一番大きい Δt を求めましょう（例題 2）。

3　熱の表計算で、温度が $+5$、-5、$+5$、…と交互です。(1) $r = 0.45$ のときの 1 歩の倍率を求め、$+5$ の点が 1 歩で何になるか答えましょう。(2) $r = 0.75$ のとき、くり返すとどうなりますか（例題 3）。

4　$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$ の棒で、$T = 8\,e^{-0.888t} \sin 94.2x$ が熱方程式をみたすことを確かめ、でこぼこが半分になる時間を求めましょう（$94.2^2 = 8874$、$\ln 2 = 0.693$）（例題 4）。

5 $s=1$ の波の表計算で、玉 1〜7 のずれが 1 つ前に 0、2、4、2、0、0、0、今 0、0、2、4、2、0、0 のとき、次の時刻の玉 2〜6 を求めましょう（例題 5）。

6 $y=\sin(4x-1200t)$ が波動方程式をみたすときの c を求め、波がどちら向きに走るか答えましょう（例題 6）。

7 音の速さを 340 m/s とします。1000 Hz の音の波長 λ、波数 k、角振動数 ω を求めましょう（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

8 川が下流へ 1 m/s で流れています。どの場所でも水温は 1 時間に 0.5 ℃ずつ上がっていて、1 km 下流へ行くと水温は 0.2 ℃低くなります。流れにのった温度計の温度は、1 時間に何 ℃変わりますか（例題 8）。

9 鉄の棒（$\alpha=2.3\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$、$\Delta x=0.01\,\mathrm{m}$）の、(1) こわれない最大の Δt、(2) $\Delta t=3\,\mathrm{s}$ での r と 1 歩の倍率は？（例題 2・例題 3）。

10 空気の中の音（$c=340\,\mathrm{m/s}$）を、$\Delta x=0.017\,\mathrm{m}$ のマスで、$s=1$ の波の表計算にします。Δt を何秒にすればよいですか（例題 5）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 棒の温度を「となりとの差」の表計算で計算できる。 → 536 ページ
- ☐ こわれない条件 $r\leqq\frac{1}{2}$ を 1 歩の倍率で説明できる。 → 544 ページ
- ☐ 熱と波の方程式を作り、代入して確かめられる。 → 547 ページ

ミナ

熱はならされて消え、波はゆれながら走る。次の 8-14 では、電気と磁気や水の流れの式を、この巻のことばで読んでみよう。

第 4 部　偏微分方程式

★★★★★

8-14 div と rot で書かれた式を読もう

道しるべ　この章の前に 8-4 8-9 8-10 8-11 8-12 8-13　この章の先に 9-0

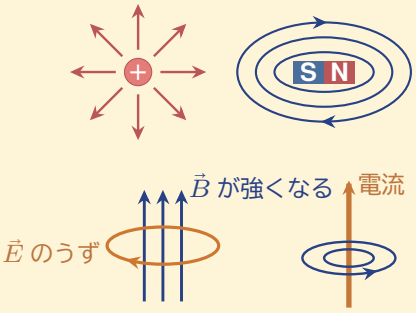
この章でできるようになること

- ★★★★ 電気と磁気の 4 つの式（マクスウェル方程式）を、「わき出し」と「うず」のことばで読める。
- ★★★★★ 積分形と微分形が同じことを言っているわけを、ガウスの定理とストークスの定理で説明でき、4 つの式から光の速さが出てくる道すじをたどれる。
- ★★★★★ 流れの式・熱の式の項を 1 つずつ、この巻の道具（grad・div・rot・∇^2・物質微分）のことばに訳せる。

? はてな？

モーター、発電機、IH 調理器、スマホの電波、そして光。電気と磁気が関わるできごとは、すべて、たった 4 つの式から出てくるといわれます。

その 4 つの式は、何を言っているのでしょう。そして、「光は電気と磁気の波だ」ということは、どうしてわかったのでしょう。



思い出そう この章で使う、前に学んだこと

8-4 $\mathrm{grad}\, f$ は、いちばん急に増える向きの矢印。電場は電位の坂を下る向き：$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, \phi$。

8-9 $\mathrm{div}\, \vec{F}$ は、小さな箱から出ていく量÷箱の体積（わき出し）。$\mathrm{div}\, \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$、$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$。

8-10 $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ は、小さなマスのまわりを 1 周してたしたものを面積でわったもの（うず）。導線の中で $\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$。$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = 0$。

8-11 ガウスの定理：閉じた面から出る量＝中の div の合計。ストークスの定理：閉じた道の 1 周＝中の rot の合計。

8-12 $\nabla^2 f$ は「まわりの平均との差」。$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$。

8-13 熱方程式 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$。波動方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ の c は波の速さ。物質微分 $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$。

この章は**読みもの**です。例題や問題はありません。8-1〜8-13 で作った道具を使って、電気と磁気・水の流れ・熱の「基本の式」を読んでいきます。式を解くのではなく、式の 1 つ 1 つの記号が「何を言っているか」を、この巻のことばに訳すことが目標です。長い式でも、1 つずつ訳していけば大丈夫です。

この章を読むときに使うことばは、2 つだけです。

ことば	意味	式の記号
わき出し（発散）	小さな箱から出ていく量（8-9）	div、$\nabla\cdot$
うず（回転）	小さなマスのまわりを 1 周（8-10）	rot、$\nabla\times$

表 1 この章で使う 2 つのことば。専門書の書き方（∇）は、8-4・8-9・8-10 で並べて見せたもの。

電気と磁気の 4 つの式

1 4 つの式を並べる

8-9〜8-11 で、電気と磁気の式がいくつか出てきました。それを全部集めると、次の 4 つになります。左の列は、8-11 で袋や道を選んで使った形（**積分形**）、右の列は、8-9・8-10 で場所ごとに書いた形（**微分形**）です。どちらも同じことを言っています（③）。

	積分形（袋・道で）	微分形（場所ごとに）	読み方
(1)	$\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$	$\displaystyle \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	電荷は電場のわき出し
(2)	$\displaystyle\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$	$\displaystyle \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	磁場にわき出しはない
(3)	$\displaystyle\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$	$\displaystyle \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	変わる磁場は電場のうずを作る
(4)	$\displaystyle\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\text{中}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$	$\displaystyle \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	電流と変わる電場は磁場のうずを作る

表 2　電気と磁気の 4 つの式（物のない所の形。電荷や電流はあってよい）。Φ_B は道 C をふちとする面を通る磁場の流束（磁束）、Φ_E は電場の流束（8-8）。

この 4 つをまとめて**マクスウェル方程式**といいます。記号の意味は、次のとおりです。

記号	意味	単位
$\vec{E}$	電場（電気の力の場。1 C の電荷にはたらく力）	〔V/m〕＝〔N/C〕
$\vec{B}$	磁場（磁束密度）	〔T〕
ρ	電荷の密度（1 m^3 あたりの電荷）	〔C/m³〕
$\vec{j}$	電流密度（1 m^2 あたりの電流。8-10）	〔A/m²〕
ε_0	真空の誘電率 $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$（自然の定数）	〔F/m〕
μ_0	真空の透磁率 $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$（自然の定数）	〔N/A²〕

表 3 4 つの式に出てくる記号。ε_0 と μ_0 は、2019 年の SI の改定からは測って決める値で、ほぼ 8.854×10^{-12} F/m、$4\pi \times 10^{-7}$ N/A²（T·m/A と同じ単位）。

左の積分形は、どれも 8-0 で約束した「操作の名前」です。たとえば（1）の左辺は、次のように読みます。

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

名前

名前「閉じた面 S の上で（◯は閉じている印）、電場の矢印と外向きのタイル $\vec{n}\,\mathrm{d}S$ の内積を、たし合わせる」。電場が面を外へ通りぬける量（電場の流束 Φ_E）です。8-11 では、これを実際に計算する方法（直す段・楽をする段）を、場合 G3（対称な袋を選ぶ）・S4（対称な道を選ぶ）として見ました。この章では、計算はせずに、**名前の段だけで読みます**。

2 1 つずつ読む

（1）電荷は、電場のわき出し

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ は、「電荷のある所から電場がわき出し（プラスの電荷）、吸いこまれる（マイナスの電荷）。電荷のない所では、わき出しも吸いこみもない」と読みます（8-9）。積分形では、「どんな袋でも、電場が外へ出ていく量は、中の電荷を ε_0 でわったもの」です。袋の形によらないので、点電荷を中心とする球

の袋を選ぶと、電場の大きさ $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ が出てきました（8-11 の G3）。高校物理の「電気力線の本数 $4\pi kQ$」は、この式の言いかえです。

（2）磁場にわき出しはない

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ は、「磁場には、わき出しも吸いこみもない」と読みます。磁石を細かく切っても、N 極だけ、S 極だけの磁石はできません（8-9）。磁力線は、磁石の外では N 極から S 極へ、中では S 極から N 極へ進み、いつも輪になってつながっています。ですから、どんな袋をとっても、入る磁力線と出る磁力線は同じ数で、流束は 0 です。

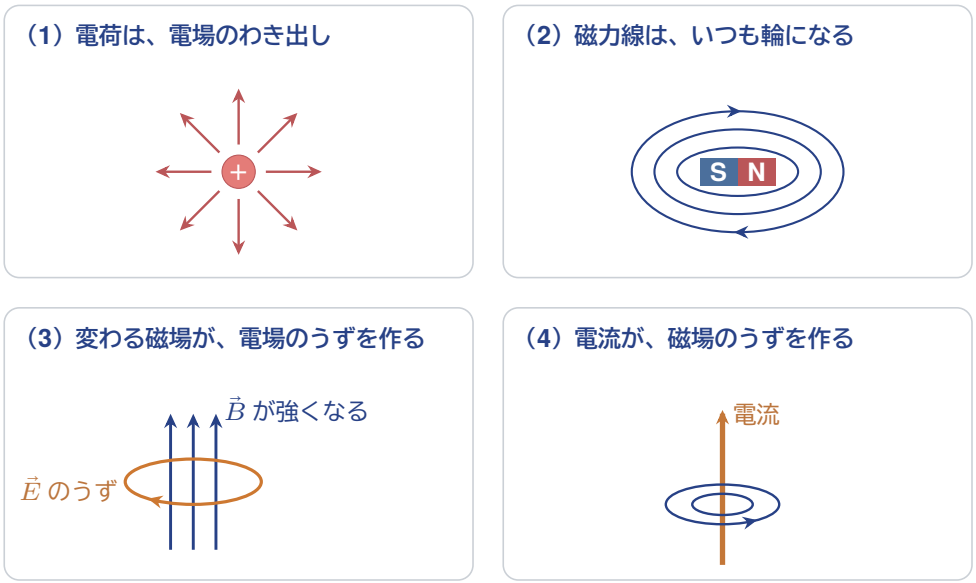


図 1　4 つの式が言っていること。（4）では、電流のまわりの磁場が、上から見て左回り（右ねじの向き）に回る。

（3）変わる磁場は、電場のうずを作る

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ は、「磁場が時間とともに変わる所には、電場のうずができる」と読みます。積分形（8-11 の S6）は「道を 1 周したときの電場の線積分（コイルに生まれる電圧）は、道を通る磁束の減り方に等しい」で、これがファラデーの電磁誘導の法則です。発電機は、コイルの中の磁束を回転で変えて、電圧を作ります。IH 調理器は、1 秒に 2 万〜9 万回行ったり来たりする電流（周波数 20

～90 kHz）をコイルに流して、なべの底を通る磁場を変え、なべの底に電場のうずを作ります。そのうずが金属のなべに流す電流（うず電流）で、熱を出します。変圧器も、変わる磁束が別のコイルに電圧を生むしくみで、電圧を変えています。マイナスの記号は、「うずは、磁場の変化をさまたげる向きに回る」という意味です（レンツの法則）。

磁場が変わらないとき、(3) は $\mathrm{rot}\,\vec{E}=\vec{0}$ です。8-10 で見たように、うずのない場は坂の矢印で書けるので、$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi$（8-4 の電位）になります。電池や静電気の電場は、この場合です。

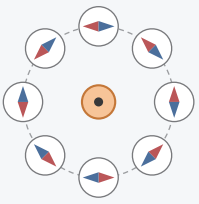
(4) 電流と、変わる電場は、磁場のうずを作る

$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\cdots$ の 1 つめの項は、8-10 で見た「導線の中では $\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$、外では 0」です。磁場のうずは、電流が流れている所にあります。積分形（8-11 のアンペールの法則）で、導線のまわりの円の道を選ぶと、$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ が出てきました（S4）。10 A の電流から 5 cm の所では $B=4\times10^{-5}$ T で、地球の磁場（日本ではおよそ 4.5×10^{-5} T）と同じくらいです。

2 つめの項 $\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ は、電流がなくても、**電場が時間とともに変わる所には、磁場のうずができる**と言っています。この項は、マクスウェルが、ほかの式との矛盾をなくすために付け加えたものです。次の④で、その理由をこの巻の道具で確かめます。

コラム　方位磁針で、磁場のうずを見る

まっすぐな導線のまわりに方位磁針を円く並べて電流を流すと、針は導線を囲む円にそって並びます。1820 年に、デンマークのエルステッドが気づいたと伝えられている実験で、(4) の 1 つめの項 $\mu_0\vec{j}$（電流は磁場のうずを作る）そのものです。



上から見た図（電流は手前へ）

③ 積分形と微分形は、同じことを言っている

8-11 の「せいかくに言うと」で、ガウスの法則（積分形）から、微分形 $\operatorname{div}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ を出しました。同じ考えで、(3) の積分形から微分形を出してみます。道 C と、それをふちとする面 S を、動かさずに考えます。

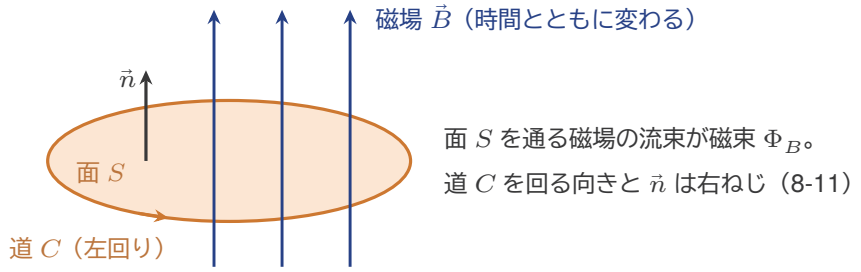


図 2　道 C と、それをふちとする面 S。(3) の左辺は道 C の上の線積分、右辺は面 S を通る磁束の変わり方。

$$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

(3) の積分形

$$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

左辺にストークスの定理 (8-11)

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

磁束 $\Phi_B=\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ を時間で微分（面は動かない）

$$\iint_S\left(\operatorname{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0$$

2 つを 1 つの面積分にまとめた

$$\operatorname{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}$$

どんなに小さな面でも 0 なので、中身が 0

最後の行は、8-11 と同じ理屈です。面はどこに、どの向きに、どんなに小さくとってもよいので、かっこの中身が 0 でない所が 1 か所でもあると、そこに小さな面をとったときに積分が 0 になりません。だから、どこでも中身が 0 です。こうして (3) の微分形 $\operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ が出てきました。(1) (2) はガウスの定理で、(4) は同じくストークスの定理で、積分形と微分形を行き来できます。

	積分形	微分形
見ているもの	袋全体・道全体	1 つの場所
使う道具	面積分・線積分（8-7・8-8）	div・rot（8-9・8-10）
得意なこと	対称な場の大きさを求める（8-11 の G3・S4）	場所ごとに何が起きているかを見る。波の式を作る（⑤）
つなぐもの	ガウスの定理・ストークスの定理（8-11）	

表 4 積分形と微分形のちがい

④ マクスウェルが付け加えた項

（4）の 2 つめの項がないと、どこがおかしくなるのでしょう。8-10 で、どんな $\vec{F}$ でも $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$（うずの矢印の場には、わき出しがない）を確かめました。もし（4）が $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ だけだとすると、両辺の発散をとって、

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{B}) = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} \qquad \text{両辺の発散をとった}$$

$$0 = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} \qquad \text{左辺は、いつも 0（8-10）}$$

となり、「電流には、どこにもわき出しがない（$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$）」ことになってしまいます。ところが、コンデンサーに電気をためている間は、＋の極板には電流が流れこむだけで、すきまをこえては流れ出ません。＋の極板では電流が吸いこまれ（－の極板ではわき出し）、電荷がたまっていきます。電荷の連続の式（8-9 と同じ形。電荷は勝手に生まれも消えもしない）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

で、$\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ が 0 でない所では、$\mathrm{div}\,\vec{j}$ は 0 になりません。

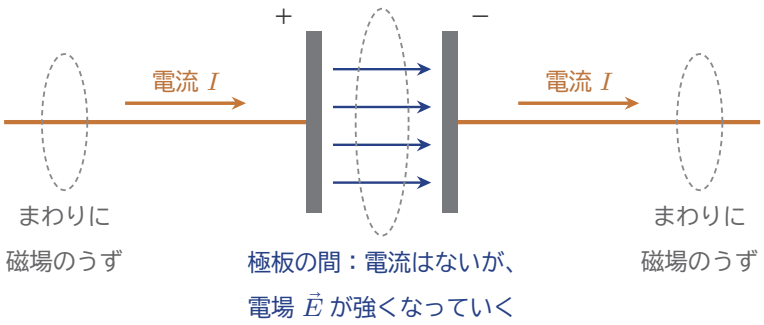


図 3　電気をためているコンデンサー。導線のまわりにも、極板をすっぽり囲む輪（まん中の点線）のまわりにも、同じ磁場のうずができる。極板の間で磁場のうずを作っているのは、強くなっていく電場（(4) の 2 つめの項）。

マクスウェルは、2 つめの項 $\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ を付け加えました。すると、両辺の発散をとったときに、

$$0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}$$

両辺の発散をとった（左辺は 0）

$$= \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

(1) の $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ を入れた

$$= \mu_0\left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

ε_0 が約分された

となり、かっこの中は電荷の連続の式そのものなので、ちゃんと 0 になります。矛盾がなくなりました。コンデンサーの極板の間では、電流のかわりに、強くなっていく電場が磁場のうずを作っています。この項がある、ということが、次の⑤の電磁波につながります。

⑤ 4 つの式から、光の速さが出てくる

電荷も電流もない所（$\rho = 0$、$\vec{j} = \vec{0}$）では、4 つの式は次のようになります。

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

「変わる磁場が電場のうずを作り、変わる電場が磁場のうずを作る」。この 2 つがくり返されて、電場と磁場の変化が、次々と空間を伝わっていきます。

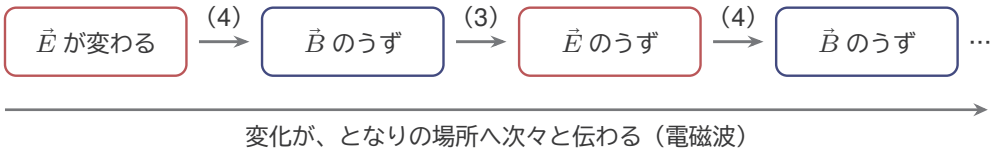


図 4 変わる電場が磁場のうずを作り（(4) の 2 つめの項）、そのうずが変わると電場のうずを作る（(3)）。このくり返しで、電場と磁場の変化が空間を伝わっていく。

これを式でたどります。(3) の両辺の回転をとります。

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

(3) の両辺の回転をとった（t の微分と順番を入れかえた：8-2）

$$= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

右辺に（4）を入れた

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$$

8-12 の専門書をのぞいてみようの式

$$= -\nabla^2\vec{E}$$

電荷がない所では $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E}$$

2 つを等しいとおき、$-\mu_0\varepsilon_0$ でわった

最後の式は、8-13 の波動方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ の 3 次元の形です（∇^2 は成分ごと：8-12）。だから、電場は波として伝わり、その速さ c は $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ から求められます。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

波の速さ（8-13 の c と同じ役目）

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times8.854\times10^{-12}}}$$

2 つの自然の定数を入れた

$$\approx 3.00\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

電卓（Python）で計算した

これは、光の速さ（約 3.00×10^8 m/s）とぴったり同じです。ε_0 と μ_0 は、もともとコンデンサーや電流のまわりの磁場の実験からはかった数で、光とは関係

がありませんでした。それなのに、そこから光の速さが出てきたのです。マクスウェルは、このことから「光は、電場と磁場の波（**電磁波**）である」と考えました。磁場も同じ波動方程式をみたします（(4) の回転をとって、同じように計算できます）。

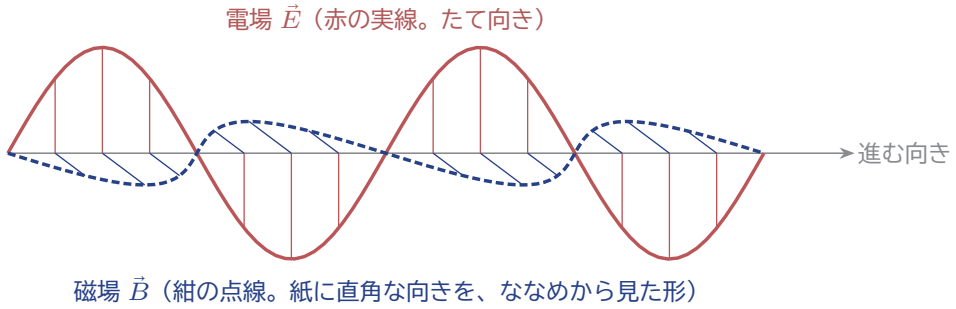


図 5　電磁波のようす（模式図）。電場と磁場は、進む向きにも、たがいにも直角で、いっしょに変化しながら速さ c で進む。

コラム　マクスウェルとヘルツ

イギリスのマクスウェルは、1860 年代に、それまでに見つかっていた電気と磁気の法則を 1 組の方程式にまとめ、電磁波が光の速さで伝わることを示しました。ただし、マクスウェルの書いた式は、今の形とはちがい、たくさんの成分の式でした。今のように div と rot（∇）を使った 4 つの式にまとめたのは、8-0 のコラムに出てきたヘビサイドたちです。

マクスウェルの予言した電磁波を、実験で本当に作って確かめたのは、ドイツのヘルツで、1888 年ごろのことです。周波数の単位「ヘルツ（Hz）」は、この人の名前です。今では、電波（スマホ・テレビ・電子レンジ）、赤外線、光、X 線は、どれも波長がちがうだけの電磁波だとわかっています。

水と空気の流れの式

6 連続の式：物は勝手に生まれも消えもしない

8-9 で作った連続の式を、もう一度読みます。ρ は流れているもの（水・空気）の密度、$\vec{v}$ は流れの速度です。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}) = 0$$

物理第 1 巻（力-13）と同じことばで、「**その点の密度が増える速さ＋その点からのわき出し＝ 0**」です。わき出しがあれば、その分だけ密度が減ります。電荷の連続の式（④）と、まったく同じ形です。水のように縮まないものでは、ρ が変わらないので、$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$（わき出しのない流れ）です。

ホースの先を指でつまむと、水は勢いよく飛び出します。$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ の流れでは、ホースの断面を通る量（流束、8-8）がどこでも同じなので、断面積が半分になれば、速さは 2 倍になります（8-9）。

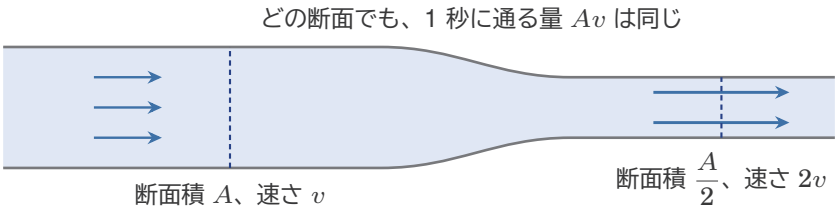


図 6 ホースの先を細くすると、速くなる。$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ なので、細い所でも 1 秒に通る水の量は同じ（8-9）。

7 ナビエ・ストークス方程式を読む

水や空気の流れの基本の式は、流れの中の小さなかたまりに「質量×加速度＝力」をあてはめたものです。物理第 1 巻（力-15）で読んだ式と同じ形で書きます（水は縮まないとした形）。これを**ナビエ・ストークス方程式**といいます。項を 1 つずつ、この巻のことばに訳すと、表 5 のようになります。

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}+\rho\vec{g}$$

流れが止まっているとき（$\vec{v}=\vec{0}$）は、左辺もねばりの項も 0 になり、$\nabla p=\rho\vec{g}$ です。物理第 1 巻（力-12）の静水圧の式で、深いほど圧力が大きくなることを表します。

項	この巻のことばでは	章
$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)$	密度×加速度。かっこの中は、流れにのって動くかたまりの加速度（物質微分 $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$）	8-13
$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$	同じ場所で、時間とともに速さが変わる分	8-2・8-13
$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$	速さのちがう場所へ運ばれて、速さが変わる分（ホースの細い所へ流れこむと速くなる）	8-13
$-\nabla p$	圧力の高い所から低い所へ押す力（圧力の勾配の反対向き）	8-4
$\mu\nabla^2\vec{v}$	ねばりの力。ラプラシアンは「まわりの平均との差」なので、ねばりは速さをまわりの平均にならそうとする	8-12
$\rho\vec{g}$	重力	8-5

表 5　ナビエ・ストークス方程式の読み方（物理第 1 巻 力-15 と同じ）。μ はねばりの強さ（粘度）。

この式は、連続の式と組にして使います。2 つの式は、ふつうは手で解けないので、空間を細かいマスに分け、8-13 の表計算と同じように、となりのマスとの差で式を書いて（差分法）、コンピュータで少しずつ時間を進めて解きます。天気予報、車や飛行機のまわりの空気の流れ、血管の中の血液の流れの計算は、この方法で行われています。

流れのうず：渦度

流れの速度の回転 $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ を、流れの本では**渦度**（うずど）といいます。8-10 で見たように、小さな風車を置いたとき、風車は渦度の半分の角速度で回ります。台風の中心付近や、飛行機の翼の後ろにできるうずは、渦度が大きい所です。（オ）のずれの流れのように、まっすぐ流れていても渦度がある所（川の岸の近く）もあります。

熱・におい・重力の式

8 熱方程式と拡散方程式

8-13 で、3 次元の熱方程式を作りました。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\nabla^2 T \qquad \left(\alpha = \frac{k}{\rho c}\right)$$

k は熱伝導率、ρ は物の密度、c は比熱です（この章の光の速さ c、電荷の密度 ρ とは別のもの）。この巻のことばに訳すと、次の 3 つの文をつないだものです。

1. 熱は、温度の坂を下る向きに流れる：$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$（フーリエの法則、8-4）。
2. 熱の流れのわき出しの分だけ、熱が減る：たまる熱は $-\mathrm{div}\,\vec{q}$（8-9）。
3. $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,T) = \nabla^2 T$（8-12）。だから「まわりの平均との差」に比例して温度が変わる。

温度がまわりの平均より低い所は温まり、高い所は冷えて、でこぼこはならされていきます。

コーヒーに入れたミルクが広がるようす、部屋の中でにおいが広がるようす、半導体の中の電子のちらばり、原子炉の中の中性子のちらばりも、同じ形の式で書けます。T のかわりに「もののこさ」を入れたこの形を、**拡散方程式**といいま

す。「こい所から、うすい所へ、こさの坂を下って広がる」という同じしくみだからです。

⑨ 重力のガウスの法則

重力の場 $\vec{g}$（1 kg にはたらく重力。8-5）も、電場とよく似た式で書けます。電荷のかわりに質量の密度 ρ を使い、

$$\operatorname{div}\vec{g} = -4\pi G\rho \qquad \left(\oiint_S \vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -4\pi G M_{\text{中}}\right)$$

です。$G = 6.674 \times 10^{-11}$〔N·m²/kg²〕は万有引力の定数です。マイナスは、重力が「わき出し」ではなく「吸いこみ」であること（物は引き合う）を表しています。8-11 では、この式で地球を球の袋でかこみ、地球の外では全部の質量が中心に集まったのと同じ力になること（地面で $g = 9.82$ m/s²）を示しました（物理第 1 巻 力-2 の約束）。

⑩ 場は「わき出し」と「うず」で決まる

ここまで読んだ式は、どれも「わき出し（div）」か「うず（rot）」か、その両方を決める式でした。これには理由があります。遠くへ行くほど 0 になる場なら、**わき出しの場所と量、うずの場所と強さがわかると、場全体が 1 つに決まる**ことが知られています。これを**ヘルムホルツの分解**といいます。場は、「わき出しだけの部分（坂の矢印 $-\operatorname{grad}\phi$ の形）」と「うずだけの部分」のたし算に分けられる、ということです。

場	わき出し（div）	うず（rot）
止まった電荷の電場	電荷の所 $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	なし（$-\operatorname{grad}\phi$ で書ける）
磁場	なし	電流と、変わる電場の所
縮まない水の流れ	なし	渦度のある所
重力	質量の所（吸いこみ）	なし

表 6　いろいろな場の、わき出しとうず

場	（ア）	（イ）	（ウ）	（エ）	（オ）	（カ）
	広がる	集まる	そろった	うず	ずれ	側溝
わき出し $\mathrm{div}\,\vec{F}$	2	−2	0	0	0	1
うず $\mathrm{rot}\,\vec{F}$	0	0	0	2	−1	0

表 7 主役の 6 つの場のわき出しとうず（8-9・8-10 の表と同じ数）。（ア）（イ）（カ）はわき出しだけ、（エ）（オ）はうずだけ、（ウ）はどちらもない。

主役の 6 つの場（8-5）では、表 7（8-9・8-10 の表と同じ数）のように、（ア）（イ）（カ）は「わき出しだけ」、（エ）（オ）は「うずだけ」の場でした。（ウ）は div も rot も 0 なのに、0 ではありません。遠くで 0 にならない場なので、「1 つに決まる」の条件からはずれます。電気と磁気の 4 つの式は、「電場と磁場の、わき出しとうずはどこにあるか」を全部書いたものなので、電場と磁場が決まるのです。8-0 で予告した「矢印の地図から、わき出す所と、うずを巻く所を読む」ことが、自然の基本の式の読み方そのものだったのです。

専門書をのぞいてみよう

11 専門書の書き方に訳す

大学の本では、同じ式が少しちがう記号で書かれています。表の左の列がこの本の書き方（物理シリーズも同じ）、右の列が専門書でよく見る書き方です。記号がちがっても、言っていることは同じです。

もの	この本	専門書でよく見る書き方
ベクトル（場）	$\vec{E}$、$\vec{v}$	$\mathbf{E}$、$\mathbf{v}$（太字）
勾配	$\operatorname{grad} f$	∇f
発散	$\operatorname{div} \vec{F}$	$\nabla \cdot \mathbf{F}$
回転	$\operatorname{rot} \vec{F}$	$\nabla \times \mathbf{F}$、$\operatorname{curl} \mathbf{F}$
ラプラシアン	$\nabla^2 f$	$\nabla^2 f$、Δf
閉じた面の積分	$\oiint_S$	$\oint_S$、$\oint_{\partial V}$
面のタイル	$\vec{n}\,\mathrm{d}S$	$\mathrm{d}\mathbf{S}$、$\mathrm{d}\mathbf{A}$
体積・面の積分	$\iiint_V$、$\iint_S$	$\int_V$、$\int_S$（$\int$ を 1 つ）

表 8　この巻の記号と、専門書でよく見る記号の対応

専門書をのぞいてみよう　電磁気学の教科書ふうの書き方

真空中のマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$$

である。第 1 式の両辺を領域 V で積分し，ガウスの定理を用いると $\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$ を得る。

訳　太字の $\mathbf{E}$・$\mathbf{B}$ は、この本の矢印の $\vec{E}$・$\vec{B}$。$\nabla\cdot$ は div、$\nabla\times$ は rot（8-9・8-10）。「領域 V」は立体、「∂V」は「V の境目（表面）」という意味で、偏微分の ∂ とは別の使い方。閉じた面の積分に $\oint$ を 1 つだけ書いているが、この本の $\oiint$ と同じ（◯は閉じている印）。$\mathrm{d}\mathbf{S}$ はこの本の $\vec{n}\,\mathrm{d}S$。

たいせつ

自然の基本の式は、「わき出し」と「うず」の式

・電荷は電場のわき出し。磁場にわき出しはない。変わる磁場は電場のうずを、電流と変わる電場は磁場のうずを作る。その 2 つがくり返されて、電磁波（光）が速さ $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ で伝わる。

・積分形（袋・道）と微分形（場所ごと）は、ガウスの定理・ストークスの定理でつながる。

・流れの式・熱の式も、grad・div・rot・∇^2・物質微分の組み合わせで読める。

この章で出てきたことば

マクスウェル方程式　電場と磁場のわき出しとうずを決める 4 つの式。

電磁波　電場と磁場の変化が、たがいにうずを作り合いながら伝わる波。光や電波。

ナビエ・ストークス方程式　流れの中のかたまりの運動方程式。流れの基本の式。

ヘルムホルツの分解　場を、わき出しだけの部分とうずだけの部分に分けること。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 4 つの式を、「わき出し」と「うず」のことばで読める。　→ 575 ページ
- ☐ 積分形と微分形のつながり、光の速さの出し方を言える。　→ 578 ページ
- ☐ 流れの式・熱の式の項を、この巻のことばに訳せる。　→ 583 ページ

ミナ

矢印の地図の「わき出し」と「うず」が、光の速さまで決めていたんだね。第 9 巻では、波や音を sin と cos に分けて、ゆれ方そのものを読んでいくよ。

こたえ

「じぶんでとこう」は じ 1、章末問題は 1 のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

8-1

じ 1　$h(50,\ 20) = 100 - 25 - 8 = 67$、
$h(20,\ 50) = 100 - 4 - 50 = 46$。東へ 50 m・北へ 20 m の所のほうが高い。

じ 2　`=100-0.01*D$1^2-0.02*$A3^2`。D1 は 20、A3 は 30 なので、
$100 - 4 - 18 = 78$。

じ 3　$0.01x^2 + 0.02y^2 = 10$ を 10 でわって
$\dfrac{x^2}{1000} + \dfrac{y^2}{500} = 1$。
$a = \sqrt{1000} \approx 31.62$（m）、
$b = \sqrt{500} \approx 22.36$（m）。

じ 4　東：$44.72 - 31.62 = 13.10$、
$10 \div 13.10 \approx 0.76$。北：
$31.62 - 22.36 = 9.26$、
$10 \div 9.26 \approx 1.08$。北へ進むほうが急。

じ 5　$x = 30$ で 73、$x = 40$ で 66。
$73 - 66 = 7$ 下がる間に、$73 - 70 = 3$ 下がる。$30 + 10 \times \dfrac{3}{7} \approx 34.3$（m）。本当の値とのちがいは約 0.3 m。

じ 6　（1）$h = 82 - 0.01x^2$。$0.01x^2 = 16$ より $x = 40$。（2）$h = 84 - 0.02y^2$。$0.02y^2 = 18$ より $y = 30$。

じ 7　（1）$17 + 2.5 \times 2 = 22$（℃）。
$17 + 2.5z = 20$ から $z = 1.2$ なので、床から 1.2 m の高さの水平な面。（2）原点を中心とする、半径 5 の球の面。

じ 8　C：$4 \div 250 \times 100 = 1.6$（hPa）。D：$4 \div 125 \times 100 = 3.2$（hPa）。D のほうが風が強くなりやすい。

1　（1）$h(30,\ 40) = 100 - 9 - 32 = 59$、$h(40,\ 30) = 100 - 16 - 18 = 66$。東へ 40 m・北へ 30 m の所のほうが高い。
（2）$h(60,\ 10) = 100 - 36 - 2 = 62$、$h(10,\ 60) = 100 - 1 - 72 = 27$。東へ 60 m・北へ 10 m の所のほうが高い。

2　`=100-0.01*E$1^2-0.02*$A2^2`。E1 は 30、A2 は 40 なので、
$100 - 9 - 32 = 59$。

3　$0.01x^2 + 0.02y^2 = 30$ を 30 でわって
$\dfrac{x^2}{3000} + \dfrac{y^2}{1500} = 1$。東西 $\sqrt{3000} \approx 54.77$（m）、南北 $\sqrt{1500} \approx 38.73$（m）。

4　東：$70.71 - 63.25 = 7.46$、
$10 \div 7.46 \approx 1.34$。北：
$50.00 - 44.72 = 5.28$、
$10 \div 5.28 \approx 1.89$。北へ進むほうが急。

5　$x = 10$ で 91、$x = 20$ で 88。
$91 - 88 = 3$ 下がる間に、$91 - 90 = 1$ 下がる。$10 + 10 \times \dfrac{1}{3} \approx 13.3$（m）。本当の値とのちがいは約 0.8 m。

6　E：$4 \div 160 \times 100 = 2.5$（hPa）。F：$4 \div 80 \times 100 = 5$（hPa）。F のほうが風が強くなりやすい。

7　$h(60,\ 10) = 100 - 36 - 2 = 62$、$h(10,\ 60) = 100 - 1 - 72 = 27$。東へ 60 m・北へ 10 m の所のほうが高い。

8　東：$77.46 - 70.71 = 6.75$、
$10 \div 6.75 \approx 1.48$。北：

$54.77 - 50.00 = 4.77$、
$10 \div 4.77 \approx 2.10$。北へ進むほうが急。

9 $x = 20$ で 64、$x = 30$ で 59。
$64 - 59 = 5$ 下がる間に、$64 - 60 = 4$ 下がる。$20 + 10 \times \dfrac{4}{5} = 28.0$（m）。本当の値とのちがいは約 0.3 m。

10 （1）$h = 68 - 0.01x^2$。$0.01x^2 = 9$ より $x = 30$。（2）$h = 99 - 0.02y^2$。$0.02y^2 = 32$ より $y = 40$。

11 （1）$19 + 1.5 \times 2 = 22$（℃）。
$19 + 1.5z = 20.5$ から $z = 1$ なので、床から 1 m の高さの水平な面。（2）原点を中心とする、半径 4 の球の面。

12 $0.005x^2 + 0.02y^2 = 20$ を 20 でわって $\dfrac{x^2}{4000} + \dfrac{y^2}{1000} = 1$。東西 $\sqrt{4000} \approx 63.25$（m）、南北 $\sqrt{1000} \approx 31.62$（m）。南北の半径が東西の半分なので、主役の山（0.707 倍）より東西に長い。

8-2

じ 1 （1）東 $80.79 - 81.00 = -0.21$、北 $79.78 - 81.00 = -1.22$。（2）東 $(80.79 - 81.19) \div 2 = -0.20$、北 $(79.78 - 82.18) \div 2 = -1.20$。

じ 2 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4y^2$（$5y$ は 0）。
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -8xy + 5$（$x^3$ は 0）。

じ 3 $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02 \times 20 = -0.4$（東へは下り）。$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.04 \times (-30) = 1.2$（北へは上り）。北の坂のほうが急（$1.2 > 0.4$）。

じ 4 （1）$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2x} \sin y$、
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-2x} \cos y$。
（2）$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 3\cos(3x + y)$、
$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \cos(3x + y)$。

じ 5 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xyz$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 z$、$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2 y + 2z$。点 (1, 3, 2) では 12、2、7。

じ 6 （1）$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 y^3$。$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^4$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2 y^2$。2 つの順番はどちらも $8xy^3$。
（2）$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x} \cos y$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{3x} \sin y$。$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9e^{3x} \cos y$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{3x} \cos y$。2 つの順番はどちらも $-3e^{3x} \sin y$。

じ 7 （1）$\dfrac{\partial K}{\partial m} = \dfrac{1}{2}v^2 = 4.5\,\mathrm{J/kg}$、$\dfrac{\partial K}{\partial v} = mv = 6\,\mathrm{J/(m/s)}$。
（2）$\dfrac{\partial T}{\partial z} = 1.5$ なので $1.5 \times 2 = 3$℃上がる。

1 （1）東 $93.59 - 94.00 = -0.41$、北 $94.38 - 94.00 = 0.38$。（2）東 $(93.59 - 94.39) \div 2 = -0.40$、北 $(94.38 - 93.58) \div 2 = 0.40$。

2 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 y - 5y^2$。
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - 10xy + 1$。

3 $\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0.2$（東へは上り）、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0.8$（北へは上り）。どちらも頂上に近づく向きなので上り。北のほうが急。

4 （1）$-3e^{-3x} \sin y$、$e^{-3x} \cos y$。
（2）$\cos(x + 5y)$、$5\cos(x + 5y)$。

5 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^3$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^4 y^2$。
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y^3$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^4 y$。2 つの順番はどちらも $12x^3 y^2$。

6 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2yz^2$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3z^2$、$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2x^3yz$。点 $(1,\ 1,\ 2)$ では 12、4、4。

7 $\dfrac{\partial P}{\partial V} = \dfrac{2\times 100}{20} = 10\,\mathrm{W/V}$：電圧を 1 V 上げると約 10 W ふえる。$\dfrac{\partial P}{\partial R} = -\dfrac{10000}{400} = -25\,\mathrm{W/\Omega}$：抵抗を 1 Ω ふやすと約 25 W へる。

8 高さ $60-1-1-2 = 56$ m。$\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.02x - 0.01y = -0.3$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.01x - 0.04y = -0.5$。北のほうが急。

9 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{3y}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2e^{3y}$。$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{3y}$、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9x^2e^{3y}$。2 つの順番はどちらも $6xe^{3y}$。

10 $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$、$\dfrac{\partial p}{\partial z} = -10\,094\,\mathrm{Pa/m}$。$-10\,094\times(-5) = 50\,470$ で、約 50 000 Pa 上がる。

8-3

じ 1 坂は $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.2$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -1.2$。$\mathrm{d}h = -0.2\times 1 + (-1.2)\times 0.5 = -0.8$。本当は $h(11,\ 30.5) - h(10,\ 30) = 80.185 - 81 = -0.815$。

じ 2 $\mathrm{d}f = y^3\,\mathrm{d}x + 3xy^2\,\mathrm{d}y$。$(1,\ 2)$ では $8\,\mathrm{d}x + 12\,\mathrm{d}y$。$8\times 0.02 + 12\times 0.01 = 0.28$（本当は 0.2830）。

じ 3 $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = 2\dfrac{\mathrm{d}r}{r} + \dfrac{\mathrm{d}h}{h} = 2\times 2 + 1 = 5$（%）。$\frac{1}{3}\pi$ は数なので、割合には効かない。約 5 %（本当は 5.08 %）。

じ 4 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \dfrac{\mathrm{d}m}{m} - \dfrac{\mathrm{d}V}{V}$。$m$ が +0.5 %、V が −1 % のとき $0.5 + 1 = 1.5$（%）。いちばん大きくて約 1.5 %。

じ 5 $t = 0$ で $(10,\ 30)$。坂は -0.2 と -1.2。$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = (-0.2)\times 2 + (-1.2)\times(-3) = -0.4 + 3.6 = 3.2$。1 分に約 3.2 m 上がる。

じ 6 $\theta_{12} = 180°$（$\sin 180° = 0$、$\cos 180° = -1$）。1 行め $(-0.30,\ 0)$、2 行め $(-0.25,\ -0.25)$。$\det J = (-0.30)\times(-0.25) - 0\times(-0.25) = 0.075$。

じ 7 J は 1 行め $(-L_1\sin\theta_1,\ -L_2\sin\varphi)$、2 行め $(L_1\cos\theta_1,\ L_2\cos\varphi)$。$\det J$ は、$-L_1\sin\theta_1\times L_2\cos\varphi$ から、$-L_2\sin\varphi\times L_1\cos\theta_1$ をひいたもの。まとめると L_1L_2 に $(\sin\varphi\cos\theta_1 - \cos\varphi\sin\theta_1)$ をかけたもの。加法定理で $L_1L_2\sin(\varphi-\theta_1)$。$\varphi - \theta_1$ はひじの角なので、例題 6 と同じ。

じ 8 $\mathrm{d}x = -0.3915\times 0.01 + (-0.2415)\times 0.02 = -0.00392 - 0.00483 = -0.00875$。$\mathrm{d}y = 0.3245\times 0.01 + 0.0647\times 0.02 = 0.00325 + 0.00129 = 0.00454$。約 $(-0.0087,\ 0.0045)$（m）。

じ 9 $\frac{\partial x}{\partial r} = 3\cos\theta$、$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -3r\sin\theta$、$\frac{\partial y}{\partial r} = 2\sin\theta$、$\frac{\partial y}{\partial\theta} = 2r\cos\theta$。$\det J = 6r\cos^2\theta + 6r\sin^2\theta = 6r$。面積 $\approx 6\times 1\times 0.1\times 0.1 = 0.06$。

じ 10 $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2} = -\frac{8.31\times 273}{0.0224^2} \approx -4.52\times 10^6\,\mathrm{Pa/m^3}$。温度を変えずに体積を $0.001\,\mathrm{m^3}$（1 L）ふやすと、圧力は約 4520 Pa 下がる。

じ 11 $\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}a}{a}+\frac{\mathrm{d}b}{b}+\frac{\mathrm{d}c}{c}$ $=1+0.5+0.5+0.5=2.5$（%）。約 2.5 %。

1 坂は $\frac{\partial h}{\partial x}=-0.4$、$\frac{\partial h}{\partial y}=0.4$。$\mathrm{d}x=-0.5$、$\mathrm{d}y=1$。$\mathrm{d}h$ $=(-0.4)\times(-0.5)+0.4\times1=0.6$。約 0.6 m 上がる（本当は 0.5775 m）。

2 $\mathrm{d}f=3x^2y\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y$。$(1,\ 2)$ では $6\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$。$6\times0.01+0.03=0.09$（本当は 0.0915）。

3 $\frac{\mathrm{d}V}{V}=2\times0.5+2=3$（%）。約 3 %（本当は 3.02 %）。

4 $\frac{\mathrm{d}I}{I}=\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{\mathrm{d}R}{R}$。$V$ が +1 %、R が −1 % のとき $1+1=2$（%）。約 2 %。

5 $t=0$ で $(-20,\ 10)$。坂は 0.4 と -0.4。$0.4\times4+(-0.4)\times1=1.2$。1 分に約 1.2 m 上がる。

6 $\theta_{12}=90°$。1 行め $(-0.30\times0.866-0.25,\ -0.25)$ $=(-0.510,\ -0.25)$、2 行め $(0.30\times0.5+0,\ 0)=(0.15,\ 0)$。$\det J=0-(-0.25)\times0.15=0.0375$ $(=0.075\times\sin30°)$。

7 $\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}a}{a}+\frac{\mathrm{d}b}{b}+\frac{\mathrm{d}h}{h}=1+1+2=4$（%）。$\frac{1}{2}$ は数なので割合には効かない。約 4 %。

8 （1）$\mathrm{d}x=-0.510\times0.02+(-0.25)\times0.04$ $=-0.0102-0.0100=-0.0202$。$\mathrm{d}y$ $=0.15\times0.02+0\times0.04=0.0030$。約 $(-0.020,\ 0.003)$（m）。（2）$\det J$ は、$(-L_1\sin\theta_1-L_2\sin\theta_{12})\times L_2\cos\theta_{12}$ から、$(-L_2\sin\theta_{12})$ と $(L_1\cos\theta_1+L_2\cos\theta_{12})$ の積をひいたもの。展開すると L_2^2 の項は消えて、$L_1L_2\sin\theta_{12}\cos\theta_1$ $-L_1L_2\cos\theta_{12}\sin\theta_1$ が残る。加法定理で $L_1L_2\sin(\theta_{12}-\theta_1)$、つまり $L_1L_2\sin\theta_2$。

9 $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{nR}{p}$ $=\frac{8.31}{101300}\approx8.2\times10^{-5}\ \mathrm{m^3/K}$。圧力を変えずに温度を 1 K 上げると、体積は約 0.082 L ふえる。

10 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}m}{m}-\frac{\mathrm{d}a}{a}-\frac{\mathrm{d}b}{b}-\frac{\mathrm{d}c}{c}$。$m$ が +0.5 %、a、b、c が −1 % ずつのとき、$0.5+1+1+1=3.5$（%）。いちばん大きくて約 3.5 %。

11 $t=10$ で $(0,\ 0)$。坂はどちらも 0 なので、$0\times(-3)+0\times(-2)=0$。頂上に着いて、そこは平らなので、高さは（その瞬間）変わらない。

8-4

じ 1 x で偏微分 $-0.02\times(-10)=0.2$、y で偏微分 $-0.04\times15=-0.6$ で、$\mathrm{grad}\,h=(0.2,\ -0.6)$。坂の大きさは $\sqrt{0.04+0.36}=\sqrt{0.4}=0.632$。ボールは $(-0.2,\ 0.6)$ の向き。

じ 2 （1）$\vec{e}=(0,\ 1)$ で −0.4（下り）。（2）$\vec{e}=(-0.707,\ -0.707)$ で $0.283+0.283=0.566$（上り）。

じ 3 $\mathrm{grad}\,h=(-0.4,\ 0.6)$、長さ $\sqrt{0.52}=0.721$。上りの向き $(-0.555,\ 0.832)$、傾き 0.721（$\tan^{-1}$ で約 35.8°）。ボールは $(0.555,\ -0.832)$ の向き。

じ 4 $(-0.4,\ 0.4)$ か、同じ向きの $(-1,\ 1)$、その反対の $(1,\ -1)$。内積

$(-0.4)\times 1+(-0.4)\times(-1)=0$。傾きは -1。

じ 5　(1) $(y^2+2,\ 2xy)$ に入れて $(3,\ 4)$。(2) $(3,\ 2y,\ 2z)$ に入れて $(3,\ 4,\ 2)$、長さ $\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}=5.39$。

じ 6　$\mathrm{grad}\,U$
$=(100\times 0.06,\ 100\times(-0.08))$
$=(6,\ -8)$。$\vec{F}=(-6,\ 8)$ (N)、大きさ 10 N（原点のほうへ引きもどす）。

じ 7　$\mathrm{grad}\,T=(-60,\ 80)$ (K/m)。
$\vec{q}=-1.6\times(-60,\ 80)=(96,\ -128)$ (W/m²)、大きさ $\sqrt{96^2+128^2}=160\,\mathrm{W/m^2}$。

じ 8　$\mathrm{grad}\,\phi=(-120,\ 160)$ なので $\vec{E}=(120,\ -160)$ (V/m)、大きさ 200 V/m。等電位線の向きは $(160,\ 120)$、短くして $(4,\ 3)$。$\vec{E}\cdot(4,\ 3)=480-480=0$ で直角。

じ 9　$1.2\cos\theta=0.6$ より $\cos\theta=0.5$、$\theta=60°$。$270°-60°=210°$ と $270°+60°=330°$。

1　$\mathrm{grad}\,h$
$=(-0.02\times(-20),\ -0.04\times(-10))$
$=(0.4,\ 0.4)$。坂の大きさ $\sqrt{0.32}=0.566$。ボールは $(-0.4,\ -0.4)$ の向き（南西）。

2　(1) $(-0.8)\times 0.707+0\times 0.707$
$=-0.566$（下り）。(2) $\vec{e}=(-1,\ 0)$ で 0.8（上り）。

3　$\mathrm{grad}\,h=(0,\ 1)$、$|\mathrm{grad}\,h|=1$。上りの向き $(0,\ 1)$（北）、傾き 1（45°）。ボールは $(0,\ -1)$ の向き（南）。

4　$\mathrm{grad}\,h=(0.6,\ -0.4)$。直角な矢印は $(-0.4,\ -0.6)$、または $(0.4,\ 0.6)$ $((2,\ 3)$ でもよい$)$。内積 $0.24-0.24=0$。傾き $\dfrac{0.6}{0.4}=1.5$。

5　(1) $(2xy^2,\ 2x^2y)$ に入れて $(8,\ 4)$。(2) $(2x,\ 2y,\ 2z)$ に入れて $(2,\ -4,\ 4)$、長さ $\sqrt{4+16+16}=6$。

6　$\mathrm{grad}\,U=(12,\ -16)$。$\vec{F}=(-12,\ 16)$ (N)、大きさ 20 N。

7　$\mathrm{grad}\,T=(-30,\ 40)$ (K/m)。
$\vec{q}=-0.6\times(-30,\ 40)=(18,\ -24)$ (W/m²)、大きさ $30\,\mathrm{W/m^2}$。

8　$\mathrm{grad}\,\phi=(300,\ -400)$ なので $\vec{E}=(-300,\ 400)$ (V/m)、大きさ 500 V/m。等電位線の向きは $(-400,\ -300)$、短くして $(4,\ 3)$。$\vec{E}\cdot(4,\ 3)=-1200+1200=0$ で直角。

9　$0.8\cos\theta=0.4$ より $\cos\theta=0.5$、$\theta=60°$。$180°-60°=120°$ と $180°+60°=240°$。

10　(1) $\mathrm{grad}\,h=(0.6,\ 0.8)$、大きさ 1。(2) $0.6\times 0.707+0.8\times 0.707$
$=0.990$（上り）。(3) $(0.8,\ -0.6)$（または $(-0.8,\ 0.6)$）。内積 $0.48-0.48=0$。

8-5

じ 1　$(1,\ 0)$ で $(1,\ -1)$、大きさ 1.41。$(0,\ 1)$ で $(1,\ 1)$、大きさ 1.41。$(1,\ 1)$ で $(2,\ 0)$、大きさ 2。

じ 2　$(1,\ 0)$ で $(0,\ 2)$、$(0,\ 1)$ で $(-2,\ 0)$、$(-1,\ 0)$ で $(0,\ -2)$、$(0,\ -1)$ で $(2,\ 0)$。左回り（時計と反対回り）のうずで、大きさはどれも 2。

じ 3　$r=\sqrt{0.36+0.64}=1$。大きさ $8.99\times 10^9\times 2\times 10^{-9}\div 1^2$

$= 17.98\,\mathrm{N/C}$（約 18.0 N/C）。向き $(0.6,\ 0.8)$ で、$\vec{E} = (10.8,\ 14.4)$ (N/C)。

じ 4　$r = 6371 + 35\,786 = 42\,157$（km）。$9.82 \times (6371 \div 42157)^2$ $= 9.82 \times 0.0228 = 0.224\,\mathrm{m/s^2}$。

じ 5　(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-x}{y}$、$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$ より $x^2 + y^2 = C$。$C = 25 + 144 = 169$ で、$x^2 + y^2 = 169$（半径 13 の円）。(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2y}{2x} = \dfrac{y}{x}$ より $y = ax$。$3 = a$ で、$y = 3x$。

じ 6　$v_{x'} = 4 \times 0.5 + 2 \times 0.866 = 3.732$、$v_{y'} = -4 \times 0.866 + 2 \times 0.5$ $= -2.464$。$(3.73,\ -2.46)$（m/s）。大きさ $\sqrt{3.732^2 + 2.464^2} = 4.47$、もとも $\sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4.47$。

じ 7　$-\mathrm{grad}\,T = (2x,\ 4y)$ で、$(2,\ 0)$ で $(4,\ 0)$、$(0,\ -1)$ で $(0,\ -4)$、$(1,\ 1)$ で $(2,\ 4)$。$(1,\ 1)$ の $\mathrm{grad}\,T = (-2,\ -4)$ と直角な等温線の向き $(-4,\ 2)$。内積 $2 \times (-4) + 4 \times 2 = 0$。

1　$(1,\ 0)$ で $(2,\ 1)$、大きさ $\sqrt{5} = 2.24$。$(0,\ 1)$ で $(-1,\ 0)$、大きさ 1。$(1,\ 1)$ で $(1,\ 1)$、大きさ 1.41。

2　$(1,\ 0)$ で $(0,\ -3)$、$(0,\ 1)$ で $(3,\ 0)$、$(-1,\ 0)$ で $(0,\ 3)$、$(0,\ -1)$ で $(-3,\ 0)$。右回り（時計回り）のうずで、大きさはどれも 3。

3　$r = 0.5$。大きさ $8.99 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-9} \div 0.25$ $= 107.9\,\mathrm{N/C}$（約 108 N/C）。$\vec{E} = (107.9 \times 0.6,\ 107.9 \times 0.8)$ $= (64.7,\ 86.3)$（N/C）。

4　(1) $x^2 + y^2 = C$、$C = 36 + 64 = 100$ で $x^2 + y^2 = 100$（半径 10 の円）。(2) $y = ax$、$2 = 4a$ より $y = \dfrac{1}{2}x$。

5　$v_{x'} = 5 \times 0.866 + 0 \times 0.5 = 4.33$、$v_{y'} = -5 \times 0.5 + 0 \times 0.866 = -2.5$。$(4.33,\ -2.5)$（m/s）。大きさ $\sqrt{4.33^2 + 2.5^2} = 5.00$。

6　$r = 6371 + 20\,200 = 26\,571$（km）。$9.82 \times (6371 \div 26571)^2$ $= 9.82 \times 0.0575 = 0.565\,\mathrm{m/s^2}$。

7　$r = 12\,742\,\mathrm{km}$（半径の 2 倍）。$9.82 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2.46\,\mathrm{m/s^2}$。

8　$(-0.8,\ 0)$、$(0,\ -1.2)$、$(0.4,\ -0.8)$。$(20,\ -20)$ の $\mathrm{grad}\,h = (-0.4,\ 0.8)$ と直角な等高線の向き $(0.8,\ 0.4)$。内積 $0.4 \times 0.8 + (-0.8) \times 0.4 = 0$。

9　$-\mathrm{grad}\,T = (4x,\ 2y)$ で、$(1,\ 0)$ で $(4,\ 0)$、$(0,\ 2)$ で $(0,\ 4)$、$(1,\ 1)$ で $(4,\ 2)$。$(1,\ 1)$ の $\mathrm{grad}\,T = (-4,\ -2)$ と直角な等温線の向き $(2,\ -4)$。内積 $4 \times 2 + 2 \times (-4) = 0$。

10　(1) $(0,\ 2)$。流線は $x^2 + y^2 = 4$（半径 2 の円）。(2) $v_{x'} = 0 \times 0 + 2 \times 1 = 2$、$v_{y'} = -0 \times 1 + 2 \times 0 = 0$ で $(2,\ 0)$。回した軸（x' が北向き）で見ると、矢印は x' の向き。

8-6

じ 1　x が先：$\int_0^2 (8 + 3x + 4y)\,\mathrm{d}x = 22 + 8y$、$\int_0^1 (22 + 8y)\,\mathrm{d}y = 26$。$y$ が先：$\int_0^1 (8 + 3x + 4y)\,\mathrm{d}y = 10 + 3x$、$\int_0^2 (10 + 3x)\,\mathrm{d}x = 26$。26 kg。

じ 2　$\left(\int_0^2 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^2 y^3\,\mathrm{d}y\right) = 2 \times 4 = 8$。

じ 3 たて線：内側 $\frac{x^3}{2}$、$\int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$。横線：内側 $\frac{y(4-y^2)}{2}$、$\int_0^2 \left(2y - \frac{y^3}{2}\right)dy = 4 - 2 = 2$。答えは 2。

じ 4 ななめの辺は $y = 3 - \frac{1}{2}x$。面積 $\int_0^6 \left(3 - \frac{1}{2}x\right)dx = 9$。$\iint x\,dA = \int_0^6 x\left(3 - \frac{1}{2}x\right)dx = 54 - 36 = 18$、$\iint y\,dA = \int_0^6 \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx = 9$。重心 $(2,\ 1)$（m）。

じ 5 対称性で $\bar{x} = 0$。$\iint y\,dA = \frac{2R^3}{3} = 0.018$、面積 $\frac{\pi R^2}{2} \approx 0.1414$。$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.127$。重心 $(0,\ 0.127)$（m）。

じ 6 対称性で $I = \frac{1}{2}\iint r^2\,dA$。細い輪で $\frac{1}{2}\int_0^R r^2 \times 2\pi r\,dr = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$。$\frac{\pi \times 0.06^4}{64} \approx 6.36 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^4}$。

じ 7 $Q = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2}$ $= \frac{\pi \times 0.5 \times 0.02^2}{2} \approx 3.14 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}$、つまり約 314 mL/s。平均の速さは $\frac{u_{\max}}{2} = 0.25\,\mathrm{m/s}$。

じ 8 横の半径 $a = 10\sqrt{40 - z}$、たての半径 $b = 5\sqrt{40 - z}$ で、$A(z) = \pi ab = 50\pi(40 - z)$。$V = 50\pi\int_0^{40}(40 - z)\,dz = 50\pi \times 800$ $= 40\,000\pi \approx 1.26 \times 10^5\,\mathrm{m^3}$。

じ 9 θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$。$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta = \int_0^1 (1 - u^2)\,du = \frac{2}{3}$。$I = \rho \times \frac{R^5}{5} \times \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi\rho R^5}{15}$、$M = \frac{2}{3}\pi\rho R^3$ なので $I = \frac{2}{5}MR^2$（球と同じ形）。

じ 10 $D^4 - d^4$ $= 1.296 \times 10^{-5} - 2.56 \times 10^{-6}$ $= 1.04 \times 10^{-5}$。$I = \frac{\pi \times 1.04 \times 10^{-5}}{64} \approx 5.11 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^4}$。

じ 11 行ごとに $5 + 10 + 15 = 30$、$10 + 20 + 25 = 55$、$15 + 25 + 35 = 75$。合計 $30 + 55 + 75 = 160$（mm）。体積 $160 \times 1000\,\mathrm{m^3} = 1.6 \times 10^5\,\mathrm{m^3}$。平均 $160 \div 9 \approx 17.8\,\mathrm{mm}$。

1 $\int_0^3 (12 + 4x + 6y)\,dx$ $= 36 + 18 + 18y = 54 + 18y$。$\int_0^1 (54 + 18y)\,dy = 54 + 9 = 63$。63 kg。

2 $\left(\int_0^3 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$。

3 ななめの辺は $y = 3 - \frac{3}{4}x$。面積 $\int_0^4 \left(3 - \frac{3}{4}x\right)dx = 6$。$\iint x\,dA = 8$、$\iint y\,dA = 6$。重心 $\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$（m）。

4 対称性で $\bar{x} = 0$。$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \times 0.6}{3\pi} \approx 0.255$。重心 $(0,\ 0.255)$（m）。

5 $\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.1^4}{64} \approx 4.91 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^4}$。

6 $Q = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2}$ $= \frac{\pi \times 0.4 \times 0.005^2}{2} \approx 1.57 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3/s}$、約 15.7 mL/s。平均の速さ 0.2 m/s。

7 合計 $10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 = 135$（mm）。$135 \times 1000\,\mathrm{m^3} = 1.35 \times 10^5\,\mathrm{m^3}$。

8 たて線：$\int_0^3 \frac{x^2}{2}\,dx = 4.5$。横線：$\int_0^3 y(3 - y)\,dy = 13.5 - 9 = 4.5$。答えは 4.5。

9 $a = 10\sqrt{60 - z}$、$b = 5\sqrt{60 - z}$ で、$A(z) = 50\pi(60 - z)$。$V = 50\pi \times 1800$ $= 90\,000\pi \approx 2.83 \times 10^5\,\mathrm{m^3}$。

10 $M = 7850 \times \frac{4}{3}\pi \times 0.1^3 \approx 32.9\,\mathrm{kg}$。
$I = \frac{2}{5}MR^2$ で、
$I \approx \frac{2}{5} \times 32.9 \times 0.01 \approx 0.132\,\mathrm{kg\,m^2}$。

11 $D^4 - d^4 = 0.05^4 - 0.04^4$
$= 3.69 \times 10^{-6}$。
$I = \frac{\pi \times 3.69 \times 10^{-6}}{64} \approx 1.81 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^4}$。

8-7

じ 1 $\vec{F}_3$：道 A
$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y = 1 + 1 = 2$、道 B も $1 + 1 = 2$。$\vec{F}_4$：道 A
$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}y = -1$、道 B
$\int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$。

じ 2 $\vec{r}(t) = (1 - t,\ t)$、$\vec{r}\,' = (-1,\ 1)$。
$\vec{F}_1 = (t,\ 1 - t)$ で内積
$-t + 1 - t = 1 - 2t$、
$\int_0^1 (1 - 2t)\,\mathrm{d}t = 0$。$\vec{F}_2 = (-t,\ 1 - t)$ で内積 $t + 1 - t = 1$、$\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$。

じ 3 $\mathrm{d}\vec{r} = (1,\ 3x^2)\,\mathrm{d}x$。$\vec{F}_1 = (x^3,\ x)$ で内積 $x^3 + 3x^3 = 4x^3$、$\int_0^1 4x^3\,\mathrm{d}x = 1$。
$\vec{F}_2 = (-x^3,\ x)$ で内積
$-x^3 + 3x^3 = 2x^3$、$\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$。

じ 4 $\mathrm{d}\vec{r} = (-2\sin\theta,\ 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$。$\vec{F}_2$ の内積は 4 で、$\int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{d}\theta = 8\pi$。$\vec{F}_1$ の内積は $4\cos 2\theta$ で、$\int_0^{2\pi} 4\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$。

じ 5 $\vec{F}_2$：道 B の部分 -1、もどる区間 0（ななめの 0 の逆）、合計 -1。$\vec{F}_1$：道 B の部分 1、もどる区間 -1、合計 0。

じ 6 動摩擦力 $0.4 \times 5 \times 9.8 = 19.6\,\mathrm{N}$。(1) 半円の長さ $2\pi \approx 6.28\,\mathrm{m}$、仕事 $-19.6 \times 2\pi \approx -123\,\mathrm{J}$。(2) $-19.6 \times 4 = -78.4\,\mathrm{J}$。

じ 7 (1) $U = mgz$ で、
$2 \times 9.8 \times 5 - 0 = 98\,\mathrm{J}$（坂の形によらない）。(2) $U = -xy$ で、
$U(0,\ 2) - U(2,\ 3) = 0 - (-6) = 6\,\mathrm{J}$。

じ 8 $\vec{F}_2$：下の辺 0、右の辺 $\int_0^2 2\,\mathrm{d}y = 4$、上の辺 $\int_2^0 (-2)\,\mathrm{d}x = 4$、左の辺 0、合計 8（$= 2\times$ 面積 4）。$\vec{F}_1$：保存力なので 0。

じ 9 $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}\theta$。$\int_0^{\pi/2} (1 + \cos\theta) \times 2\,\mathrm{d}\theta$
$= 2\Big[\theta + \sin\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2\Big(\frac{\pi}{2} + 1\Big)$
$= \pi + 2 \approx 5.14\,\mathrm{kg}$。

じ 10 1 本め：$(1,\ 0)$ から $(0.5,\ 0.866)$、$\Delta\vec{r} = (-0.5,\ 0.866)$、まん中 $(0.75,\ 0.433)$、$\vec{F}_2 = (-0.433,\ 0.75)$、内積 $0.2165 + 0.6495 = 0.866$。6 本とも同じなので、$0.866 \times 6 \approx 5.20$。

じ 11 体積の変化 $3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$。道 1：$300 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 900\,\mathrm{J}$。道 2：$100 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 300\,\mathrm{J}$。まっすぐ：平均の圧力 200 kPa で、$200 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 600\,\mathrm{J}$。

1 道 A：右へは $F_x = 2y = 0$ で 0、上へは $F_y = x = 1$ で 1、合計 1。道 B：上へは $F_y = 0$ で 0、右へは $F_x = 2$ で 2、合計 2。

2 $\vec{r} = (t,\ t)$、$\vec{r}\,' = (1,\ 1)$。$\vec{F} = (2t,\ t)$ で内積 $3t$。$\int_0^1 3t\,\mathrm{d}t = 1.5$。

3 $\mathrm{d}\vec{r} = (1,\ 2x)\,\mathrm{d}x$。$\vec{F} = (2x^2,\ x)$ で内積 $2x^2 + 2x^2 = 4x^2$。
$\int_0^1 4x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$。

4 $\vec{r} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$、$0 \leqq \theta \leqq \pi$。内積は 4。$\int_0^{\pi} 4\,\mathrm{d}\theta = 4\pi$。

5 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta$。
$\int_0^{\pi/2} (3 + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[3\theta - \cos\theta\Big]_0^{\pi/2}$
$= \frac{3\pi}{2} + 1 \approx 5.71\,\mathrm{kg}$。

6 $h(40,\ 10) = 100 - 16 - 2 = 82\,\mathrm{m}$。$60 \times 9.8 \times (100 - 82) = 10\,584$、約 $1.06 \times 10^4\,\mathrm{J}$（どの道でも同じ）。

7 道 A の部分は 1（問題 1）。もどる区間は問題 2 の 1.5 の逆で -1.5。合計 -0.5。

8 下の辺 0、右の辺 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}y = 1$、上の辺 $\int_1^0 2\,\mathrm{d}x = -2$、左の辺 0。合計 -1。

9 動摩擦力 $0.25 \times 20 \times 9.8 = 49\,\mathrm{N}$。(1) $-49 \times 10 = -490\,\mathrm{J}$。(2) $-49 \times 14 = -686\,\mathrm{J}$。

10 体積の変化 $3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$。道 1：$400 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 1200\,\mathrm{J}$。道 2：$100 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 300\,\mathrm{J}$。まっすぐ：$250 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 750\,\mathrm{J}$。

8-8

じ 1 （1）$3 \times 0.2 \times 0.707 \approx 0.42\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。（2）$3 \times 0.2 \times 0 = 0$。

じ 2 頂点 $(2,\ 0,\ 0)$、$(0,\ 2,\ 0)$、$(0,\ 0,\ 4)$。辺 $(-2,\ 2,\ 0)$ と $(-2,\ 0,\ 4)$ の外積 $(8,\ 8,\ 4)$ の半分で $A\vec{n} = (4,\ 4,\ 2)$。面積 $\sqrt{16 + 16 + 4} = 6\,\mathrm{m}^2$。通りぬける量 $4 + 8 + 6 = 18\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。

じ 3 （1）$60 \div 0.707 \approx 84.9\,\mathrm{m}^2$。（2）$0.006 \times 60 = 0.36\,\mathrm{m}^3$（360 L）。

じ 4 内側 $\displaystyle\int_0^{1.5} (0.5 + 0.5z)\,\mathrm{d}x = 0.75 + 0.75z$。外側 $\displaystyle\int_0^2 (0.75 + 0.75z)\,\mathrm{d}z = \left[0.75z + 0.375z^2\right]_0^2 = 1.5 + 1.5 = 3.0\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。

じ 5 流量 $\dfrac{\pi R^2 u_{\max}}{2}$ に $R = 0.015$、$u_{\max} = 0.4$ を入れて $\dfrac{\pi \times 0.000225 \times 0.4}{2}$、約 $1.41 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$（1 秒間に約 141 mL）。平均の速さ 0.2 m/s。

じ 6 （1）$3 \times 4\pi \times 3^2 = 108\pi \approx 339.3$。（2）$\dfrac{2.0 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} \approx 226\,\mathrm{N\,m^2/C}$（半径によらない）。

じ 7 $\vec{n}\,\mathrm{d}S = (2x,\ 2y,\ 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。$\vec{F} \cdot (2x,\ 2y,\ 1) = z = 4 - r^2$。影は $r \leqq 2$ の円。$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \times 4 = 8\pi \approx 25.1$。

じ 8 $\vec{F} \cdot \vec{n} = R\cos^2\theta$、$\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$。$\dfrac{2\pi R^3}{3} = \dfrac{2\pi \times 27}{3} = 18\pi \approx 56.5$。

じ 9 （1）面積 $4\pi R^2 = 4\pi \times 9 \approx 113.1\,\mathrm{m}^2$（$\theta$ は 0〜π）。ペンキ $0.15 \times 113.1 \approx 17.0\,\mathrm{L}$。（2）$\dfrac{4\pi R^2}{\pi R^2} = 4$ 倍。

じ 10 $x = 1$：$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (1 + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1.5$。$x = 0$：$-(0 + y) = -y$ で -0.5。$y = 1$：$2 \times 1 = 2$。$y = 0$：0。$z = 1$：1。$z = 0$：0。合計 $1.5 - 0.5 + 2 + 0 + 1 + 0 = 4$。

じ 11 （1）$\dfrac{3}{R^2} \times 4\pi R^2 = 12\pi \approx 37.7$（半径によらない）。（2）合計も 12π なので、1 つの面は $\dfrac{12\pi}{6} = 2\pi \approx 6.28$。

じ 12 （1）$2\pi(1 - 0.866) \approx 0.842\,\mathrm{sr}$。（2）$\dfrac{0.842}{4\pi} \approx 0.067$。（3）$2 \times 0.067 \approx 0.13\,\mathrm{W}$。

じ 13 $2 \times (0.6 \times 0.5 + 1.2 \times 1.0 + 0.6 \times 0.5) = 2 \times 1.8 = 3.6\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。

1 （1）$2.5 \times 0.6 \times 1 = 1.5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。（2）$2.5 \times 0.6 \times 0.5 = 0.75\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。

2 頂点 $(2,\ 0,\ 0)$、$(0,\ 3,\ 0)$、$(0,\ 0,\ 6)$。辺 $(-2,\ 3,\ 0)$ と $(-2,\ 0,\ 6)$ の外積 $(18,\ 12,\ 6)$ の半分で $A\vec{n} = (9,\ 6,\ 3)$。通りぬける量 $9+6+3 = 18\,\mathrm{m^3/s}$。

3 上から見た面積だけで決まる。$0.002 \times 120 = 0.24\,\mathrm{m^3}$（240 L）。

4 $\displaystyle\int_0^3 (0.6+0.2z)\,\mathrm{d}z = \Big[0.6z+0.1z^2\Big]_0^3$ $= 1.8+0.9 = 2.7\,\mathrm{m^3/s}$（はばは 1）。

5 $\dfrac{\pi R^2 u_{\max}}{2}$ に $R = 0.005$、$u_{\max} = 0.6$ を入れて $\dfrac{\pi \times 0.000025 \times 0.6}{2}$、約 $2.36 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3/s}$。1 秒間に約 23.6 mL。

6 （1） $1.5 \times 4\pi \times 1.5^2 = 13.5\pi \approx 42.4$。（2） $x=1$ で 2、$x=0$ で 0、$y=1$ で 1、$y=0$ で 0、$z=1$ で -1、$z=0$ で 0。合計 $2+1-1=2$。

7 $3 \times (1.0 \times 0.5 + 2.0 \times 0.9 + 1.0 \times 0.5)$ $= 3 \times 2.8 = 8.4\,\mathrm{m^3/s}$。

8 $2\pi(1-0.707) \approx 1.84\,\mathrm{sr}$。全体の $\dfrac{1.84}{4\pi} \approx 0.146$ 倍。

9 $\vec{n}\,\mathrm{d}S = (2x,\ 2y,\ 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。$\vec{F}\cdot(2x,\ 2y,\ 1) = 2x^2+2y^2 = 2r^2$。影は $r \leqq \sqrt{2}$。$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ $= 2\pi\Big[\dfrac{r^4}{2}\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \times 2 = 4\pi \approx 12.6$。

10 $\dfrac{2\pi R^3}{3} = \dfrac{2\pi \times 64}{3} = \dfrac{128\pi}{3} \approx 134.0$。

11 （1） $\dfrac{2}{R^2} \times 4\pi R^2 = 8\pi \approx 25.1$。（2） $\dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} \approx 4.19$。（3） 0。

8-9

じ 1 （D）正（どの辺からも出る）。（E）0（うず：入った分だけ出る）。（F）負（矢印はみな左向きで、右へ行くほど長い。右の辺から入る量のほうが、左の辺から出る量より多い）。

じ 2 $\dfrac{-1-1}{2} + \dfrac{1-1}{2} = -1+0 = -1$。$-1\,/\mathrm{s}$（負なので、吸いこみ）。

じ 3 左上 $(0.2-0.4)+(0.2-0.3) = -0.3$、右上 $(0.3-0.2)+(0.1-(-0.1)) = 0.3$、左下 $(0.5-0.0)+(0.3-(-0.1)) = 0.9$、右下 $(0.1-0.5)+(-0.1-0.2) = -0.7$（単位 /s）。いちばん強いわき出しは左下。合計 0.2。外まわりは、右 $0.3+0.1$、左 $0.4+0.0$、上 $0.2+0.1$、下 $-0.1+0.2$ から $0.4-0.4+0.3-0.1 = 0.2$ で等しい。

じ 4 （1） $\dfrac{\partial(x+2y)}{\partial x} + \dfrac{\partial(4x-3y)}{\partial y}$ $= 1+(-3) = -2$（どこでも吸いこみ）。（2） $2+b=0$ より $b=-2$。

じ 5 （1） $y+2y+1 = 3y+1$。（2） $(2,\ 1,\ 0)$ は $3+1=4>0$ でわき出し、$(0,\ -1,\ 3)$ は $-3+1=-2<0$ で吸いこみ。（3） $y=-\frac{1}{3}$ の平面の上。

じ 6 左右：$v_x = xy$ のまん中の値は $(2+\frac{h}{2}) \times 1$ と $-(2-\frac{h}{2}) \times 1$。たして h、面積をかけて h^3。奥と手前：$(1+\frac{h}{2})^2 - (1-\frac{h}{2})^2 = 2h$ で $2h^3$。上下：$\frac{h}{2} - (-\frac{h}{2}) = h$ で h^3。合計 $4h^3$、h^3 でわって 4（$3y+1$ に $y=1$ を入れた値と同じ）。

じ 7 $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -2 \times \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$、$\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -2 \times \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ で、たすと 0

（原点以外）。点 $(2,\ 1)$ では
$-2\times\dfrac{1-4}{25}=0.24$ と
$-2\times\dfrac{4-1}{25}=-0.24$。

じ 8　（1）$0.8\times2.5=v_2\times0.4$ より
$v_2=5.0\,\mathrm{m/s}$。（2）
$0.8\,\mathrm{m/s}\times0.00025\,\mathrm{m^2}$
$=0.0002\,\mathrm{m^3/s}$、
$\times60\,\mathrm{s/min}=0.012\,\mathrm{m^3/min}$、
$\times1000\,\mathrm{L/m^3}=12\,\mathrm{L}$。

じ 9　（1）$1500+1500+0=3000\,\mathrm{W/m^3}$。
（2）$2\,\mathrm{L}=0.002\,\mathrm{m^3}$、
$3000\,\mathrm{W/m^3}\times0.002\,\mathrm{m^3}=6\,\mathrm{W}$。

1　（ア）0（下向きにそろった流れ）。（イ）正（上へ行くほど速い：上の辺から出る量が多い）。（ウ）負（集まる流れは、どこに置いたマスでも入る量が多い）。

2　（1）$\dfrac{4-1}{1}+\dfrac{0-2}{1}=3-2=1$。
$1\,\mathrm{/s}$、わき出し。（2）
$\dfrac{0.3-0.5}{0.2}+\dfrac{-0.2-0.1}{0.2}$
$=-1+(-1.5)=-2.5$。$-2.5\,\mathrm{/s}$、吸いこみ。

3　左上 $(0.6-0.1)+(0.4-0.2)=0.7$、右上
$(0.2-0.6)+(0.0-0.1)=-0.5$、左下 $(0.3-0.3)+(0.2-0.0)=0.2$、右下 $(0.5-0.3)+(0.1-0.2)=0.1$（単位 /s）。合計 0.5。外まわりは、右 $0.2+0.5$、左 $0.1+0.3$、上 $0.4+0.0$、下 $0.0+0.2$ から $0.7-0.4+0.4-0.2=0.5$ で等しい。

4　（1）$5+2=7$。（2）$0+0=0$。（3）$2+1=3$。

5　$\mathrm{div}\,\vec{v}=4+c=0$ より $c=-4$。

6　（1）$z+2-2z=2-z$。（2）$(1,\ 0,\ 1)$ は $2-1=1>0$ でわき出し、$(0,\ 5,\ 3)$ は $2-3=-1<0$ で吸いこみ。（3）$z=2$ の平面の上。

7　（1）$1.2\times3.0=v_2\times0.6$ より
$v_2=6.0\,\mathrm{m/s}$。（2）
$1.2\,\mathrm{m/s}\times0.0003\,\mathrm{m^2}$
$=0.00036\,\mathrm{m^3/s}$、
$\times60\,\mathrm{s/min}=0.0216\,\mathrm{m^3/min}$、
$\times1000\,\mathrm{L/m^3}=21.6\,\mathrm{L}$。

8　（1）$800\times3=2400\,\mathrm{W/m^3}$。（2）
$1.5\,\mathrm{L}=0.0015\,\mathrm{m^3}$、
$2400\,\mathrm{W/m^3}\times0.0015\,\mathrm{m^3}=3.6\,\mathrm{W}$。

9　（1）$2x+(-2x)=0$。（2）どこにもない（どこでも発散 0 の、縮まない流れ）。

10　（1）$y+z+x$。（2）$2+3+1=6$。（3）$-2+0+1=-1<0$ で吸いこみ。

11　左右：$(2+\frac{h}{2})^2-(2-\frac{h}{2})^2=4h$ で $4h^3$。奥と手前：$v_y=xy$ のまん中の値は $2\times\frac{h}{2}$ と $-2\times(-\frac{h}{2})$、たして $2h$ で $2h^3$。上下：$-\frac{h}{2}-\frac{h}{2}=-h$ で $-h^3$。合計 $5h^3$、h^3 でわって 5（$3x-1$ に $x=2$ を入れた値と同じ）。

12　$\dfrac{\partial v_x}{\partial x}=3\times\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$、
$\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=3\times\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ で、たすと 0（原点以外）。点 $(1,\ 2)$ では
$3\times\dfrac{4-1}{25}=0.36$ と
$3\times\dfrac{1-4}{25}=-0.36$。

8-10

じ 1　（1）下ほど右向きに速い（上ほど左向き）ので、左回り。（2）横は上下で同じ、たては左右で同じなので、回らない。（3）右ほど下向きに速いので、右回り。

じ 2　循環は $(0.6-0.2-1.0-0.2)\times 0.2=-0.16$〔m²/s〕。回転は $-0.16\div 0.04=-4$〔1/s〕。風車は右回りに 2 rad/s。

じ 3　(1) $-1-4=-5$。(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}=1$、$\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=x^2$ で、回転は $1-x^2$。点 $(2,\ 3)$ で -3。

じ 4　(1) $\dfrac{1.6}{9}y$（約 $0.178y$）〔1/s〕。(2) 回転は -0.4 なので、右回りに 0.2 rad/s。1 回転に $2\pi\div 0.2=31.4$ 秒。

じ 5　(1) x 成分 $1-0=1$、y 成分 $1-0=1$、z 成分 $1-0=1$ で $(1,\ 1,\ 1)$。(2) x 成分 $2xy-2xy=0$、y 成分 $y^2-y^2=0$、z 成分 $2yz-2yz=0$ で $(0,\ 0,\ 0)$。

じ 6　(1) 1 秒に $1200\div 60=20$ 回転なので、$\omega=20\times 2\pi=125.7$〔rad/s〕、回転は $2\omega=251$〔1/s〕。

(2) $\vec{v}=(2z-2y,\ 2x,\ -2x)$。回転は x 成分 $0-0=0$、y 成分 $2-(-2)=4$、z 成分 $2-(-2)=4$ で $(0,\ 4,\ 4)=2\vec{\omega}$。大きさ $4\sqrt{2}$。風車は $(0,\ 1,\ 1)$ の向きの軸のまわりに $2\sqrt{2}\approx 2.83$ rad/s。

じ 7　(1) $\vec{F}_3$ は $1-1=0$ で保存力、$\vec{F}_4$ は $-1-1=-2$ で保存力ではない。

(2) $U=-x^2-xy+g(y)$、$-\dfrac{\partial U}{\partial y}=x-g'(y)=x+2y$ より $g=-y^2$。$U=-(x^2+xy+y^2)$。仕事は $0-(-3)=3$ J。

じ 8　$\mathrm{grad}\, f=(3x^2+y^2,\ 2xy)$。回転は $2y-2y=0$。$(z,\ x,\ y)$ の回転は $(1,\ 1,\ 1)$ で、発散は $0+0+0=0$。

じ 9　(1) $B=\dfrac{4\pi\times 10^{-7}\times 5}{2\pi\times 0.02}=5\times 10^{-5}$ T。$\vec{e}_r=(0,\ 1,\ 0)$ で、向きは $\vec{e}_z\times\vec{e}_r=(-1,\ 0,\ 0)$（$x$ の負の向き）。(2) その点では $\vec{0}$。導線の中では $\mu_0 j=4\pi\times 10^{-7}\times\dfrac{5}{\pi\times(0.0005)^2}=8$ T/m（z の向き）。

1　(1) 上ほど右向きに速いので、右回り（回転 -2）。(2) 右ほど上向きに速いので、左回り（回転 2）。(3) 上ほど左向き（左回りの働き）、右ほど下向き（右回りの働き）で打ち消し、回らない（回転 $-1-(-1)=0$）。

2　(1) 循環は $(0.9+0.4-0.5-0)\times 0.4=0.32$〔m²/s〕。回転は $0.32\div 0.16=2.0$〔1/s〕。左回りに 1.0 rad/s。(2) 循環は $\{0.5+0.2-0.8-(-0.1)\}\times 0.3=0\times 0.3=0$。回転も 0 で、風車は回らない。

3　(1) $-2-5=-7$。(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}=3x^2$、$\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=2xy$ で、回転は $3x^2-2xy$。点 $(1,\ 2)$ で $3-4=-1$。

4　(1)（ア）$v_x=0.5-0.5y^2$ で、回転は $-(-y)=y$〔1/s〕。（イ）回転は -0.6 なので、右回りに 0.3 rad/s。(2) $v_x=0.9-0.4y^2$ で、回転は $0.8y$。$y=1$ で 0.8 なので、左回りに 0.4 rad/s。1 回転に $2\pi\div 0.4=15.7$ 秒。

5　(1) x 成分 $0-0=0$、y 成分 $-1-1=-2$、z 成分 $0-0=0$ で $(0,\ -2,\ 0)$。(2) x 成分 $3-3=0$、y 成分 $0-0=0$、z 成分 $0-0=0$ で $(0,\ 0,\ 0)$。

6 (1) $\omega = 2\pi \div 4 = 1.57$〔rad/s〕、回転は 3.14〔1/s〕。(2) $\vec{v} = (-5y,\ 5x,\ 0)$。回転は $(0,\ 0,\ 5-(-5)) = (0,\ 0,\ 10)$。

7 回転は $3-3=0$ で保存力。
$U = -3xy + g(y)$、
$-\dfrac{\partial U}{\partial y} = 3x - g'(y) = 3x + 2y$ より
$g = -y^2$。$U = -3xy - y^2$。仕事は
$0-(-6-1) = 7\,\mathrm{J}$。

8 (1) $B = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0.1} = 4 \times 10^{-5}$ T。$\vec{e}_r = (0,\ -1,\ 0)$ で、向きは $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = (1,\ 0,\ 0)$（$x$ の正の向き）。
(2) $\mu_0 j = 4\pi \times 10^{-7} \times \dfrac{20}{\pi \times (0.002)^2}$
$= 2\,\mathrm{T/m}$（z の向き）。

9 $\mathrm{grad}\, f = (2xy^2 + 2y,\ 2x^2y + 2x)$。回転は $(4xy+2) - (4xy+2) = 0$。
$(2,\ 2,\ 0)$ の発散は $0+0+0 = 0$。

10 $\vec{v} = (-2y,\ 2x - 2z,\ 2y)$（$x$ 成分 $\omega_y z - \omega_z y = 0 - 2y$、$y$ 成分 $\omega_z x - \omega_x z = 2x - 2z$、$z$ 成分 $\omega_x y - \omega_y x = 2y$）。回転は x 成分 $2-(-2) = 4$、y 成分 $0-0=0$、z 成分 $2-(-2) = 4$ で $(4,\ 0,\ 4) = 2\vec{\omega}$。
大きさ $4\sqrt{2}$。風車は $(1,\ 0,\ 1)$ の向きの軸のまわりに $2\sqrt{2} \approx 2.83\,\mathrm{rad/s}$。

11 回転は $(2x+2y) - (2x+2y) = 0$ で保存力。$U = -x^2y - xy^2 + g(y)$、
$-\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 2xy - g'(y) = x^2 + 2xy$
より g は定数（0）。
$U = -(x^2y + xy^2)$。仕事は
$0 - \{-(2+4)\} = 6\,\mathrm{J}$。

8-11

じ 1 $\mathrm{div}\, \vec{F} = 1+2+3 = 6$。
$6 \times \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = 64\pi$（約 201）。

じ 2 左：$x=1$ の面で $F_x = y$、$\iint y\,dy\,dz = 0.5$。$y=1$ の面で $F_y = z$ で 0.5、$z=1$ の面で $F_z = x$ で 0.5。$x=0 \cdot y=0 \cdot z=0$ の面は 0。合計 1.5。右：$\mathrm{div}\, \vec{F} = y+z+x$、$\iiint (x+y+z)\,dV = 0.5+0.5+0.5 = 1.5$。

じ 3 閉じた全体は $3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$。ふた（$z=0$、下向き）では $\vec{F} \cdot \vec{n} = -z = 0$ で 0。放物面は $\frac{3\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{2}$（約 4.71）。

じ 4 (1) $\dfrac{4.90 \times 10^{12}}{(1.737 \times 10^6)^2} = 1.62\,\mathrm{m/s^2}$。
(2) $M_{\text{中}} = \frac{M}{8}$、$r = \frac{R}{2}$ で、表面の $\frac{1}{2}$ の $0.81\,\mathrm{m/s^2}$。

じ 5 (1) $\dfrac{9.0 \times 10^9 \times 2.0 \times 10^{-9}}{0.2^2} = \dfrac{18}{0.04}$
$= 450\,\mathrm{N/C}$。
(2) $\dfrac{2 \times 9.0 \times 10^9 \times 2.0 \times 10^{-9}}{0.05}$
$= \dfrac{36}{0.05} = 720\,\mathrm{N/C}$。

じ 6 (1) 全体 113 を 4 等分して約 $28.2\,\mathrm{N\,m^2/C}$。(2) 中に電荷がないので 0。

じ 7 (1) $6\,\mathrm{m^2/s}$（形によらない）。
(2) $6+(-6) = 0$。(3) $v \times 2\pi \times 1 = 6$ より $v = \dfrac{3}{\pi} = 0.955\,\mathrm{m/s}$。

じ 8 左：右の辺 $x=2$ で $F_x = 2y$、$\int_0^2 2y\,dy = 4$。上の辺 $y=2$ で $F_y = 4$、$\int_0^2 4\,dx = 8$。左と下の辺は 0。合計 12。右：$\mathrm{div}\, \vec{F} = y+2y = 3y$、$\int_0^2 \int_0^2 3y\,dx\,dy = 2 \times 6 = 12$。

じ 9 (1) 上向きの合計は
$1000 \times 9.8 \times (1.2-1) \times 0.04$
$= 78.4\,\mathrm{N}$。
$\rho g V = 1000 \times 9.8 \times 0.008 = 78.4\,\mathrm{N}$ で同じ。(2) $1000 \times 9.8 \times \frac{4}{3}\pi \times 0.05^3$
$= 5.13\,\mathrm{N}$。

じ 10 回転は $2-(-2)=4$。(1) 右の辺 $\int_0^3 6\,dy=18$、上の辺 $-\int_0^3(-6)\,dx=18$、下と左の辺は 0 で、合計 36。$4\times 9=36$。(2) $4\times 4\pi=16\pi$（約 50.3）。

じ 11 (1) $0\times 0-5\times 0=0$、$5\times 2-5\times 0=10$、$5\times 4-0\times 2=20$、$0\times 0-0\times 4=0$。$A=\frac{1}{2}\times 30=15$。(2) $x\,dy-y\,dx=4\,dt$、$A=\frac{1}{2}\times 4\times 2\pi=4\pi$。

じ 12 (1) $5\times 2\pi=10\pi$。(2) 原点をかこむので 10π。(3) 原点をかこまないので 0。

じ 13 (1) $\dfrac{4\pi\times 10^{-7}\times 20}{2\pi\times 0.1}=4\times 10^{-5}$ T。(2) $I_{中}=20\times\frac{1}{4}=5$、$\dfrac{4\pi\times 10^{-7}\times 5}{2\pi\times 0.001}=1\times 10^{-3}$ T。

じ 14 (1) $2\times 4\pi=8\pi$。(2) $dS=4\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ で、$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\times 4\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ $=2\pi\times 4=8\pi$。

じ 15 (1) $\pi\times 0.1^2\times 0.2=6.28\times 10^{-3}$ V。(2) $E=\dfrac{6.28\times 10^{-3}}{2\pi\times 0.1}=0.01$ V/m。

1 (1) $\mathrm{div}\,\vec{F}=6$。$6\times\frac{4}{3}\pi\times 27=216\pi$（約 679）。(2) 左：$x=1$ の面で $\iint(1+y)\,dy\,dz=1.5$、$x=0$ の面（外向きは $-x$）で $-\iint y\,dy\,dz=-0.5$。$y\cdot z$ の面も同じで、合計 $(1.5-0.5)\times 3=3$。右：$\mathrm{div}\,\vec{F}=3$、$3\times 1=3$。

2 閉じた全体は $3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$。ふた（下向き）は $\vec{F}\cdot\vec{n}=-2$ で -2π。ドームは $2\pi-(-2\pi)=4\pi$（約 12.6）。

3 (1)
(ア) $\dfrac{4.28\times 10^{13}}{(3.39\times 10^6)^2}=3.72$ m/s^2。
(イ) その半分の 1.86 m/s^2。(2)
(ア) $\dfrac{9.0\times 10^9\times 4.0\times 10^{-9}}{0.09}$
$=400$ N/C。
(イ) $\dfrac{2\times 9.0\times 10^9\times 3.0\times 10^{-9}}{0.2}$
$=270$ N/C。

4 (1) 全体は $\dfrac{2.0\times 10^{-9}}{8.85\times 10^{-12}}=226$ で、その $\frac{1}{6}$ の約 37.7 N m^2/C。(2) 0。

5 (1) 2 m^2/s。(2) $v\times 2\pi\times 0.25=2$ より $v=\dfrac{4}{\pi}=1.27$ m/s。

6 左：右の辺 $x=2$ で $F_x=4$、$4\times 1=4$。上の辺 $y=1$ で $F_y=2$、$2\times 2=4$。左と下は 0。合計 8。右：$\mathrm{div}\,\vec{F}=2x+2$、$\int_0^1\int_0^2(2x+2)\,dx\,dy=8$。

7 (1) 回転は $3-(-1)=4$。$4\times 9\pi=36\pi$（約 113）。(2) $0\times 0-6\times 0=0$、$6\times 4-0\times 0=24$、$0\times 0-0\times 4=0$。$A=\frac{1}{2}\times 24=12$。

8 $B\times 2\pi\times 0.01=4\pi\times 10^{-7}\times 5$ より $B=1\times 10^{-4}$ T。

9 $1000\times 9.8\times\frac{4}{3}\pi\times 0.2^3=328$ N。

10 (1) 原点をかこむので $2\times 2\pi=4\pi$。(2) 原点をかこまないので 0。

11 円板：$2\times 9\pi=18\pi$。半球：$dS=9\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ で、$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\times 9\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ $=2\pi\times 9=18\pi$。

12 (1) $\pi\times 0.04\times 0.05=6.28\times 10^{-3}$ V。(2) $\dfrac{6.28\times 10^{-3}}{2\pi\times 0.2}=0.005$ V/m。

8-12

じ 1　P：$\frac{180}{4}-40=45-40=+5$ で温まる。Q：$\frac{212}{4}-60=53-60=-7$ で冷える。

じ 2　$\nabla^2 f=2+8+2=12$。g は、x で 2 回偏微分すると 0、y で 2 回偏微分しても 0 なので、$\nabla^2 g=0$。

じ 3　$\nabla^2 z=0.06+0.02=0.08$。予想 $25\times0.08=2.0$。点 $(20,\ 10)$ は $z=13$、東 28・西 4・北 16・南 12 で平均 15、差 $15-13=2.0$。

じ 4　$4A=80+20+0+B$、$4B=A+20$。2 つめから $A=4B-20$。1 つめに入れて $16B-80=100+B$、$B=12$、$A=28$。A は 28 ℃、B は 12 ℃。

じ 5　$\frac{80}{4}+\frac{40}{4}+\frac{20}{4}+\frac{0}{4}$ $=20+10+5+0=35$。35 ℃。

じ 6　$\frac{62-2\times58+50}{0.1^2}=\frac{-4}{0.01}=-400$ 〔℃/m²〕。平均は 56 ℃で、まん中（58 ℃）のほうが高い（上に凸）。

じ 7　（1）$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=4r^3$、$r^2\times4r^3=4r^5$、微分して $20r^4$、$\frac{1}{r^2}$ をかけて $20r^2$。

（2）$r\times2r=2r^2$、微分して $4r$、$\frac{1}{r}$ をかけて 4。

じ 8　$60=20a+b$、$0=10a+b$。ひいて $60=10a$、$a=6$、$b=-60$。$\phi=\frac{6}{r}-60$。$r=0.075$ で $80-60=20$ V。

じ 9　$40=100+a\ln2$ から $a=\frac{-60}{0.693}=-86.6$。$r=0.03$ で $T=100-86.6\times0.405$ $=100-35.1=64.9$ ℃。

1　$\frac{128}{4}-30=32-30=+2$。温まる。

2　$10+(-2)+4=12$（xy は x で 2 回、y で 2 回偏微分するとどちらも 0）。

3　$\nabla^2 f=0.04+0.04=0.08$。$\frac{5^2}{4}\times0.08=6.25\times0.08=0.5$。

4　$4A=40+B$、$4B=A+20$。1 つめから $B=4A-40$。2 つめに入れて $16A-160=A+20$、$A=12$、$B=8$。A は 12 ℃、B は 8 ℃。

5　$25+25+10+0=60$。60 ℃。

6　$\frac{30-52+20}{0.02^2}=\frac{-2}{0.0004}=-5000$ 〔℃/m²〕。

7　$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=3r^2$、$r^2\times3r^2=3r^4$、微分して $12r^3$、$\frac{1}{r^2}$ をかけて $12r$。

8　$\phi=\frac{a}{r}+b$ とおく。$50=5a+b$、$0=2.5a+b$。$a=20$、$b=-50$。$r=0.3$ で $66.7-50=16.7$ V。

9　$T=90+a\ln\frac{r}{0.1}$ とおく。$a=\frac{-60}{0.693}=-86.6$。$T=90-86.6\times0.405=90-35.1$ $=54.9$ ℃。

10　$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=-\frac{2}{r^3}$、$r^2$ をかけて $-\frac{2}{r}$、微分して $\frac{2}{r^2}$、$\frac{1}{r^2}$ をかけて $\frac{2}{r^4}$。0 ではないので、みたさない。

8-13

じ 1　2 番め：$60+0.3\times(100-120+40)$ $=60+6=66$ ℃。3 番め：$40+0.3\times(60-80+30)=40+3$ $=43$ ℃。

じ 2　（1）$r=\frac{4\times10^{-6}\times0.6}{0.002^2}=0.6$。0.5 より大きいので、こわれる。

（2）$\frac{0.002^2}{2\times4\times10^{-6}}=0.5$ s。

じ 3　(1) $3+0.1\times(-12)=1.8$。倍率 $1-0.4=0.6$。(2) $1-2.8=-1.8$ 倍ずつ、ゆれながら育ってこわれる。

じ 4　$\dfrac{\partial T}{\partial t}=-0.395\,T$。$\alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=10^{-4}\times(-3944\,T)=-0.394\,T$ で同じ。$t=\dfrac{0.693}{0.395}\approx 1.75$ 秒。

じ 5　玉 2：$1+0-0=1$。玉 3：$3+0-0=3$。玉 4：$1+1-1=1$。玉 5：$0+3-3=0$。玉 6：$0+1-1=0$。1、3、1、0、0（山が左へ 1 マス進んだ）。

じ 6　$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-1500^2 y$、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-25y$。$c^2=\dfrac{2250000}{25}=90000$、$c=300\,\mathrm{m/s}$。$5(x+300t)$ なので左へ走る。

じ 7　$\lambda=\dfrac{100}{200}=0.5\,\mathrm{m}$。$k=\dfrac{2\pi}{0.5}\approx 12.6$〔1/m〕。$\omega=2\pi\times 200\approx 1257$〔rad/s〕。$ck=1260$ で、丸めのちがいだけで同じ。

じ 8　$v=5\times 3600=18\,000\,\mathrm{m/h}=18\,\mathrm{km/h}$。$\dfrac{\partial T}{\partial x}=0.01\,℃/\mathrm{km}$。$0.5+18\times 0.01=0.68$。1 時間に 0.68 ℃上がる。

1　2 番め：$60+0.25\times(90-120+40)=62.5\,℃$。3 番め：$40+0.25\times(60-80+30)=42.5\,℃$。

2　(1) $r=\dfrac{10^{-4}\times 1}{0.02^2}=0.25$。こわれない。(2) $\dfrac{0.02^2}{2\times 10^{-4}}=2\,\mathrm{s}$。

3　(1) $1-1.8=-0.8$ 倍。$5\times(-0.8)=-4$。(2) $1-3=-2$ 倍ずつ、ゆれながら育ってこわれる。

4　$\dfrac{\partial T}{\partial t}=-0.888\,T$。$\alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=10^{-4}\times(-8874\,T)=-0.887\,T$ で同じ。$t=\dfrac{0.693}{0.888}\approx 0.78\,\mathrm{s}$。

5　玉 2：$2+0-2=0$。玉 3：$4+0-4=0$。玉 4：$2+2-2=2$。玉 5：$0+4-0=4$。玉 6：$0+2-0=2$。0、0、2、4、2。

6　$c^2=\dfrac{1200^2}{4^2}=90000$、$c=300\,\mathrm{m/s}$。$4(x-300t)$ なので右へ走る。

7　$\lambda=\dfrac{340}{1000}=0.34\,\mathrm{m}$。$k=\dfrac{2\pi}{0.34}\approx 18.5$〔1/m〕。$\omega=2\pi\times 1000\approx 6283$〔rad/s〕。

8　$v=3.6\,\mathrm{km/h}$。$v\dfrac{\partial T}{\partial x}=3.6\times(-0.2)=-0.72$。$0.5-0.72=-0.22$。1 時間に 0.22 ℃下がる。

9　(1) $\dfrac{0.01^2}{2\times 2.3\times 10^{-5}}\approx 2.17\,\mathrm{s}$。(2) $r=\dfrac{2.3\times 10^{-5}\times 3}{0.01^2}=0.69$。倍率 $1-2.76=-1.76$（こわれる）。

10　$\Delta t=\dfrac{0.017}{340}=5\times 10^{-5}\,\mathrm{s}$。

記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

記号	読み方	意味	章
Δ	デルタ	変化の量。8-13 の Δx（マスのはば）・Δt（1 歩の時間）。ラプラシアンの記号には使わない（8-12）	2-3
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	ディー・ワイ・ディー・エックス	1 つの変数の微分。変数が 2 つ以上の関数で 1 つだけ動かすときは ∂ で書く（8-2）	5-3
$\approx$	ニアリーイコール	ほぼ等しい。全微分の近似 $\Delta f \approx \mathrm{d}f$、誤差の見積もり（8-3）	5-8
$\displaystyle\int_a^b$	インテグラル	ふつうの定積分。重積分・線積分・面積分は、これのくり返しに直して計算する（8-6）	5-10
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$	シグマ	全部たす。タイルの和、表計算の SUM（8-6・8-7）	5-10
e	イー	ネイピア数。ガウス積分の e^{-x^2}（8-6）、熱方程式の答えの $e^{-\alpha a^2 t}$（8-13）	5-14
$\vec{a}$	ベクトル・エー	向きと大きさをもつ量。この巻では、場所ごとに矢印が決まる $\vec{F}(x,\ y)$（8-5）	4-10
$\lvert\vec{a}\rvert$	ぜったいち・エー	矢印の長さ。$\lvert\mathrm{grad}\,h\rvert$ は坂の急さ（8-4）	4-10
$\vec{e}$	イー	長さ 1 の矢印。$\vec{e}_x$・$\vec{e}_y$・$\vec{e}_z$、方向微分の $\vec{e}$（8-4）、$\vec{e}_r$（8-8）	4-11
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	エー・ドット・ビー	内積。方向微分（8-4）、仕事 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$（8-7）、流束の $\vec{F}\cdot\vec{n}$（8-8）、$\nabla\cdot$（8-9）	4-12
$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$	アイ・ジェイ・ケイ	専門書の基本ベクトル。この本の $\vec{e}_x$・$\vec{e}_y$・$\vec{e}_z$ と同じ（8-4・8-5）	4-13
$\vec{a}\times\vec{b}$	エー・クロス・ビー	外積。ななめの面の面積ベクトル $A\vec{n}$（8-8）、$\nabla\times$（8-10）	4-14

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
$(r,\ \theta)$	アール・シータ	極座標。タイルの面積は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$（8-3・8-6）	4-15
$(r,\ \theta,\ \varphi)$	アール・シータ・ファイ	球座標。θ は真上から、φ は床の上の角。$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$（8-6・8-8）	4-15
ϕ	ファイ	この巻では電位 ϕ（8-4）。球座標の角 φ とは別の文字	5-15
ω	オメガ	角速度〔rad/s〕。流れに置いた風車の角速度は $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$（8-10）	4-8
y_n	ワイ・エヌ	n 歩めの値。8-13 の T_i^n は、場所の名札 i もついた形	6-2
A^{T}	エー・ティー	転置。軸を回して見た矢印の成分は $R^{\mathsf{T}}\vec{F}$（8-5）	7-1
$\det A$	デターミナント・エー	行列式。ヤコビアン $\det J$ は小さな面積の倍率（8-3・8-6）	7-4
λ	ラムダ	固有値。8-13 の 1 歩の行列の固有値（こわれない条件）。熱伝導率には使わず k と書く	7-8
$f(x, y)$	エフ・エックス・ワイ	2 つの数 x、y を入れたときに出てくる数（2 つの変数の関数）。順番が大事	8-1
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	ラウンドディー エフ ラウンドディー エックス	偏微分。ほかの変数を止めて、x だけ動かしたときの変化の割合	8-2
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$	ラウンドディー 2 乗エフ、ラウンドディーエックス ラウンドディーワイ	2 回の偏微分。順番によらない	8-2
$\mathrm{d}f$	ディー エフ	全微分。x、y を同時に少し動かしたときの f の変化	8-3
$\det J$	デターミナント ジェイ	ヤコビアン。ヤコビ行列の行列式で、小さな面積の倍率	8-3
$\mathrm{grad}\,f$	グラッド・エフ	勾配。偏微分を並べた矢印。いちばん急に増える向き	8-4

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
∇	ナブラ	偏微分を並べた記号。$\nabla f = \mathrm{grad}\, f$。8-9・8-10・8-12 でも使う	8-4
$\vec{F}(x,\ y)$	エフ・エックス・ワイ	ベクトル場。場所 $(x,\ y)$ を入れると矢印 $(F_x,\ F_y)$ が出てくる	8-5
$\iint_D$	ダブル・インテグラル	範囲 D の上で、量×タイルの面積 $\mathrm{d}A$ をたした先（重積分）。$\int$ の数は場所を表す数の数	8-6
$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$	アール・ディーアール・ディーシータ	極座標の小さなタイルの面積。r は、遠いほどタイルが広い分（ヤコビアン）	8-6
$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	インテグラル・シー、エフ・ドット・ディーアール	道 C にそって、力と 1 歩の矢印の内積をたした先（線積分）。道には向きがある	8-7
$\oint_C$	周回積分（しゅうかいせきぶん）	閉じた道 C を 1 周する線積分。◯は「閉じている」印で、円の形の意味ではない	8-7
$\vec{n}\,\mathrm{d}S$	エヌ・ディー・エス	向きのついた小さなタイル。$\vec{n}$ は外向き（表向き）の長さ 1 の矢印、$\mathrm{d}S$ はタイルの面積	8-8
$\oiint_S$	閉じた面の面積分	◯は「面が閉じている」という印。形や面積ではない。どの面かは S で決める	8-8
div	ダイバージェンス	発散。小さな箱から出ていく量（出－入）を、箱の大きさでわったもの。答えは数	8-9
$\nabla\cdot$	ナブラ ドット	div と同じ。∇ と矢印の場の内積の形で書く	8-9
rot $\vec{F}$	ローテーション・エフ	回転。小さなマスの循環÷面積。3 次元では矢印。英語の本では curl	8-10
$\nabla\times\vec{F}$	ナブラ・クロス・エフ	rot $\vec{F}$ と同じもの。外積の形で書いた	8-10
$\nabla^2 f$	ナブラ 2 乗エフ、ラプラシアン・エフ	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$。数学の本では Δf とも書く	8-12

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
T_i^n	ティー・アイ・エヌ	i 番めの場所の、n 歩めの値。右上の n は時刻の名札で、n 乗ではない	8-13
$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$	ディー・ティー・ディー・ティー	物質微分。流れといっしょに動いて見た変化。$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T$	8-13

記号を書くときのちゅうい

手で書くと、ほかの記号とまぎれやすいものと、読みまちがえやすい書き方です。積分の記号は、まず「名前」として読みます。

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$h(20,\ 30)$	$h(30,\ 20)$	かっこの 1 つめが x（東）、2 つめが y（北）。入れかえると値が変わる（8-1）
T〔℃〕	T℃	記号と単位が並ぶときは、単位を〔 〕でくくる。「温度 T〔℃〕」「電位 ϕ〔V〕」。点・ベクトルの数の組は（ ）で「$(3,\ 4)$（m/s）」（8-1・8-4）
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	変数が 2 つ以上なら ∂（ほかを止める）。止めた文字は数と同じで、微分しない（8-2）
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2$	「2 回偏微分する」の印。1 回めの答えを 2 乗するのではない（8-2）
$\mathrm{d}f$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$	全微分は「坂×進んだ長さ」をたす。$\mathrm{d}x$・$\mathrm{d}y$ を忘れない（8-3）
$\operatorname{grad} h$	1 つの数	矢印 $(-0.6,\ -0.8)$。2 つの成分をたさない。ボールは $-\operatorname{grad} h$ の向きに転がる（8-4）
∇f	$f\nabla$	∇ は右にある関数を微分する。左に置くと、何も微分していない（8-4）
$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$	$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$	極座標のタイルの r を忘れない。$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ の単位は m で、面積にならない（8-3・8-6）

つぎのページへつづく

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$r^2 \sin\theta$	r^2	球座標のタイル。θ は 0 から π、φ は 0 から 2π（8-6・8-8）
$\int_0^1 \int_0^2 f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$	範囲の組	内側の $\int$ と内側の $\mathrm{d}x$ が組。内側の範囲には、外側の文字だけが入る（8-6）
$\iint_D$	2 つの積分のかけ算	かけ算に分かれるのは、長方形で $f = g(x)\,h(y)$ のとき（場合 A′）だけ（8-6）
$\oint_C$	円の道	○は「閉じた道」という印。正方形でも三角形でもよい。どの道かは C で決める（8-7）
$\oiint_S$	球の面	○は「閉じた面」という印。箱でもよい。どの面かは S で決める（8-8・8-9・8-11）
$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$	$\lvert\vec{F}\rvert\times$ 長さ	内積をたす。力と進む向きが反対なら負、直角なら 0（8-7）
$\int_0^1 \ldots \mathrm{d}t$	$\int_1^0$	下のはしが「はじめの点」、上のはしが「おわりの点」。逆にすると符号が逆（8-7）
$\vec{F} \cdot \vec{n}$	$\lvert\vec{F}\rvert$	面に直角な成分だけが通りぬける。閉じた面の $\vec{n}$ は外向き（8-8）
$\mathrm{div}\,\vec{v}$	矢印	答えは数。v_x は x で、v_y は y で偏微分してたす（8-9）
$\mathrm{rot}\,\vec{F}$	$\mathrm{div}\,\vec{F}$	平面は $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$（ひく順に注意）。3 次元の回転は矢印（8-10）
$\nabla^2 f$	Δf、$(\nabla f)^2$	2 回微分の和で、答えは数。この本の Δ は「変化の量」（8-12）
T_i^n	T_i の n 乗	右上の n は「n 歩め」の名札（8-13）
$\dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}$	$\dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x}$	r の Δx は 2 乗。$r \leqq \frac{1}{2}$ をこえると計算がこわれる（8-13）
$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$	$\dfrac{\partial T}{\partial t}$	立てた D は、流れといっしょに動いて見た変化（物質微分）（8-13）

ギリシャ文字の読み方

この巻では、密度 ρ、熱拡散率 α、真空の誘電率 ε_0 など、ギリシャ文字がたくさん出てきます。大文字・小文字・読み方と、この巻での意味です（かっこの中は章）。

大	小	読み方	この巻での意味	大	小	読み方	この巻での意味
A	α	アルファ	熱拡散率（8-13）、円すいの半分の角（8-8）	N	ν	ニュー	—
B	β	ベータ	フィンの式の β（8-13）	Ξ	ξ	クシー	—
Γ	γ	ガンマ	—	O	o	オミクロン	—
Δ	δ	デルタ	Δx、Δt（8-13）、δQ（8-3）	Π	π	パイ	円周率
E	ε	イプシロン	真空の誘電率 ε_0（8-8）	P	ρ	ロー	密度、電荷の密度（8-9）
Z	ζ	ゼータ	—	Σ	σ	シグマ	Σ は和、σ は面密度（8-6）
H	η	イータ	—	T	τ	タウ	—
Θ	θ	シータ	極座標・球座標の角（真上から）	Υ	υ	ウプシロン	—
I	ι	イオタ	—	Φ	ϕ	ファイ	ϕ は電位（8-4）、Φ は磁束（8-11）。球座標の角 φ は別の文字
K	κ	カッパ	専門書の熱拡散率（8-13）	X	χ	カイ	—
Λ	λ	ラムダ	固有値（8-13）、線密度（8-7）、線電荷密度（8-11）	Ψ	ψ	プサイ	—
M	μ	ミュー	真空の透磁率 μ_0（8-10）、動摩擦係数 μ'（8-7）、粘度（8-14）	Ω	ω	オメガ	ω は角速度（8-10）、Ω は立体角（8-8）

大文字が英語のアルファベットと同じ形の文字（A、B、E など）は、記号としてはほとんど使いません。電位の ϕ と球座標の角 φ は別の文字です（同じページに出るときは、形で見分けます）。∇（ナブラ）はギリシャ文字ではなく、たて琴の形からついた名前です（8-4）。熱伝導率は k、熱拡散率は α と書きます（λ は固有値とぶつかるので使いません）。

よく使う定数・単位・公式

1 積分の地図

積分の記号は「タイルに分けてたし、細かくした先」という操作の**名前**です。この見開きと次のページに、すべての場合の「こんなとき→直す手順→例題（その表の章の番号）」をまとめました。下の流れ図「どの表を見る？」で、使う表を選びます。

名前と、ふつうの定積分の見分け方

$$\underbrace{\iint_D \sigma \,\mathrm{d}A}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_0^2 (10+5x+2y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y}_{\text{ふつうの定積分}} = 32$$

（8-6 のはてな？ の板。④）

点線の枠＝名前

まだ計算できない記号。何を（σ）・どこで（D）・1 枚の量（$\mathrm{d}A$）を読む。

実線の枠＝ふつうの定積分

数の範囲がついた $\int$ のくり返し（第 5 巻の $\int_a^b$）。ここではじめて計算できる。

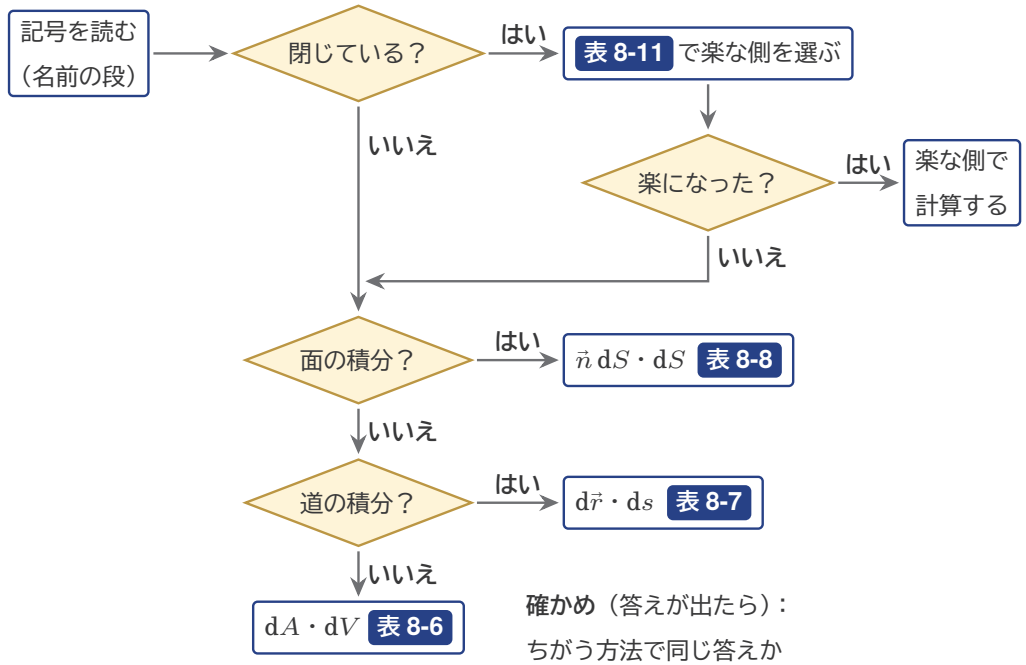
○は「閉じている」印

$\oint_C$ は閉じた道、$\oiint_S$ は閉じた面。形（円・球）や面積ではない。どの道・面かは下の C・S で決める。

$\int$ の数＝場所を表す数の数

道は 1 つ（t）で $\int_C$、面は 2 つで $\iint$、立体は 3 つで $\iiint$。

どの表を見る？



確かめ（答えが出たら）：
ちがう方法で同じ答えか

どの積分も 名前 → 楽をする → 直す → 確かめ の順に考えます。

表 8-6 重積分 $\iint_D f\,\mathrm{d}A$ $\iiint_V f\,\mathrm{d}V$ → 定積分を 2 回（立体は 3 回）

記号	こんなとき → ふつうの定積分に直す手順	例題
A	**長方形** → $\int_c^d\left(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$。内側は y を止める。順番は自由	1
A′	**長方形で、f が「x だけ」×「y だけ」** → 2 つの定積分のかけ算	2
B	**境目がななめの線・曲線** → たて線で切り、内側の範囲を外側の文字の式で	3・4
C	**円の形（円・おうぎ形・輪）** → 極座標 $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ で 2 回	5
C′	**円の形で、f は中心からの距離 r だけ** → 細い輪 $2\pi r\,\mathrm{d}r$ で 1 回	6・7
D	**体積で、切り口の面積 $A(z)$ がわかる** → 体積 $= \int A(z)\,\mathrm{d}z$	8
E	**立体（直方体・円柱・球など）** → 3 回（円柱座標・球座標）	9
F	**簡単な形の和・差** → 分けて、それぞれ A〜E で計算し、たす・ひく	10
G	**折り返し・回転で 0 や同じになる** → 先に使う。左右対称な範囲で x の奇関数は 0	5・6
H	**データだけ** → 表計算で「マスの値×マスの面積」をたす	11

表 8-7 線積分 $\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ $\int_C f\,\mathrm{d}s$ → 道を t で表し、定積分 1 回

記号	こんなとき → ふつうの定積分に直す手順	例題
A	**軸に平行な線分だけ** → 横は $F_x\,\mathrm{d}x$（y は止める）、たては $F_y\,\mathrm{d}y$	1・8
B	**まっすぐななめ** → $\vec{r} = \vec{A} + t(\vec{B}-\vec{A})$ $(0 \leqq t \leqq 1)$、$\mathrm{d}\vec{r} = (\vec{B}-\vec{A})\,\mathrm{d}t$	2
C	**$y = g(x)$ のグラフ** → x で：$\mathrm{d}\vec{r} = (1,\ g'(x))\,\mathrm{d}x$。$y$ に $g(x)$ を入れる	3
D	**円・円弧** → 角 θ で：$\mathrm{d}\vec{r} = (-R\sin\theta,\ R\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$	4・9
E	**ななめ・曲線のある折れ線** → 区間ごとに A〜D でたす。逆向きは符号が逆	5
I	**長さでたす** $\int_C f\,\mathrm{d}s$ → $\mathrm{d}s = \lvert\vec{r}\,'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$。向きを逆にしても同じ値	9
F	**力が式で書いてない** → 直角なら 0、平行で一定なら $\pm F\times$（長さ）	6
G	**U のわかる保存力** → 道によらない：U(はじめ) $-$ U(おわり)	7
H	**閉じた道（$\oint$）** → 保存力なら 0。ちがえば 1 周を F〜D の問いで	4・5・8
J	**データだけ・数値で** → 表計算で $\sum \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$（まん中の点で）	10
K	**p-V 図の上の道** → 区間ごとに $\int p\,\mathrm{d}V$（直し方は A と同じ）	11

表 8-8 面積分 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ $\iint_S f\,\mathrm{d}S$ → 面を 2 つの数で表し、重積分に

記号	こんなとき → ふつうの定積分に直す手順	例題
A	**平らな面で、場が一様** → 積分しない：$\vec{F}\cdot(A\vec{n})$（$A\vec{n}$ は外積で）	1・2・3
B	**平らな面（円でない）** → $\vec{n}$ は軸の向き。8-6 の重積分そのもの	4
C	**平らな円の面** → 極座標 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。$r$ だけなら $2\pi r\,\mathrm{d}r$	5
D	**球面・円柱面で、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ が一定** → 一定の値×面積（$4\pi R^2$、$2\pi RL$）	6・9
E	**$z = g(x,\ y)$ のグラフ** → $\vec{n}\,\mathrm{d}S = (-\partial g/\partial x,\ -\partial g/\partial y,\ 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（上向き）	7
F	**球面・円柱面** → $(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$。球面 $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$	8・9
G	**閉じた面で、箱の形** → 面ごとに B でたす。どの面も外向きが正	10
H	**閉じた面で、点電荷 1 つの場** → 中なら同じ中心の球（D）、外なら 0	11
I	**立体角を求める** → $\Omega = \iint_S(\vec{e}_r\cdot\vec{n})/r^2\,\mathrm{d}S$。円すいは $2\pi(1-\cos\alpha)$	12
J	**データだけ** → 表計算で「$\vec{F}\cdot\vec{n}$ ×タイルの面積」をたす	13

表 8-11 ガウスの定理 $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V$ → 楽な側を選び、表 8-6・8-8 で直す

記号	こんなとき → 楽な側に取りかえて、直す	例題
G1	**div は簡単** → 体積の積分に。div が定数なら「div ×体積」	1・2
G2	**開いた面** → ふたをして G1。ふたの分（8-8 の B）をひく	3
G3	**対称な場の大きさを知りたい** → 球・円柱・箱の袋で、大きさ×面積＝中の量	4・5
G4	**袋の一部の面の流束** → 全体は中の量で決まる。同じ形の面に等分	6
G5	**div が決まらない点がある** → その点を小さな球（平面なら円）でくりぬく	7
G6	**平面（2 次元）の流れ** → $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}A$	8
G7	**圧力のような数の面の積分** → $\oiint_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$	9
表 8-11	**ストークスの定理** $\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ → 道を回る向きと $\vec{n}$ は右ねじ	
S1	**rot は簡単** → 面積分に。一定なら「rot ×面積」	10
S2	**面積を知りたい** → $\oint_C (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ の半分。多角形は、くつひもの式	11
S3	**rot ＝ 0（穴の点をのぞく）** → かこまなければ 0、かこめば小さな円と同じ	12
S4	**軸対称な場の大きさを知りたい** → 同じ軸の円を道に：$B\times 2\pi r = \mu_0 I$	13
S5	**面の積分がほしい（ふちは同じ）** → 計算が楽な面（平らな円板など）を選ぶ	14
S6	**時間で変わる磁場がある** → $\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$（読むだけ）	15

2 この巻で使う単位

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係・この巻の例	章
長さ・高さ	m、cm、mm、km	主役の山の x・y・h はどれも m	8-1
面積・体積	$\mathrm{m^2}$、$\mathrm{m^3}$、L、mL	$1\,\mathrm{L} = 0.001\,\mathrm{m^3}$、$1\,\mathrm{mL} = 1\,\mathrm{cm^3}$	8-6
偏微分	（出てくる量の単位）÷（動かした量の単位）	坂 $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ は m/m、$\dfrac{\partial T}{\partial x}$ は K/m、$\dfrac{\partial p}{\partial z}$ は Pa/m	8-2
面密度・線密度	$\mathrm{kg/m^2}$、kg/m	板 $\sigma = 10 + 5x + 2y$〔$\mathrm{kg/m^2}$〕、針金 $\lambda = 2 + \sin\theta$〔kg/m〕	8-6 8-7
仕事・エネルギー	J（ジュール）	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$。力の線積分の単位	8-7
流量	$\mathrm{m^3/s}$、mL/s	管の流量 31.4 mL/s（体積の流束）	8-6 8-8
発散・回転	1/s	速さ〔m/s〕を長さ〔m〕でわる。循環は $\mathrm{m^2/s}$	8-9 8-10

つぎのページへつづく

量	単位（読み方）	ほかの単位との関係・この巻の例	章
角速度	rad/s	流れに置いた風車は $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$	8-10
立体角	sr（ステラジアン）	全体は 4π sr。半分の角 30° の円すいは 0.842 sr	8-8
電場	N/C（= V/m）	点電荷の電場は $\frac{1}{r^2}$ に比例	8-5 8-11
電場の流束 Φ_E	N·m²/C	$\frac{Q}{\varepsilon_0}$。1.0×10^{-9} C で約 113。電気工学の本の「電束」は、電束密度 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$ の流束で、単位は C	8-8
磁場（磁束密度）	T（テスラ）	10 A・5 cm で 4×10^{-5} T	8-10 8-11
熱の流れ	W/m²	6-3 のかべ 160 W/m²	8-4
熱伝導率	W/(m·K)	コンクリート 1.6（ばね定数の k とは別）	8-4
熱拡散率	m²/s	$\alpha=\frac{k}{\rho c}$。アルミ 1.0×10^{-4}	8-13
温度・温度の差	℃、K（ケルビン）	温度の差は 1 K と 1 ℃ が同じ	8-4 8-13
圧力	Pa、hPa、kPa	1 hPa = 100 Pa、1 kPa = 1000 Pa	8-2 8-4

③ よく使う数

名前	値	章
$\sqrt{\pi}$	1.7725（ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$）	8-6
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.707（北東の向きの長さ 1 の矢印 $(0.707,\ 0.707)$）	8-4
重力加速度 g	計算では 9.8 m/s²。地面での値は $GM/R^2=9.82\,\mathrm{m/s^2}$	8-5 8-11

つぎのページへつづく

名前	値	章
地球	半径 $R = 6371\,\mathrm{km}$、$GM = 3.986 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$	8-5 8-11
万有引力定数 G	$6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$	8-14
真空の誘電率 ε_0	$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$。$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$。2019 年の SI の改定からは、測って決める値で、ほぼこの値	8-8 8-11
真空の透磁率 μ_0	$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$（$= \mathrm{T{\cdot}m/A}$）。2019 年の SI の改定からは、測って決める値で、ほぼこの値	8-10 8-11
光の速さ c	$\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$、約 $3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$	8-14
地球の磁場（日本）	およそ $4.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$	8-10
水の密度	$1000\,\mathrm{kg/m^3}$	8-2 8-11
熱拡散率 α〔$\mathrm{m^2/s}$〕	銅 1.2×10^{-4}、アルミ 1.0×10^{-4}、鉄 2.3×10^{-5}、ステンレス 4×10^{-6}、水（動かないとき）1.4×10^{-7}。10 cm に広がる時間のめやす L^2/α は、順に約 80 秒・100 秒・7 分・40 分・20 時間	8-13

この巻でくり返し使う場面と数

同じ場面は、どの章でも同じ数で計算しています。

場面	式と数	章
主役の山	$h = 100 - 0.01x^2 - 0.02y^2$〔m〕（$x$ は東へ、y は北へ）。点 $(30,\ 20)$ で $h = 83$、$\dfrac{\partial h}{\partial x} = -0.6$、$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -0.8$、$\operatorname{grad} h = (-0.6,\ -0.8)$（大きさ 1.0）。東へも北へも 1 m で全微分 -1.4（本当は -1.43）。体積 $1.11 \times 10^6\ \mathrm{m^3}$。50 kg の人が頂上まで登る仕事 8330 J	8-1 ～8-4 8-6 8-7
2 つの力	$\vec{F}_1 = (y,\ x)$、$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$（物理第 1 巻と同じ）。道 A $(0,\ 0) \to (1,\ 0) \to (1,\ 1)$、道 B $(0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (1,\ 1)$。$\vec{F}_1$ はどちらも 1（保存力、$U = -xy$）。$\vec{F}_2$ は道 A 1・道 B -1、正方形の 1 周 2、半径 1 の円の 1 周 2π（rot は 2）	8-7 8-10 8-11
池	わき出しの口 $(1.5,\ 2.5)$、吸いこみの口 $(4.5,\ 1.5)$、強さ $Q = 4\ \mathrm{m^2/s}$。口のマスの発散は 4 と -4、ほかのマスは 0。口をかこむどんな道からも 4 が出る	8-5 8-9 8-11
ロボットの腕	$L_1 = 0.30$ m、$L_2 = 0.25$ m、30°・45°。J の 1 行め $(-0.3915,\ -0.2415)$、2 行め $(0.3245,\ 0.0647)$、$\det J = 0.0530$	8-3
厚さがちがう板	$\sigma = 10 + 5x + 2y$〔kg/m²〕、2 m × 1 m の板で 32 kg。4 × 2 のタイル（まん中の点）でも 32、左下の角の値では 28.5	8-6
管の流れ	半径 $R = 1$ cm、$u = 0.2\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$〔m/s〕。流量 31.4 mL/s、平均の速さは最大の半分	8-6 8-8
6-3 のかべ	厚さ 0.2 m、20 ℃と 0 ℃、$k = 1.6$。$T = 20 - 100x$、$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T = (160,\ 0,\ 0)$（W/m²）	8-4
立方体の箱	1 辺 1、$\vec{F} = (x^2,\ xy,\ -z)$。6 つの面から外へ出る量の合計 0.5。$\operatorname{div} \vec{F} = 3x - 1$ の体積の積分も 0.5	8-8 8-11
点電荷と地球	電場の流束 $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$（袋の大きさによらない）。地球の重力は外では全部の質量が中心にあるのと同じ。一様な球なら、半分の深さで $4.91\ \mathrm{m/s^2}$	8-8 8-11

つぎのページへつづく

場面	式と数	章
直線電流	10 A、5 cm の所で $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = 4 \times 10^{-5}$ T（地球の磁場と同じくらい）	8-10 8-11
ならす表計算	5×5 の点、上のふち 100、ほかのふち 0。くり返すと、まん中は 25	8-12
棒の熱の表計算	$\alpha = 1 \times 10^{-4}$ m²/s、$\Delta x = 0.01$ m、$\Delta t = 0.25$ s で $r = 0.25$。左はし 100 ℃、はじめ 20 ℃、右はしは熱が出ない。まん中が 50 ℃をこえるのは 15.5 秒後	8-13

主役の 6 つの場のわき出しとうず（8-5・8-9・8-10・8-14）

場	（ア） 広がる	（イ） 集まる	（ウ） そろった	（エ） うず	（オ） ずれ	（カ） 側溝
矢印 $\vec{F}$	$(x,\ y)$	$(-x,\ -y)$	$(1,\ 0)$	$(-y,\ x)$	$(y,\ 0)$	$(x,\ 0)$
わき出し $\operatorname{div}\vec{F}$	2	−2	0	0	0	1
うず $\operatorname{rot}\vec{F}$	0	0	0	2	−1	0

（ア）（イ）（カ）はわき出しだけ、（エ）（オ）はうずだけ、（ウ）はどちらもありません。回っていても div は 0（エ）、まっすぐでも rot があること（オ）があります。

4 偏微分・全微分・勾配の公式

公式・きまり	式	章
2 つの変数の関数	$f(x,\ y)$。等高線は $f(x,\ y) = c$。高さのちがう等高線は交わらない。3 つの変数なら等値面	8-1
偏微分	$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は y を止めて x だけ動かした微分。止めた文字は数と同じにあつかう	8-2
表から坂を出す	東の坂 ≈（右どなり − 自分）÷間かく、北の坂 ≈（上どなり − 自分）÷間かく。両どなりの差÷（2 ×間かく）のほうが正確	8-2

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
2 回の偏微分	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$（順番によらない）	8-2
全微分	$\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$（1 つずつの変化をたす）	8-3
誤差の伝わり方	$V = \pi r^2 h$ なら $\dfrac{\Delta V}{V} \approx 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta h}{h}$。いちばん大きいずれは、割合の大きさをたす	8-3
連鎖律	$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$（道ごとにかけて、たす）	8-3
ヤコビ行列	偏微分を並べた行列（行＝出てくる量、列＝動かす量）。$\mathrm{d}\vec{p} = J\,\mathrm{d}\vec{\theta}$	8-3
ヤコビアン	$\det J$ ＝小さな面積の倍率。極座標は r、だ円の座標は $ab\,r$	8-3 8-6
勾配	$\mathrm{grad}\,f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$	8-4
方向微分	$\mathrm{grad}\,f \cdot \vec{e} = \lvert\mathrm{grad}\,f\rvert \cos\theta$（$\vec{e}$ は長さ 1 の矢印）	8-4
いちばん急な向き	上りは grad、下りは $-$grad。坂の大きさは $\lvert\mathrm{grad}\,f\rvert$。grad は等高線・等値面と直角	8-4
物理の式	$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U$、$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$、$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T$	8-4
ナブラ	$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$。右にある関数を偏微分して並べる「機械」	8-4

5 ベクトル場・発散・回転・ラプラシアンの公式

名前	入れるもの	出てくるもの	∇ で	意味	章
$\mathrm{grad}\,f$	数の場	矢印	∇f	いちばん急な上り	8-4
$\mathrm{div}\,\vec{F}$	矢印の場	数	$\nabla \cdot \vec{F}$	わき出し（出－入）÷大きさ	8-9
$\mathrm{rot}\,\vec{F}$	矢印の場	矢印（平面は数）	$\nabla \times \vec{F}$	うず（循環÷面積）	8-10
$\nabla^2 f$	数の場	数	$\nabla \cdot \nabla f$	まわりの平均との差	8-12

公式・きまり	式	章
ベクトル場	$\vec{F}(x,\ y) = (F_x,\ F_y)$。場所を入れると矢印が出てくる。矢印の図は、同じ割合で縮めてかく	8-5
流線・力線	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{F_y}{F_x}$。矢印をつないだ線で、交わらない	8-5
点電荷・重力	大きさは $\dfrac{1}{r^2}$ に比例。電場は外向き、重力は内向き	8-5
軸を回して見る	矢印は同じ。成分は $R^{\mathrm{T}}\vec{F}$ で変わる	8-5
発散	$\mathrm{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{F}$（答えは数）	8-9
発散の定義	$\mathrm{div}\,\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta V}\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（小さな箱から出ていく量÷体積）	8-9
連続の式	$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$。縮まない流れなら $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$	8-9
回転（平面）	$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ ＝循環÷面積。正なら左回り	8-10
回転（3 次元）	$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ 向きは回る軸。右ねじの向き	8-10
風車	角速度は $\dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{v}$。$\mathrm{rot}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}$	8-10
いつも 0	$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \vec{0}$、$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$	8-10
保存力の見分け方	平面の力なら $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0$（すきまのない広がりの中なら）	8-7 8-10
ラプラシアン	$\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f$	8-12
まわりの平均	（まわり 4 点の平均）−（自分）$\approx \dfrac{h^2}{4}\nabla^2 f$（$h$ は点の間かく）。正なら温まる	8-12
落ち着いた形	$\nabla^2 T = 0$（ラプラス方程式）、$\nabla^2 T = -\dfrac{Q}{k}$（ポアソン方程式）	8-12

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
球・円柱で r だけ	球 $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$、円柱 $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$	8-12

6 積分と定理の公式

積分の名前を、ふつうの定積分に直すときの手順は、積分の地図（612 ページ）にまとめました。ここには、よく使う結果を集めます。

公式・きまり	式	章
タイルの面積・体積	長方形 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$、極座標 $\mathrm{d}A=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$、円柱座標 $\mathrm{d}V=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$、球座標 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$	8-6
一般の座標	$\mathrm{d}A=\lvert\det J\rvert\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$（$J$ は $(x,\ y)$ を $(u,\ v)$ で偏微分した行列）	8-6
円・球	円の面積 πR^2、球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$、球面の面積 $4\pi R^2$	8-6 8-8
断面二次モーメント	円 $\dfrac{\pi d^4}{64}$、中空の丸棒 $\dfrac{\pi(D^4-d^4)}{64}$	8-6
慣性モーメント	球（中心を通る軸）$\dfrac{2}{5}MR^2$	8-6
ガウス積分	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$（$\iint e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A=\pi$ から）	8-6
線積分	$\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$。長さでは $\mathrm{d}s=\lvert\vec{r}\,'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	8-7
保存力	$\vec{F}=-\mathrm{grad}\,U$ なら $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=U(\text{はじめ})-U(\text{おわり})$。閉じた道の 1 周は 0	8-7
流束	$\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（$\vec{n}$ は長さ 1 の法線。閉じた面では外向き）	8-8

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
曲がった面	$\vec{n}\,\mathrm{d}S = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$。球面 $\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$、円柱面 $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	8-8
立体角	$\Omega = \iint_S \dfrac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2}\,\mathrm{d}S$。円すい（半分の角 α）は $2\pi(1-\cos\alpha)$、全体は 4π	8-8
ガウスの定理	$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V$（外へ出る量＝中のわき出しの合計）	8-11
平面のガウスの定理	$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}A$（$\vec{n}$ は外向き）	8-11
ストークスの定理	$\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$（$C$ を回る向きと $\vec{n}$ は右ねじ）	8-11
グリーンの定理	$\oint_C (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$（左回り）	8-11
ふちの道で面積	$A = \dfrac{1}{2}\oint_C (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$	8-11
ガウスの法則	$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \dfrac{Q_{\text{中}}}{\varepsilon_0}$。点電荷 $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$、まっすぐな線の電荷 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	8-11
アンペールの法則	$\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\text{中}}$。まっすぐな電流 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$	8-11
浮力	$-\oiint_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S$ は上向きで、大きさ $\rho g V$（物がおしのけた水の重さ）	8-11

7 偏微分方程式と、場の式

公式・きまり	式	章
熱方程式	$\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$（3 次元は $\alpha\nabla^2 T$）、$\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$	8-13
1 歩の式	$T_i^{n+1} = T_i^n + r(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$、$r = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}$	8-13

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
こわれない条件	$r \leqq \dfrac{1}{2}$（1 歩の行列の固有値の大きさが 1 をこえない）	8-13
sin の形の答え	$T = A\,e^{-\alpha a^2 t}\sin ax$。細かいでこぼこほど、$a^2$ に比例して速く消える	8-13
広がる時間	長さ L に熱が広がる時間のめやすは $\dfrac{L^2}{\alpha}$	8-13
波動方程式	$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$。答えは $f(x-ct)+g(x+ct)$。表計算は $c\,\Delta t \leqq \Delta x$（CFL 条件）	8-13
物質微分	$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,T$（流れといっしょに動いて見た変化）	8-13
電気と磁気の 4 つの式	$\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$、$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$、$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$、$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$（マクスウェル方程式）	8-14
流れの式	$\rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}$（ナビエ・ストークス方程式）	8-14

8 表計算・Python の使い方

表計算の 2 次元の表は、地図と同じく北を上に置きます。1 行めに x（東へ）、A 列に y（北へ）を書き、行の番号が大きいほど南になります（8-1 の型）。

すること	書き方（例）	意味・答え	章
2 次元の表（表計算）	`=100-0.01*B$1^2-0.02*$A2^2`	B2 に入れて、表全体へコピー	8-1
東の差・北の差	`=E4-D4`、`=D3-D4`	右どなり－自分 上どなり－自分	8-2
両どなりの差	`=(D3-B3)/20`	左右のマスの差÷20 m（東の坂）	8-4

つぎのページへつづく

すること	書き方（例）	意味・答え	章
タイルの和	`=(10+5*B$1+2*$A2)*0.25` `=SUM(B2:E3)`	まん中の値×タイルの面積 合計は 32	8-6
道の線積分	`=-C2*D2+B2*E2` `=SUM(F2:F9)`	$\vec{F}_2 = (-y,\ x)$ の $F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y$ をたす	8-7
マスの循環	`=(B2+C2-D2-E2)*1`	下＋右－上－左	8-10
まわりの平均との差	`=AVERAGE(B1,A2,C2,B3)-B2`	正なら温まる	8-12
熱の 1 歩	`=C2+0.25*(B2-2*C2+D2)`	$r = 0.25$。下の行へコピー はしの点は境界条件で	8-13
場所の表を作る（Python）	`X, Y = np.meshgrid(x, y)` `H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2`	マスごとの高さの表	8-1
等高線の図	`plt.contour(X, Y, H, levels=...)`	`plt.clabel` で数字	8-1
となりとの差	`H[:, 1:] - H[:, :-1]`	東へ 1 マスの差	8-2
矢印の図	`plt.quiver(x, y, Fx, Fy, ...)`	矢印の場	8-5
タイルの和	`(Fz * (2/n)**2).sum()`	値×タイルの面積をたす	8-8
1 歩の行列の固有値	`np.linalg.eigvalsh(A)`	こわれないかを調べる	8-13

- `$` は、コピーしても動かない印です。`B$1` は 1 行めの x、`$A2` は A 列の y をいつも読みます。つけ忘れると、ほかのマスの値を読んでしまいます（8-1）。
- 表計算の行の番号は下へふえますが、この本の表は北を上にしています。北の坂は「上どなり－自分」です（8-1・8-2）。

- np.arange(0, 60, 10) の 60 は入りません（0、10、…、50）。H[2, 3] は、上から 3 行め・左から 4 列め（0 から数える）です（8-1）。
- タイルの和は、タイルのまん中の点の値を使うと、少ない数でも本当の値に近くなります（8-6・8-8）。scipy などの道具を使わず、自分でたすと、何をたしているかが見えます。
- ふちの点（はしの点）に、まわりの平均や 1 歩の式を入れてはいけません。ふちは境界条件で決めます（8-12・8-13）。

プログラムのひな形（8-1・8-13）

上は主役の山の高さの表（8-1 の表計算と同じ数）。下は、棒の熱の 1 歩の行列（中の点 9 つ）の固有値（8-13）。$r = 0.6$ では固有値の大きさが 1 をこえ、計算がこわれます。

Python

```
import numpy as np                # 数の表の道具 numpy を np として使う
x = np.arange(0, 60, 10)          # 東へ 0, 10, …, 50（60 は入らない）
y = np.arange(40, -10, -10)       # 北へ 40, 30, …, 0（北を上に）
X, Y = np.meshgrid(x, y)          # マスごとの x の表と y の表
H = 100 - 0.01*X**2 - 0.02*Y**2   # マスごとの高さ（B2 の式と同じ）
print(H)
```

実行結果

```
[[ 68.  67.  64.  59.  52.  43.]
 [ 82.  81.  78.  73.  66.  57.]
 [ 92.  91.  88.  83.  76.  67.]
 [ 98.  97.  94.  89.  82.  73.]
 [100.  99.  96.  91.  84.  75.]]
```

Python

```
import numpy as np
N = 9                                   # 中の点の数
for r in [0.25, 0.5, 0.6]:
    A = (np.eye(N)*(1 - 2*r) + np.eye(N, k=1)*r
         + np.eye(N, k=-1)*r)           # 1 歩の行列
    lam = np.linalg.eigvalsh(A)         # 固有値（小さい順）
    print(r, lam.min().round(4), lam.max().round(4))
```

実行結果

```
0.25 0.0245 0.9755
0.5 -0.9511 0.9511
0.6 -1.3413 0.9413
```

9 専門書の書き方との対応

大学の本では、同じものを別の記号やことばで書きます。各章の「専門書をのぞいてみよう」で読みかえたものを集めました。

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
太字の $\mathbf{F}$、$\mathbf{E}$	矢印の $\vec{F}$、$\vec{E}$	8-0 8-14
$\mathbb{R}^2$、等位面	2 つの数の組（平面）全部、等値面	8-1
f_x、z_x、$\partial_x f$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}$（この本では使わない）	8-2
f_{xy}	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$（$x$ で偏微分してから y で）	8-2
$\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$	V を止めて、T で偏微分	8-3
δQ、δW	道すじで値が変わる小さな量（全微分ではない）	8-3
$\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}$	ヤコビアン $\det J$	8-3 8-6
$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$	$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$	8-4 8-5

つぎのページへつづく

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
$\nabla\phi$、方向微分係数	$\mathrm{grad}\,\phi$、方向微分	8-4
スカラー場	場所ごとに 1 つの数が決まるもの（高さ・温度・電位）	8-4 8-5
$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$	流線（力線）の式	8-5
$\int_D f\,dA$、$\int_V \rho\,dV$（$\int$ を 1 つ）	$\iint_D f\,\mathrm{d}A$、$\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$	8-6 8-14
$\int_c^d dy\int_a^b f\,dx$	$\int_c^d\left(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$（右の積分から先に）	8-6
累次積分	ふつうの定積分のくり返し	8-6
$\int_C P\,dx+Q\,dy$	$\int_C (F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y)$	8-7
$\mathbf{F}=\nabla\phi$（数学の本の符号）	線積分は「おわり－はじめ」。物理の本は $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,U$ で「はじめ－おわり」	8-7
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$、$d\vec{s}$	$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	8-7
閉じた面の $\oint_S$、$\oint_{\partial V}$	$\oiint_S$（◯はどちらも「閉じている」印）	8-8 8-11
$d\mathbf{S}$、$d\vec{A}$（面素ベクトル）	$\vec{n}\,\mathrm{d}S$	8-8 8-11
Φ_E（電場の流束。本によっては電束）	電場の流束。電気工学の「電束」は $\vec{D}$ の流束（単位 C）	8-8
$\mathrm{div}\,\mathbf{A}\equiv\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\mathrm{div}\,\vec{A}$（$\equiv$ は「こう決める」）	8-9
非圧縮性流体	縮まない流れる物（$\mathrm{div}\,\vec{v}=0$）	8-9
$\mathrm{curl}\,\mathbf{A}$、渦度	$\mathrm{rot}\,\vec{A}$、速度の場の回転	8-10
∂V、ガウスの発散定理	V の境目（ふち）、ガウスの定理	8-11
向きと整合的	右ねじの関係	8-11
Δ（ラプラス作用素）、調和関数	∇^2、$\nabla^2 u=0$ をみたす関数	8-12

つぎのページへつづく

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
$u_t = \kappa u_{xx}$	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$（$\kappa$ はこの本の α）	8-13
陽的差分スキーム、安定条件 $\mu \leqq \frac{1}{2}$	表計算の 1 歩の式、$r \leqq \frac{1}{2}$	8-13
拡散方程式	熱方程式と同じ形の式（もののこさが広がる）	8-13 8-14
$\dfrac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}$、$\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$	物質微分 $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$	8-13 8-14

できるようになったことチェック表

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、次の巻に進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
8-1	地図の等高線や天気図の等圧線から、高い所・低い所・急な所を読みとれる。	35	☐	☐
	2 つの変数の関数を、表・鳥かん図・等高線の 3 通りで表し、表計算と Python で作れる。	37	☐	☐
	等高線の式と切り口の関数を求め、3 つの変数の関数の等値面を説明できる。	43	☐	☐
8-2	等高線や数の表から、東の坂と北の坂を別々に読みとれる。	70	☐	☐
	ほかを止めて 1 つだけ動かす偏微分を計算し、点での値の意味を言える。	75	☐	☐
	2 回の偏微分を計算して順番によらないことを確かめ、3 つの変数の量に使える。	81	☐	☐
8-3	ななめの変化を、東の変化と北の変化のたし算で見積もれる。	102	☐	☐
	全微分で、近似の値と誤差の伝わり方を計算できる。	109	☐	☐
	連鎖律とヤコビ行列で、手の動きと面積の倍率（ヤコビアン）を求められる。	113	☐	☐
8-4	等高線の地図に、ボールが転がりはじめる向き（等高線と直角）をかきこめる。	141	☐	☐
	東の坂と北の坂を並べて勾配 grad を作り、どの向きの坂も内積で計算できる。	146	☐	☐
	内積の cos の形から、いちばん急な向きと等高線の向きを説明し、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$ などの物理の式を使える。	150	☐	☐
8-5	場所ごとの矢印を計算して、縮める割合をそろえた矢印の場の図にかける。	179	☐	☐
	主役の 6 つの場・点電荷の場・勾配の場を見分け、流線（力線）の式を求められる。	187	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1回め	2回め
	座標の軸を回して見たときの矢印の成分を、回転行列の転置で計算できる。	188	☐	☐
8-6	板を小さなタイルに分けて重さを表計算でたし、重積分の記号を「何を・どこで・1枚の量」で読める。	205	☐	☐
	長方形の範囲の重積分を、ふつうの定積分を2回くり返す形に直して計算できる。	213	☐	☐
	場合分けの表を使って、三角形・円・立体の重積分を、正しいふつうの定積分に直して計算できる。	215	☐	☐
8-7	道を小さな1歩に分け、力と1歩の内積をたして仕事を表計算で求め、線積分の記号を読める。	255	☐	☐
	軸に平行な道（折れ線）の線積分を、ふつうの定積分に直して計算できる。	259	☐	☐
	場合分けの表を使って、ななめ・曲線・円の道、保存力、閉じた道の線積分を計算できる。	261	☐	☐
8-8	網を通る水の量が、流れの「面に直角な成分」×面積で決まることを説明できる。	297	☐	☐
	平らな面の流束を、法線ベクトルの内積と重積分で求められる。	301	☐	☐
	場合分けの表で、曲がった面や閉じた面の面積分をふつうの定積分に直せる。	307	☐	☐
8-9	矢印の図にマスを置いて、わき出しと吸いこみを見分けられる。	353	☐	☐
	マスの辺を通る量から、表計算で発散を求められる。	357	☐	☐
	発散を偏微分の和で計算し、流束や連続の式と結びつけられる。	364	☐	☐
8-10	矢印の場の図から、小さな風車が回るかどうかと、その向きを見分けられる。	399	☐	☐
	マスのまわりを1周してたす量（循環）を表計算で求め、面積でわって回転を見積もれる。	403	☐	☐
	平面と3次元の rot を偏微分で計算し、保存力の見分けや、電流のまわりの磁場に使える。	408	☐	☐
8-11	マスごとのわき出し（うず）を全部たすと、外のふちから出る量（外の1周）になることを、表計算で確かめられる。	443	☐	☐
	閉じた面や閉じた道の積分を、2つの定理で「計算が楽な側」の積分に取りかえて求められる。	449	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1回め	2回め
	対称性に合った袋や道を選び、ガウスの法則・アンペールの法則で、場の大きさを求められる。	455	☐	☐
8-12	マスの値と「まわりの平均」との差を出し、温まる所と冷える所を見分けられる。	496	☐	☐
	「どのマスもまわりの平均と同じ」のくり返しで、板の落ち着いた温度を求められる。	499	☐	☐
	ラプラシアンを偏微分で計算し、球や円柱の形の場合にも使える。	506	☐	☐
8-13	棒の温度を「となりとの差」の表計算で計算できる。	536	☐	☐
	こわれない条件 $r \leqq \frac{1}{2}$ を 1 歩の倍率で説明できる。	544	☐	☐
	熱と波の方程式を作り、代入して確かめられる。	547	☐	☐
8-14	4 つの式を、「わき出し」と「うず」のことばで読める。	575	☐	☐
	積分形と微分形のつながり、光の速さの出し方を言える。	578	☐	☐
	流れの式・熱の式の項を、この巻のことばに訳せる。	583	☐	☐

つぎの巻へ

空間に広がる量を、微分と積分で読みとく道具がそろいました。第 9 巻「波と変化を読みとく」では、波や音を sin と cos に分け、微分方程式をかけ算で解きます。8-13 の熱方程式と波動方程式が、その入口です。

9-0 音を分ける、変化を予想する

声を成分に分けると、何が見える？

使う道具 波動方程式と、その答え $f(x-ct)$（8-13）。光も電磁波として伝わる（8-14）。

9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数

sin をたしていくと、四角い波ができる

使う道具 sin の形の温度は、形を保ったまま小さくなる（8-13）。弦のゆれも sin の形。

9-2 成分の取り出し方：直交性

かけて積分すると、ほしい成分だけが残る

使う道具 対称性で 0 になる積分（8-6 の場合 G）と、内積（4-12）。

9-3 複素数で書くフーリエ級数

sin と cos を、1 つの式でまとめて書く

使う道具 熱方程式（8-13）を、変数分離とフーリエ級数で「分けて解いて、たし直す」。

9-4 スペクトル：フーリエ変換

くり返さない音も、周波数に分けられる

使う道具 $-\infty$ から ∞ までの積分と、ガウス積分 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$（8-6）。

9-11 行列の指数関数と固有値

固有値が、落ち着くかどうかを決める

使う道具 熱の 1 歩の行列の固有値と、こわれない条件 $r \leqq \frac{1}{2}$（8-13）。

この巻の道具は、この先でこう使う

第 8 巻の章と、その道具を使う第 9 巻から先の章です（章のはじめの「道しるべ」の「この章の先に」から集めました）。

この巻の章	この道具を使う章
8-6 面や立体でたし合わせる：重積分	9-2 成分の取り出し方：直交性 9-4 スペクトル：フーリエ変換
8-13 熱と波の伝わり方：偏微分方程式	9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数 9-3 複素数で書くフーリエ級数 9-11 行列の指数関数と固有値
8-14 div と rot で書かれた式を読もう	9-0 音を分ける、変化を予想する

デルタ

grad・div・rot と積分の地図は、物理シリーズの電磁気・流体・熱で、ずっと使うよ。自信のない章を見なおしてから、第 9 巻へ進もう！

さくいん

数字はページです。その語がはじめて出てくるページや、くわしく説明しているページをのせています。

あ

アンペールの法則……466
うずなし流れ……415

か

回転（rot）……404
ガウスの定理……449
ガウスの法則……455
カスティリアーノの定理……96
グリーンの定理……460
勾配……144

さ

最大値の原理……510
差分法……559
3 重積分……225
周回積分（∮）……271
重積分……207
循環……402
吸いこみ……352
スカラー場……11, 179
ストークスの定理……460
接平面……104
線積分……256
全微分……109

た

断面二次モーメント……240
鳥かん図……34
電磁波……582
等高線……34
等値面……46

な

ナビエ・ストークス方程式……583
ナブラ……153
2 つの変数の関数（2 変数関数）……42
熱方程式……547

は

波数……555
発散……354
波動方程式……552
非圧縮……373
物質微分……557
ベクトル場……11, 179
ヘルムホルツの分解……586
偏導関数……78
偏微分……76
ポアソン方程式……510
方向微分……147
保存力……269

ま

マクスウェル方程式……574
面積分……305
面密度……214

や

ヤコビアン……117

ら

ラプラシアン……507
ラプラス方程式……509
力線……181
立体角……322
流線……181
流束……300
累次積分……214
連鎖律……111
連続の式……373

わ

わき出し……352

物理を理解するための数学　第８巻

空間に広がる量

編者　「物理を理解するための数学」編集委員会
委員長　小学校長（まとめ役）
委員　数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・
半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、
特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭
デザイン　ユニバーサルデザイン担当委員
挿絵　イラスト担当委員
版　第 1 版（第 14 回編集委員会）　2026 年 10 月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

第 8 巻　空間に広がる量　ベクトル解析

この巻で学ぶこと

第 1 部　たくさんの変数の微分　（8-1〜8-4）

第 2 部　ベクトル場と積分　（8-5〜8-8）

第 3 部　発散と回転　（8-9〜8-12）

第 4 部　偏微分方程式　（8-13〜8-14）

全 9 巻のならび

1　かぞえる・はかる

2　数と量のことば

3　関数とデータ　きまりを見つける

4　形と向き　図形・三角関数・ベクトル

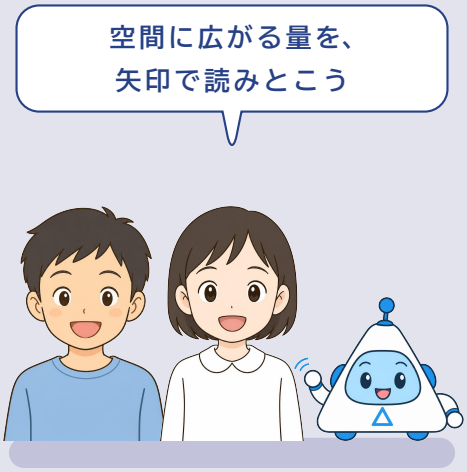
5　変化をつかむ　微分と積分

6　未来を計算する　微分方程式と複素数

7　まとめて計算する　行列

8　空間に広がる量　ベクトル解析

9　波と変化を読みとく　フーリエ解析とラプラス変換



物理を理解するための数学　第 8 巻

「物理を理解するための数学」編集委員会編

ISBN・バーコード
（入稿時に配置）