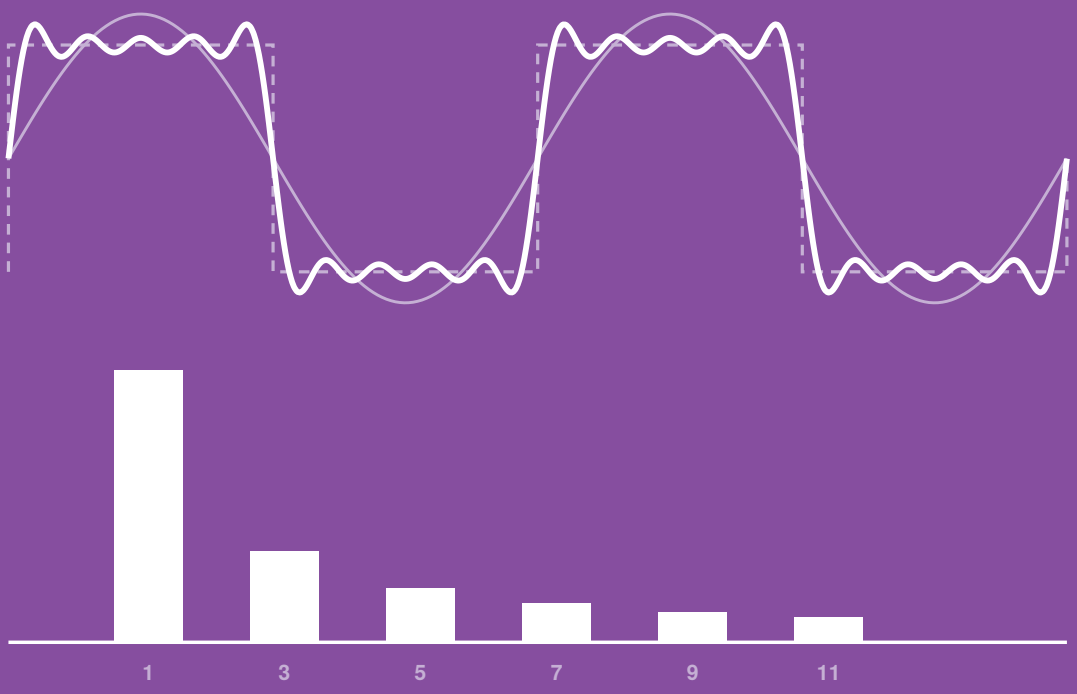
物理を理解するための数学

第9巻

波と変化を読みとく

フーリエ解析とラプラス変換

波を成分に分け、微分方程式をかけ算で解こう

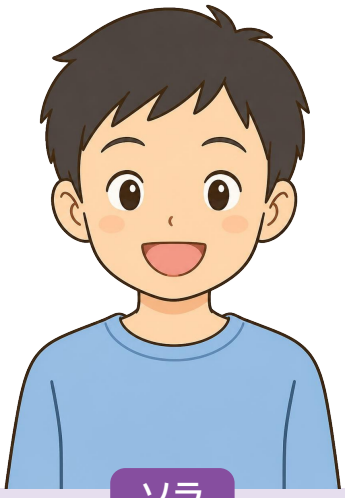


1 2 3 4 5 6 7 8 9

全 9 巻　物理を理解するための数学

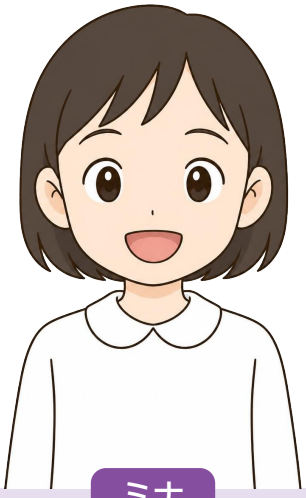
「物理を理解するための数学」編集委員会 編

いっしょに学ぶなかま



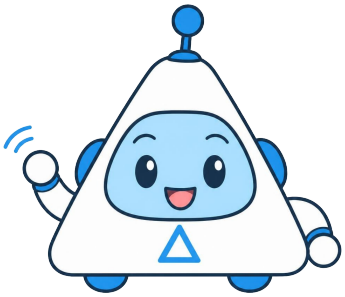
ソラ

「なぜ？」と聞くのが
大好き。
たしかめるまで、
なっとくしない。



ミナ

図やグラフをかくのが
とくい。
手を動かして考える。



デルタ

計算と記録がとくいな
ロボット。名前は
「変化」を表す
記号Δから。

こまったら、3 人のことばをヒントにしよう。

物理を理解するための数学

第 9 巻

波と変化を読みとく

フーリエ解析とラプラス変換

波を成分に分け、微分方程式をかけ算で解こう

7 本の路線が、この本を通っています

「物理を理解するための数学」編集委員会編

もくじ　第 9 巻　波と変化を読みとく

△＝路線（P.4・5）　★☆☆☆☆＝内容の高さ（★は必ず、☆の所まで）　P.8 ＝ 8 ページ

序章　音を分ける、変化を予想する　★★★☆☆　P.8
声を成分に分けると、何が見える？

第 1 部　フーリエ解析　P.36

9-1　波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数　★★★★☆　P.38
sin をたしていくと、四角い波ができる

9-2　成分の取り出し方：直交性　★★★★★　P.82
かけて積分すると、ほしい成分だけが残る

9-3　複素数で書くフーリエ級数　★★★★★　P.124
sin と cos を、1 つの式でまとめて書く

9-4　スペクトル：フーリエ変換　★★★★★　P.164
くり返さない音も、周波数に分けられる

第 2 部　ラプラス変換　P.212

9-5　微分をかけ算に変える翻訳機：ラプラス変換　×2　★★★★★　P.214
微分方程式が、ふつうの方程式に変わる

9-6　変換表と性質　×2　★★★★★　P.248
よく使う関数の「翻訳表」を作ろう

9-7　ラプラス変換で微分方程式を解く　×2　★★★★★　P.292
部分分数に分けて、表で元にもどす

9-8　伝達関数：入れると出てくるを s で表す　×2　★★★★★　P.346
箱をつなぐと、伝達関数のかけ算になる

9-9　極と安定性：s の値でふるまいがわかる　×2　★★★★★　P.388
極の場所を見るだけで、落ち着くかどうかがわかる

第 3 部 行列と微分方程式 P.442

9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 ★★★★★ P.444
たくさんの微分方程式を、1 行で書く

9-11 行列の指数関数と固有値 ★★★★★ P.492
固有値が、落ち着くかどうかを決める

9-12 フーリエとラプラスの使いみち［読みもの］ ★★★☆☆ P.538
音楽の圧縮、機械の診断、エアコンの制御

終章 工学の数学の地図 全路線 ★★★☆☆ P.556
7 本の路線は、どこで合流した？

こたえ P.582　記号カード P.593　よく使う定数・単位・公式 P.600
できるようになったことチェック表 P.621　物理シリーズへ P.624
さくいん P.626

この本の路線図

この本の章は、7 本の路線のどれかの駅です。同じ路線の駅は、前の巻から先の巻まで、ひとつの考え方でつながっています。章のはじめの「道しるべ」で、いまどの路線にいるかを確かめよう。

① 変化　ひき算→傾き→微分

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

② たし合わせ　かけ算→面積→積分

この巻の駅：（この巻には駅がありません）

③ 倍々　累乗→指数→ e

この巻の駅：9-5、9-6、9-7、9-8、9-9

④ 回転と波　角→ sin →複素数

この巻の駅：9-1、9-2、9-3

⑤ 表　九九の表→行列

この巻の駅：9-10、9-11

⑥ 矢印　向き→ベクトル→場

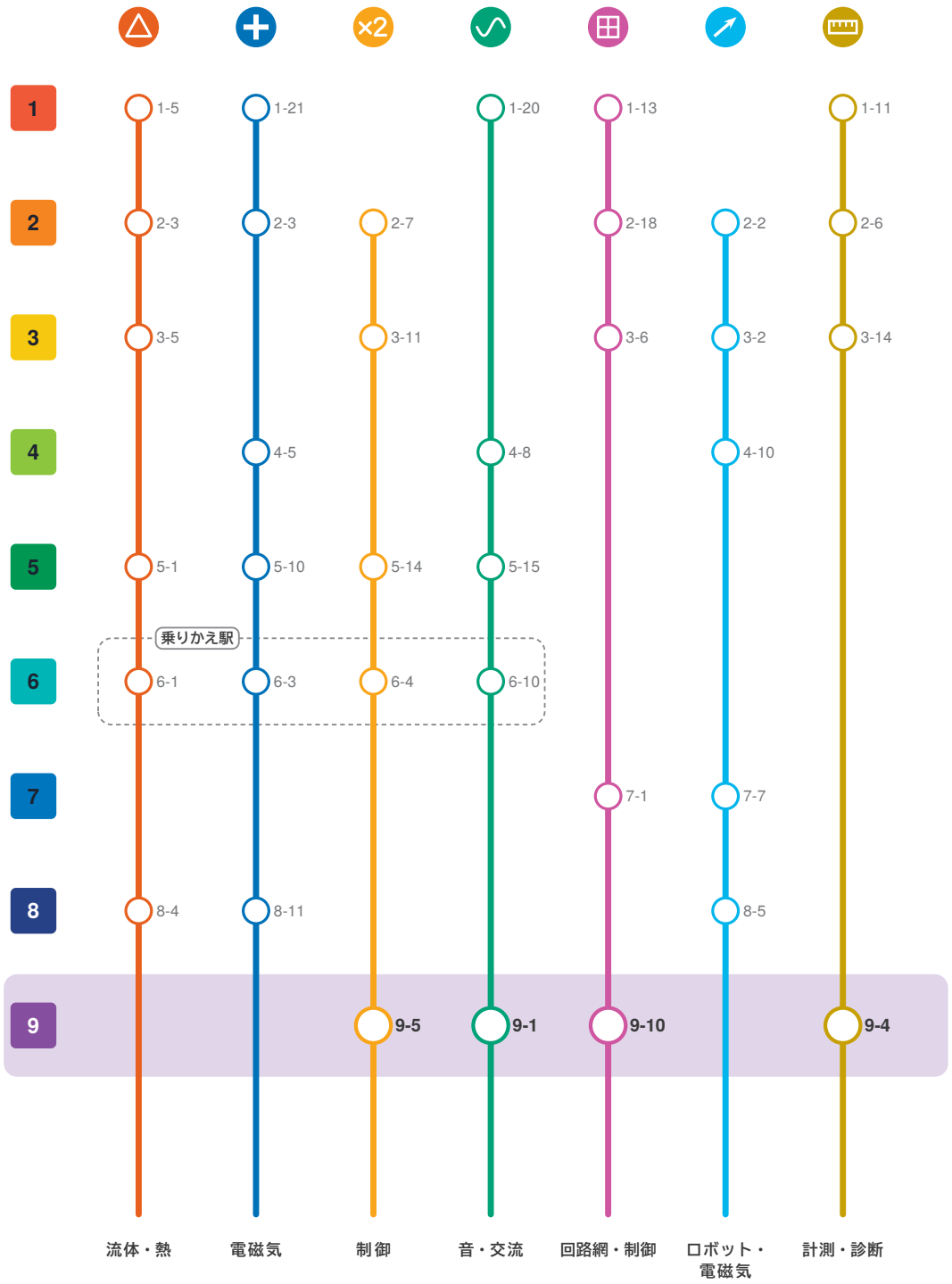
この巻の駅：（この巻には駅がありません）

⑦ はかる　目もり→誤差→統計

この巻の駅：9-4、9-12

全9巻の路線図

下へ行くほど先の巻。色の帯がこの巻です。

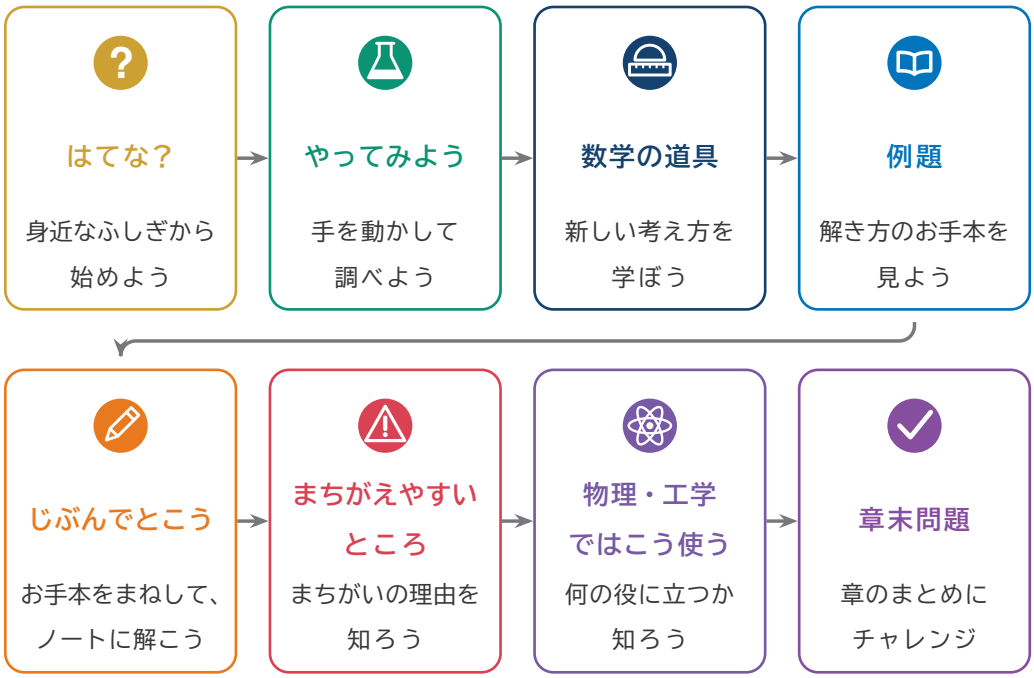


終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第 6 巻の微分方程式）。

この本の使い方

この本は、数学を「物理や工学を考えるための道具」として学ぶ本です。ボールが落ちる、お湯が冷める、振り子がゆれる。そんな身近なできごとを、数と式で書きあらわしてみませんか？

❶ 1つの章は、いつも同じ順番



例題と「じぶんでとこう」で、章末問題に出てくる問題の形を、ぜんぶ1回ずつ見せています。こまったら、例題にもどろう。

❷ 章のはじめの「道しるべ」

章の見出しのすぐ下に、こんな行があります。

道しるべ　この章の前に 1-14 2-2　この章の先に 3-5 5-9

前に読んでおくとよい章と、この章の考えが育っていく章です。わからない言葉や式が出てきたら、前の章にもどって確かめよう。

③ ★は「どこまで登るか」のしるし

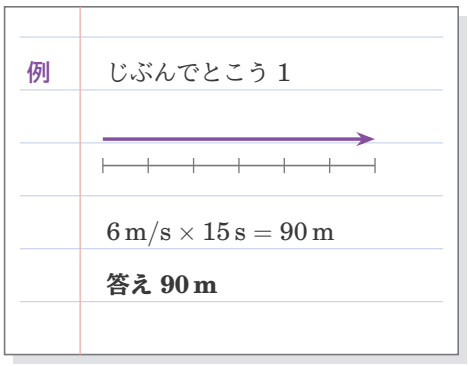
章と小見出しには★がついています。★の数は、内容の高さ。山登りにたとえると、★１つは「はじめの一歩」、★５つは「頂上」です。

白ぬきの☆は「この章の中で、ここまで登る」というしるし。自分の読める★まで読んで、先へ進んでもだいじょうぶ。

④ ノートを１冊用意しよう

「じぶんでとこう」と章末問題は、ノートに解きます。本には書きこまないので、何度でもやり直せます。

問題の番号を書き、図をかいてから式を書こう。答えには単位をつけます。



⑤ この本の３つのやくそく

1. 数には、いつも単位をつけよう。「5」ではなく「5 m」と書きます。
2. 式を書く前に、表や図をかいて考えよう。
3. くり返しの計算は、電卓やコンピュータにまかせてもだいじょうぶ。

問題の答えは、本の後ろの「こたえ」にあります。

第 9 巻　波と変化を読みとく

★★★

序章　音を分ける、変化を予想する

合奏を始める前に、みんなで「ラ」の音を出して、音の高さをそろえることがあります。この「ラ」は、ふつう 1 秒に 440 回ふるえる音（440 Hz）です。ピアノで出しても、フルートで出しても、人が声で歌っても、高さは同じ「ラ」です。

それなのに、目をつぶって聞いても、ピアノの音か、フルートの音か、人の声かは、すぐにわかります。同じ高さの音なのに、何がちがうのでしょう。

マイクをつないだスマホやパソコンで音を録音すると、空気の圧力が時間とともにどう変わったかを、グラフ（**波形**、はけい）で見ることができます。図 1 は、3 つの音の波形の例です。

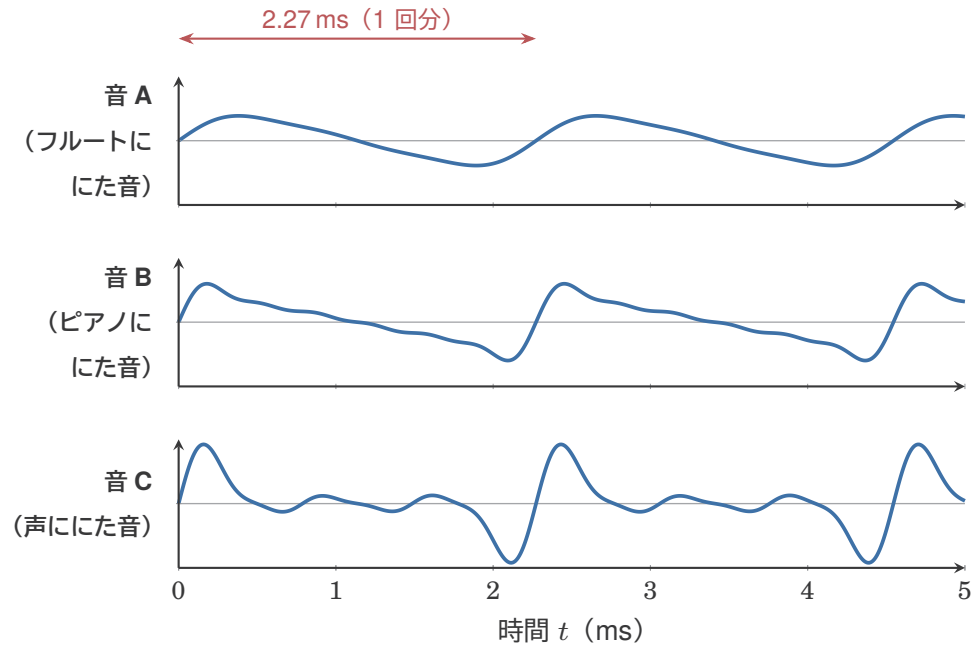


図 1　同じ「ラ」（440 Hz）の 3 つの音の波形。横は時間（1 ms は 1000 分の 1 秒）、たては空気の圧力の変化で、3 つとも同じ目もり。どれも 2.27 ms ごとに同じ形をくり返すが、くり返す形がちがう（形がわかりやすいように作った例）。

1 回分の時間 2.27 ms は、「1 秒に 440 回」から出てきます。1 秒を 440 回で分けると

$$\frac{1\,\mathrm{s}}{440} = 0.00227\,\mathrm{s} = 0.00227\,\mathrm{s} \times 1000\,\mathrm{ms/s} = 2.27\,\mathrm{ms}$$

です。3 つの音は、どれも 2.27 ms ごとに同じ形をくり返しているので、高さは同じ「ラ」に聞こえます。ちがうのは、くり返す**形**です。

? はてな？

同じ高さの「ラ」なのに、楽器や声で、波の形がちがいます。

声や楽器の音を、いくつかの「成分」に分けると、何が見えるかな？ 波の形のちがいは、何のちがいかな？

この巻には、もう 1 つの問いがあります。第 2 巻（2-18）と第 6 巻（6-2）では、80 ℃ のお湯が冷めていくようすを、表計算で 1 分ずつ計算しました。10 分後の温度を知るのに、表を 10 行作りました。では、**表計算をしないで**、10 分後や 1 時間後の温度を、もっと手軽に予想できないでしょうか。

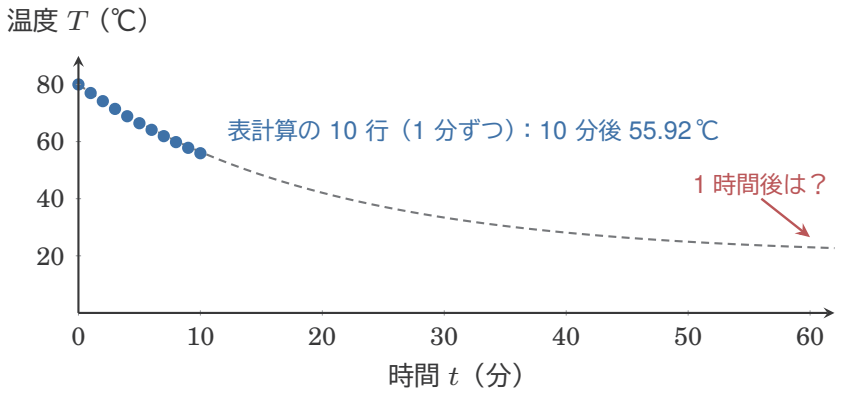


図 2　冷めるお湯（80 ℃・部屋 20 ℃）を、6-2 のオイラー法で 1 分ずつ計算した点。点線は 6-4 で求めた式のグラフ。1 時間後を知るには、表を 60 行作らなければならない。

「音を分ける」と「変化を予想する」。この 2 つが、第 9 巻の 2 つの柱です。

第 9 巻は、このシリーズの最後の巻です。ここまで 8 冊を読んできたあなたは、たし算から始めて、微分・積分・行列・ベクトル場までを、自分の手で積み

上げてきました。それは、本当にすごいことです。この巻には、前の巻の道具がぜんぶ出てきます。1 回読んでわからなくても大丈夫です。思い出せない道具があれば、章の番号をたよりに、前の巻にもどってかまいません。

やってみよう　声や音の「成分」を見よう

用意するもの　スマホかタブレット（音の「スペクトル」や「周波数」を表示するアプリを入れる。家の人と相談して、無料のものを選ぼう）

1. アプリを開いて、静かな部屋で、マイクから 30 cm ほどはなれる。
2. 口笛を、同じ高さで 3 秒ほど吹く。画面に出る線は何本かな？
3. 「あー」と、同じ高さで声を出す。線は何本で、どんな間かくで並ぶかな？
4. 声の高さを少し上げて、もう一度「あー」。線の間かくはどう変わるかな？
5. 手を 1 回たたく。画面はどうなるかな？

図 3 は、アプリの画面の例です。横は周波数（1 s に何回ふるえるか）、たては、その周波数の成分の強さです。

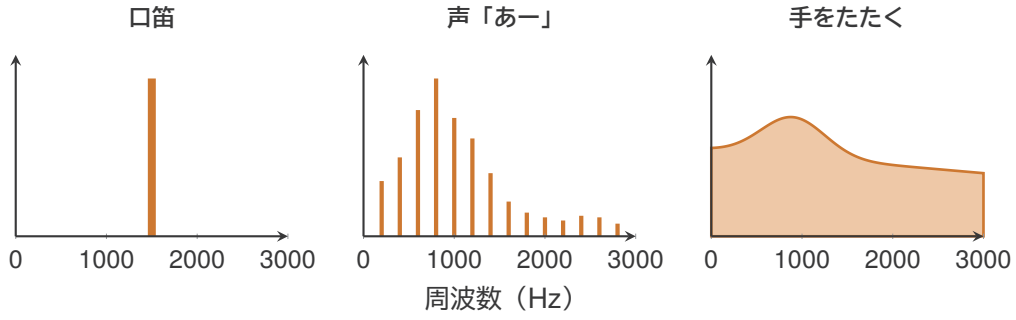


図 3　スペクトルのアプリの画面の例（形がわかりやすいように作った図。本物は、人・声の高さ・マイクでちがう）。口笛は線が 1 本。声は、同じ間かく（この例では 200 Hz ごと）に線が並ぶ。手をたたく音は、線にならず、広く広がる。

口笛の音は、ほとんど 1 つの sin の波（4-8）です。だから線が 1 本です。声の線は、いちばん左の線の周波数の 2 倍・3 倍・4 倍…の所に、同じ間かくで並

びます。声を高くすると、いちばん左の線が右へ動き、線の間かくも広がります。手をたたく音は、くり返さない短い音です。このような音は、たくさんの周波数にまたがって広がります（9-4 で、自分の声で確かめます）。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-8　sin のグラフは、角が 2π（360°）進むごとに同じ形をくり返す。
- 4-9　$\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \frac{1}{7}\sin 7\theta$ は、四角い波（方形波）に近い形。$\theta = 90°$ では約 0.724。
- 6-4　冷めるお湯（80 ℃、部屋 20 ℃）は $T = 20 + 60e^{-0.05t}$（t は分）。オイラー法（6-2）では、10 分後は 55.92 ℃。
- 6-12　$x = e^{st}$ を入れると特性方程式。車 A $s^2 + 3s + 2 = 0$ は $s = -1, -2$、車 B $s^2 + 2s + 5 = 0$ は $s = -1 \pm 2j$。
- 7-10　$\vec{x}$ に $(I + A\Delta t)$ を何回もかけると、少し先の状態が次々に出る（行列のオイラー法）。
- 8-13　波動方程式の答えは $f(x - ct)$：形を保ったまま、速さ c で走る波。

音を分ける

1 音は、空気の圧力の波

スピーカーのまくが前に出ると、すぐ前の空気がおされて、圧力が少し高くなります。まくが後ろへもどると、圧力が少し低くなります。この「少し高い所」と「少し低い所」が、となりの空気をおし、となりがまたそのとなりをおして、空気の中を伝わっていきます。これが音です。空気そのものが遠くへ流れていくのではありません。圧力の高い・低いという**形**だけが伝わっていきます。

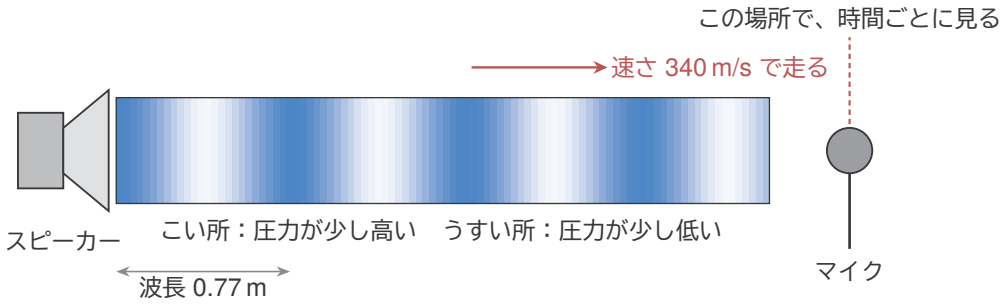


図 4　スピーカーから出た音（440 Hz）。ある時刻の空気の圧力を、こさで表した。こい所とうすい所の並びが、形を保ったまま右へ走る。マイクは 1 つの場所で、圧力の変化を時間ごとにはかる（長さは実際の割合ではない）。

8-13 で学んだように、空気の圧力の変化 p は、波動方程式にしたがいます。その答えは $f(x-ct)$ の形で、**形を保ったまま、速さ c で走る波**でした（8-13）。空気の中の音の速さは、およそ $c = 340\,\mathrm{m/s}$ です（15 ℃ ぐらいの空気の値。温度で少し変わります）。

マイクは、1 つの場所 x に止まって、圧力の変化をはかります。場所 x を止めると（8-2 の「止める」）、$f(x-ct)$ は時間 t だけで決まる量になります。これが、図 1 のような**時間の波形** $p(t)$ です。この巻では、おもにこの「1 つの場所で見た、時間の波形」をあつかいます。

1 秒に何回ふるえるかを**周波数**（しゅうはすう）といい、単位は Hz（ヘルツ）です。理科で学んだ「振動数」と同じものです。この巻では、電気や通信の本にそろえて「周波数」とよびます。

440 Hz の音では、1 回分の時間（周期）は 2.27 ms でした。その間に、波は 340 m/s で進むので、こい所から次のこい所までの長さ（波長）は

$$340\,\mathrm{m/s} \times 0.00227\,\mathrm{s} = 0.77\,\mathrm{m}$$

です。8-13 の例題で求めた、440 Hz の音の波長 0.773 m と同じです。

光も波です。8-14 で、電気と磁気の 4 つの式から、電場と磁場の波（電磁波）が、速さ

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

で伝わることを見ました（$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m、$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²。μ_0 は、2019 年の SI の改定からは測って決める値で、ほぼこの値）。テレビ・ラジオ・スマホの電波も電磁波です。電波は、周波数ごとに使う人を決めて、たがいにまざらないようにしています。どの電波も、受ける場所で見れば、時間の波形です。この巻の「分ける」道具は、音にも電波にも、同じように使えます。

❷ 3 つの sin をたすと、1 つの音

では、図 1 のような形は、どうやってできるのでしょう。ためしに、次の 3 つの sin の波をたしてみます。

成分	周波数	大きさ（振幅）	1 回分の時間
1 つめ	440 Hz	1	2.27 ms
2 つめ	880 Hz（2 倍）	0.5	1.14 ms（半分）
3 つめ	1320 Hz（3 倍）	0.25	0.76 ms（3 分の 1）

表 1　たしてみる 3 つの成分（この巻で何回も使う例。9-4 でも同じ数を使う）

2 つめと 3 つめの周波数が、1 つめのちょうど 2 倍・3 倍になっているのは、楽器の弦や管の空気が、「全体で 1 回」「半分ずつで 1 回」「3 分の 1 ずつで 1 回」のふるえ方を、同時にしているからです（くわしくは 9-1 の弦）。2 倍・3 倍の周波数の成分は、1 つめの 2.27 ms の間に、ちょうど 2 回・3 回くり返します。だから、たしたものも 2.27 ms ごとに同じ形をくり返します。

表計算で、時刻ごとに 3 つの成分の値を出して、たします。この巻の表計算は、**行が時刻、列が成分**です。1 行めに成分の周波数、2 行めに大きさを入れ、3 行めから下の A 列に時刻を入れます。

B3 には `=B$2*SIN(2*PI()*B$1*$A3/1000)` という式を入れます（表 2 の上の数式バー）。この式の 1 つ 1 つの部分には、わけがあります。

❶ `2*PI()*B$1`

1 秒に進む角（角周波数）です。1 回ふるえると角は 2π 進む（4-2 の弧度法で、1 周は 2π）ので、1 秒に 440 回なら 2π × 440 進みます。

2 `$A3/1000`

時刻を ms から s に直しています（1000 ms/s でわる）。①は「1 秒あたり」なので、時刻も秒にそろえます。

3 `B$2*SIN(…)`

大きさ 1 の sin に、その成分の大きさをかけます。

4 `$` の印

`B$1`・`B$2` は「いつも 1 行め・2 行めを読む」、`$A3` は「いつも A 列の時刻を読む」という印です（2-18）。だから、1 つの式をコピーするだけで、どのマスも「その列の成分の、その行の時刻の値」になります。

B3 の式を B3:D12 にコピーし、E3 に `=SUM(B3:D3)`（3 つの成分の合計）を入れて下へコピーすると、次の表ができます。

B3	`=B$2*SIN(2*PI()*B$1*$A3/1000)`

	A	B	C	D	E
1	t ＼ Hz	440	880	1320	合計
2	大きさ	1	0.5	0.25	
3	0	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.25	0.637	0.491	0.219	1.348
5	0.5	0.982	0.184	−0.211	0.955
6	0.75	0.876	−0.422	−0.016	0.438
7	1	0.368	−0.342	0.226	0.252
8	1.25	−0.309	0.294	−0.202	−0.217
9	1.5	−0.844	0.452	−0.031	−0.423
10	1.75	−0.992	−0.124	0.232	−0.884
11	2	−0.685	−0.499	−0.193	−1.376
12	2.25	−0.063	−0.063	−0.047	−0.172

表 2　3 つの成分をたす表（小数第 3 位まで）。A 列の時刻 t の単位は ms、1 行めは成分の周波数（Hz）、2 行めは成分の大きさ。

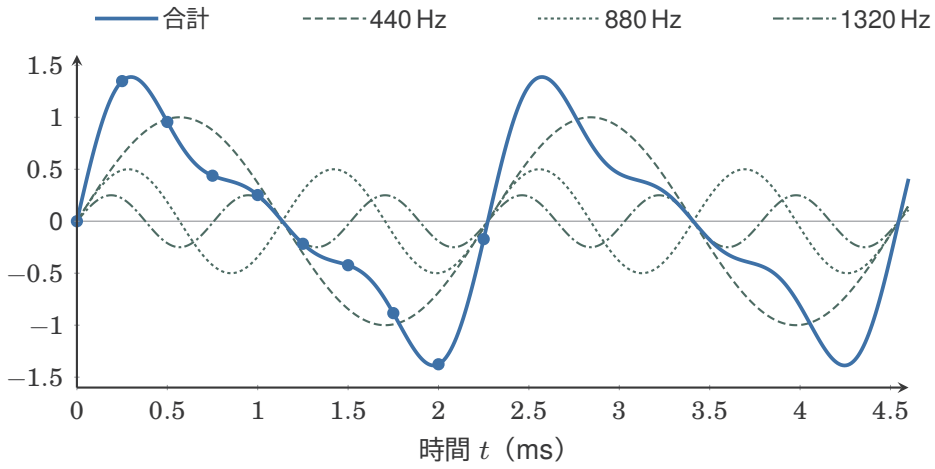


図 5　3 つの成分（細い線：440 Hz は破線、880 Hz は点線、1320 Hz は一点鎖線）と、たした音（太い線）。点は表の E 列の値。たした形も 2.27 ms ごとにくり返す。

たした波は、もう sin の形ではありません。山がとがり、左右が対称でない形になりました。それでも、2.27 ms ごとに同じ形をくり返すので、高さは「ラ」に聞こえます。2 つめ・3 つめの大きさを変えると、くり返す形が変わります。つまり、**波の形は、どの成分をどれだけたすかで決まる**のです。

❸ 2 つの世界：時間の世界と周波数の世界

今の音は、2 通りに表せます。1 つは、図 5 の太い線のように、時刻ごとの圧力の値を並べた**波形**です。もう 1 つは、「440 Hz が 1、880 Hz が 0.5、1320 Hz が 0.25」のように、**どの周波数の成分がどれだけあるか**を並べたものです。2 つめは、横に周波数、たてに大きさをとった棒グラフにできます。この棒グラフを**スペクトル**といいます。

図 6 のように、2 つの表し方を左右に並べてみます。右から左へ行くのは、表 2 でしたこと（成分をたす）です。では、左から右へ、つまり**波形だけを見て、どの成分がどれだけ入っているかを見つける**には、どうすればよいでしょう。これが第 1 部（9-1〜9-4）のテーマで、**フーリエ解析**（フーリエかいせき）とよばれる数学です。9-2 で、「成分の波をかけて、1 回分たし合わせる（積分する）と、ほしい成分だけが残る」という方法を作ります。

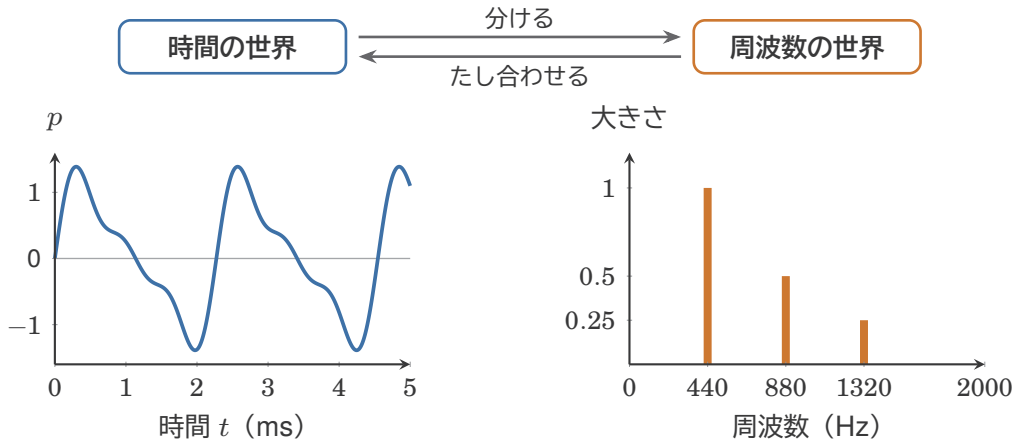


図 6　同じ音の、2 つの表し方。左は時間の世界の波形（p は空気の圧力の変化）、右は周波数の世界のスペクトル。左から右へ行くのが「分ける」、右から左へ行くのが「たし合わせる」。

はてな？の答え

図 1 の 3 つの音を、同じように分けたものが、図 7 です。3 つの音のスペクトル（図 7）は、どれも 440 Hz の 1 倍・2 倍・3 倍…の所にだけ棒が立っています。だから、どれも 2.27 ms ごとにくり返し、同じ高さの「ラ」に聞こえます。ちがうのは**棒の高さの並び**です。音 A は 1 つめの棒がほとんどで、sin に近い、やわらかい音です。音 B は 2 倍・3 倍…の棒が、だんだん小さくなりながら長く続きます。音 C は、3 倍の棒がいちばん高くなっています。

1 つめの成分（ここでは 440 Hz）を**基本波**（きほんは）、2 倍・3 倍…の成分を**倍音**（ばいおん）といいます。倍音の大きさの並びが、その楽器や声の「らしさ」、つまり**音色**（ねいろ）です。声や楽器の音を成分に分けると、**どの周波数の成分が、どれだけ強いか**が見えます。それが音色のちがいの正体です。

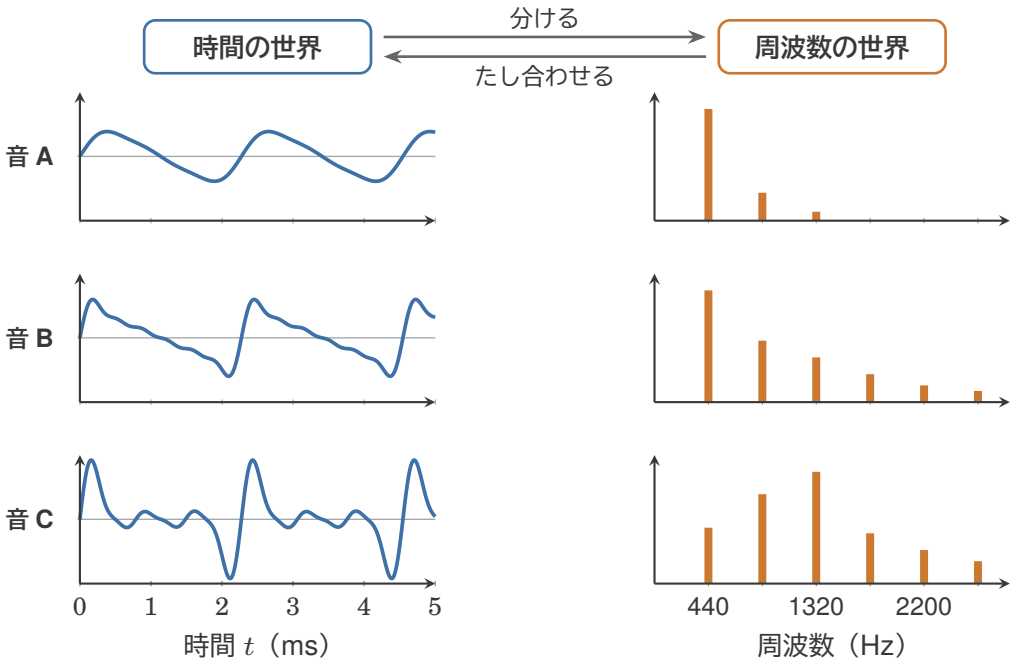


図 7　3 つの音を、成分に分けたもの（図 1 と同じ作った例）。棒は、左から 440 Hz・880 Hz・1320 Hz・…（440 Hz の 1 倍・2 倍・3 倍・…）の成分の大きさ。どの音も同じ所に棒が立つが、高さの並びがちがう。

せいかくに言うと

図 1・図 7 の 3 つの音は、形がわかりやすいように、成分の大きさを決めて作ったものです。本物の楽器の成分は、楽器の種類・作り・ひき方で変わり、同じ音でも、鳴りはじめと消えるまぎわでは並びが変わります。また、本物の音は、ずっと同じ形をくり返すわけではありません。くり返さない音の成分の見方は、9-4 で学びます。

もっと知りたい ★★★

ピアノの「ラ」（440 Hz）から、鍵盤（白と黒をあわせて）を 12 個右へ進むと、1 オクターブ上の「ラ」で、周波数はちょうど 2 倍の 880 Hz です。となりの鍵盤どうしの周波数は $2^{1/12} \approx 1.0595$ 倍ずつちがい、12 回かけると 2 倍です（3-11 の倍々）。2 倍音は 1 オクターブ上の「ラ」、3 倍音の 1320 Hz はその上の「ミ」（約 1318.5 Hz）にとても近い音です。

コラム　フーリエと、熱の研究

この巻の第 1 部の名前になっているフーリエ（1768～1830 年）は、フランスの数学者です。1798 年には、ナポレオンのエジプト遠征に、学者の一人として加わりました。フランスにもどったあと、イゼール県（グルノーブルのある県）の知事を務めながら、1804 年ごろから、熱が物の中をどう伝わるかを研究しました。

1807 年 12 月 21 日、フーリエは、パリの学士院で、熱の伝わり方の論文を発表しました。「どんな形の温度の分布も、sin や cos の波のたし合わせで表せる」という考えは、ラグランジュやラプラスのような大数学者にも、すぐには受け入れられませんでした。それでもフーリエは研究を続け、1811 年の学士院の賞を受け、1822 年に『熱の解析的理論』という本にまとめました（6-3 のコラム）。

熱の問題を解くために作られた「sin のたし合わせ」の考えは、いまでは、音・電波・画像・地震の波など、あらゆる波を調べる道具になっています。9-1 では、フーリエのもとの問題（8-13 の金属の棒の熱）を、フーリエの方法で解きます。

4 コンピュータは、どうやって分ける？

スマホのアプリは、マイクの音を 1 秒に何千回もはかり、その数の並びから、成分の大きさを計算して画面に出しています。この計算には、**FFT**（高速フーリエ変換）という、とても速い計算の手順が使われています（9-4）。Python の numpy にも、FFT の命令 `np.fft.rfft` があります。

次のプログラムは、表 2 と同じ音を、1 秒に 8000 回はかった数の並びにして、FFT で成分の大きさを求めるものです。

Python

```
import numpy as np
fs = 8000                          # 1 秒に何回はかるか
t = np.arange(fs) / fs             # 1/8000 秒ごとの 8000 個の時刻
x = (np.sin(2*np.pi*440*t) + 0.5*np.sin(2*np.pi*880*t)
     + 0.25*np.sin(2*np.pi*1320*t))   # 3 つの成分をたした音
X = np.fft.rfft(x)                 # FFT（周波数の世界へ）
freq = np.fft.rfftfreq(len(x), 1/fs)  # 1 つ 1 つの成分の周波数
A = 2*np.abs(X) / len(x)           # 成分の大きさ（振幅）にそろえる
print(freq[A > 0.1])               # 大きさが 0.1 より大きい周波数
print(np.round(A[A > 0.1], 3))  # その大きさ（小数第 3 位まで）
```

実行結果

```
[ 440.  880. 1320.]
[1.   0.5  0.25]
```

FFT は、8000 個の数の並び（時間の世界）だけを受けとって、「440 Hz に 1、880 Hz に 0.5、1320 Hz に 0.25」（周波数の世界）を見つけ出しました。表 2 で入れた数が、そのままもどってきています。`2*np.abs(X)/len(x)` で 2 をかけてデータの個数でわるのは、FFT の答えを振幅の大きさにそろえるためです（なぜこの形になるかは 9-4）。1 秒に 8000 回もはかるのは、1320 Hz のような速い成分でも、1 回のふるえの間に何回かはかれるようにするためです。はかる回数が少なすぎると、成分を取りちがえます（9-4 のエイリアシング）。

変化を予想する

5 冷めるお湯を、表を引いて予想する

2 つめの問いにもどりましょう。80 ℃ のお湯が、20 ℃ の部屋で冷めていきます。温度 T〔℃〕の変わる速さは、部屋との差の 0.05 倍でした（6-1）。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,(T - 20), \qquad T(0) = 80$$

t の単位は分です。この式を、これまでに 2 通りで解きました。

方法	すること	10 分後
オイラー法（6-2）	1 分ずつ、表計算で 10 行	55.92 ℃
変数分離（6-4）	式を変形して積分する	56.39 ℃
ラプラス変換（9-5）	表を引いて、かけ算・わり算	56.39 ℃

表 3　冷めるお湯の 10 分後の温度を求める 3 つの方法

オイラー法の 55.92 ℃ が少し低いのは、「1 分の間ずっと、はじめの（速い）冷め方で冷める」として計算したからです。本当は、冷めるにつれて冷め方はゆっくりになります。Δt を小さくすれば、56.39 ℃ に近づきます（6-2）。

第 2 部（9-5〜9-9）では、3 つめの方法を学びます。考え方は、**翻訳**です。時間の世界の式を、「s の世界」という別の世界のことばに翻訳すると、微分が s のかけ算に変わります。すると、微分方程式が、かけ算とわり算だけの式になります。それを解いてから、時間の世界に翻訳しもどします。

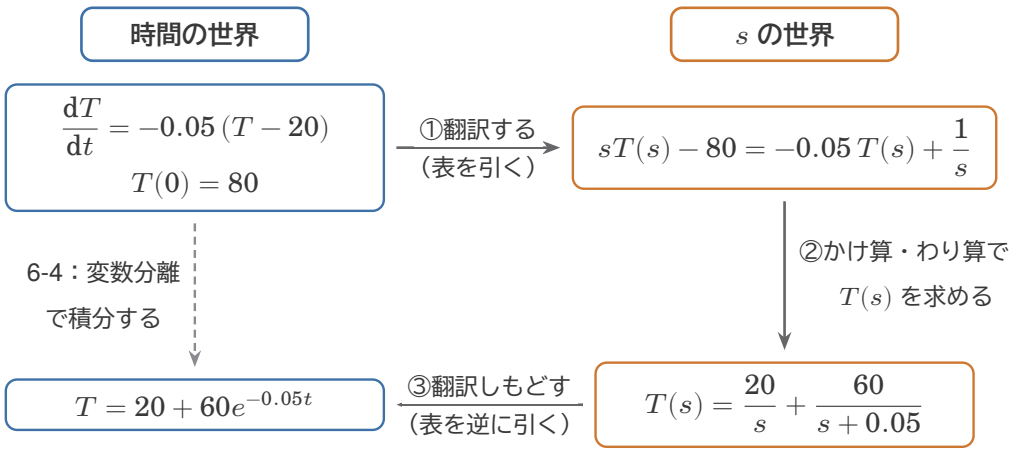


図 8　冷めるお湯をラプラス変換で解く道すじ（9-5 の予告）。①〜③の式は、いまはわからなくてよい。点線は、6-4 でたどった道。

①の翻訳を**ラプラス変換**といいます。9-5 で、「微分は、s のかけ算になる」しくみが、第 5 巻の部分積分（5-16）であることを見ます。③の答え $T = 20 + 60e^{-0.05t}$ に $t = 10$ を入れると、

$$T = 20 + 60 \times e^{-0.5} = 20 + 60 \times 0.6065 = 56.39$$

です（$e^{-0.5} = 0.6065$ は電卓で）。表を 10 行作らなくても、表を引いて分数を分けるだけで、10 分後も 1 時間後も、すぐに求められます。2 つめの問いの答えは「できる」です。

❻ s の世界の点が、動きを教える

s の世界には、もう 1 つうれしいことがあります。3-10・6-12・7-8 で何回も出てきた、車のばね（サスペンション）の 2 つの例を思い出しましょう。どちらも、はじめの位置を 1、はじめの速さを 0 にして（$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$）、静かに手をはなします。

	式	特性方程式の解	動き
車 A	$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$	$s = -1,\ -2$	$x = 2e^{-t} - e^{-2t}$（ゆれずにもどる）
車 B	$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$	$s = -1 \pm 2j$	$x = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$（ゆれながらもどる）

表 4　車 A・車 B（6-12 と同じ。$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$）

特性方程式の解は、Python の `np.roots` でも求められます。かっこの中には、方程式の係数を、次数の高い順に並べます。

Python

```
import numpy as np
print(np.roots([1, 3, 2]))    # 車 A の特性方程式の解
print(np.roots([1, 2, 5]))    # 車 B の特性方程式の解
```

実行結果

```
[-2. -1.]
[-1.+2.j -1.-2.j]
```

j は虚数単位です（6-8）。表の解と同じ数が出ました。

この解 s を、複素数の平面（6-9）に×でかき入れて、動きのグラフと並べます。

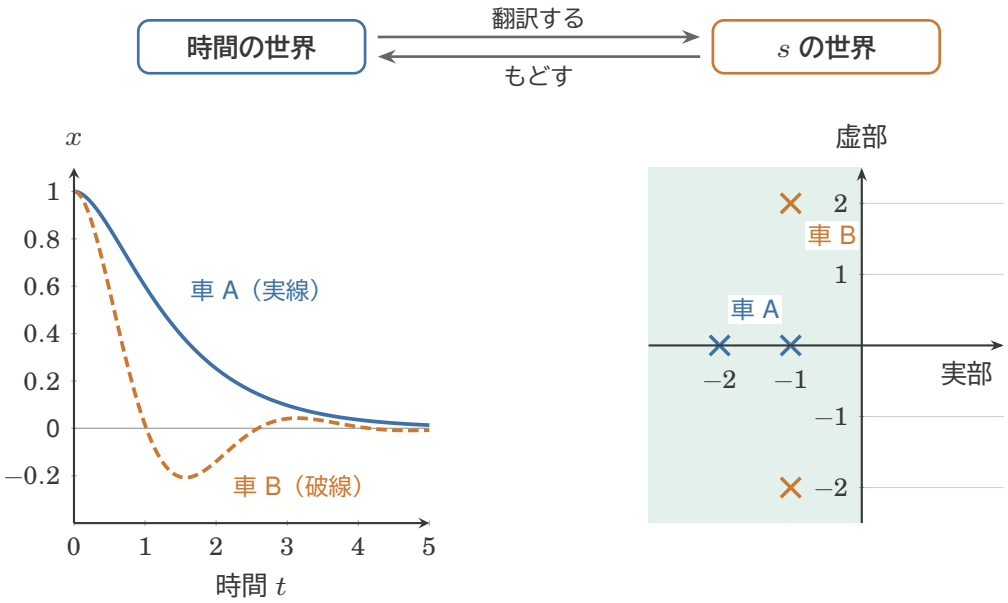


図 9　車 A・車 B の動き（左）と、特性方程式の解の場所（右の×）。右のうすい緑は、実部が負の左半分。

図 9 の右の×の場所を見るだけで、左のグラフの形がわかります。

1 **×が横の線（実数の軸）の上**

車 A のように、ゆれずにもどります。

2 **×が上下に 1 組**

車 B のように、ゆれながらもどります。上下にはなれているほど（虚部が大きいほど）、速くゆれます（車 B の虚部 2 は、$\cos 2t$ の 2）。

3 **×が左半分にある**

どちらも、やがて 0 に落ち着きます。×が右半分にあると、動きはどんどん大きくなります（6-12）。

6-12 では、「解を左半分に置くことが、第 9 巻の制御工学の大きな目標です（9-9 では、この点を『極』とよびます）」と予告しました。この s が、ラプラス変換の s と同じ文字なのは、偶然ではありません。9-5 で、そのわけを見ます。

7 たくさんの量を、行列でいっぺんに

手のひらに、ほうきをさかさまに立ててみましょう。ほうきは、すぐにたおれそうになります。手を左右に動かせば、立たせておくことができます。このとき、手を動かす人は、「いまの角度」と「たおれていく速さ」の 2 つを見て、手の動かし方を決めています。

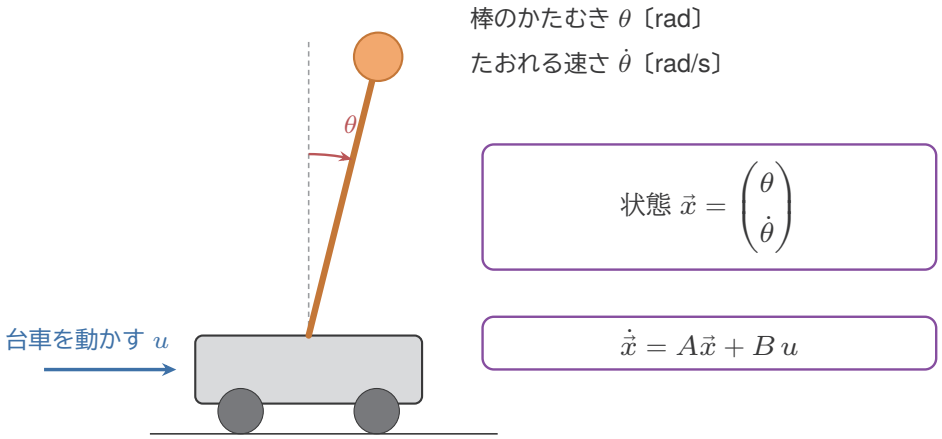


図 10　台車の上に立てた棒（倒立振子）。棒のかたむきと、たおれる速さの 2 つの数で「状態」を表し、2 つの式をまとめて行列で書く（9-10）。

台車の上に立てた棒を、**倒立振子**（とうりつふりこ）といいます。5-18 では、少しかたむいた棒のかたむき θ が、$\ddot{\theta} = 4\theta$ にしたがって大きくなる例を見ました。2 つの数「かたむき θ」と「たおれる速さ $\dot{\theta}$」をたてに並べて、1 つのベクトル $\vec{x}$（**状態**）にすると、2 つの式を、行列を使って 1 行で書けます。7-11 で予告した $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$ の形（**状態方程式**、じょうたいほうていしき）です（入れるもの u が 1 つなので、ここでは矢印をつけていません）。

かたむき θ〔rad〕	0 秒	1 秒後	2 秒後
台車を動かさない	0.0100	0.0376	0.2731
状態を見て台車を動かす	0.0100	0.0041	0.0009

表 5　はじめに 0.01 rad かたむけたとき（9-10 の例）。動かさないとたおれ、うまく動かすと立ち直る。

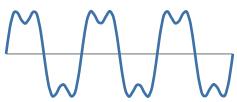
上の行は、5-18 の答え $\theta = 0.01\cosh 2t$（6-11）に $t = 1,\ 2$ を入れた値です。下の行は、9-10 で、状態を見て台車の動かし方 u を決めたときの値です。状態方程式の答えは、7-10 で予告した**行列の指数関数** e^{At} で書けます。第 3 部（9-10〜9-12）では、行列の固有値（7-8）を見るだけで、「落ち着くか、たおれるか」を見分ける方法と、落ち着くように u の決め方を選ぶ方法を学びます。ドローンの姿勢や、エレベーターの位置を決めるしくみも、同じ考え方です。

この巻の地図

8 3 つの部と終章

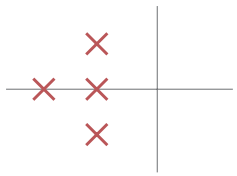
第 9 巻は、3 つの部と終章に分かれています。どの章も、大学（工学部の 1〜2 年）で学ぶ内容です。★★★★★の章は、「目でわかる」「手でわかる」「式でわかる」の 3 段に分けてあり、「ここまでで十分」の旗の所まで読めば、その章のゴールです（第 6〜8 巻と同じ）。

第 1 部　フーリエ解析　9-1〜9-4



・sin をたして、四角い波を作る（フーリエ級数 9-1）。
・かけて積分して、成分を取り出す（直交性 9-2）。複素数でまとめる（9-3）。
・くり返さない音も、周波数に分ける（フーリエ変換・FFT 9-4）。

第 2 部　ラプラス変換　9-5〜9-9

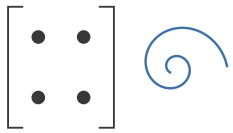


・微分を s のかけ算に変える翻訳機（9-5）と、その翻訳表（9-6）。
・部分分数に分けて、微分方程式を解く（9-7）。
・入れると出てくるを s の式で（伝達関数 9-8）。極の場所で、落ち着くかがわかる（9-9）。

第 1 部は「分ける」、第 2 部は「予想する」ための道具です。第 1 部の「時間の世界と周波数の世界の行き来」と、第 2 部の「時間の世界と s の世界の行き来」

は、同じ形をしています。9-5 で、周波数の世界は、s の世界の一部（$s = j\omega$ の所）だとわかります。

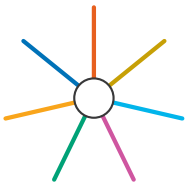
第 3 部　行列と微分方程式　9-10〜9-12



・たくさんの微分方程式を、行列で 1 行に（状態方程式 9-10）。
・答えは行列の指数関数 e^{At}。固有値で、落ち着くかがわかる（9-11）。
・音楽の圧縮やエアコンの制御（読みもの 9-12）。

第 3 部では、第 7 巻の行列と、第 2 部の道具を組み合わせます。最後の終章で、全 9 巻をふり返ります。

終章　工学の数学の地図　9-13



・小学 1 年から乗ってきた 7 本の路線が、どこで合流したかをふり返る。
・専門書の読み方ガイドと、物理シリーズへのつながり。

図 11　第 9 巻の 3 つの部と終章。左上の札が部の名前、右上が章の番号。

この巻の約束：「名前」と、実際の操作

9 記号は、まだ計算していない「名前」

第 8 巻では、$\iint$ や $\oint$ のような積分の記号は、「タイルに分けて、量をかけて、たし合わせる」という**操作の名前**で、実際の値は、ふつうの定積分に直して求める、と学びました。

第 9 巻にも、新しい記号がたくさん出てきます。そして、第 8 巻よりもさらに、**記号の見かけと、実際にする計算がはなれています**。たとえば、ラプラス変換の記号 $\mathcal{L}[f(t)]$ は、「f に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす」という積分の

名前です。けれども実際には、ほとんどの場合、積分はしません。**表を引くだけ**です。

この巻の記号は、どれも、次の 4 つの道具のどれかに直して計算します。「**ふつうの定積分**」「**表を引く**」「**部分分数**」「**行列の計算**」です。この 4 つを**実際の操作**とよびます。この巻では、名前を**点線**の枠、実際の操作を**実線**の枠でかこんで、見分けられるようにします。

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{b_n}} = \underset{\text{ふつうの定積分}}{\boxed{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}}$$

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{\mathcal{L}[e^{-0.05t}]}} = \underset{\text{表を引く}}{\boxed{\frac{1}{s+0.05}}}$$

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]}} = \underset{\text{部分分数}}{\boxed{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}}} \to e^{-t}-e^{-2t}$$

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{e^{At}}} = \underset{\text{行列の計算}}{\boxed{Pe^{Dt}P^{-1}}}$$

1 行めは 9-2、2 行めは冷めるお湯の①の翻訳（9-5）、3 行めは 3-8 で「全体は、その差です（9-7）」と予告した計算、4 行めは 7-9 の対角化を使う計算（9-11）です。どの式も、いまはわからなくてかまいません。「**記号を見ただけでは、まだ数は出ない。実際の値は、4 つの道具のどれかに直して出す**」ということだけ、覚えておいてください。

この巻で出てくる名前と、実際の操作の対応を、表にまとめておきます。

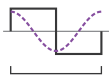
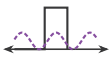
絵	名前（記号）	名前の意味	実際の操作	章
	$a_n \cdot b_n$	1 回分（1 周期）で、f に cos・sin をかけてたす	ふつうの定積分	9-1・9-2
	c_n	1 周期で、f に $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけてたす	ふつうの定積分	9-3
	$F(\omega)$	$-\infty\sim\infty$ で、f に $e^{-j\omega t}$ をかけてたす	ふつうの定積分 表を引く	9-4
	$\mathcal{L}[f(t)]$	$0\sim\infty$ で、f に e^{-st} をかけてたす	表を引く	9-5・9-6
	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	ラプラス変換すると $F(s)$ になる $f(t)$	部分分数 表を引く	9-7
	$G(s)$	はじめの値を 0 にして、出てくるもの÷入れるもの	表を引く	9-8
	e^{At}	$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$（無限に続くたし算）	行列の計算	9-10・9-11

表 6　第 9 巻の名前と、実際の操作（どの道具に直すか）。意味は、それぞれの章でていねいに学ぶ。巻末の「変換の地図」にも同じ表がある。このほかに、極と安定の表 9-9（9-9）、状態方程式の立て方の表 9-10（9-10）がある。

⑩ 3 つの段と、全体の流れ図

どう直すかは、場合によってちがいます。そこで、変換や係数が出てくる章（9-1〜9-11）では、どの計算も次の 3 つの段で考え、「こんなときは、こうする」という**場合分けの表**と**流れ図**を置きます（第 8 巻と同じ形）。

名前　記号を読む：何に・何をかけて・どこからどこまで・何を何でわるか。

直す　4 つの道具のどれに直すかを決め、区間や形を決めて、計算する。

楽をする 計算する前に、楽な道をさがす：積分しない（公式・表・性質）、対称性、分ける、数値（表計算・Python）。「直す」の前に必ず確かめる。

図 12 の流れ図は、この巻のどの章の道具を使えばよいかを決める、いちばん大きな流れ図です。各章の流れ図は、この図の四角の 1 つを、大きくしたものです。

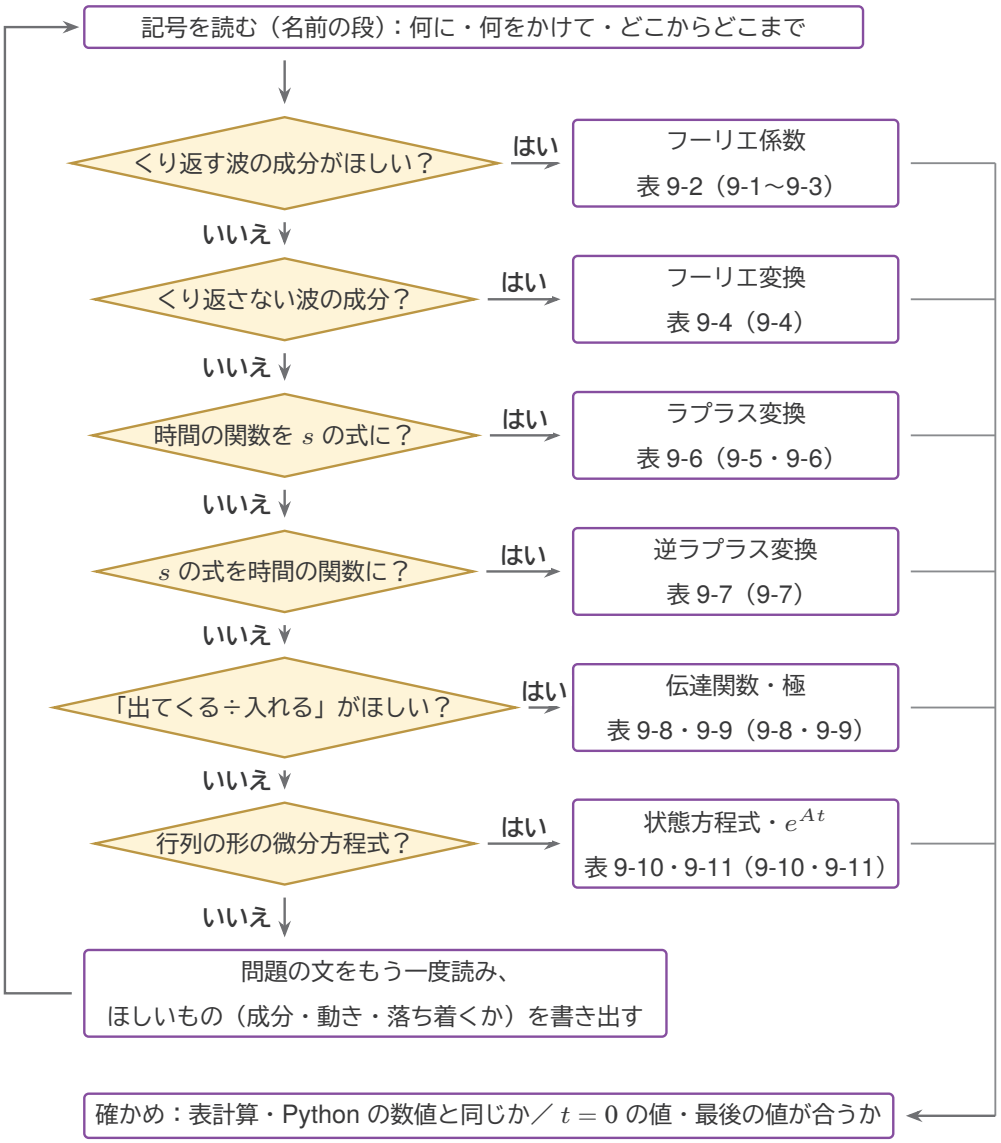


図 12　第 9 巻の全体の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。「はい」なら右の四角の章の道具を使い、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。全部「いいえ」なら、ほしいものを書き出して、はじめにもどる。

この章で出てきた場面を、流れ図でたどってみましょう（書いていない問いは「いいえ」）。

場面	「はい」の問い	着いた所
楽器の「ラ」の成分（図 7）	1 つめ	フーリエ係数（9-1〜9-3）
手を 1 回たたいた音の成分	2 つめ	フーリエ変換（9-4）
お湯の式を s の世界へ（図 8 の①）	3 つめ	ラプラス変換（9-5）
$T(s)$ を時間の世界へ（図 8 の③）	4 つめ	逆ラプラス変換（9-7）
倒立振子を状態方程式で解く	6 つめ	状態方程式・e^{At}（9-10・9-11）

表 7　この章の場面を、全体の流れ図でたどった結果

この巻の主役

11 くり返し出てくる場面

この巻では、同じ場面を、同じ数のまま、いくつもの章で使います。前の章で求めた答えを、あとの章で別の方法でも求めて、同じになることを確かめられるようにするためです。前の巻で出会った場面も、たくさんもどってきます。まず、第 1 部（フーリエ解析）の主役です。

場面	どんな場面か	出てくる章
四角い波（方形波）	4-9 の $\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \cdots$。デジタル回路の 0 と 1 の信号	9-1〜9-4
ラの音	440 Hz・880 Hz・1320 Hz の成分（大きさ 1・0.5・0.25）	9-0・9-4
金属の棒の熱	8-13 の 0.1 m の棒が冷めていくようす	9-1・9-2・9-11
ギターの弦	A 弦（110 Hz）の倍音	9-1・9-2

表 8　第 1 部でくり返し出てくる場面

第 2 部（ラプラス変換）と第 3 部（行列と微分方程式）では、第 6 巻・第 7 巻で微分方程式を立てて解いた場面が、そのままもどってきます。前の巻の答えと、この巻の新しい方法の答えが同じになることを、何回も確かめます。

場面	どんな場面か	出てくる章
冷めるお湯	2-18・6-4 の 80℃ のお湯	9-5・9-13
RC 回路	6-4 の充電（時定数 2 s）、3-12 の低い音だけ通す回路	9-3・9-5・9-7・9-8
車 A・車 B	3-10・6-12・7-8 の車のばね	9-7・9-9〜9-11
モーター・エアコン	速さや温度を、はかりながら調節するしくみ	9-8・9-9・9-12
倒立振子	5-17・5-18 のたおれる棒	9-9〜9-11
水そう・送電線	6-14 の 2 つの水そう、7-11 の送電線	9-10・9-11

表 9　第 2 部・第 3 部でくり返し出てくる場面（くわしくは、それぞれの章で）

表計算と Python

12 行は時刻、列は成分

この巻でも、表計算（2-18）と Python（2-19）をたくさん使います。初めての考えは、まず表計算で数を見てから、式で確かめます。この巻の表計算の表は、次の形にそろえます（表 2 と同じ形）。

1. **A 列は時刻**（または、はかった点の番号）。上から下へ、時間が進む。
2. **1 行めは成分の名前**（周波数・番号 n）、**2 行めは成分の大きさ**。
3. 式は 1 つのマスに 1 つだけ入れて、$ の印を使って、表全体にコピーする。
4. 右の列に、合計（SUM）や、かけ算した値を置く。

Python では、numpy と scipy という道具を使います。この巻で使う命令は、次のとおりです。どれも、手で計算したあとに、答えを確かめるために使います。

命令	すること	章
`np.fft.rfft`	数の並びを、周波数の成分に分ける（FFT）	9-4
`np.roots`	方程式の解（s の世界の点）を求める	9-9
`scipy.signal.residue`	部分分数の係数と極を求める（確かめ）	9-7
`np.linalg.eig`	行列の固有値と固有ベクトル（7-8）	9-10・9-11
`scipy.linalg.expm`	行列の指数関数 e^{At} を数で求める	9-11

表 10　この巻で使う Python の命令

図は、Python の matplotlib でもかけます。この本の図は、どれも「時間の世界」を左、「周波数の世界」や「s の世界」を右に並べて、同じ形にかき直してあります（図 6・図 9）。

この巻で出会う新しい記号

第 9 巻では、次のような新しい記号に出会います。いまは意味がわからなくても大丈夫です。どの記号も、使う前に、数の例と図でていねいに説明します（記号カードは巻末にも並べてあります）。第 1 部では、波の成分を表す記号が出てきます。

記号	読み方	ひとことで言うと	章
a_n、b_n、ω_0	エー・エヌ、ビー・エヌ、オメガ・ゼロ	フーリエ係数、基本角周波数	9-1
c_n	シー・エヌ	複素数で書いた成分	9-3
$F(\omega)$、f_s	エフ・オメガ、エフ・エス	くり返さない波の成分、はかる回数	9-4

表 11　第 1 部で出会う記号

第 2 部と第 3 部では、s の世界と行列の記号が出てきます。

記号	読み方	ひとことで言うと	章
$\mathcal{L}$、$H(t)$	ラプラス、エイチ・ティー	ラプラス変換、階段の形の関数	9-5
$\delta(t)$、$*$	デルタ・ティー、たたみこみ	細いパルス、答えのたし合わせ方	9-6
$\mathcal{L}^{-1}$	ラプラス・インバース（逆ラプラス変換）	時間の世界へもどす	9-7
$G(s)$	ジー・エス	伝達関数（出てくる÷入れる）	9-8
×、○	極、零点	s の世界の大事な点	9-9
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$	状態方程式	たくさんの微分方程式を 1 行で	9-10
e^{At}	イー・エー・ティー	行列の指数関数	9-11

表 12　第 2 部・第 3 部で出会う記号（くわしくはそれぞれの章で）

第 8 巻までの記号（j、s、$e^{j\theta}$、行列、$\vec{x}$ のたて書き、$\int$ など）も、そのまま使います。とくに虚数単位は、第 6 巻と同じく j と書きます（数学の本では i が多い。9-13 の専門書の読み方ガイドで見くらべます）。

この巻が通る路線と終点

第 9 巻を通る路線は 4 本です。4 本とも、この巻に**終点**があります。さらに、終章 9-13 には、7 本の路線がすべて集まります。第 1 巻・第 2 巻の「角の大きさ」「目もり」「何回もかける」「九九の表」から始まった路線が、この巻で、音や電気や機械を動かす道具に着きます。のこりの 3 本（変化・たし合わせ・矢印）は、第 8 巻で終点に着きました。終章 9-13 で、7 本の路線がどこで出会い、合流したのかを、1 枚の地図にします。

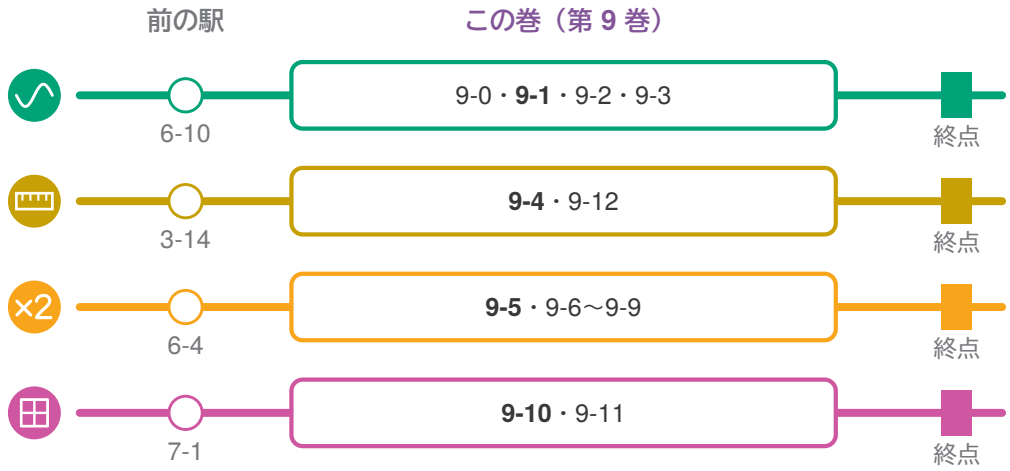


図 13　第 9 巻を通る 4 本の路線。四角の中がこの巻の駅（太字が終点の駅）。右はしの四角が終点の印。終点のあとの駅（9-2 など）は、終点で作った道具を使う駅。

	路線	大きな駅のつながり
	回転と波	角（1-20）→ 三角関数（4-8）→ sin の微分（5-15）→ オイラーの公式（6-10）→ **フーリエ級数**（9-1、終点「音・交流」）
	はかる	目もり（1-11）→ ずれ（2-6）→ 標準偏差（3-14）→ **フーリエ変換**（9-4、終点「計測・診断」）
	倍々	累乗（2-7）→ 指数関数（3-11）→ e（5-14）→ 冷めるお湯（6-4）→ **ラプラス変換**（9-5、終点「制御」）
	表	九九の表（1-13）→ 表計算（2-18）→ 連立方程式（3-6）→ 行列（7-1）→ **状態方程式**（9-10、終点「回路網・制御」）

表 13　4 本の路線の、大きな駅

この巻の読み方

この巻は、次の 4 つの約束で書いてあります。

① 2 つの世界の図で

新しい計算は、2 つの世界を並べて見ます。

・左は時間の世界（波形・動き）。

・右は周波数・s の世界。

② 表計算で先に数を見る

初めての考えは、図と表の 2 通りで。

・表計算で、たす・かけて平均する。

・式の答えと、表の数をくらべる。

③ 名前と、実際の操作

記号は「操作の名前」です。

・名前・直す・楽をするの 3 つの段。

・場合分けの表と流れ図で直し方を選ぶ。

④ ★ 5 の章は 3 段

大学の内容の章は、3 つの段です。

・目・手・式で「わかる」の 3 段。

・「ここまでで十分」の旗でゴール。

この巻を読み終えると、音・電気・機械の専門書に出てくる、次のような式が読めるようになります。どれも、いまは読めなくてかまいません。

専門書の式	何の式か	この巻の章
$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}$	弦のゆれ（振動・音の本）	9-1
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$	信号のスペクトル（信号処理の本）	9-4
$V(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s)$	RLC 回路（電気回路の本）	9-5・9-8
$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$	1 次おくれ（制御の本。T はこの本の時定数 τ）	9-8・9-9
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$、$y = C\vec{x}$	状態方程式（制御の本）	9-10・9-11

表 14　この巻を読むと読めるようになる、専門書の式の例

この巻では、前の巻の道具をたくさん使います。とくによく使う章を並べておきます。読んでいてわからなくなったら、この章にもどりましょう。

章	道具	使う第 9 巻の章
3-8	部分分数（1 つの分数を、たし算に分ける）	9-7
4-9	加法定理・積と和の式、四角い波	9-1・9-2
5-14	e と指数関数	9-5
5-16	部分積分	9-1・9-5・9-6
6-4	冷めるお湯（1 次の微分方程式）	9-5・9-7
6-10	オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$	9-3・9-5
6-12	特性方程式	9-7・9-9
7-8・7-9	固有値・固有ベクトル、対角化	9-9〜9-11
8-13	熱方程式・波動方程式	9-0・9-1・9-11

表 15　第 9 巻でとくによく使う、前の巻の章

ソラ：いよいよ最後の巻だね。フーリエにラプラス……名前だけは聞いたことがあるけど、むずかしそう。

ミナ：でも、音を成分に分けるのは、スマホのアプリでもう見たよ。お湯の冷め方も、車のばねも、前の巻で計算したものばかり。

デルタ：そのとおり。この巻は、8 冊分の道具が集まる場所だよ。小学 1 年の「リンゴは何個？」から、よくここまで来たね。1 回でわからなくても大丈夫。2 つの世界の図と、表計算の数で、ゆっくり確かめていこう。

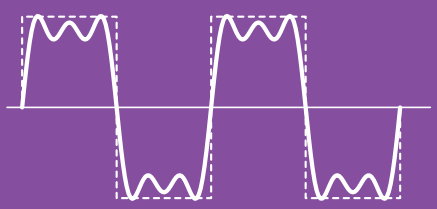
終章 9-13 では、小学 1 年から乗ってきた 7 本の路線を、1 枚の地図にしてふり返ります。その地図をかくための最後の道具を、これから 1 つずつ手に入れていきましょう。

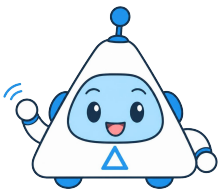
第９巻　第１部

フーリエ解析

1

- sin をたしていくと、四角い波ができる？
- ほしい成分だけを取り出すには？
- くり返さない音も、周波数に分けられる？





波を sin と cos の和に分けるのが、フーリエ級数とフーリエ変換だよ。かけて平均すると、ほしい成分だけが取り出せる理由と、音・電気・熱への使い方を見ていくよ。

この部で学ぶこと

9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数 ★★★★☆ P.38

sin をたしていくと、四角い波ができる

9-2 成分の取り出し方：直交性 ★★★★★ P.82

かけて積分すると、ほしい成分だけが残る

9-3 複素数で書くフーリエ級数 ★★★★★ P.124

sin と cos を、1 つの式でまとめて書く

9-4 スペクトル：フーリエ変換 ★★★★★ P.164

くり返さない音も、周波数に分けられる

この部を読むと…

くり返す波をフーリエ級数で、くり返さない信号をフーリエ変換で、周波数の成分に分けられるようになります。熱方程式・波動方程式を、変数分離とフーリエ級数で解けるようになります。

第 1 部　フーリエ解析

★★★★

9-1 波をたし合わせて形を作る：フーリエ級数

道しるべ　この章の前に 4-9 5-10 5-15 5-16 6-4 6-6 6-10 8-13
この章の先に 9-2 9-3 9-4

この章でできるようになること

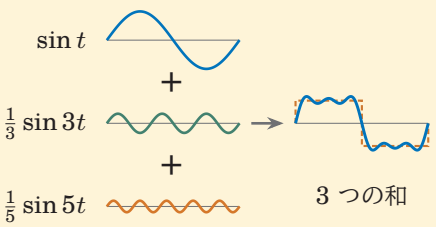
- ★★★ sin の波を 1 つずつたして四角い波に近づくのを表計算で確かめ、成分の棒グラフ（スペクトル）を読める。
- ★★★★ フーリエ級数の形を書き、方形波・のこぎり波の係数を、ふつうの定積分（部分積分）に直して求められる。
- ★★★★ 棒の熱と弦のゆれを、変数分離とフーリエ級数で「分けて解いて、たし直す」ことができる。

はてな？

図の左の 3 つは、なめらかな sin の波です。高さは 1、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$ で、下ほど速くゆれます。

3 つをたすと、図の右はしの波のように、山の上が平らになりかけます。もっとたしていくと、角のある四角い波（デジタルの信号）ができます。

なめらかな波をたして、角のある形ができるのはなぜ？ 何を、どれだけたせばよいのでしょう。



4-9 のもっと知りたいで、$\sin\theta$ に $\frac{1}{3}\sin 3\theta$、$\frac{1}{5}\sin 5\theta$、$\frac{1}{7}\sin 7\theta$、……とたしていくと、四角い波（**方形波**、ほうけいは）に近づくことを見ました。$\theta = 90°$ では $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \approx 0.724$ で、たす数をふやすと「約 0.785」に近づく、とも書きました。そして「この考え方をフーリエ級数といい、9-1 で学びます」と約束しました。

この章は、その約束を果たします。方形波の作り方（何をどれだけたすか）を表計算で確かめ、0.785 の正体をつきとめます。それから、たす量（係数）を、ふつうの定積分で求める方法を学びます。

さらに、8-13 の最後で予告した「**分けて解いて、たし直す**」方法を使います。どこも 100℃の金属の棒を、両はしから冷やしたときの温度を、表計算をせずに式で求めます。じつは、これがフーリエ自身が解いた問題で、フーリエ級数はこのために生まれました。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 4-9　$\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \frac{1}{7}\sin 7\theta$ は、方形波に近い形。$\theta = 90°$ で約 0.724。
- 5-10　$\sum_{k=1}^{n}$ は「$k = 1$ から n までたす」という書き方。
- 5-15　sin・cos を 1 周期（0 から 2π）で積分すると 0。$\int \sin nt\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos nt}{n}$。
- 5-16　部分積分：$\int_a^b fg'\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g\,\mathrm{d}t$。$\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = \pi$。
- 6-4　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$ の答えは $y = Ce^{-kt}$。k が大きいほど速く小さくなる。
- 6-6　$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$ の答えは $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の和（単振動）。
- 8-13　熱方程式 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$。$T = e^{-\alpha a^2 t}\sin ax$ は答えで、sin の形を保って小さくなる。

この巻のさいごの路線④「回転と波」の終点です。★★★★の章で、式でわかるの段は大学で学ぶ内容です。1 回でわからなくても大丈夫。表とグラフで「こうなる」を先に見てから、式で確かめていきましょう。

やってみよう　sin を 1 つずつたしていこう

表計算で、$\sin\theta$、$\frac{1}{3}\sin 3\theta$、$\frac{1}{5}\sin 5\theta$、$\frac{1}{7}\sin 7\theta$ の 4 つの成分を計算して、たします。A 列が角 θ（度）、1 行めが番号 n、2 行めが大きさ $\frac{1}{n}$ です。

1. B1〜E1 に番号 1, 3, 5, 7、B2 に `=1/B1` を入れて E2 まで右へコピーする。
2. A3 から下へ、0, 30, 60, …, 360 を入れる。
3. B3 に下の数式バーの式を入れ、B3:E15 にコピーする。F3 に `=SUM(B3:E3)` を入れて下へコピーする。

B3　`=B$2*SIN(B$1*RADIANS($A3))`

	A	B	C	D	E	F
1	$\theta \diagdown n$	1	3	5	7	合計
2	大きさ	1	0.3333	0.2	0.1429	
3	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	30	0.5000	0.3333	0.1000	−0.0714	0.8619
5	60	0.8660	0.0000	−0.1732	0.1237	0.8165
6	90	1.0000	−0.3333	0.2000	−0.1429	ア
7	120	0.8660	0.0000	−0.1732	0.1237	0.8165
8	150	0.5000	0.3333	0.1000	−0.0714	0.8619
9	180	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 1　方形波を 4 項までたす表（小数第 4 位まで。180° から 360° は、符号が逆の同じ値なので省いた）。A 列は角 θ（°）、1 行めは番号 n、2 行めは大きさ $\frac{1}{n}$。

アをうめよう。10° ごと（37 行）にして、F 列の折れ線グラフもかいてみよう。

B3 の式の `B$1*RADIANS($A3)` は「番号×角」（3θ など）で、表計算の SIN はラジアンで受けとるので RADIANS で直します（4-2）。`B$2*` は大きさ $\frac{1}{n}$ をかける部分です。`$` は「いつも 1 行め・2 行め・A 列を読む」印です。

90° の行は、$\sin 90° = 1$、$\sin 270° = -1$ です。450° は 1 回転と 90°、630° は 1 回転と 270° なので、$\sin 450° = 1$、$\sin 630° = -1$ です。1 つずつたしていくと、

$$1 - \frac{1}{3} = 0.6667 \qquad 2\text{ つまで：}\frac{1}{3}\sin 270° = -\frac{1}{3}$$

$$0.6667 + \frac{1}{5} = 0.8667 \qquad 3\text{ つまで：}\frac{1}{5}\sin 450° = +\frac{1}{5}$$

$$0.8667 - \frac{1}{7} = 0.7238 \qquad 4\text{ つまで（ア）：}\frac{1}{7}\sin 630° = -\frac{1}{7}$$

アの 0.7238 が、4-9 の「約 0.724」です。90° の値は、たすたびに上がったり下がったりしながら、だんだん動きが小さくなります。

数学の道具

目でわかる sin をたすと、形ができる ★★★

1 たしていくと、四角に近づく

やってみようの表をグラフにすると、図 1 のようになります。$\sin\theta$ だけ（灰色）では丸い山です。2 つ、4 つとたすと、山の上がだんだん平らになり、0° と 180° の所で、まっすぐ立ち上がるようになります。

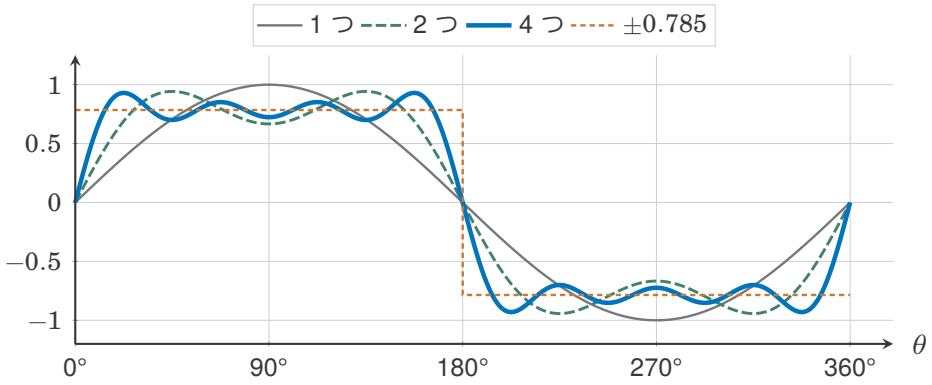


図 1　やってみようの表のグラフ。たす波をふやすと、オレンジの点線（高さ 0.785 の方形波）に近づく。

90° の値を、もっとたくさんたして調べます（表計算の列をふやすか、Python で計算します）。

たした波の数	1	2	3	4	10	100	1000
90° の値	1	0.6667	0.8667	0.7238	0.7605	0.7829	0.7851

表 2　90° の値。たす数をふやすと、0.7854 に近づいていく。

近づいていく先は $0.7853\cdots$ で、これは $\frac{\pi}{4} = 3.14159\cdots \div 4 = 0.78539\cdots$ と同じです。つまり

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

です。4-9 の「約 0.785」の正体は、$\frac{\pi}{4}$ でした。奇数の逆数を、＋と－を交互にしてたすと、円周率が出てくるのです。なぜ π が出てくるのかは、⑦で、ちがう波（のこぎり波）からもう一度確かめます。

② 高さを 1 にそろえる・角の山

方形波の高さを、0.785 ではなく 1 にしたいときは、全体を $1 \div 0.785$、つまり $\frac{4}{\pi} \approx 1.273$ 倍します（$\frac{\pi}{4}$ でわることは、$\frac{4}{\pi}$ をかけること）。

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots\right)$$

は、高さ 1 の方形波（$0<t<\pi$ で 1、$\pi<t<2\pi$ で -1）

ここから、角を θ（度）ではなく t（ラジアン）で書きます。t は時刻と思ってかまいません（1 秒に 1 ラジアン進む回転の角。5-15）。周期（1 回ゆれる時間）は 2π 秒です。

角のそばの山は、消えない

高さ 1 の方形波に近づけた和を、角（$t=0$）の近くで拡大してみます（図 2）。たす数をふやすと、平らな所はどんどん 1 に近づきます。ところが、角のすぐそばに、1 より少し高い山が残ります。

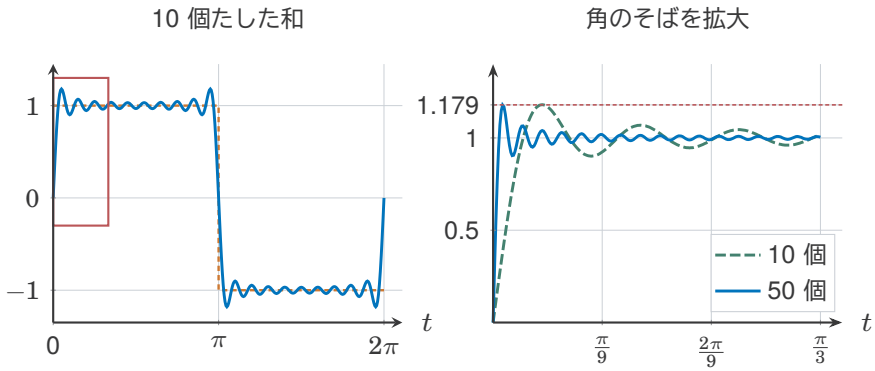


図 2 高さ 1 の方形波に近づけた和。右は、左の赤い四角の中を横に 6 倍に拡大したもの（目もりはラジアン。$\frac{\pi}{9}$ は 20°）。たす数を 10 個から 50 個にふやすと、山は角に近づくが、高さは約 1.179 のまま変わらない。

山のいちばん高い所を Python で調べると、次のようになりました。

たした波の数	1	2	4	10	50	200
山の高さ	1.273	1.200	1.184	1.180	1.179	1.179
山の場所	90°	45°	22.5°	9°	1.8°	0.45°

表 3 角のそばの山。場所は角に近づくが、高さは 1.179 より下がらない。

とび（-1 から 1 へ、2 だけとぶ）に対して、$0.179\div 2\approx 0.09$、つまり**約 9% の行きすぎ**が、いくつたしても残ります。この現象を**ギブズ現象**（ギブズげ

んしょう）といいます。ただし、山の**はば**はどんどんせまくなるので、角から少しでもはなれた所では、和は方形波にいくらでも近づきます。

もっと知りたい ★★★★

ギブズ現象の名前のゆらい

1898 年、アメリカのマイケルソンは、80 個の波をたせる機械（調和解析機）で、方形波などの波をたし合わせてかきました。同じ年、物理学者のギブズが雑誌『ネイチャー』への手紙で、角の近くの形を説明しましたが、最初の手紙にはまちがいがあり、翌 1899 年に直しました。じつは、イギリスのウィルブラハムが 1848 年に、同じことを見つけていました。「ギブズ現象」という名前は、1906 年にボッハーがつけたものです。

音で聞くと

sin の波 1 つだけの音は、口笛や時報の「ピッ」のような、すんだ音です。同じ高さの方形波の音は、ブザーのような、ざらざらした音に聞こえます。高さ（1 秒にゆれる回数）は同じでも、3 倍・5 倍・7 倍の速さでゆれる波がまざっているので、ちがう音に聞こえるのです。どの波が、どれだけまざっているか。これが音色を決めます（③）。

手でわかる 成分の表と、係数の見つけ方 ★★★★

③ 成分の棒グラフ：スペクトル

高さ 1 の方形波は、次のように、ゆれる速さのちがう sin の和で書けました。

$$\frac{4}{\pi}\sin t + 0 \times \sin 2t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + 0 \times \sin 4t + \frac{4}{5\pi}\sin 5t + \cdots$$

1 つ 1 つの sin の波を、方形波の**成分**（せいぶん）といいます。それぞれの成分を何倍してたすかを、棒の高さで表すと、図 3 の右のようになります。

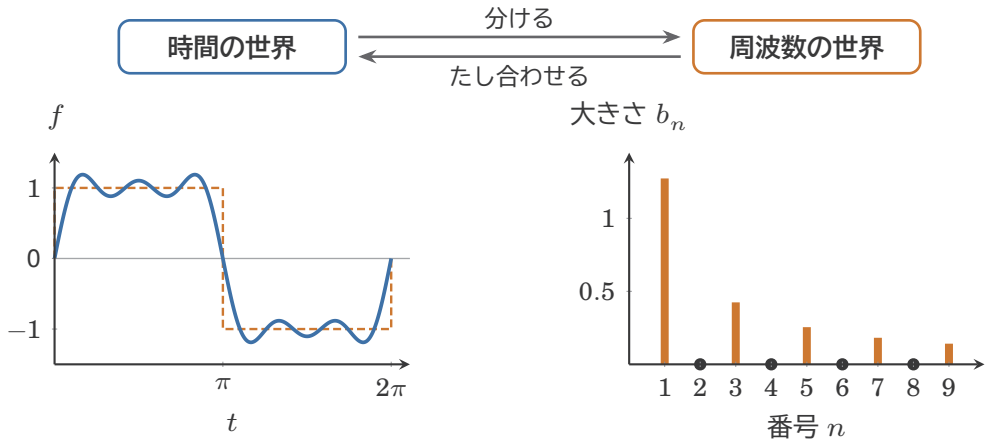


図 3　同じ方形波の 2 つの見方。左は時間の世界の形（オレンジの点線が方形波、青い線は右の棒のうち $n = 1 \cdot 3 \cdot 5$ の 3 本をたしたもの）、右は周波数の世界のスペクトル（$\sin nt$ を何倍してたすかの棒グラフ）。偶数番（黒い点）は 0。左から右へが「分ける」、右から左へが「たし合わせる」。

このような「成分の大きさの棒グラフ」を**スペクトル**といいます。虹が、太陽の光を色（波長）ごとに分けて見せるのと同じ考えで、波を「ゆれる速さ」ごとに分けて見せるグラフです。

左の形と右の棒グラフは、同じものの 2 つの見方です。左から右へが「分ける」、右から左へが「たし合わせる」です。この巻では、このように**時間の世界**と**周波数の世界**の 2 つを、いつも並べて見ていきます（9-0）。

方形波のスペクトルの読み方

- いちばん大きいのは $n = 1$（方形波と同じ速さでゆれる成分）。これを**基本波**（きほんは）といいます。
- $n = 3, 5, 7, \cdots$ と、奇数番の成分だけがあり、大きさは $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$ と、n に反比例して小さくなります。2 以上の番号の成分を**高調波**（こうちょうは）といいます。
- 偶数番の成分はありません。方形波の上半分と下半分が、ちょうど同じ形で上下に返っているからです（くわしいわけは 9-2 で）。

スペクトルがちがえば、音色がちがう

楽器の音や声も、くり返す波です。同じ高さの音でも、楽器によって波の形がちがい、スペクトル（どの成分が、どれだけあるか）がちがいます。図 4 は、作った数で 2 つの音をくらべた例です。

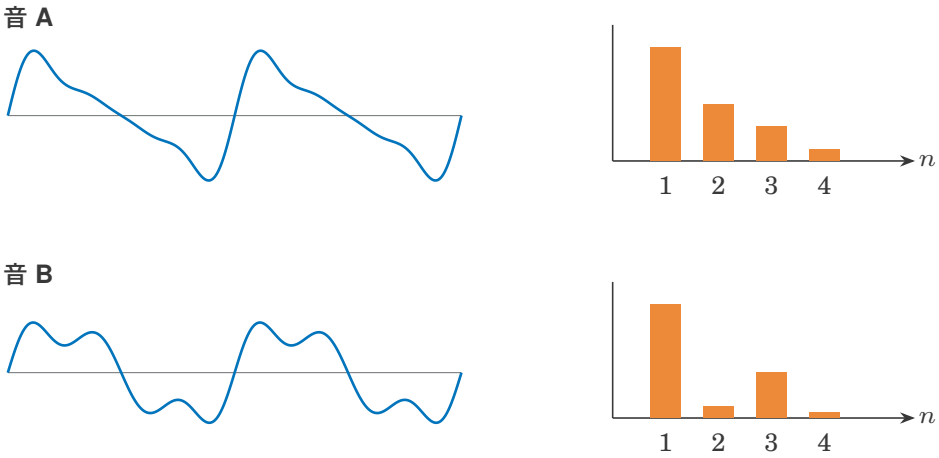


図 4　同じ高さ（基本波は同じ）の 2 つの音（作った数）。音 A は 2 番め（2 倍の速さ）の成分が大きく、音 B は 3 番めが大きい。波の形がちがい、音色がちがって聞こえる。

音の高さを決めるのは基本波の速さ（1 秒にゆれる回数）、音色を決めるのはスペクトルの形（成分の並び）です。ギターやピアノの音のスペクトルは、2 倍・3 倍・4 倍…の成分がならぶ形になります（⑨の弦で、なぜそうなるかを見ます）。

4 周期が T の波

ここまでは、周期（1 回のくり返しにかかる時間）が 2π 秒の波でした。家のコンセントの電気は、東日本では 1 秒に 50 回、西日本では 60 回くり返します。周期が T〔s〕の波では、1 秒に進む角を

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad （基本角周波数〔rad/s〕）$$

とします。1 周期 T のあいだに、角がちょうど 2π（1 回転）進むようにするためです（5-15 の角周波数 ω と同じ考え）。これを**基本角周波数**といい、ω_0（オ

メガ・ゼロ）と書きます。$\sin t$ の t を $\omega_0 t$ に、$\sin nt$ を $\sin n\omega_0 t$ にかえると、周期 T の方形波になります。

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right)$$

高さ 1、周期 T の方形波

n 番めの成分は、角周波数が $n\omega_0$ です。1 秒にゆれる回数（周波数）でいうと、基本波の n 倍です。

50 Hz の方形波

たとえば、周期 $T = \frac{1}{50}\,\mathrm{s}$（$= 0.02\,\mathrm{s}$）の方形波なら、

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{0.02} = 100\pi \approx 314\ \mathrm{rad/s}$$

です。成分は 50 Hz（基本波）、150 Hz、250 Hz、350 Hz、…で、大きさは $\frac{4}{\pi} \approx 1.27$、$\frac{4}{3\pi} \approx 0.42$、$\frac{4}{5\pi} \approx 0.25$、…です。直流を交流に変える装置の中には、まず方形波に近い電圧を作るものがあります。そのままでは 150 Hz・250 Hz の成分がまざり、モーターがうなったり、ほかの機械に雑音を出したりします。だから、これらの成分を小さくする工夫をします（9-2・9-3）。

> **せいかくに言うと**
>
> **角周波数・周波数・番号**
>
> ω_0 は「基本の」角周波数で、$n\omega_0$ が n 番めの成分の角周波数です。ω_n とは書きません。6-12 の ω_n（立てた n）は、ばねの「固有角振動数」という別のものだからです。また、周波数（1 秒の回数〔Hz〕）と角周波数（1 秒に進む角〔rad/s〕）は 2π 倍ちがいます。周波数は「振動数」と同じものです。

5 係数の見つけ方：かけて平均の 2 倍

方形波は「$\sin t$ を $\frac{4}{\pi}$ 倍、$\sin 3t$ を $\frac{4}{3\pi}$ 倍、……」してたしたものでした。では、どんな波でも、この「何倍か」（**係数**）を見つける方法はあるでしょうか。表計算で、ためしてみます。

表計算で：方形波に $\sin nt$ をかけて、平均する

1 周期（0° から 360°）を 10° ずつ 36 個に区切り、それぞれのまん中の角（5°、15°、…、355°）で、方形波の値 f（B 列）に $\sin t$、$\sin 3t$、$\sin 5t$ をかけます。いちばん下の行で、36 個の平均を 2 倍します。

C2　`=$B2*SIN(C$1*RADIANS($A2))`

	A	B	C	D	E
1	$t \diagdown n$	波 f	1	3	5
2	5	1	0.0872	0.2588	0.4226
3	15	1	0.2588	0.7071	0.9659
4	25	1	0.4226	0.9659	0.8192
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	185	−1	0.0872	0.2588	0.4226
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
37	355	−1	0.0872	0.2588	0.4226
38	平均× 2		1.2749	0.4293	0.2629

表 4　方形波（B 列：`=IF(A2<180,1,-1)`）に $\sin nt$ をかけた表。A 列は角 t（°。5° から 10° ごとの 36 点）、1 行めは番号 n。38 行めは `=2*AVERAGE(C2:C37)`。

本当の係数とくらべます。

	$n=1$	$n=3$	$n=5$
平均の 2 倍	1.2749	0.4293	0.2629
方形波の係数	$\frac{4}{\pi}=1.2732$	$\frac{4}{3\pi}=0.4244$	$\frac{4}{5\pi}=0.2546$

表 5　「かけて平均の 2 倍」は、方形波の係数にほぼ等しい。区切りを細かくすると、もっと近づく。偶数番（$n=2$ など）の列を足すと、平均は 0 になる。

「$\sin nt$ をかけて、1 周期で平均し、2 倍する」と、$\sin nt$ の係数がほぼ出てきました。

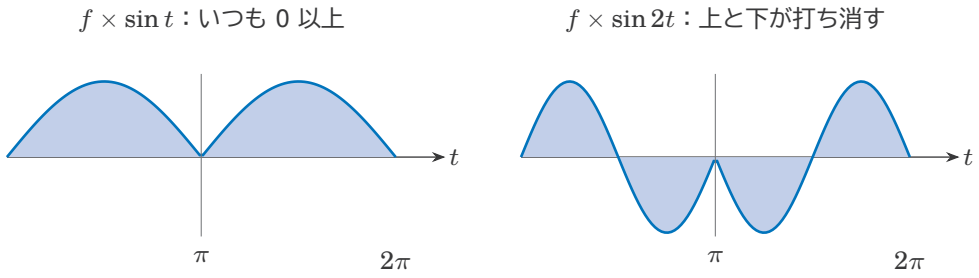


図 5 方形波 f に $\sin t$ をかけると（左）、f と $\sin t$ はいつも同じ符号なので、積は 0 以上で、平均は正。$\sin 2t$ をかけると（右）、正の部分と負の部分が同じ面積で、平均は 0。

図 5 が、そのしくみです。方形波にふくまれる $\sin t$ の成分は、$\sin t$ と「歩調が合っている」ので、かけると正の値ばかりがたまります。ふくまれていない $\sin 2t$ をかけると、正と負が打ち消し合って 0 になります。かけ算が、その成分だけを「取り出す」はたらきをしているのです。

なぜ平均を **2 倍**するのかも、1 つ確かめます。f が $\sin t$ そのもの（係数は 1）なら、かけたものは $\sin^2 t$ です。$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$（4-9 の 2 倍角の式）で、$\cos 2t$ の平均は 0 なので、$\sin^2 t$ の平均は $\frac{1}{2}$ です。係数 1 を出すには、平均 $\frac{1}{2}$ を 2 倍しなければなりません。なぜ、ほかの成分がきれいに 0 になるのかは、9-2 で、ふつうの定積分を使ってきちんと確かめます。

①名前の段 「係数」は、操作の名前

「かけて平均の 2 倍」を式で書きます。関数の平均は「積分÷区間の長さ」でした（5-11）。周期が 2π の波 $f(t)$ の、$\sin nt$ の係数を b_n と書くと、

$$b_n = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t$$

です。b_n（ビー・エヌ）は、「1 周期で、f に $\sin nt$ をかけてたし合わせ、$\frac{1}{\pi}$ 倍する」という**操作の名前**です。記号 b_n を見ただけでは、まだ数は出ません。この巻では、名前の記号を点線のわくで、実際に計算できる形を実線のわくで、書き分けます。

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

実線のわくの下の札は、どの道具で計算するかです。この章の道具は「ふつうの定積分」です（9-5 からは「表を引く」「部分分数」「行列の計算」の札も出てきます）。

②直す段　ふつうの定積分に直す：区間に分ける

方形波は、$0 < t < \pi$ で 1、$\pi < t < 2\pi$ で -1 です。1 つの式では書けないので、積分の区間を 2 つに分けます（5-11：$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$）。

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t\right)$$

区間を 2 つに分ける。2 つめは $f = -1$

$$\int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n}$$

5-15 の積分。$\cos 0 = 1$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n}$$

$\cos 2n\pi = 1$（2π の整数倍）

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi - 1}{n}\right)$$

2 行め・3 行めを入れる

$$= \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

分子をまとめる

$\cos n\pi$ は、n が奇数なら -1、偶数なら 1 です（π ごとに -1 と 1 をくり返す）。まとめて $\cos n\pi = (-1)^n$ と書けます。

n	1	2	3	4	5
$\cos n\pi$	-1	1	-1	1	-1
$b_n = \dfrac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$	$\dfrac{4}{\pi}$	0	$\dfrac{4}{3\pi}$	0	$\dfrac{4}{5\pi}$

表 6　方形波の係数。奇数番は $\frac{4}{n\pi}$、偶数番は 0。

表計算で見つけた 1.2749、0.4293、0.2629 の、本当の値 $\frac{4}{\pi}$、$\frac{4}{3\pi}$、$\frac{4}{5\pi}$ が、ふつうの定積分で出ました。偶数番が 0 になることも、式でわかりました。

❓はてな？の答えです。なめらかな波でも、$\sin t$、$\sin 3t$、$\sin 5t$、…と、**速くゆれる波を、$\frac{4}{n\pi}$ ずつ小さくしながら、限りなくたしていく**と、角のある方形

波になります。1つ1つの波はなめらかでも、速くゆれる波ほど、急な変化を作れます。無限にたすと、とびのある形まで作れるのです（角のそばの約9%の山は残ります：②）。

> **ここまでで十分**
>
> sinをたして方形波に近づくこと、成分を棒グラフ（スペクトル）で読むこと、係数は「かけて平均の2倍」で、方形波なら区間に分けたふつうの定積分で $\frac{4}{n\pi}$ と求まること。ここまでわかれば十分です。この先は、cosや平均もふくめた一般の形と、熱・弦への使いみちです。

∂ 式でわかる 一般の形と、熱・弦 ★★★★

6 フーリエ級数の式

方形波はsinだけでたせました。でも、いつもそうとはかぎりません。たとえば、0Vと5Vをくり返すデジタル回路の信号は、平均が2.5Vで、0のまわりで上下に同じだけゆれる波ではありません。また、方形波を時間の向きに少しずらすと、cosの成分も必要になります（$\cos t = \sin(t+\frac{\pi}{2})$。4-8）。そこで、一般には次の形を使います。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

これを**フーリエ級数**（フーリエきゅうすう）といい、a_n・b_n を**フーリエ係数**といいます。$\sum_{n=1}^{\infty}$ は「$n=1, 2, 3, \cdots$ と、限りなくたす」という意味です（5-10の$\sum$の、終わりのない形）。係数は、⑤と同じく「かけて平均の2倍」です。

$$\underbrace{a_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

$\frac{2}{T}$ は「平均（$\frac{1}{T}\int_0^T$）の 2 倍」の意味です。$T = 2\pi$ なら $\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$ で、⑤の式にもどります。a_n は $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$、b_n は $n = 1,\ 2,\ \cdots$ について使います（b_0 は $\sin 0 = 0$ をかけるので、いつも 0）。

なぜ $\frac{a_0}{2}$ と、$\frac{1}{2}$ をつけるのか

定数の項（t によらない部分）が何になるかを考えます。フーリエ級数の両辺を、1 周期で積分します。$\cos n\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t$（$n \geqq 1$）は、1 周期で積分すると 0 です（5-15。ちょうど n 回、上と下が同じだけある）。

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\text{定数})\,\mathrm{d}t + 0 \qquad \cos\cdot\sin \text{ の項は、1 周期で } 0$$

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = (\text{定数}) \times T \qquad \text{定数の積分は、定数×長さ}$$

$$\text{定数} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{両辺を } T \text{ でわる。これは } f \text{ の平均}$$

定数の項は、f の**平均**です（**直流分**ともいいます）。いっぽう、a_n の式に $n = 0$ を入れると、$\cos 0 = 1$ なので

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \times 1\,\mathrm{d}t \qquad a_n \text{ の式で } n = 0$$

$$a_0 = 2 \times \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \times (\text{平均}) \qquad \frac{2}{T} = 2 \times \frac{1}{T}$$

$$\frac{a_0}{2} = \text{平均} \qquad \text{両辺を 2 でわる}$$

です。定数の項を $\frac{a_0}{2}$ と書いておけば、a_0 だけ別の式を作らずに、a_n の式をそのまま $n = 0$ に使えます。$\frac{1}{2}$ は、そのための約束です。

1 周期なら、どこからどこまででもよい

f も $\cos n\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t$ も、周期 T でくり返します。だから、積分は「長さ T の区間」なら、0 から T でも、$-\frac{T}{2}$ から $\frac{T}{2}$ でも、同じ値になります（1 周期ぶんの面積は、どこで切っても同じ）。計算が楽になるほうを選びます。⑦では $-\pi$ から π を使います。

どんなときに、どう直す？（9-2 の表の予告）

係数 a_n・b_n は名前です。実際の計算のしかたは、波の形によって変わります。9-2 で、すべての場合を「場合分けの表 9-2」と流れ図にまとめます。この章では、そのうち次の 5 つを使います（記号は表 9-2 と同じ）。

場合分けの表 9-2（この章で使う 5 つ）フーリエ係数をどう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
I	式がなく、はかった値だけ（とびとびの値）	楽をする 表計算で「値× $\sin n\omega_0 t$」の平均の 2 倍（⑤の表）	5
E	棒・弦のように、0 から L だけで決まる形	楽をする 外側へ、原点で半回転した形に広げて、sin だけの級数にする（⑧）	6・7
F	周期が 2π でない	楽をする $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$、$\theta = \omega_0 t$ とおきかえて、周期 2π の形にもどす	4
B	区間ごとに一定（方形波）	ふつうの定積分 区間に分けて、cos・sin の定積分。$\cos n\pi = (-1)^n$	2・4・6・7
C	区間ごとに 1 次式（のこぎり波）	ふつうの定積分 部分積分（5-16）	3

I・E・F は、③の**楽をする段**（計算する前に、形を楽なものに直す）、B・C は②の**直す段**（ふつうの定積分で計算する）です。E・F のあとは、B か C で計算します。

7 のこぎり波：部分積分で

5-16 で「$\int t \sin nt \, dt$ のような積分を部分積分で計算して、音や振動を sin と cos に分けます（9-1）」と約束しました。$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = t$ をくり返す**のこぎり波**の係数を求めます（図 6）。周期は 2π なので、$\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$、積分は $-\pi$ から π までにします。

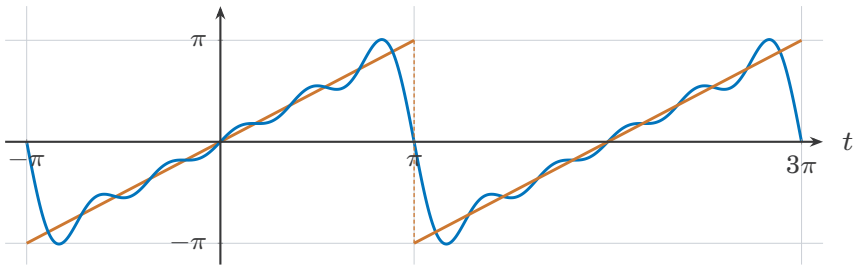


図 6　オレンジの線がのこぎり波（$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = t$ をくり返す。目もりはラジアン）、青い線がフーリエ級数の 5 個までの和。$t = \pi$ のとびの所では、和は 0（とびの上下のまん中）を通る。

名前　$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt$（$t$ に $\sin nt$ をかけて、1 周期でたす）。a_n も同じく $t \cos nt$ をたす。

直す：ふつうの定積分　t と $\sin nt$ のかけ算の積分なので、部分積分（5-16）を使う。

b_n を求める

5-16 の部分積分 $\int fg' \, dt = [fg] - \int f'g \, dt$ で、微分すると簡単になる t を f に、積分できる $\sin nt$ を g' にします。$g = -\frac{\cos nt}{n}$ です。

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{t\cos nt}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t$$ 部分積分。$f'=1$

$$\Big[-\frac{t\cos nt}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}$$ 上のはしから下のはしをひく

$$= -\frac{2\pi\cos n\pi}{n} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$$ $\cos(-n\pi)=(-1)^n$

$$\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big[\frac{\sin nt}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$ $\sin(\pm n\pi)=0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$ $\frac{1}{\pi}$ をかける

$n=1$ のとき、積分は 2π です。5-16 の例題 $\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = \pi$ の 2 倍で、$-\pi$ から 0 の部分も同じだけある（$t\sin t$ のグラフが左右対称）からです。

a_n と a_0 を求める

a_n も部分積分で、$g'=\cos nt$、$g=\frac{\sin nt}{n}$ とします（$n\geqq 1$）。

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t\sin nt}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t$$ 部分積分

$$= 0 - \frac{1}{n}\Big[-\frac{\cos nt}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$ $\pm n\pi$ で sin は 0、cos は同じ値

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$ $\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}=0$

a_n はすべて 0 です（$t\cos nt$ は、t を $-t$ にすると符号が変わる形なので、左右の面積が打ち消す。9-2 で「奇関数」とよぶ形です）。だから

$$t = 2\Big(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \cdots\Big) \qquad (-\pi < t < \pi)$$

$\frac{\pi}{4}$ が、もう一度出てくる

この式に $t=\frac{\pi}{2}$ を入れます。$\sin\frac{\pi}{2}=1$、$\sin\pi=0$、$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$、$\sin 2\pi=0$、$\sin\frac{5\pi}{2}=1$、…なので、偶数番の項は消えます。

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-0+\frac{-1}{3}-0+\frac{1}{5}-\cdots\right) \qquad t=\frac{\pi}{2}\text{ を入れる}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \qquad \text{両辺を 2 でわる}$$

①で、方形波の 90° の値から見つけた式と同じです。ちがう波から同じ $\frac{\pi}{4}$ が出たことで、①の 0.785 が本当に $\frac{\pi}{4}$ だと確かめられました。

とびの所では、まん中の値

$t=\pi$ では、のこぎり波は π から $-\pi$ へとびます。級数に $t=\pi$ を入れると、$\sin n\pi=0$ なので、すべての項が 0 で、和は 0 です。0 は、とびの上（π）と下（$-\pi$）のまん中です。フーリエ級数は、とびの所では、**左右の値の平均**を通ります（図 6）。方形波の $t=0\cdot\pi$ でも、和は 0（1 と -1 のまん中）でした。

8 熱方程式を、分けて解いて、たし直す

8-13 の最後で、「どんな形の温度でも、sin の形のたし算で書ける。sin の 1 つ 1 つは、それぞれの速さで小さくなる。だから、たし直せば、どんな初めの温度の答えも式で書ける」と予告しました。その約束を果たします。

問題：どこも 100℃の棒を、両はしから冷やす

長さ $L=0.1\,\mathrm{m}$ のアルミの棒が、どこも 100℃になっています（熱湯から出したところ）。時刻 $t=0$ に、両はしを 0℃の氷水につけ、そのまま 0℃に保ちます。棒のまわりは断熱材でくるんであり、熱は両はしからだけ逃げます。棒の場所 x〔m〕、時刻 t〔s〕の温度を $T(x,\,t)$〔℃〕とします（この節の T は温度です。周期の T は使いません）。熱拡散率は、8-13 と同じ $\alpha=1\times10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$ です。

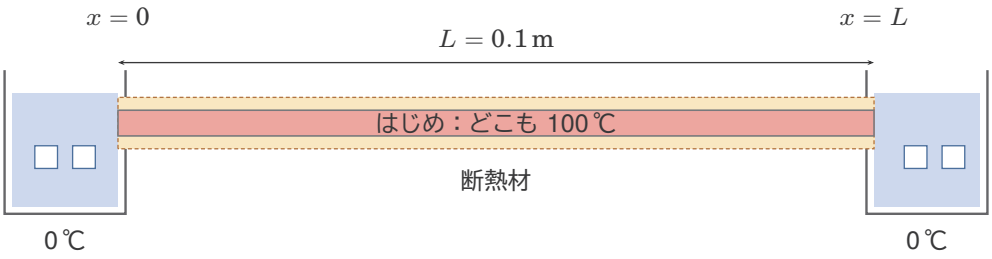


図 7 どこも 100℃のアルミの棒の両はしを、0℃の氷水につける。まん中が 50℃になるのは何秒後か。

まん中が 50℃まで冷えるのは、何秒後でしょう。8-13 なら、表計算で 1 歩ずつ進めました。ここでは、式で答えを出します。

(a) 8-13 の答えを思い出す

8-13 で、$T = e^{-\alpha a^2 t} \sin ax$ が熱方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

の答えになることを、代入して確かめました。sin の形の温度は、形を保ったまま、$e^{-\alpha a^2 t}$ の割合で小さくなるのでした。

この答えが、両はし 0℃をみたすには、$x = 0$ と $x = L$ で $\sin ax = 0$ でなければなりません。$x = 0$ では $\sin 0 = 0$ で、いつも大丈夫です。$x = L$ では $\sin aL = 0$、つまり aL が π の整数倍です。

$$aL = n\pi \quad \text{より} \quad a = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

8-13 の a は、この $\frac{n\pi}{L}$ のことでした。8-13 の数を入れた例（$a = \frac{\pi}{0.1} \approx 31.4$）は、$n = 1$ の場合です。ここからは、フーリエ係数の a_n とまぎれないように、a を使わずに $\sin \frac{n\pi x}{L}$ と書きます。

(b) 変数分離：形と大きさに分ける

(a) の答えは、どれも「場所だけで決まる形」×「時間だけで決まる大きさ」になっています。そこで、答えを最初から

$$T(x,\ t) = X(x)\,\Theta(t)$$

とおいてみます。X は場所 x だけの関数（形）、Θ（シータ）は時刻 t だけの関数（大きさ）です。熱方程式に入れて、1 行ずつ変形します。

$\dfrac{\partial T}{\partial t} = X(x)\,\Theta'(t)$	x を止めて t で微分。X は定数あつかい
$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''(x)\,\Theta(t)$	t を止めて x で 2 回微分
$X\,\Theta' = \alpha\,X''\,\Theta$	熱方程式に入れる
$\dfrac{\Theta'(t)}{\alpha\,\Theta(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$	両辺を $\alpha X\Theta$ でわる

左辺は t だけの式、右辺は x だけの式です。t を変えても右辺は変わらないので、左辺も変わりません。x を変えても左辺は変わらないので、右辺も変わりません。だから、両辺は**同じ定数**です。この定数を $-\lambda$（ラムダ）とおきます（負にするわけは、せいかくに言うとで）。

$\Theta' = -\lambda\alpha\,\Theta$	左辺 $= -\lambda$。6-4 の形
$\Theta = e^{-\lambda\alpha t}$	6-4・5-14：e^{-kt} の形
$X'' = -\lambda X$	右辺 $= -\lambda$。6-6 の単振動の形
$X = \sin\sqrt{\lambda}\,x$	$X(0) = 0$ なので cos は入らない
$\sqrt{\lambda} = \dfrac{n\pi}{L}$	$X(L) = 0$ から（(a) と同じ）

1 つの偏微分方程式が、t の式と x の式の、2 つのふつうの微分方程式に分かれました。このように、答えを「1 つの変数だけの関数のかけ算」とおいて式を

分ける方法を**変数分離法**（へんすうぶんりほう）といいます。6-4 の変数分離形（1 つの式の中で y と t を左右に分ける）と同じ考えを、偏微分方程式に広げたものです。こうして、1 つずつの答え

$$T_n = e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が得られます。（a）の答えと同じです。

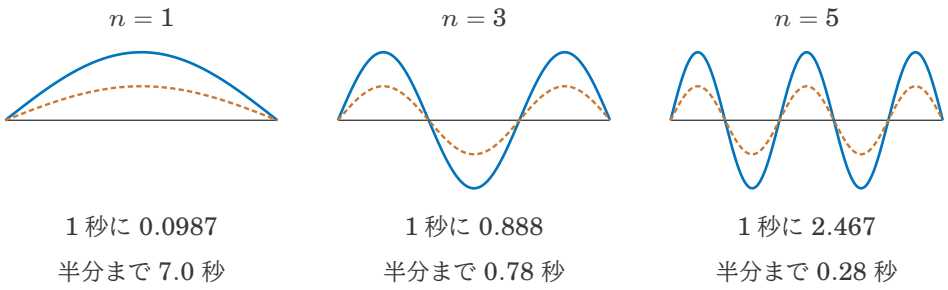


図 8　1 つずつの答え T_n の形。青が始めの形、オレンジの点線が半分になった形。でこぼこが n 倍細かいと、n^2 倍速く消える（$\alpha(\frac{n\pi}{L})^2$ が n^2 倍）。

$\alpha(\frac{\pi}{L})^2 = 1\times10^{-4}\times(\frac{3.1416}{0.1})^2 = 0.0987$〔1/s〕です（8-13 と同じ数）。$n = 3$ では $3^2 = 9$ 倍の 0.888、$n = 5$ では 25 倍の 2.467 です。$e^{-kt} = \frac{1}{2}$ となる時間は $\frac{\ln 2}{k}$ なので、$n = 1$ は 7.0 秒、$n = 3$ は 0.78 秒、$n = 5$ は 0.28 秒で半分になります。

（c）たし直す：初めの形をフーリエ級数で書く

熱方程式は**線形**です（5-18：答えどうしをたしても答え、何倍しても答え）。だから、T_1、T_2、T_3、…に係数をかけてたしたもの

$$T(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

も、熱方程式と両はし 0℃をみたします。あとは、$t = 0$ で「どこも 100℃」になるように、b_n を決めればよいのです。$t = 0$ では $e^0 = 1$ なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = 100 \qquad (0 < x < L)$$

となる b_n をさがします。sin だけでたすので、ここで方形波を使います。棒の外側に、$-L < x < 0$ では -100 の「見えない棒」があると考えると、温度のグラフは、周期 $2L$、高さ 100 の方形波になります（図 9）。

図 9　0 から L だけの温度（赤）を、原点で半回転した形（灰色の点線）に広げると、周期 $2L$ の方形波になる。0 から L の所では、もとの温度と同じ。

高さ 1、周期 2π の方形波は $\frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\right)$ でした（②）。t のかわりに $\frac{\pi x}{L}$（x が $2L$ 進むと 2π 進む）を入れ、高さを 100 倍すると、

$$100 = \frac{400}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right) \qquad (0 < x < L)$$

です。だから、$b_n = \frac{400}{n\pi}$（n が奇数）、偶数番は 0 です。これを（c）の式に入れて、答えが出ます。

$$T(x,\ t) = \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{400}{n\pi}\, e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

初めの形を、1 つずつ形を保って小さくなる sin の形に**分け**（フーリエ級数）、1 つずつ時間を進めて（$e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}$ をかけて）、**たし直す**。これが「分けて解いて、たし直す」方法です。

(d) 数を入れる：まん中の温度

まん中 $x = \frac{L}{2}$ では、$\sin\frac{n\pi}{2}$ が、$n = 1$ で 1、$n = 3$ で -1、$n = 5$ で 1、… です。

$$T\left(\frac{L}{2},\ t\right) = \frac{400}{\pi}e^{-0.0987t} - \frac{400}{3\pi}e^{-0.888t} + \frac{400}{5\pi}e^{-2.467t} - \cdots$$

$\frac{400}{\pi} = 127.3$、$\frac{400}{3\pi} = 42.44$、$\frac{400}{5\pi} = 25.46$ です。Python で多くの項をたした値と、1 項めだけの値をくらべます。

時刻 t（s）	0.5	2	5	10	20	30
全部の項（℃）	100.0	97.52	77.23	47.45	17.69	6.59
1 項めだけ（℃）	121.2	104.5	77.73	47.45	17.69	6.59

表 7 棒のまん中の温度。はじめは 1 項だけでは足りないが、5 秒をすぎると 1 項めだけでほぼ同じになる。

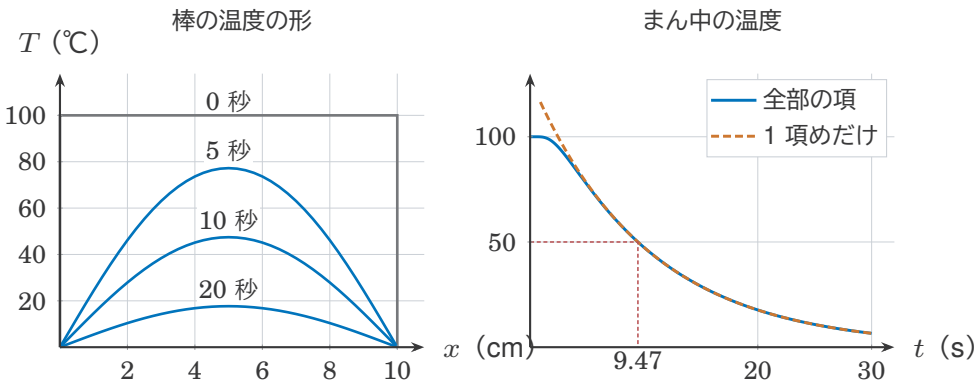


図 10 左：0・5・10・20 秒の形。時間とともに、角がとれて sin の山の形（$n = 1$ の形）になり、そのまま小さくなる。右：まん中の温度。1 項めだけの線は、はじめは 100℃をこえる（$t = 0$ で 127℃）が、すぐに全部の項の線と重なる。

まん中が 50℃になる時刻は、1 項めだけの式で求められます（2 項め以下は、5 秒で 0.5℃ほど、10 秒では 0.006℃と、とても小さいので）。

$$127.3\,e^{-0.0987t} = 50 \qquad \text{1 項めだけ}$$

$$e^{-0.0987t} = \frac{50}{127.3} = 0.3928 \qquad \text{両辺を 127.3 でわる}$$

$$-0.0987t = \ln 0.3928 = -0.9345 \qquad \text{両辺の ln をとる（3-12・5-14）}$$

$$t = \frac{0.9345}{0.0987} \approx 9.47 \qquad \text{両辺を } -0.0987 \text{ でわる}$$

答えは**約 9.47 秒後**です。全部の項で計算しても 9.47 秒です。8-13 の表計算（$\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$、$\Delta t = 0.25\,\mathrm{s}$）を、この問題（はじめ 100 ℃、両はし 0 ℃）で進めると、9.50 秒で 50 ℃を下まわります。表計算と式の答えがよく合いました。

細かいでこぼこは、すぐ消える

はじめの「どこも 100 ℃で、両はしだけ 0 ℃」という形は、両はしに急な段差があります。段差を作るには、細かい sin（n が大きいもの）がたくさん要ります。でも、細かい成分ほど n^2 倍速く消えるので、数秒で角がとれ、あとは $n = 1$ のなだらかな山の形のまま、7.0 秒ごとに半分になっていきます（図 10）。熱の問題で「1 項めだけで十分」になることが多いのは、このためです。

Python で級数をたす

表 7 の「全部の項」は、次のプログラムで、奇数番の項を 200 個たして求めました（$n = 1$ から 399 まで）。奇数を並べた列 n を作り、1 つずつの項を計算して、まとめてたしています。

Python

```
import numpy as np
L, al = 0.1, 1e-4              # 棒の長さ〔m〕、熱拡散率〔m²/s〕
def T(x, t, N=200):            # 奇数番の項を N 個たす
    n = np.arange(1, 2*N, 2) # 1, 3, 5, …, 2N - 1
    return np.sum(400/(n*np.pi) * np.exp(-al*(n*np.pi/L)**2*t)
                  * np.sin(n*np.pi*x/L))
for t in [2, 5, 10, 20]:
    print(t, round(T(L/2, t), 2))  # まん中の温度
```

実行結果

```
2 97.52
5 77.23
10 47.45
20 17.69
```

N=1 にすると、1 項めだけの値になります。t を小さくしていくと、項の数を多くしないと 100℃に近づかないことも確かめられます。

9 弦のゆれ：倍音の正体

8-13 の波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

も、同じ方法で解けます（y は弦の横へのずれ〔m〕、c は弦を伝わる波の速さ〔m/s〕）。両はしを止めた長さ L の弦を、ある形に引っぱって、そっとはなします。$y = X(x)\,\Theta(t)$ とおきます。

$X\,\Theta'' = c^2 X''\,\Theta$ 波動方程式に入れる

$\dfrac{\Theta''}{c^2\,\Theta} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ 両辺を $c^2 X\Theta$ でわる。同じ定数

$X = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ 熱と同じ（両はしで 0）

$\Theta'' = -\left(\dfrac{n\pi c}{L}\right)^2 \Theta$ 左の式に $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$ を入れる

$\Theta = \cos\dfrac{n\pi c t}{L}$ 6-6 の単振動。はなした時は止まっている

熱では時間の部分が e^{-kt}（小さくなる）でしたが、弦では cos（ゆれ続ける）です。8-13 で見た「熱は 1 回微分、波は 2 回微分」のちがいが、ここに出ています。答えは

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi ct}{L}$$

です。b_n は、はじめの形を $\sin\frac{n\pi x}{L}$ のたし算で書いた係数です（はじく場所でどう変わるかは、9-2 で）。

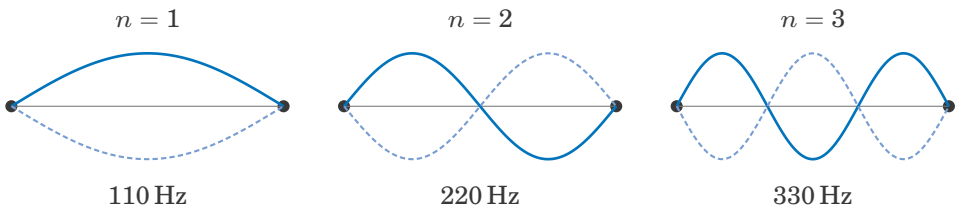


図 11　長さ 0.65 m、基本の周波数 110 Hz の弦（ギターの 5 弦）の、1 つずつのゆれ方。点線は半周期後の形。n 番めは、基本の n 倍の周波数でゆれる。

n 番めのゆれは、角周波数 $\frac{n\pi c}{L}$ でゆれます。周波数（1 秒の回数）は、それを 2π でわって

$$f_n = \frac{n\pi c}{L} \div 2\pi = \frac{nc}{2L}$$

です（ここの f_n は周波数〔Hz〕で、関数の f ではありません）。高校の物理で習う弦の固有振動数 $f_n = \frac{nv}{2L}$ は、この式です。波動方程式を変数分離すると、自然に出てくるのです。

ギターの 5 弦（ラの音）は、ふつう 110 Hz にあわせます。弦の長さを 0.65 m とすると、$f_1 = \frac{c}{2L}$ から $c = 2Lf_1 = 2 \times 0.65 \times 110 = 143\,\mathrm{m/s}$ です。$n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ の成分は 220 Hz、330 Hz、440 Hz、…で、すべて 110 Hz のちょうど整数倍です。

弦の音のスペクトルが「基本の 2 倍・3 倍・4 倍…」に線が並ぶ形になるのは、このためです（③）。基本の周波数の 2 倍・3 倍…（整数倍）の成分を**倍音**（ば

いおん）といいます（9-0 と同じ言い方）。どの倍音がどれだけ強いか（b_n）は、弦をはじく場所や、はじき方で変わり、それが音色のちがいになります。

せいかくに言うと

フーリエ級数が使えるための条件と、定数を負にするわけ

（1）1 周期の中で、とびや山・谷の数が限りある（無限にふるえたりしない）なら、フーリエ級数は、なめらかな所では $f(t)$ に、とびの所では左右の値の平均に近づきます（ディリクレの条件。証明は専門書で）。ただし、とびのそばには約 9% の山（ギブズ現象）が残ります。

（2）変数分離で、定数を $+\mu$（正）とすると、$X'' = \mu X$ の答えは $e^{\sqrt{\mu}x}$ と $e^{-\sqrt{\mu}x}$ の和で（6-11 の cosh のなかま）、両はしで 0 にするには、全体が 0 しかありません。定数が 0 なら $X'' = 0$ で直線になり、これも両はし 0 なら全体が 0 です。両はし 0 の答えが 0 でなく出るのは、定数が負のときだけです。だから $-\lambda$（$\lambda > 0$）とおきました。

この章で出てきたことば

方形波　高さの決まった 2 つの値を、同じ時間ずつ交互にくり返す四角い波。

フーリエ級数　くり返す波を、$\cos n\omega_0 t$・$\sin n\omega_0 t$ の和で書いたもの。

フーリエ係数　フーリエ級数の a_n・b_n。「かけて平均の 2 倍」で求める。

基本波・高調波　$n = 1$ の成分が基本波、$n \geqq 2$ の成分が高調波。

基本角周波数　周期 T の波で、$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$。1 周期で角が 2π 進む。

スペクトル　成分の大きさを、番号（周波数）ごとに並べた棒グラフ。

ギブズ現象　とびのそばに、約 9% の行きすぎの山が残ること。

変数分離法　答えを $X(x)\,\Theta(t)$ のように 1 つの変数だけの関数のかけ算とおき、式を分けて解く方法。

倍音　弦や管の音にふくまれる、基本の周波数の 2 倍・3 倍…（整数倍）の成分。

記号カード　初めて出た章 9-1

$a_n \cdot b_n$

読み方　エー・エヌ、ビー・エヌ
意味　フーリエ係数。$\cos n\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t$ を何倍してたすか。「かけて平均の 2 倍」という操作の名前
英語　Fourier coefficients

記号カード　初めて出た章 9-1

ω_0

読み方　オメガ・ゼロ
意味　基本角周波数 $\frac{2\pi}{T}$〔rad/s〕。n 番めの成分は $n\omega_0$。6-12 の ω_n とは別
英語　fundamental angular frequency

たいせつ

フーリエ級数

周期 T でくり返す波は、$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ として

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

と書ける。$\frac{a_0}{2}$ は平均（直流分）。とびの所では、左右の値の平均を通る。

係数は名前。ふつうの定積分に直して求める

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

a_n は sin を cos にかえる。$n = 0$ にも使える。1 周期なら、どこからでもよい。

名前　記号を読む：どの波 f・周期 T・どの係数か

楽をする　計算の前に：式がなく、はかった値だけ（I）？ 0〜L だけの形（E）？ 周期が 2π でない（F）？

直す：ふつうの定積分　区間ごとに一定（B）は区間に分けて、1 次式（C）は部分積分で

この章で使った場合（表 9-2 の一部）

記号	こんなとき	直し方
I	はかった値だけ	表計算で「値× $\sin n\omega_0 t$」の平均の 2 倍
E	0 から L だけの形	原点で半回転して広げ、sin だけにする
F	周期が 2π でない	$\theta = \omega_0 t$ で周期 2π にもどす
B	区間ごとに一定	区間に分けて定積分。$\cos n\pi = (-1)^n$
C	区間ごとに 1 次式	部分積分

分けて解いて、たし直す

熱方程式・波動方程式は、$\sin\frac{n\pi x}{L}$ の形に分けると、熱は $e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}$ で小さくなり、弦は $\cos\frac{n\pi ct}{L}$ でゆれる（周波数 $\frac{nc}{2L}$）。たし直せば答え。

例題でたしかめよう

係数を求める例題（2〜7）では、「考え方」の 1 行めに、9-2 の場合分けの表 9-2 のどの場合かを書きました（この章では、⑥の 5 つを使います）。2 つの場合を書いたものは、左の場合で形を楽なものに直してから、右の場合で計算します（例題と場合の一覧は、例題 1 のあとの表）。

例題 1　方形波の級数を計算する

高さ 1 の方形波の級数 $\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right)$ を、3 つめの項（$\frac{1}{5}\sin 5t$）までででやめて、$t=\frac{\pi}{2}$ と $t=\frac{\pi}{6}$ での値を求めましょう。

考え方　係数はもうわかっているので、表 9-2 は使わない。たし算だけ。

名前　$\sum$ は「限りなくたす」という名前。ここでは 3 つでやめてたす（とちゅうまでの和）。

式　$t=\frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{\pi}{2}=1$、$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$、$\sin\frac{5\pi}{2}=1$

かっこの中は $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=0.8667$

$\frac{4}{\pi}\times 0.8667=1.2732\times 0.8667\approx 1.103$

$t=\frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{6}=0.5$、$\sin\frac{\pi}{2}=1$、$\sin\frac{5\pi}{6}=0.5$

かっこの中は $0.5+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{5}\times 0.5=0.9333$

$1.2732\times 0.9333\approx 1.188$

答え　$t=\frac{\pi}{2}$ で約 1.103、$t=\frac{\pi}{6}$ で約 1.188（本当の値 1 のまわりを上下する）

じぶんでとこう 1

同じ級数を 3 つめの項まででやめて、$t = \frac{\pi}{4}$ と $t = \frac{\pi}{3}$ での値を求めましょう（$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = 0.7071$、$\sin\frac{5\pi}{4} = -0.7071$、$\sin\frac{\pi}{3} = 0.8660$、$\sin\pi = 0$、$\sin\frac{5\pi}{3} = -0.8660$）。

例題	題	どこを見て決めたか	場合
2	0 と 1 をくり返す信号	区間ごとに一定（1 と 0）	B
3	0 から 2π ののこぎり波	区間ごとに 1 次式（$f = t$）	C
4	1 kHz の信号の成分	周期が 2π でない→区間ごとに一定	F B
5	12 個のデータ	式がなく、はかった値だけ	I
6・7	棒のまん中の温度	0 から L だけ→区間ごとに一定	E B
1・8・9	級数の計算・倍音・$\frac{\pi}{4}$	係数は求めない（たすだけ）	なし

表 8　例題と、表 9-2 の場合。9-2 の流れ図でたどっても、同じ場合に着く。

コラム　フーリエと熱の解析的理論

フランスのフーリエ（1768～1830 年）は、県知事をつとめながら熱の伝わり方を研究し、1807 年 12 月、どんな形の温度も sin と cos のたし算で書けると、パリの学士院で発表しました。審査をしたラグランジュやラプラスは、とびのある形まで書けるという考えに反対しましたが、フーリエは研究を続け、1822 年に『熱の解析的理論』をまとめました（6-3 のコラム）。例題 6・7 の棒は、フーリエが解いた問題そのものです。

例題 2　0 と 1 をくり返す信号

$0 < t < \pi$ で 1、$\pi < t < 2\pi$ で 0 をくり返す信号（周期 2π）のフーリエ係数 a_0、a_n、b_n を求め、フーリエ級数で書きましょう。

考え方　**場合**：区間ごとに一定（表 9-2 の **B**）

名前　$a_n \cdot b_n$：1 周期で f に $\cos nt \cdot \sin nt$ をかけてたし、$\frac{1}{\pi}$ 倍（$T = 2\pi$）。

直す：ふつうの定積分　$\pi < t < 2\pi$ では $f = 0$ なので、積分は 0 から π だけ残る。

式　$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$　だから $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$（平均）

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = 0 \quad (\sin n\pi = 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

n が奇数なら $\frac{2}{n\pi}$、偶数なら 0

答え　$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$、$a_n = 0$、$b_n = \frac{2}{n\pi}$（奇数）・0（偶数）。

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$$

じぶんでとこう 2

$0 < t < \pi$ で 5、$\pi < t < 2\pi$ で 0 をくり返す信号（周期 2π）のフーリエ係数を求め、フーリエ級数で書きましょう。

例題 3　0 から 2π ののこぎり波

$0 < t < 2\pi$ で $f(t) = t$ をくり返すのこぎり波（周期 2π）の、フーリエ係数を求めましょう。

考え方　**場合：**区間ごとに 1 次式（表 9-2 の C）

名前　a_n・b_n：1 周期（0 から 2π）で t に $\cos nt$・$\sin nt$ をかけてたし、$\frac{1}{\pi}$ 倍。

直す：ふつうの定積分　$t \times \cos nt$・$t \times \sin nt$ は部分積分（⑦と同じく、t を微分する側に）。

式　$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times 2\pi^2 = 2\pi$　だから $\frac{a_0}{2} = \pi$

$$\int_0^{2\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0$$

（$\sin 2n\pi = 0$、$\cos 2n\pi = \cos 0 = 1$）だから $a_n = 0$

$$\int_0^{2\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2\pi\times 1}{n} + 0 = -\frac{2\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \times \left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\frac{2}{n}$$

答え　$\frac{a_0}{2} = \pi$、$a_n = 0$、$b_n = -\frac{2}{n}$。

$$f(t) = \pi - 2\left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\right)$$

じぶんでとこう 3

$0 < t < 2\pi$ で $f(t) = 2t$ をくり返すのこぎり波の、フーリエ係数を求めましょう。

例題 4　1 kHz の信号の成分

マイコンが、0 V と 5 V を、1 秒に 1000 回（1 kHz）同じ時間ずつ交互に出しています（1 周期の前半が 5 V）。この信号の平均（直流分）と、1 kHz・3 kHz・5 kHz の成分の大きさ（係数）を求めましょう。

考え方　**場合：**周期が 2π でなく、区間ごとに一定（表 9-2 の F と B）

名前　$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$ など。$T = 0.001\,\mathrm{s}$。

楽をする　$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2000\pi\,\mathrm{rad/s}$。$\theta = \omega_0 t$ とおくと、t が 0 から T のとき θ は 0 から 2π。

直す：ふつうの定積分　θ で見ると、$0 < \theta < \pi$ で 5、$\pi < \theta < 2\pi$ で 0 の、周期 2π の波。

式　$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\omega_0}$ なので、$\frac{2}{T}\int_0^T \cdots \mathrm{d}t = \frac{2}{T\omega_0}\int_0^{2\pi} \cdots \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cdots \mathrm{d}\theta$

（$T\omega_0 = 2\pi$）。周期 2π のときと同じ式になる

例題 2 の信号の 5 倍なので、$\frac{a_0}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$、$a_n = 0$、

$b_n = 5 \times \frac{2}{n\pi} = \frac{10}{n\pi}$（奇数）

$n = 1$（1 kHz）：$\frac{10}{\pi} \approx 3.18$、$n = 3$（3 kHz）：$\frac{10}{3\pi} \approx 1.06$

$n = 5$（5 kHz）：$\frac{10}{5\pi} \approx 0.64$

答え　平均 2.5 V、1 kHz：約 3.18 V、3 kHz：約 1.06 V、5 kHz：約 0.64 V（2 kHz などの偶数倍は 0）

じぶんでとこう 4

0 V と 3.3 V を、1 秒に 2000 回（2 kHz）同じ時間ずつ交互に出す信号（前半が 3.3 V）の、平均と、2 kHz・6 kHz・10 kHz の成分の大きさを求めましょう。

例題 5　12 個のデータから係数を求める

高さ 1 の方形波を、1 周期で 12 回、15°、45°、75°、…、345°（30° ごと）ではかりました。値は、15° から 165° の 6 つが 1、195° から 345° の 6 つが -1 です。$\sin t$ の係数 b_1 の近い値を、「かけて平均の 2 倍」で求めましょう。

考え方　**場合：**データだけ（表 9-2 の **I**）

名前　$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin t \, \mathrm{d}t$。式がないので、積分はできない。

楽をする　12 個の「値$\times \sin t$」の平均を 2 倍する（⑤の表計算と同じ）。

式　$\sin 15° = 0.2588$、$\sin 45° = 0.7071$、$\sin 75° = 0.9659$、
$\sin 105° = 0.9659$、$\sin 135° = 0.7071$、$\sin 165° = 0.2588$

前半の 6 つの和：$1 \times (0.2588 + 0.7071 + 0.9659) \times 2 = 3.8637$

後半は $f = -1$、sin も負（$\sin 195° = -0.2588$ など）なので、積は前半と同じ

後半の 6 つの和も 3.8637

平均：$\frac{3.8637 \times 2}{12} = 0.6440$、2 倍して 1.288

答え　$b_1 \approx 1.288$（本当の値 $\frac{4}{\pi} \approx 1.273$。36 個なら 1.275）

じぶんでとこう 5

例題 5 と同じ 12 個のデータから、$\sin 3t$ の係数 b_3 の近い値を求めましょう（$\sin 3t$ の値は、$t = 15°$、$45°$、$75°$、…、$345°$ の順に 0.7071、0.7071、-0.7071、-0.7071、0.7071、0.7071、-0.7071、-0.7071、0.7071、0.7071、-0.7071、-0.7071）。

例題 6　棒のまん中の温度

⑧の棒（$L = 0.1\,\mathrm{m}$、$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$、はじめどこも 100℃、両はし 0℃）で、10 秒後のまん中の温度を、級数の 1 項めと 2 項め（$n = 1$、3）で求めましょう。

考え方　**場合：**0 から L だけの形で、区間ごとに一定（表 9-2 の E と B）

名前　はじめの形の係数 b_n：$\sin\frac{n\pi x}{L}$ を何倍してたすか。

楽をする　原点で半回転して広げると、周期 $2L$、高さ 100 の方形波（図 9）。

直す：ふつうの定積分　方形波の係数（⑤）を 100 倍して、$b_n = \frac{400}{n\pi}$（奇数）。

式　$n = 1$：$\alpha(\frac{\pi}{L})^2 = 0.0987$、$e^{-0.0987\times 10} = e^{-0.987} = 0.3727$

$$\frac{400}{\pi} \times 0.3727 \times \sin\frac{\pi}{2} = 127.32 \times 0.3727 \approx 47.45$$

$n = 3$：$e^{-0.888\times 10} = e^{-8.88} = 0.000139$

$$\frac{400}{3\pi} \times 0.000139 \times \sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 42.44 \times 0.000139 \times (-1) \approx -0.006$$

合計 $47.45 - 0.006 \approx 47.45$

答え　約 47.45℃（2 項めは −0.006℃ で、1 項めだけでほぼ同じ）

じぶんでとこう 6

同じ棒で、20 秒後のまん中の温度を、級数の 1 項めと 2 項めで求めましょう（$e^{-1.974} = 0.1389$、$e^{-17.77} \approx 1.9 \times 10^{-8}$）。

例題 7　まん中が 50 ℃になる時刻

同じ棒のまん中が 50 ℃になるのは何秒後か、級数の 1 項めだけで求めましょう。

考え方　**場合：**0 から L だけの形で、区間ごとに一定（表 9-2 の E と B）

名前　まん中の温度 $\sum b_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin\frac{n\pi}{2}$。

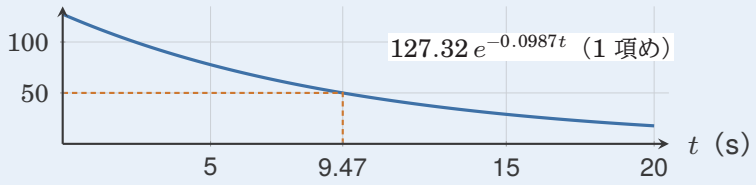
楽をする　$b_n = \frac{400}{n\pi}$（例題 6 と同じ）。5 秒をすぎると 2 項め以下はとても小さいので、1 項めだけにする。

式　$127.32\, e^{-0.0987t} = 50$

$$e^{-0.0987t} = \frac{50}{127.32} = 0.3927$$

$$-0.0987t = \ln 0.3927 = -0.9347$$

$$t = \frac{0.9347}{0.0987} \approx 9.47$$



1 項めのグラフが 50 ℃の線と交わる時刻が答え

答え　約 9.47 秒後（8-13 の表計算では 9.50 秒）

じぶんでとこう 7

同じ棒のまん中が 25 ℃になるのは何秒後か、1 項めだけで求めましょう（$\ln\frac{25}{127.32} = -1.628$）。

例題 8　ギターの弦の倍音

ギターの 5 弦は、長さ 0.65 m で、基本の周波数 110 Hz です。(1) 弦を伝わる波の速さ c、(2) 3 番めの倍音の周波数、(3) 弦のまん中をおさえて長さを半分にしたときの基本の周波数を求めましょう。

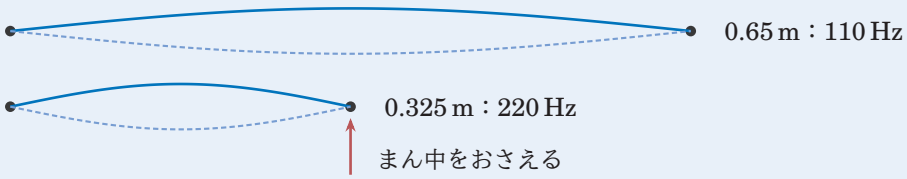
考え方　係数は求めないので、表 9-2 は使わない。⑨の $f_n = \frac{nc}{2L}$ を使う。

名前　$y = \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}$：$n$ 番めは周波数 $\frac{nc}{2L}$ でゆれる。

式　(1) $f_1 = \frac{c}{2L}$ から $c = 2Lf_1 = 2 \times 0.65 \times 110 = 143$

(2) $f_3 = 3 \times \frac{c}{2L} = 3 \times 110 = 330$

(3) $L = 0.325$ m で、$f_1 = \frac{143}{2\times 0.325} = 220$



答え　(1) 143 m/s　(2) 330 Hz　(3) 220 Hz（長さが半分で、周波数は 2 倍：1 オクターブ上）

じぶんでとこう 8

ギターの 6 弦は、長さ 0.65 m で、基本の周波数がおよそ 82 Hz です。(1) 弦を伝わる波の速さ c、(2) 3 番めの倍音の周波数、(3) 長さを半分にしたときの基本の周波数を求めましょう。

1

例題 9　級数から $\frac{\pi}{4}$ を求める

高さ 1 の方形波の級数 $\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right)$ は、$0<t<\pi$ で 1 になります。$t=\frac{\pi}{2}$ を入れて、$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ の値を求めましょう。

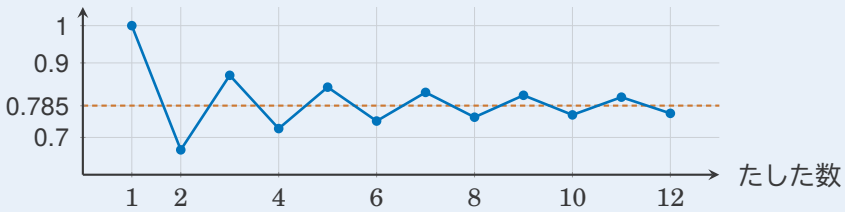
考え方　係数はわかっているので、表 9-2 は使わない。値のわかっている点を入れる。

名前　$\sum$ は限りなくたす名前。ここでは $t=\frac{\pi}{2}$ で、左辺の値 1 と等しいとおく。

式　$\sin\frac{n\pi}{2}$ は、$n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ で $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

両辺に $\frac{\pi}{4}$ をかける：$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$



左辺を、たす数をふやしながら計算すると、上の図のように上下しながら 0.785（点線）に近づく

答え　$\frac{\pi}{4}\approx 0.785$

級数に定数の項（$\frac{a_0}{2}$）があるときは、t を入れたあと、先に両辺から定数の項をひいてから、残りの $\sum$ の部分を求めます。

じぶんでとこう 9

例題 2 の信号の級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right)$ は、$0<t<\pi$ で 1 です。$t=\frac{\pi}{2}$ を入れて、$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$ の値を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 係数の名前 b_n を、そのまま値と思う

✕ b_n は「n 番めの点での f の値」

○ b_n は「$\sin n\omega_0 t$ をかけて平均の 2 倍」という操作の名前

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

b_n は、1 周期ぜんぶの f の値を使って決まる数です。1 か所の値ではありません。

まちがえやすいところ

② 平均を a_0 とする

✕ 例題 2 の信号の定数の項は $a_0 = 1$

○ 定数の項は $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

a_0 は平均の 2 倍です。a_n の式を $n = 0$ にも使えるように、$\frac{1}{2}$ をつけて書く約束でした。

まちがえやすいところ

③ $\frac{1}{n}$ をつけ忘れる

✕ $\int_0^\pi \sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\cos nt\right]_0^\pi$

○ $\int_0^\pi \sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi$

$-\cos nt$ を微分すると $n\sin nt$ です。n でわっておかないと、n 倍ずれます（5-15）。

⚠ まちがえやすいところ

④ $\cos n\pi$ をいつも -1 にする

✕ $\cos n\pi = -1$

○ $\cos n\pi = (-1)^n$（偶数なら 1）

$\cos \pi = -1$ ですが、$\cos 2\pi = 1$ です。方形波の偶数番が 0 になるのは、このためです。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ たくさんたせば、角の山は消える

✕ 1000 個たせば、山はなくなる

○ 山の高さは約 1.179 のままたす数をふやすと、山は角に近づき、はばはせまくなりますが、高さは下がりません（ギブズ現象）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $n\omega_0$ を ω_n と書く

✕ 3 番めの成分の角周波数は ω_3

○ $3\omega_0$（基本の 3 倍）

ω_n は 6-12 の固有角振動数で、別のものです。番号は ω_0 の前にかけます。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 熱の式の T を周期と読む

✕ $T(x,\ t)$ の T は周期

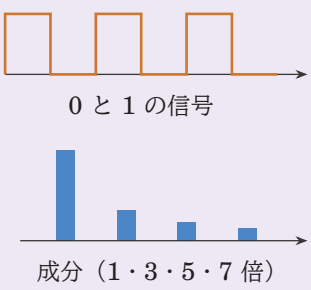
○ 熱の節の T は温度〔℃〕

熱や弦の節では、周期を使わず、棒の長さ L と $\sin \frac{n\pi x}{L}$ で書きました。

物理・工学ではこう使う

デジタル回路の信号と、雑音

コンピュータの中では、0 と 1 の信号が、1 秒に何億回も切りかわっています。例題 4 のように、方形波に近い信号は、基本の周波数の 3 倍・5 倍・7 倍…の成分をふくみます。この高い成分が電線から電波として出ると、ほかの機械の雑音になります。電子機器の設計では、信号のスペクトルを調べ、高い成分を小さくする工夫をしています。

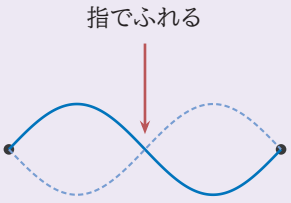


電気のひずみ

コンセントの電気（50 Hz・60 Hz）から、とぎれとぎれに電流をとる電気製品があると、電流の形がくずれ（ひずみ）、150 Hz・250 Hz などの高調波がふくまれます。高調波は変圧器などを熱くするので、量をフーリエ係数で表して管理します（9-2）。

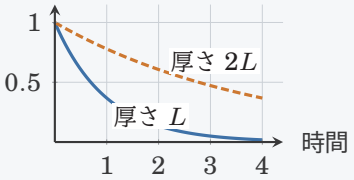
弦楽器のハーモニクス

ギターの弦のまん中に指を軽くふれてはじくと、1 オクターブ高い、すんだ音が出ます（ハーモニクス）。まん中がゆれない $n = 2, 4, \cdots$ のゆれ（図 11 の $n = 2$）だけが残り、まん中がゆれる $n = 1, 3, \cdots$ は指で止められるからです。いちばん低い成分は $n = 2$ の 220 Hz です。



コラム　焼き入れした部品の冷え方

鉄の部品を熱してから水や油で急に冷やす「焼き入れ」では、中心の冷える速さで、かたさが変わります。⑧と同じく、少し時間がたつと 1 項めだけで冷え方がわかります。厚さが 2 倍なら、冷える時間はおよそ 4 倍です（$e^{-\alpha(\pi/L)^2 t}$ の L^2。右の図）。くわしくは物理シリーズ（熱-11）で。



中心の温度（1 項め）。$2L$ は 4 倍ゆっくり

章末問題

9-1 のまとめ

基本 ★★★★

1 高さ 1 の方形波の級数を、4 つめの項（$\frac{1}{7}\sin 7t$）まででやめて、$t=\frac{\pi}{2}$ での値を求めましょう（例題 1）。

2 $0<t<\pi$ で 2、$\pi<t<2\pi$ で 0 をくり返す信号（周期 2π）のフーリエ係数を求め、フーリエ級数で書きましょう（例題 2）。

3 $0<t<2\pi$ で $f(t)=\frac{t}{2}$ をくり返すのこぎり波の、フーリエ係数を求めましょう（例題 3）。

4 0 V と 10 V を、1 秒に 50 回（50 Hz）同じ時間ずつ交互にくり返す電圧（前半が 10 V）の、平均と、50 Hz・150 Hz・250 Hz の成分の大きさを求めましょう（例題 4）。

5 ⑧の棒で、15 秒後のまん中の温度を、級数の 1 項めと 2 項めで求めましょう（$e^{-1.480}=0.2275$、$e^{-13.32}\approx 1.6\times 10^{-6}$）（例題 6）。

6 長さ 0.65 m の弦を伝わる波の速さが 143 m/s のとき、(1) 4 番めの倍音の周波数、(2) 長さを 0.5 m にしたときの基本の周波数を求めましょう（例題 8）。

チャレンジ ★★★★★

7 ⑧の棒のまん中が 30℃になるのは何秒後か、1 項めだけで求めましょう（$\ln \frac{30}{127.32} = -1.446$）（例題 7）。

8 $0 < t < \pi$ で 1、$\pi < t < 2\pi$ で 0 の信号（例題 2）を、15°、45°、…、345° の 12 か所ではかりました。b_1 の近い値を「かけて平均の 2 倍」で求め、本当の値 $\frac{2}{\pi}$ とくらべましょう（例題 5）。

9 ⑧の棒の答えに $t = 0$、$x = \frac{L}{2}$ を入れると、左辺は 100℃です。このことから、$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の値を求めましょう（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ sin の波をたして方形波に近づくのを表計算で確かめ、スペクトルを読める。 → 44 ページ
- ☐ フーリエ級数の形を書き、方形波・のこぎり波の係数を、ふつうの定積分で求められる。 → 47 ページ
- ☐ 棒の熱と弦のゆれを、変数分離とフーリエ級数で解ける。 → 56 ページ

ソラ

かけて平均の 2 倍で、成分が取り出せた。どうしてほかの成分はきれいに 0 になるんだろう。次の 9-2 で、そのしくみ（直交性）を確かめよう。

第 1 部　フーリエ解析

★★★★★

9-2 成分の取り出し方：直交性

道しるべ　この章の前に 4-9 4-12 5-11 5-15 5-16 8-6 9-1　この章の先に 9-3 9-4

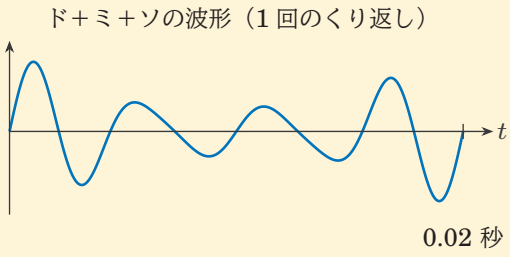
この章でできるようになること

- ★★★ ちがう周波数の sin どうしをかけて 1 周期でたすと 0 になることを、表計算とグラフで確かめられる。
- ★★★★ 直交性を使って、フーリエ係数が「かけて平均の 2 倍」で取り出せるわけを説明できる。
- ★★★★★ 場合分けの表 9-2 と流れ図で、波の形に合った楽な求め方を選び、係数を計算できる。

? はてな？

ピアノでド・ミ・ソを同時にならすと、3 つの音の波が重なって、図の波形のように、1 つの波形になります。マイクがひろうのは、この重なった波だけです。

この波形から、ミの音の大きさだけを取り出すには、どんな計算をすればよいでしょう。



9-1 で、フーリエ係数は「$\sin n\omega_0 t$（または $\cos n\omega_0 t$）をかけて、1 周期で平均し、2 倍する」と求まることを、表計算で見つけました。方形波に $\sin t$ をかけると正の値がたまり、$\sin 2t$ をかけると 0 になりました。でも、なぜほかの成分

は**ぴったり** 0 になるのでしょう。それがわかれば、はてな？ のように、重なった波から、ほしい成分だけを取り出せます。

この章の主役は「**直交**（ちょっこう）」ということばです。4-12 で、2 つの矢印の内積が 0 のとき「直交している」といいました。4-12 の最後には、「第 9 巻では、sin や cos の波どうしの『直交』を使って、複雑な波を単純な波に分けます。その計算の中心にあるのも、この『内積が 0』という考えです」と書きました。この章で、その意味がわかります。

そして後半では、係数の求め方を、波の形ごとに「場合分けの表 9-2」と流れ図にまとめます。係数は名前で、実際の計算のしかたは、波の形によって楽な道があるのです。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 4-9 積を和に直す式：$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$ など。
- 4-12 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ が 0 なら、2 つの矢印は直交。$\vec{b}$ の向きの成分は $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ 倍。
- 5-15 $\cos nt$・$\sin nt$（$n \geqq 1$）を 1 周期で積分すると 0。
- 8-6 場合 G：グラフを折り返したり半回転したりして重なるなら、積分は 0 になったり 2 倍になったりする。
- 9-1 $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$ は「かけて平均の 2 倍」という名前。方形波は $\frac{4}{n\pi}$（奇数番）。

★★★★★の章ですが、目でわかる・手でわかるの段は、表計算と 4-9 の公式で読めます。式でわかるの段は、例題を流れ図でたどりながら、少しずつ進めば大丈夫です。

やってみよう　ちがう波をかけて、たしてみよう

表計算で、1 周期（0° から 360°）を 30° ごとの 12 か所に分け、$\sin t$ と $\sin 2t$ をかけてたします。

1. A2～A13 に 0, 30, …, 330、B2 に `=SIN(RADIANS(A2))`、C2 に `=SIN(2*RADIANS(A2))`。
2. D2 に `=B2*C2`、E2 に `=B2*B2` を入れ、13 行めまでコピーする。
3. 14 行めに、D 列と E 列の合計（`=SUM(D2:D13)` など）を出す。

	A	B	C	D	E
1	t（度）	$\sin t$	$\sin 2t$	$\sin t \sin 2t$	$\sin t \sin t$
2	0	0	0	0	0
3	30	0.5	0.866	0.433	0.25
4	60	0.866	0.866	0.75	0.75
5	90	1	0	0	1
6	120	0.866	−0.866	−0.75	0.75
7	150	0.5	−0.866	−0.433	0.25
8	180	0	0	0	0
9	210	−0.5	0.866	−0.433	0.25
10	240	−0.866	0.866	−0.75	0.75
11	270	−1	0	0	1
12	300	−0.866	−0.866	0.75	0.75
13	330	−0.5	−0.866	0.433	0.25
14	合計			ア	イ

表 1　D 列が「ちがう波どうしの積」、E 列が「同じ波どうしの積」。

アとイをうめよう。D 列と E 列で、合計はどうちがうかな？

D 列は、正の値（0.433、0.75）と負の値（−0.75、−0.433）が、同じ数ずつあります。たすと、ア＝ 0 です。E 列は 2 乗なので、どれも 0 以上です。

$0.25 + 0.75 + 1 + 0.75 + 0.25 = 3$　　E 列の 0° から 150°

$3 \times 2 = 6$　　イ：後半も同じ 6 つ

合計にきざみ（$30° = \frac{\pi}{6} = 0.5236$ ラジアン）をかけると、細い長方形の面積の合計（5-10）になり、定積分の近い値です。D 列は $0 \times 0.5236 = 0$、E 列は $6 \times 0.5236 = 3.1416$ で、これは π です。E 列の値は、定積分 $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$ の近い値ですが、じつはこの場合はぴったり π になります（②で確かめます）。

数学の道具

目でわかる ちがう波をかけると、打ち消す ★★★

1 かけ算のグラフを見る

やってみようの $\sin t \times \sin 2t$ と $\sin t \times \sin t$ を、なめらかなグラフにすると、図 1 のようになります。

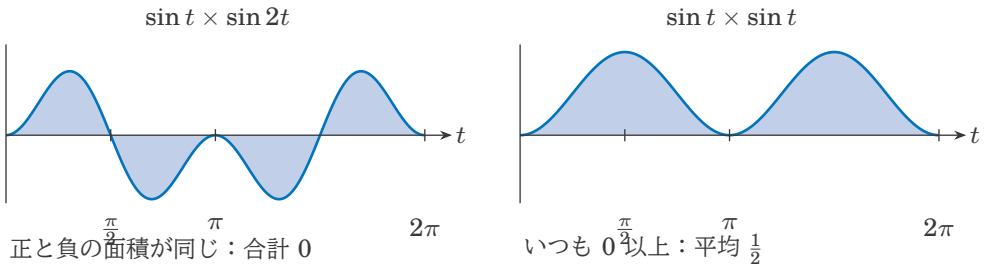


図 1　左：ちがう波どうしの積。0 から π の間でも、$\frac{\pi}{2}$ のまわりに半回転すると重なる形で、上と下の面積が打ち消す。右：同じ波どうしの積（$\sin^2 t$）。0 と 1 の間を 2 回ゆれ、平均は $\frac{1}{2}$。

左のグラフは、上と下に同じ形の山がならび、面積がちょうど打ち消し合います。たとえば 0 から π の部分は、点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ のまわりに半回転すると、もとのグ

ラフにぴったり重なります。上の山が下の谷にうつるので、面積の合計は 0 です。これは 8-6 の場合 G（「半回転すると重なるなら、積分は 0」）と同じ考えです。

右のグラフ $\sin^2 t$ は、負になりません。$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$（4-9 の 2 倍角の式）で、$\cos 2t$ の部分は 1 周期で打ち消すので、平均は $\frac{1}{2}$、1 周期（長さ 2π）の面積は $\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$ です。やってみようの E 列の「合計×きざみ」3.1416 と同じです。

ほかの組み合わせも調べる

同じように、いろいろな組み合わせで「1 周期の積分」を数値で調べると、次のようになります。

かけたもの	1 周期の積分	かけたもの	1 周期の積分
$\sin t \times \sin 2t$	0	$\sin t \times \sin t$	π
$\sin 2t \times \sin 3t$	0	$\sin 3t \times \sin 3t$	π
$\cos t \times \cos 3t$	0	$\cos 2t \times \cos 2t$	π
$\sin t \times \cos t$	0	$\sin 2t \times \cos 2t$	0

表 2　0 から 2π までの積分。ちがう番号どうし、sin と cos どうしは 0。同じ番号の sin どうし、cos どうしだけが π。

「同じ番号の、同じ種類（sin と sin、cos と cos）」のときだけ 0 でなく、ほかはすべて 0 になります。この性質が、成分を取り出すかぎです。

手でわかる　式で確かめ、成分を取り出す　★★★★

2 積を和に直して、積分する

表の結果を、式で確かめます。4-9 の積を和に直す式を使います（m、n は 1 以上の整数）。

$$\sin mt \sin nt = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)t - \cos(m+n)t\}$$ 4-9 の積和の式

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = \left[\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{2\pi} = 0$$ k が 0 でない整数なら（5-15）

$m \neq n$ のとき

$m-n$ も $m+n$ も 0 でない整数なので、2 つの cos の積分はどちらも 0 です。

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

$m = n$ のとき

$\cos(m-n)t = \cos 0 = 1$ になるので、1 つめの積分だけが残ります。

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nt \, dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1 \, dt - \int_0^{2\pi} \cos 2nt \, dt\right)$$ 積和で $m = n$

$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi$$ 1 を積分すると長さ 2π

cos どうし、sin と cos も、4-9 のほかの積和の式で同じように確かめられます（例題で使います）。まとめると、次のとおりです。

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt \, dt = 0 \quad （どんな\ m、n\ でも）$$

ちがう番号の波どうしをかけて 1 周期で積分すると、**ぴったり 0** になります。表計算で 0 になったのは、たまたまではありませんでした。

③ 関数の内積と、直交

4-12 では、矢印 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を $a_1b_1+a_2b_2$ と計算し、0 なら直交とよびました。成分が 3 つなら $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ です。

やってみようの表の B 列（$\sin t$ の 12 個の値）と C 列（$\sin 2t$ の 12 個の値）を、それぞれ「12 個の成分をもつベクトル」と考えてみます。

$$\vec{a}=(0,\ 0.5,\ 0.866,\ 1,\ \cdots,\ -0.5)$$

$$\vec{b}=(0,\ 0.866,\ 0.866,\ 0,\ \cdots,\ -0.866)$$

D 列は「成分どうしのかけ算」、その合計アは「内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$」そのものです。ア＝0 なので、この 2 つの 12 成分のベクトルは**直交**しています。

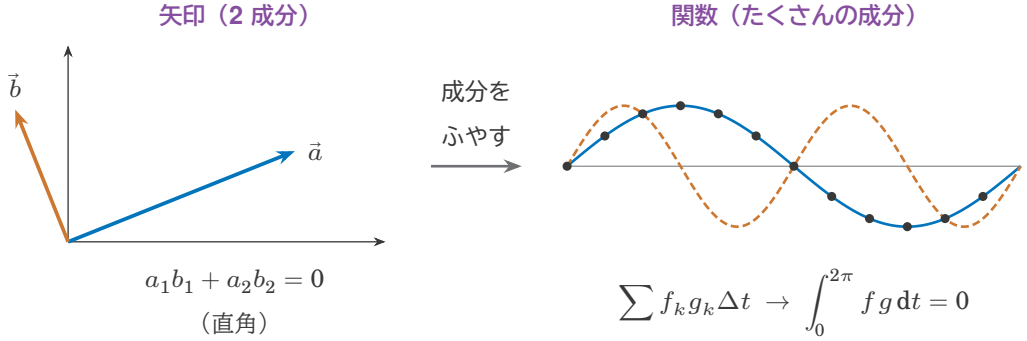


図 2　左：2 成分の矢印の内積。右：関数を「たくさんの点の値を並べたベクトル」と見ると、内積は「値どうしの積の合計」で、点を細かくした先は積の定積分になる。$\sin t$（青）と $\sin 2t$（オレンジの点線）は直交している。

点を細かくしていくと、「値どうしの積の合計×きざみ」は、積の定積分 $\int f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ に近づきます（5-10 の、細かく分けてたす考え）。そこで、1 周期の関数 f と g について

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$ を、f と g の**内積**とよぶ

ことにします。内積が 0 のとき、2 つの関数は**直交している**といいます。②の結果は、「ちがう番号の sin・cos はすべて直交している」ということです。この性質を、三角関数の**直交性**（ちょっこうせい）といいます。

ベクトルの「長さの 2 乗」は自分との内積（$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$）でした。関数でも同じように考えると、$\sin nt$ の「長さの 2 乗」は $\int_0^{2\pi} \sin^2 nt\,\mathrm{d}t = \pi$ です。

④ 成分を取り出す

4-12 では、矢印 $\vec{a}$ を、たがいに直交する 2 つの矢印 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ の和 $\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$ に分けるとき、係数は

$$c_1 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|^2}$$

で求まりました。両辺を $\vec{e}_1$ と内積すると、$\vec{e}_2$ の項が直交で消えて、$\vec{a}\cdot\vec{e}_1 = c_1|\vec{e}_1|^2$ だけが残るからです。フーリエ級数でも、まったく同じことをします。

sin だけでたした波の、b_3 を取り出す

たとえば、$f(t) = b_1\sin t + b_2\sin 2t + b_3\sin 3t + b_4\sin 4t + \cdots$ から、b_3 を取り出します。両辺に $\sin 3t$ をかけて、0 から 2π まで積分します。

$$\int_0^{2\pi} f\sin 3t\,\mathrm{d}t$$ 両辺に $\sin 3t$ をかけて積分

$$= b_1\int_0^{2\pi}\sin t\sin 3t\,\mathrm{d}t + b_2\int_0^{2\pi}\sin 2t\sin 3t\,\mathrm{d}t$$ b_1・b_2 の項

$$+b_3\int_0^{2\pi}\sin^2 3t\,\mathrm{d}t + b_4\int_0^{2\pi}\sin 4t\sin 3t\,\mathrm{d}t + \cdots$$ b_3・b_4…の項

$$= b_1\times 0 + b_2\times 0 + b_3\times\pi + b_4\times 0 + \cdots$$ ②の直交性

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin 3t\,\mathrm{d}t$$ 両辺を π でわる

b_3 以外の項は、直交性で 0 になって消えます。残った $b_3 \times \pi$ の π は、$\sin 3t$ の「長さの 2 乗」です。だから、ほかの番号でも同じで

$$b_n = \frac{f \text{ と } \sin nt \text{ の内積}}{\sin nt \text{ の長さの 2 乗}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

です。4-12 の $\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}}{|\vec{e}|^2}$ と同じ形になりました。9-1 の「かけて平均の 2 倍」の正体はこれです。平均は $\frac{1}{2\pi}\int$ なので、$\frac{1}{\pi}\int$ は、ちょうど平均の 2 倍です（「長さの 2 乗」π が、区間の長さ 2π の半分だから）。

重なった波 f → $\sin 3t$ をかける → 1 周期で積分 → $\div\pi$ で b_3

ほかの番号の成分は、ここで 0 になって消える（直交性）

図 3　成分を取り出す手順。かける波を $\sin nt$ にかえれば、どの番号の成分でも取り出せる。

はてな？ の答え

？はてな？ の波形を、計算しやすい数で考えます（本物のド・ミ・ソは約 262・330・392 Hz で、比がほぼ 4 : 5 : 6 です。ここでは同じ比の 200・250・300 Hz とし、大きさも作った数にします）。

$$f(t) = \sin(2\pi\times 200t) + 0.6\sin(2\pi\times 250t) + 0.3\sin(2\pi\times 300t)$$

200・250・300 Hz は、どれも 50 Hz の整数倍（4 倍・5 倍・6 倍）なので、f は $T = \frac{1}{50} = 0.02\,\mathrm{s}$ でくり返します。ミ（250 Hz）は 5 番めの成分です。ミの大きさを取り出すには、$\sin(2\pi\times 250t)$ をかけて、1 周期 0.02 秒で積分し、「長さの 2 乗」でわります。

$$\int_0^{0.02} \sin^2(2\pi\times 250t)\,\mathrm{d}t = \frac{0.02}{2} = 0.01 \qquad \text{長さの 2 乗は周期の半分}$$

$$\int_0^{0.02} f\sin(2\pi\times 250t)\,\mathrm{d}t = 0.6\times 0.01 \qquad \text{ド・ソの項は直交性で 0}$$

$$= 0.006 \qquad \text{かけ算}$$

$$\frac{0.006}{0.01} = 0.6 \qquad \text{長さの 2 乗でわる}$$

ミの大きさ 0.6 が、ほかの音にじゃまされずに取り出せました。**ほしい周波数の sin をかけて、1 周期で積分し、長さの 2 乗（周期の半分）でわる**。これが答えです。ドやソの大きさも、かける sin の周波数を 200 Hz・300 Hz にかえれば、同じように 1 と 0.3 が取り出せます。

①名前の段　係数は、操作の名前

ここで、名前と実際の操作を整理します。b_n は「f と $\sin n\omega_0 t$ の内積を、長さの 2 乗でわる」という**操作の名前**です。記号を見ただけでは数は出ません。

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

名前の段では、記号を読みます：**何に**（どの波 f）、**何をかけて**（$\sin n\omega_0 t$ か $\cos n\omega_0 t$）、**どこからどこまで**（1 周期）、**何倍するか**（$\frac{2}{T}$）。

②直す段　ふつうの定積分に直す

実際に数を出すには、f の式を入れて、ふつうの定積分を計算します。9-1 の方形波では、1 周期を 2 つの区間に分けて計算しました。どんな波でも、まずは「区間ごとに f の式を書き、それぞれ $\sin n\omega_0 t$ をかけて積分してたす」と考えれば、計算できます。

ここまでで十分

ちがう番号の sin・cos をかけて 1 周期で積分すると 0 になること（直交性）、それを使うと「かけて積分し、長さの 2 乗でわる」で成分が取り出せること。ここまでわかれば十分です。この先は、波の形ごとの楽な求め方（場合分けの表 9-2）です。

1

∂ 式でわかる　波の形ごとに、楽な求め方を選ぶ　★★★★★

5 周期 T の公式と、$\frac{2}{T}$・$\frac{a_0}{2}$ のわけ

周期が T の波では、$\sin n\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t$（$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$）が、0 から T までの 1 周期で直交します。②と同じ計算で、「長さの 2 乗」は周期の半分 $\frac{T}{2}$ になります（$\sin^2$ の平均が $\frac{1}{2}$ だから）。だから、係数は「内積÷ $\frac{T}{2}$」＝「内積× $\frac{2}{T}$」です。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \quad (n \geqq 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \quad (n \geqq 1)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$\frac{a_0}{2}$ の $\frac{1}{2}$ を、直交性で見る

定数の項は、「$\cos 0t = 1$ の成分」です。1 の「長さの 2 乗」は $\int_0^T 1^2\,\mathrm{d}t = T$ で、ほかの成分の $\frac{T}{2}$ の 2 倍です。だから、定数の項の正しい係数は「内積÷ T」です。

$$\text{定数の項} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\times 1\,\mathrm{d}t$$

内積÷長さの 2 乗 T

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 0t\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}$$

a_n の式を $n = 0$ で使った形の半分

a_n の式（÷ $\frac{T}{2}$）を $n = 0$ にもそのまま使うと、本当の値の 2 倍になってしまいます。それで $\frac{1}{2}$ をつけて $\frac{a_0}{2}$ と書くのです（9-1 の「平均の 2 倍が a_0」と同じことの、別の見方です）。

1 周期なら、どこからでもよい

f も sin・cos も周期 T でくり返すので、積分は $-\frac{T}{2}$ から $\frac{T}{2}$ でも同じです（9-1 ⑥）。$T=2\pi$ なら $\frac{2}{T}=\frac{1}{\pi}$ で、$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ の形もよく使います。

⑥ 場合分けの表 9-2 と流れ図

係数 a_n・b_n は名前です。実際の計算は「ふつうの定積分」ですが、波の形によっては、積分しなくてすんだり、半分の区間ですんだりします。そこで、「こんなときは、こう求める」を表にしました（記号 A〜I）。9-1 で使った B・C・E・F・I もここに入っています。

表の「手順」の頭の札は、どの道具を使うかを表します。ふつうの定積分 は直す段（ふつうの定積分で計算する）、楽をする は楽をする段（計算の前に、形を楽なものに直す・積分をしない）です。楽をする段の場合は、そのあと直す段の場合へ進むことがあります（流れ図の「下の問いへ」）。

流れ図の使い方

1. 名前の段：どの波 f か、周期 T、どの係数がほしいか（全部か、平均だけか）を書き出す。
2. 流れ図の上の問いから順に、「はい」か「いいえ」で答える。「はい」なら右の四角へ。
3. 「下の問いへ」と書いた四角に着いたら、矢印にそって左の列の問いへもどり、続ける。
4. 計算が終わったら、右の線をたどって「確かめ」をする。

1 回で全部の場合を覚えなくても大丈夫です。例題を解くたびに、表と流れ図にもどってきましょう。

場合分けの表 9-2　フーリエ係数：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき（見分け方）	手順	例題
I	式がなく、はかった値だけ	楽をする　積分しない。$\frac{2}{N}\sum f_k \sin n\omega_0 t_k$（「値× sin」の平均の 2 倍。$N$ はデータの数）	9
A	sin・cos の積や累乗の式（$\sin^3 t$、$\cos^2 t$ など）	楽をする　積分しない。4-9 の積和の式・2 倍角の式で和に直し、係数を読む	1
G	平均（直流分）$\frac{a_0}{2}$ だけほしい	楽をする　1 周期のグラフの面積÷ T	7
E	棒・弦のように、0 から L だけで決まる形	楽をする　原点で半回転した形に広げる。$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$。積分は B・C で	4・5
F	周期 T が 2π でない（50 Hz など）	楽をする　$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$、$\frac{2}{T}\int_0^T$ の式で。積分は D・B・C で	6
D	偶関数（たて軸で折り返して重なる）か奇関数（原点で半回転して重なる）	楽をする　偶なら $b_n = 0$、奇なら $a_n = 0$。残りは半周期の 2 倍 $\frac{4}{T}\int_0^{T/2}$	2・3・6
B	区間ごとに一定（方形波・パルス）	ふつうの定積分　区間に分けて定積分。$\sin n\pi = 0$、$\cos n\pi = (-1)^n$	2・6
C	区間ごとに 1 次式（のこぎり波・三角波）	ふつうの定積分　部分積分（5-16）。t を微分する側に	3・4・5
H	区間ごとに sin・cos（整流した波）	ふつうの定積分　積和の式で和に直してから定積分	8

楽をする段の札の場合（I・A・G・E・F・D）は、計算の前に形を楽なものに直します。E・F・D のあとは、直す段（B・C・H）で積分します。確かめのパーセバルの等式は⑪、9-3 では複素数の係数 c_n の行（J・J′）を足します。

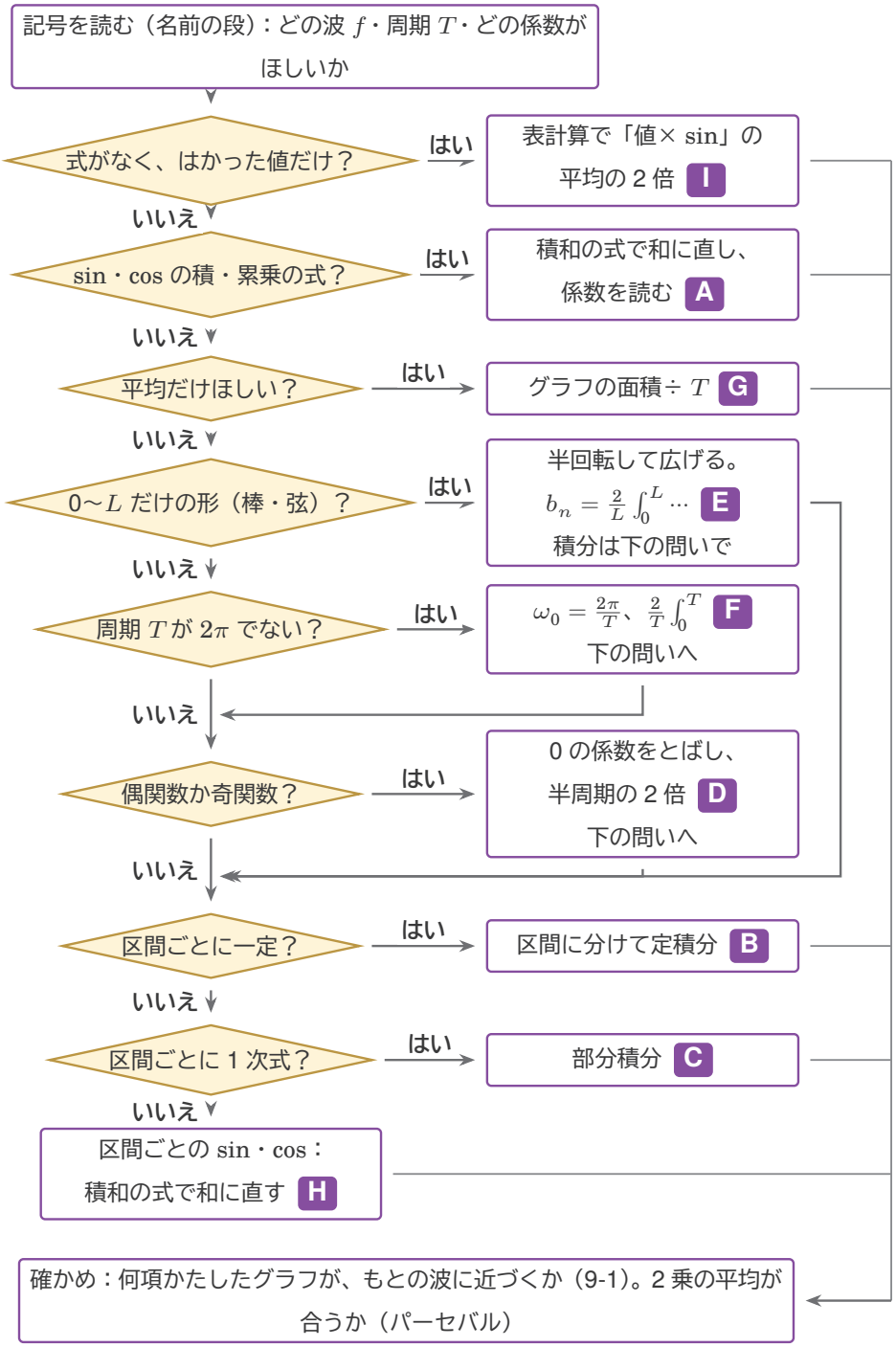


図 4 フーリエ係数の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 6 つ（I・A・G・E・F・D）が楽をする段、下の 3 つ（B・C・H）が直す段。F・D のあとは左の列の次の問いへ、E のあとは右の線をたどって「区間ごとに一定？」の問いへもどる。計算した四角からは、右はしの線をたどって最後の「確かめ」へ。

流れ図の使い方：9-1 の熱の棒

9-1 ⑧の「はじめどこも 100℃の棒」をたどります。

1. 名前の段：f は 0 から L で 100、ほしいのは $\sin\frac{n\pi x}{L}$ の係数 b_n。
2. 式がなく、はかった値だけ？ いいえ。sin・cos の積・累乗の式？ いいえ（定数 100）。平均だけ？ いいえ。
3. 0〜L だけの形？ はい → **E**：半回転して広げる。
   $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 100\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$ を求めればよい。
4. 右の線をたどって「区間ごとに一定？」へ。はい（0 から L で 100）→ **B**。

こうして 9-1 の例題 6・7 の「E と B」に着きます。

どの場合かな？

次の係数は、表 9-2 のどの場合でしょう。流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1. $\cos^2 t$ のフーリエ係数
   答え：**A**。$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ と書き直せる。
2. $-\pi < t < \pi$ で $f = |t|$ をくり返す三角波の a_n
   答え：**D**→**C**。偶関数で、区間ごとに 1 次式。
3. オシロスコープで 16 か所はかった電圧の波形の b_1
   答え：**I**。式がなく、はかった値だけ。
4. 長さ L の弦の、はじめの形（三角形）の b_n
   答え：**E**→**C**。0 から L だけの形で、区間ごとに 1 次式。

7 楽をする段①：積分しない（A・G・I）

③楽をする段　計算する前に、楽な道をさがす

流れ図の上の 6 つの問いは、③の**楽をする段**です。まず、積分そのものをしなくてすむ場合を見ます。

場合 A：公式で書き直して、係数を読む

f が、はじめから sin・cos の積や累乗の式で書いてあるなら、4-9 の公式で sin・cos の**和**に直すだけで、フーリエ級数の形になります。フーリエ級数の書き方は 1 通りしかない（せいかくに言うと）ので、和に直した式の係数が、そのままフーリエ係数です。たとえば、

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$$　　4-9 の 2 倍角の式

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{ほかは } 0$$　　係数を読む

積分 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos 2t \, \mathrm{d}t$ を計算しても $\frac{1}{2}$ になりますが、書き直すほうがずっと楽です。

場合 G：平均だけなら、面積÷周期

ほしいのが平均（直流分）$\frac{a_0}{2}$ だけなら、「1 周期のグラフの面積÷ T」です（9-1 ⑥）。面積がわかる形なら、積分の計算もいりません。たとえば、高さ 1 の方形波（1 と -1）は、上と下の面積が同じなので、平均は 0 です。

場合 I：式がなく、はかった値だけなら、表計算でたす

式がなく、1 周期の中で等間かくに N か所ではかった値 f_0、f_1、…、f_{N-1} しかないときは、積分のかわりに和を使います。1 周期で N 個の値の「値× $\sin n\omega_0 t_k$」の平均の 2 倍です。

$$b_n \approx \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin n\omega_0 t_k, \qquad a_n \approx \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos n\omega_0 t_k$$

9-1 ⑤の表計算は、この式で計算していました。じつは、等間かくの点でも、②の直交性は、点の数が十分あれば**ぴったり**なり立ちます（やってみようの 12 点で、ア＝ 0、イ＝ 6 ＝ $\frac{12}{2}$ でした）。この「とびとびの値のフーリエ係数」は、9-4 の DFT（離散フーリエ変換）につながります。

8 楽をする段②：偶関数・奇関数（D）

8-6 の場合 G では、「左右対称で x の奇関数なら 0」のように、形の対称性を使って積分を楽にしました。ここで、その形に正式に名前をつけます。

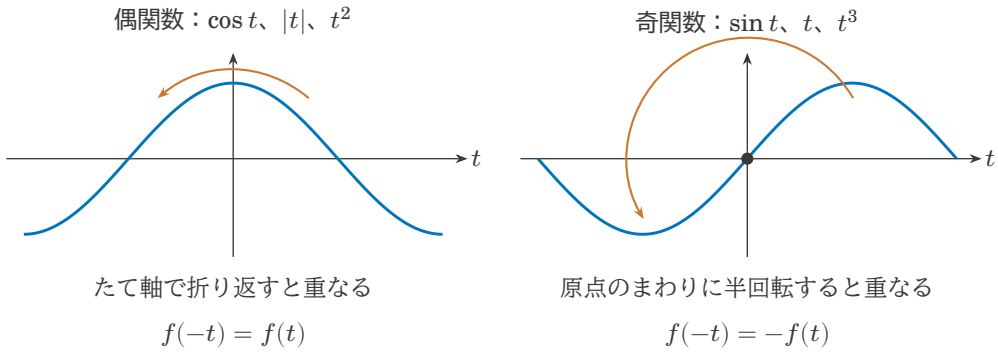


図 5　偶関数と奇関数。オレンジの矢印は、重ねるための動かし方。

すべての t で $f(-t) = f(t)$ となる関数を、**偶関数**（ぐうかんすう）といいます。また、$f(-t) = -f(t)$ となる関数を、**奇関数**（きかんすう）といいます。t^2、t^4 のように偶数乗は偶関数、t、t^3 のように奇数乗は奇関数なので、この名前がつきました。$\cos t$ は偶関数、$\sin t$ は奇関数です（4-8：$\cos(-t) = \cos t$、$\sin(-t) = -\sin t$）。

かけ算の決まりと、積分

f	g	$f \times g$	$-a$ から a までの積分
偶	偶	偶	0 から a の 2 倍
奇	奇	偶	0 から a の 2 倍
偶	奇	奇	0（左右で打ち消す）

表 3　符号のかけ算（＋×＋、－×－、＋×－）と同じ決まり。奇関数×奇関数は偶関数。

たとえば、f が偶関数なら、$f \times \sin nt$ は「偶×奇＝奇」なので、$-\pi$ から π の積分は 0、つまり $b_n = 0$ です。$f \times \cos nt$ は「偶×偶＝偶」なので、0 から π の積分の 2 倍になります。

$$\text{偶関数：} b_n = 0、\quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{奇関数：} a_n = 0、\quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$\frac{4}{T}$ は「$\frac{2}{T}$ の 2 倍」（半分の区間の 2 倍）です。計算しなくてよい係数がわかり、残りも半分の区間ですみます。

原点の置き方で、偶奇は変わる

同じ方形波でも、どこを $t = 0$ にするかで、奇関数にも偶関数にもなります（図 6）。9-1 の方形波（0 から π で 1）は奇関数で、sin だけでした。時間を $\frac{\pi}{2}$ ずらして、$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ で 1 にすると偶関数になり、cos だけになります（例題 2）。0 と 1 をくり返す信号（9-1 の例題 2）は、偶関数でも奇関数でもありません（平均 $\frac{1}{2}$ をひくと奇関数）。

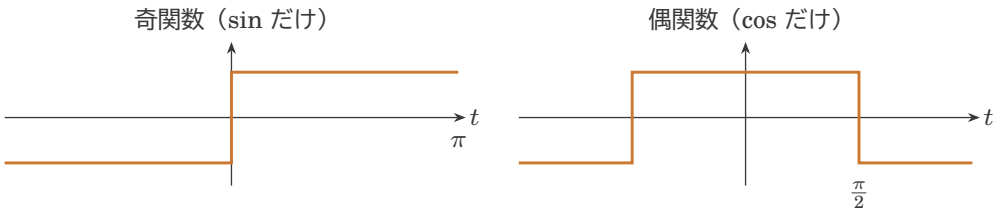


図 6 同じ方形波（周期 2π、たて軸は $t = 0$）。左は原点で半回転すると重なる奇関数、右は時間を $\frac{\pi}{2}$ ずらしたもので、たて軸で折り返すと重なる偶関数。

9 直す段：区間ごとの形（B・C・H）

② 直す段　ふつうの定積分に直す：区間ごとに式を書く

楽をする段で区間や係数をへらしたら、残りをふつうの定積分で計算します。f の形で、使う積分の道具が決まります。

場合 B：区間ごとに一定

$\cos n\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t$ そのものの定積分です（9-1 ⑤）。区間のはしで $\sin n\pi = 0$、$\cos n\pi = (-1)^n$ を使います。$\frac{\pi}{2}$ でくぎられる区間では、$\sin \frac{n\pi}{2}$ の値（$n = 1$、2、3、4 で 1、0、-1、0 をくり返す）も使います（例題 2）。

場合 C：区間ごとに 1 次式

$t\cos nt \cdot t\sin nt$ の形になるので、部分積分（5-16）で、t を微分する側にします（9-1 ⑦）。$-\pi < t < \pi$ で $f = |t|$ をくり返す**三角波**なら、偶関数（D）なので $b_n = 0$ で、a_n は 0 から π の 2 倍です。

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

D：半周期の 2 倍。0 から π では $|t| = t$

$$\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t\sin nt}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t$$

部分積分

$$= 0 - \frac{1}{n}\times\frac{1-\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$\sin n\pi = 0$、$\cos n\pi = (-1)^n$

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

$\frac{2}{\pi}$ をかける

n が奇数なら $(-1)^n - 1 = -2$ で $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$、偶数なら 0 です。平均は面積から $\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$（G）。

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \cdots\Big) \qquad (-\pi < t < \pi)$$

方形波の係数は $\frac{1}{n}$ で小さくなりましたが、三角波は $\frac{1}{n^2}$ で、ずっと速く小さくなります。三角波には「とび」がなく、角があるだけだからです。とびのある形ほど、高い番号の成分がたくさん必要になります。

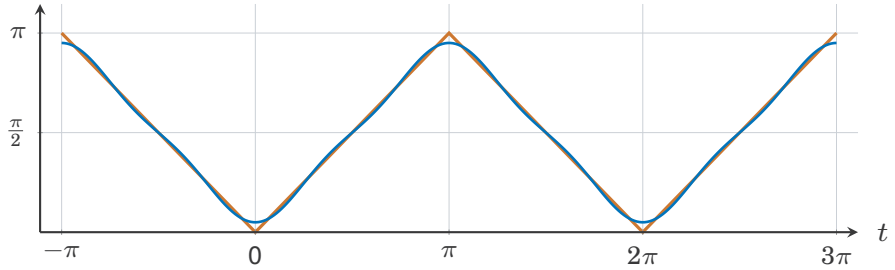


図 7 三角波（オレンジ）と、フーリエ級数の 2 項（$\cos t$ と $\cos 3t$）までの和（青）。2 項だけでも、かなりよく重なる。

場合 H：区間ごとに sin・cos

スマートフォンの充電器などの電源の中では、交流をダイオードに通して、片方の向きだけを通す「整流」をします。**半波整流**（はんぱせいりゅう）した波は、$0 < t < \pi$ で $\sin t$、$\pi < t < 2\pi$ で 0 です。係数の積分は $\int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, \mathrm{d}t$ のような形で、4-9 の積和の式

$$\sin t \cos nt = \frac{1}{2}\{\sin(1+n)t + \sin(1-n)t\}$$

で和に直してから積分します（例題 8）。

⑩ 棒と弦：半区間の展開（E）

9-1 で、0 から L だけで決まる温度を、外側へ原点で半回転した形に広げて、周期 $2L$ の方形波にしました。この方法を一般の形に使います。

$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L$ になるわけ

広げた形は、周期 $T = 2L$ の奇関数です。だから D で $a_n = 0$、b_n は半周期（0 から L）の積分の 2 倍です。$\omega_0 = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$ なので、

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f \sin n\omega_0 x \,\mathrm{d}x \qquad \text{D の式（奇関数）}$$

$$= \frac{4}{2L}\int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x \qquad T = 2L、\omega_0 = \tfrac{\pi}{L} \text{ を入れる}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x \qquad \tfrac{4}{2L} = \tfrac{2}{L}$$

です。これを**半区間の展開**（はんくかんのてんかい）といいます。外側の「見えない部分」は計算には出てきません。$\sin \frac{n\pi x}{L}$ は、どれも両はしで 0 なので、両はしを 0℃に保つ棒や、両はしを止めた弦に、ちょうど合う形です。

いろいろな初めの形

9-1 の棒（$L = 0.1\,\mathrm{m}$）で、はじめの温度が一様でない場合も、同じように係数が求まります（例題 4・じぶんでとこう 5）。

はじめの形	b_n	b_1	b_2	b_3
一様 100℃（9-1）	$\frac{400}{n\pi}$（奇数）	127.3	0	42.44
直線 $100\frac{x}{L}$（右はし 100）	$\frac{200(-1)^{n+1}}{n\pi}$	63.66	−31.83	21.22
三角形（まん中 100）	$\frac{800}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$	81.06	0	−9.006

表 4　はじめの温度の形と、半区間の展開の係数。とびのある形ほど、b_n がゆっくり小さくなる。

答えは、どれも 9-1 と同じく $T = \sum b_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$ です。b_n だけがちがいます。

弦をはじく場所と、倍音

ギターの弦（長さ L）のまん中を高さ h だけつまんではなすと、はじめの形は三角形で、$b_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$（例題 5）。$n$ が偶数なら $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ で、**偶数番の倍音（220 Hz・440 Hz…）が出ません**。まん中は、偶数番のゆれでは動かない点（節）だからです。はじく場所を、はしから $\frac{L}{5}$ にすると、b_n は $\sin\frac{n\pi}{5}$ に比例し、5 番め・10 番め…の倍音が消えます。ギターをはじく場所で音色が変わるのは、このためです。

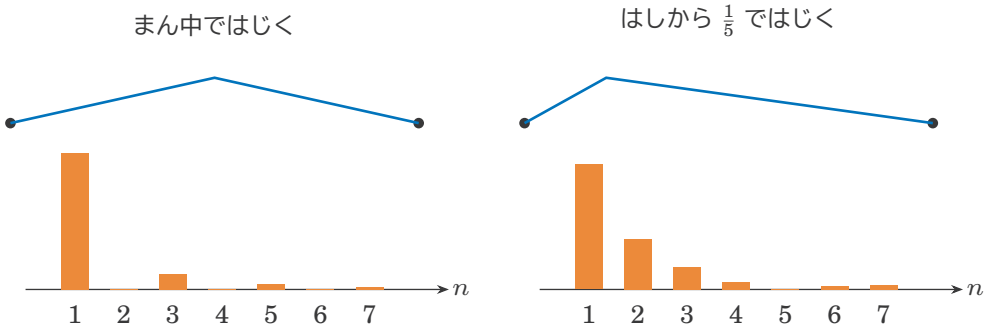


図 8 はじめの形と、係数の大きさ $|b_n|$ の棒グラフ（スペクトル）。まん中ではじくと偶数番が 0、はしから $\frac{1}{5}$ ではじくと 5 番めが 0。

11 パーセバルの等式：電力は成分ごとの和

直交性からは、もう 1 つ大事な式が出てきます。f の 2 乗の平均を考えます。$f = \frac{a_0}{2} + \sum(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ を 2 乗すると、たくさんの「かけ算の項」が出ますが、1 周期で平均すると、ちがう成分どうしの積は直交性で 0 になります。残るのは同じ成分の 2 乗だけで、$\cos^2$・$\sin^2$ の平均は $\frac{1}{2}$ です。

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

これを**パーセバルの等式**といいます。電圧 f を抵抗にかけると、電力は f^2 に比例します。だから、この式は「**全体の電力は、成分ごとの電力の和**」という意味です（4-12 の三平方の定理 $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ の、関数版です）。

方形波で確かめる

高さ 1 の方形波は、2 乗するといつも 1 なので、左辺は 1 です。右辺は $b_n = \frac{4}{n\pi}$（奇数）から

$$1 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \cdots\right\} \qquad \text{パーセバルの等式}$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) \qquad \tfrac{1}{2} \times \tfrac{16}{\pi^2} = \tfrac{8}{\pi^2} \text{ でくくる}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337 \qquad \text{両辺に } \tfrac{\pi^2}{8} \text{ をかける}$$

奇数の 2 乗の逆数の和が $\frac{\pi^2}{8}$ になりました（Python で 1000 項たすと 1.2335）。方形波の電力のうち、基本波がもつのは $\frac{8}{\pi^2} = 0.811$、つまり約 81% で、残りの約 19% は高調波がもっています。

ひずみ率

電気の世界では、波が sin からどれだけくずれているかを、**ひずみ率**（全高調波ひずみ率）で表します。高調波の電力の合計を基本波の電力でわり、平方根をとったものです。

$$\text{ひずみ率} = \sqrt{\frac{\text{高調波の電力の合計}}{\text{基本波の電力}}} = \frac{\sqrt{b_2^2 + b_3^2 + \cdots}}{b_1}$$

（a_n があるときは、a_n^2 も同じようにたす）

方形波では $\sqrt{1.2337 - 1} = \sqrt{0.2337} = 0.483$、つまり 48.3% です（例題 10）。三角波は係数が $\frac{1}{n^2}$ で小さくなるので 12.1%、きれいな sin の波は 0% です。

もっと知りたい ★★★★★

フーリエ係数は、いちばん近い近似

フーリエ級数を N 項でやめたものは、「sin・cos を N 個まで使ってできる形のうちで、もとの f に（2 乗の平均の意味で）いちばん近いもの」になっています。4-12 で、点から平面へいちばん近い点は「直交する方向に下ろした足（正射影）」でしたが、それと同じことが関数でも起きているのです。たす項をふやしても、それまでの係数は変わりません（直交しているので、新しい項が古い項にじゃまをしない）。この考えを**最小 2 乗近似**といい、データの近似（3-14）や、画像・音の圧縮（9-12）の土台です。

もっと知りたい ★★★★★

sin は「2 回微分」の固有ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin\frac{n\pi x}{L} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{L}$$

です。「2 回微分する」という操作をしても、形が変わらず何倍かになるだけです。7-8 で、行列 A をかけても向きが変わらず何倍かになるベクトルを固有ベクトルとよびました。$\sin\frac{n\pi x}{L}$ は、「2 回微分」の固有ベクトル（固有関数）です。熱方程式が sin の形に分けると解けたのは、このためです。9-11 では、棒を 9 点に区切った「熱の 1 歩の行列」の固有ベクトルが、本当に sin の形になることを確かめます。

せいかくに言うと

フーリエ級数の書き方は 1 通り

$\sin n\omega_0 t$・$\cos n\omega_0 t$（と定数）は、どの 2 つも直交していて、しかも「足りないものがない」（どんな形も、これらのたし算で、2 乗の平均の意味でいくらでも近くできる）ことが知られています。この性質を**完全性**といいます（証明は専門書で）。直交していて完全なので、1 つの f を書き表す係数の組は 1 通りに決まります。場合 A で、公式で書き直した係数をそのままフーリエ係数とみてよいのは、このためです。専門書では、関数の内積を $\langle f,\ g\rangle = \int f g\,\mathrm{d}t$ と書きます。

この章で出てきたことば

関数の内積　1 周期で $\int f g\,\mathrm{d}t$。値どうしの積の合計の、点を細かくした先。

直交・直交性　内積が 0 のとき直交。ちがう番号の sin・cos がどれも直交していること。

偶関数・奇関数　$f(-t) = f(t)$ が偶関数（たて軸で折り返して重なる）、$f(-t) = -f(t)$ が奇関数（原点で半回転して重なる）。

半区間の展開　0 から L だけの形を、原点で半回転して広げ、$\sin\frac{n\pi x}{L}$ だけで書くこと。

整流　交流の、片方の向きだけを通したり、向きをそろえたりすること。

パーセバルの等式　2 乗の平均は、成分の 2 乗の平均の和。

ひずみ率　高調波の電力の合計÷基本波の電力の平方根。

記号カード

初めて出た章 **9-2**

$(-1)^n$

読み方　マイナス・イチの・エヌじょう

意味　-1 を n 回かけた数。n が偶数なら 1、奇数なら -1。$\cos n\pi$ の値

英語　minus one to the n-th power

たいせつ

直交性

ちがう番号の $\sin n\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t$ は、かけて 1 周期で積分すると 0（直交）。同じものどうしは $\frac{T}{2}$（長さの 2 乗）。

係数は名前。内積÷長さの 2 乗

$$\underbrace{b_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

名前 記号を読む：どの波 f・周期 T・どの係数か

楽をする 計算の前に：はかった値だけ（I）？ 公式で書ける（A）？ 平均だけ（G）？ 0〜L（E）？ 周期（F）？ 偶奇（D）？

直す：ふつうの定積分 区間ごとに一定（B）・1 次式（C）・sin の形（H）

場合分けの表 9-2（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
I	はかった値だけ	$\frac{2}{N}\sum f_k \sin n\omega_0 t_k$
A	sin・cos の積・累乗	積和の式で和に直し、係数を読む
G	平均だけ	1 周期の面積÷ T
E	0 から L だけの形	$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$
F	周期が 2π でない	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$、$\frac{2}{T}\int_0^T$
D	偶関数・奇関数	偶なら $b_n = 0$、奇なら $a_n = 0$。$\frac{4}{T}\int_0^{T/2}$
B	区間ごとに一定	区間に分けて定積分
C	区間ごとに 1 次式	部分積分
H	区間ごとに sin・cos	積和の式で和に直して定積分

パーセバルの等式

2 乗の平均＝ $\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum(a_n^2 + b_n^2)$。全体の電力は成分ごとの電力の和。

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-2 のどの場合かを、流れ図で通った順に書きました。例題 1〜10 を、図 4 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。じぶんでとこうも同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	$\sin^3 t$	sin・cos の積・累乗の式？	A
2	偶関数の方形波	偶関数か奇関数？ → 区間ごとに一定？	D B
3	三角波	偶関数か奇関数？ → 区間ごとに 1 次式？	D C
4	直線の初めの温度	$0 \sim L$ だけの形？ → 区間ごとに 1 次式？	E C
5	まん中ではじいた弦	$0 \sim L$ だけの形？ → 区間ごとに 1 次式？	E C
6	50 Hz の方形波	周期 T が 2π でない？ → 偶関数か奇関数？ → 区間ごとに一定？	F D B
7	整流した波の平均	平均だけほしい？	G
8	半波整流の a_2	（すべていいえ）	H
9	12 個のデータ	式がなく、はかった値だけ？	I
10	ひずみ率	係数はわかっている（流れ図は使わない）	—

表 5　例題の流れ図の道すじ。

例題 1　公式で書き直す

$f(t) = \sin^3 t$ のフーリエ係数を求めましょう（周期 2π）。

考え方　**場合：** sin の 3 乗の式（表 9-2 の **A**）

名前　$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3 t \sin nt \, \mathrm{d}t$ など。

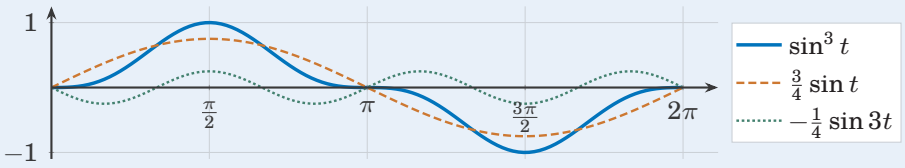
楽をする　積分しない。4-9 の公式で $\sin^3 t$ を sin の和に書き直し、係数を読む。

式　$\sin^3 t = \sin t \times \sin^2 t = \sin t \times \frac{1-\cos 2t}{2}$　（2 倍角の式）

$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos 2t$

$\sin t \cos 2t = \frac{1}{2}\{\sin 3t + \sin(-t)\} = \frac{1}{2}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin t$　（積和の式）

$\sin^3 t = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t + \frac{1}{4}\sin t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$



2 つの点線をたすと、青い線（$\sin^3 t$）になる

答え　$b_1 = \frac{3}{4}$、$b_3 = -\frac{1}{4}$、ほかはすべて 0

じぶんでとこう 1

$f(t) = \cos^3 t$ のフーリエ係数を求めましょう（周期 2π）。

1

例題 2　偶関数の方形波

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ で 1、$\frac{\pi}{2} < |t| < \pi$ で -1 をくり返す方形波（周期 2π、図 6 の右）のフーリエ係数を求めましょう。

考え方　**場合：**偶関数で、区間ごとに一定（表 9-2 の D と B）

名前　$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t$、$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sin nt\,\mathrm{d}t$。

楽をする　たて軸で折り返すと重なる偶関数なので、$b_n = 0$。

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t$（半分の 2 倍）

直す：ふつうの定積分　0 から $\frac{\pi}{2}$ で 1、$\frac{\pi}{2}$ から π で -1 に分ける。

式　$\int_0^{\pi/2}\cos nt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$

$\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{0-\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$　（$\sin n\pi = 0$）

$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right) = \frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$　（2 つめは -1 倍）

$\sin\frac{n\pi}{2}$ は $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ で $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1$

a_0：上と下の面積が同じなので 0（平均 0）

答え　$b_n = 0$、$a_0 = 0$、$a_1 = \frac{4}{\pi}$、$a_3 = -\frac{4}{3\pi}$、$a_5 = \frac{4}{5\pi}$、偶数番は 0。

$f = \frac{4}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \cdots\right)$

じぶんでとこう 2

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ で 1、$\frac{\pi}{2} < |t| < \pi$ で 0 をくり返すパルス（周期 2π）のフーリエ係数を求めましょう。

例題 3　山の形の三角波

$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = \pi - |t|$ をくり返す三角波（$t = 0$ で高さ π の山）のフーリエ係数を求めましょう。

考え方　**場合**：偶関数で、区間ごとに 1 次式（表 9-2 の **D** と **C**）

名前　$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |t|)\cos nt\,\mathrm{d}t$ など。

楽をする　偶関数なので $b_n = 0$、$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos nt\,\mathrm{d}t$。平均は面積 $\div 2\pi$。

直す：ふつうの定積分　$\pi\cos nt$ の積分と、$t\cos nt$ の部分積分（⑨の三角波と同じ）に分ける。

式　$\frac{a_0}{2}$：山の面積 $\frac{1}{2}\times 2\pi\times\pi = \pi^2$、$\pi^2 \div 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi}\pi\cos nt\,\mathrm{d}t = \pi\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n-1}{n^2}\quad\text{（⑨で計算した値）}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{(-1)^n-1}{n^2}\right) = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2}$$

答え　$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$、$b_n = 0$、$a_n = \frac{4}{\pi n^2}$（奇数）・0（偶数）。

$$f = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \cdots\right)$$

じぶんでとこう 3

$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = 2|t|$ をくり返す三角波のフーリエ係数を求めましょう（$\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$ を使ってよい）。

1

例題 4　直線の形の初めの温度

9-1 の棒（$L = 0.1\,\mathrm{m}$、両はし 0 ℃）で、はじめの温度が $f(x) = 100\frac{x}{L}$（左はし 0 ℃から右はし 100 ℃まで直線）のときの、半区間の展開の係数 b_n を求めましょう（右はしは、$t = 0$ で急に 0 ℃にする）。

考え方　**場合：**0 から L だけの形で、1 次式（表 9-2 の **E** と **C**）

名前　$f = \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ の係数 b_n。

楽をする　半回転して広げる：$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 100\frac{x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{200}{L^2}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$　（定数を外に出す）

直す：ふつうの定積分　$x\sin kx$（$k = \frac{n\pi}{L}$）の部分積分。

式　$\int_0^L x\sin kx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^L + \frac{1}{k}\int_0^L \cos kx\,\mathrm{d}x$

$= -\frac{L\cos n\pi}{k} + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^L = -\frac{L(-1)^n}{k} + 0$　（$kL = n\pi$）

$= \frac{L(-1)^{n+1}}{k} = \frac{L^2(-1)^{n+1}}{n\pi}$　（$\frac{1}{k} = \frac{L}{n\pi}$）

$b_n = \frac{200}{L^2} \times \frac{L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{200(-1)^{n+1}}{n\pi}$

答え　$b_n = \frac{200(-1)^{n+1}}{n\pi}$（$b_1 \approx 63.66$、$b_2 \approx -31.83$、$b_3 \approx 21.22$）

じぶんでとこう 4

同じ棒で、はじめの温度が $f(x) = 50\frac{x}{L}$ のときの b_n を求め、b_1、b_2、b_3 の値を書きましょう。

例題 5　まん中ではじいた弦

長さ L の弦のまん中を高さ h だけつまみ、三角形の形からそっとはなします。はじめの形 $f(x)$（$0 \leqq x \leqq \frac{L}{2}$ で $\frac{2h}{L}x$、$\frac{L}{2} \leqq x \leqq L$ で $\frac{2h}{L}(L-x)$）の b_n を求め、どの倍音が出ないかを答えましょう。

考え方　**場合：**0 から L だけの形で、区間ごとに 1 次式（表 9-2 の **E** と **C**）

名前　$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$（半区間の展開）。

楽をする　右半分は、左半分を $x = \frac{L}{2}$ で折り返した形。$\sin\frac{n\pi x}{L}$ も、n が奇数なら折り返して重なり、偶数なら半回転して重なる。だから右半分の積分は、奇数なら左半分と同じ、偶数なら符号が逆。

直す：ふつうの定積分　左半分 $J = \int_0^{L/2} x\sin kx\,\mathrm{d}x$（$k = \frac{n\pi}{L}$）を部分積分。

式　n が偶数：左と右が打ち消して $b_n = 0$

n が奇数：$b_n = \frac{2}{L}\times\frac{2h}{L}\times 2J = \frac{8h}{L^2}J$

$$J = \left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^{L/2} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{L/2} = -\frac{L\cos\frac{n\pi}{2}}{2k} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{k^2}$$

奇数では $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$ なので、$J = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{k^2} = \frac{L^2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$

$$b_n = \frac{8h}{L^2}\times\frac{L^2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} = \frac{8h\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$$

答え　$b_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$（$b_1 \approx 0.811h$、$b_3 \approx -0.090h$、$b_5 \approx 0.032h$）。偶数番の倍音は出ない

じぶんでとこう 5

9-1 の棒で、はじめの温度が三角形（両はし 0 ℃、まん中 100 ℃、まん中まで直線）のときの b_n を求め、b_1、b_2、b_3 の値を書きましょう（例題 5 の h を 100 にした形）。

例題 6　50 Hz の方形波を $\frac{2}{T}\int$ の式で

周期 $T = 0.02\,\mathrm{s}$（50 Hz）で、$0 < t < \frac{T}{2}$ で 1、$\frac{T}{2} < t < T$ で -1 をくり返す方形波の係数を、$\frac{2}{T}\int$ の式で求め、成分の周波数を答えましょう。

考え方　**場合：**周期が 2π でない、奇関数、区間ごとに一定（表 9-2 の **F** と **D** と **B**）

名前　$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f \sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$、$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 100\pi\,\mathrm{rad/s}$。

楽をする　原点で半回転すると重なる奇関数なので、$a_n = 0$。

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} 1 \times \sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$（半周期の 2 倍）

直す：ふつうの定積分　$\sin n\omega_0 t$ の定積分。

式　$$\int_0^{T/2} \sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} = \frac{1-\cos\frac{n\omega_0 T}{2}}{n\omega_0}$$

$\omega_0 T = 2\pi$ なので $\frac{n\omega_0 T}{2} = n\pi$、分子は $1-(-1)^n$

$$b_n = \frac{4}{T} \times \frac{1-(-1)^n}{n\omega_0} = \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n \times 2\pi} = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi} \quad (T\omega_0 = 2\pi)$$

奇数なら $\frac{4}{n\pi}$、偶数なら 0。n 番めの周波数は $50n\,\mathrm{Hz}$

答え　$b_n = \frac{4}{n\pi}$（奇数）。50 Hz：1.27、150 Hz：0.42、250 Hz：0.25（9-1 ④と同じ）

じぶんでとこう 6

周期 $T = \frac{1}{60}\,\mathrm{s}$（60 Hz）で、前半が 5 V、後半が -5 V をくり返す電圧の係数を、$\frac{2}{T}\int$ の式で求め、60 Hz・180 Hz・300 Hz の成分の大きさを答えましょう。

例題 7　整流した波の平均

半波整流した波（$0 < t < \pi$ で $\sin t$、$\pi < t < 2\pi$ で 0、周期 2π）の平均を求めましょう。また、もとの交流の最大値が 141 V（家の 100 V の交流の山の高さ）のとき、平均の電圧は何 V ですか。

考え方　**場合：**平均（直流分）だけほしい（表 9-2 の G）

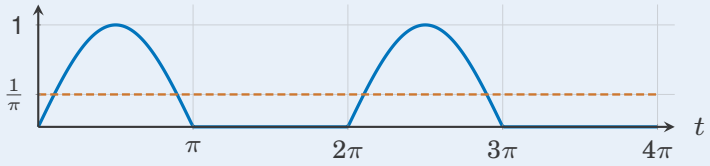
名前　$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\mathrm{d}t$。

楽をする　1 周期の面積÷周期。面積は山 1 つぶん。

式　山 1 つの面積 $\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$　(5-15)

平均 $2 \div 2\pi = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$

$141 \times \frac{1}{\pi} \approx 44.9$



青が半波整流した波、オレンジの点線が平均。山の面積を 2 周期ぶんにならした高さ

答え　平均 $\frac{1}{\pi} \approx 0.318$（最大値の約 32%）。141 V なら約 44.9 V

じぶんでとこう 7

全波整流した波（$|\sin t|$。周期 π で山がならぶ）の平均を求めましょう。最大値が 141 V なら、平均の電圧は何 V ですか。

例題 8　半波整流の $\cos 2t$ の係数

半波整流した波（例題 7）の、a_2 と b_1 を求めましょう。

考え方　**場合：**区間ごとに sin の形（表 9-2 の H）

名前　$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos 2t\,\mathrm{d}t$、$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\sin t\,\mathrm{d}t$。

直す：ふつうの定積分　$\pi < t < 2\pi$ では $f = 0$ なので、0 から π だけ。積和の式で和に直す。

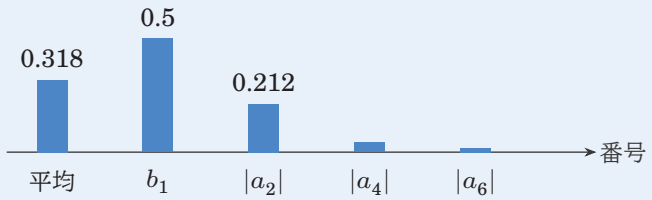
式　$\sin t\cos 2t = \frac{1}{2}\{\sin 3t + \sin(-t)\} = \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)$

$\int_0^{\pi}\sin 3t\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos 3\pi}{3} = \frac{2}{3}$、　$\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 2$

$a_2 = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-2\right) = \frac{1}{2\pi}\times\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3\pi}$

$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$　（$\sin^2$ の平均 $\frac{1}{2}$ ×長さ π）

同じように計算した係数を並べると、下のスペクトルになる（a_4 はじぶんでとこう）



答え　$a_2 = -\frac{2}{3\pi} \approx -0.212$、$b_1 = \frac{1}{2}$

じぶんでとこう 8

半波整流した波の a_4 を求めましょう。

例題 9　12 個のデータから係数を求める

ある機械の振動を、1 周期の中で 30° ごとに 12 回はかりました（t は角で表した時刻。f の単位は mm）。$\sin t$ の係数 b_1 を求めましょう。

t（度）	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
f	1.0	2.0	2.1	2.0	2.1	2.0	1.0	−1.0	−3.1	−4.0	−3.1	−1.0

考え方　**場合：**式がなく、はかった値だけ（表 9-2 の **I**）

名前　$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin t \, dt$。式がないので積分できない。

楽をする　$b_1 \approx \frac{2}{12}\sum f_k \sin t_k$（12 個の「値× sin」の平均の 2 倍）。

式　$\sin t_k$：0、0.5、0.866、1、0.866、0.5、0、−0.5、−0.866、−1、−0.866、−0.5

積 $f_k \sin t_k$：0、1.0、1.819、2.0、1.819、1.0、0、0.5、2.685、4.0、2.685、0.5

合計 18.008

$b_1 \approx \frac{2}{12} \times 18.008 = 3.001$

答え　$b_1 \approx 3.00$（mm）

じぶんでとこう 9

例題 9 のデータから、$\cos 2t$ の係数 a_2 を求めましょう（$\cos 2t_k$ は、1、0.5、−0.5、−1、−0.5、0.5、1、0.5、−0.5、−1、−0.5、0.5）。

例題 10　方形波のひずみ率

高さ 1 の方形波（$b_n = \frac{4}{n\pi}$、奇数番）のひずみ率を、パーセバルの等式を使って求めましょう。

考え方　係数はわかっているので、表 9-2 は使わない。パーセバルの等式で、高調波を無限個たさずにすませる。

名前　ひずみ率 $= \sqrt{\frac{\text{高調波の電力の合計}}{\text{基本波の電力}}}$。電力は「係数の 2 乗の $\frac{1}{2}$」。

式　全体の電力＝ 2 乗の平均＝ 1（方形波の 2 乗はいつも 1）

基本波の電力 $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \approx 0.8106$

高調波の電力の合計 $1 - 0.8106 = 0.1894$　（パーセバル：全体は成分の和）

$\frac{0.1894}{0.8106} = 0.2337$、$\sqrt{0.2337} \approx 0.483$

答え　約 48.3%

じぶんでとこう 10

三角波 $|t|$（$-\pi < t < \pi$。$a_1 = -\frac{4}{\pi}$）のひずみ率を、パーセバルの等式で求めましょう。平均 $\frac{\pi}{2}$ をひいた $|t| - \frac{\pi}{2}$ の 2 乗の平均は $\frac{\pi^2}{12} \approx 0.8225$ です。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 半周期にしたのに、2 倍し忘れる

✕ 偶関数の $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t$

○ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t$（半分の区間の 2 倍）

$$\underset{\text{名前}}{a_n} = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}} = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f\cos nt\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

D で楽をするのは「区間を半分にして 2 倍する」ことです。名前の式（1 周期）から、1 行ずつ直せばまちがえません。

まちがえやすいところ

② 定数の項を a_0 と書く

✕ 例題 3 の定数の項は $a_0 = \pi$

○ $a_0 = \pi$ だが、定数の項は $\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$

1 の「長さの 2 乗」は T で、ほかの成分の 2 倍です。だから定数の項だけ $\frac{1}{2}$ がつきます。

まちがえやすいところ

③ 偶関数・奇関数を取りちがえる

✕ $|t|$ は奇関数、0 と 1 の信号は奇関数

○ $|t|$ は偶関数。0 と 1 の信号はどちらでもない

$f(-t)$ を計算して確かめます。方形波は、原点の置き方で変わります。

⚠ まちがえやすいところ

④ 半区間の展開で cos を使う

✕　棒の温度を $\cos\frac{n\pi x}{L}$ でたす

○　両はし 0 なら $\sin\frac{n\pi x}{L}$ だけ

原点で半回転して広げた形は奇関数なので、cos の係数はすべて 0 です。cos は両はしで 0 になりません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ $\sin\frac{n\pi}{2}$ を $\sin n\pi$ と同じにする

✕　$\sin\frac{n\pi}{2}=0$

○　$\sin\frac{n\pi}{2}$ は $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

$\sin n\pi$ はいつも 0 ですが、

$\sin\frac{n\pi}{2}$ は奇数番で ±1 です。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ データの和で $\frac{2}{N}$ を $\frac{1}{N}$ にする

✕　$b_1\approx\frac{1}{12}\sum f_k\sin t_k$

○　$b_1\approx\frac{2}{12}\sum f_k\sin t_k$

係数は「平均の 2 倍」です。平均（$\frac{1}{N}\sum$）だけでは半分の値になります。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 成分の電力を係数の 2 乗にする

✕　基本波の電力 b_1^2

○　基本波の電力 $\frac{1}{2}b_1^2$

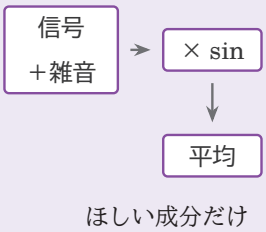
sin の 2 乗の平均は $\frac{1}{2}$ です。

パーセバルの等式にも $\frac{1}{2}$ がつきます。

物理・工学ではこう使う

弱い信号を取り出す：ロックインアンプ

はてな？ の「ほしい周波数の sin をかけて平均する」は、そのまま計測器になっています。ロックインアンプは、はかりたい信号に、決まった周波数の sin を電子回路でかけて平均し、その周波数の成分だけを取り出します。ほかの周波数の雑音は、直交性で平均が 0 になって消えるので、雑音に 100 倍うもれた小さな信号でも取り出せることがあります。



電気のひずみをはかる

工場やビルの電気設備では、電流の波形をはかる計器（電力計・ひずみ率計）が、1 周期のデータからフーリエ係数を計算し、第 3・第 5・第 7 高調波の大きさとひずみ率を表示します（場合 I とパーセバルの等式）。整流をする機器（パソコンの電源、インバーター）は、高調波の多い電流を流すので、高調波を小さくするフィルターをつけます。

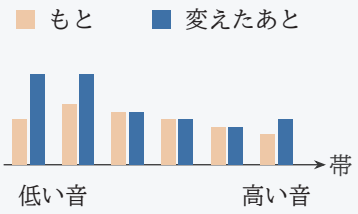
音のイコライザーと、機械の振動

音楽アプリのイコライザーは、音を周波数ごとの成分に分け、低音・高音の成分の大きさを変えてから、たし直します。回る機械の振動を周波数ごとに分けると、回転の何倍の成分が大きいかで、軸のずれや羽根のこわれなど、どこが悪いかの見当がつきます（9-4）。

コラム　イコライザー：成分ごとに大きさを変えて、たし直す

音楽アプリや音響機器のイコライザーは、音を周波数の帯（たとえば 31 Hz・63 Hz・125 Hz…16 kHz の 10 の帯。となりの帯は周波数が 2 倍）に分け、帯ごとに大きさを何倍かしてから、たし直します。フーリエ級数でいえば、係数 a_n・b_n に帯ごとの倍率をかけて、もう一度 $\sum$ でたすことです。

低い音を 2 倍にすると、2 乗の平均（パーセバルの等式）で、その帯の電力は 4 倍になります。だから、低音を上げすぎると、スピーカーやアンプに大きな電力がかかります。



低い 2 つの帯を 2 倍、いちばん高い帯を 1.5 倍にした例

章末問題　9-2 のまとめ

基本　★★★★★

1　$f(t) = \sin t \cos^2 t$ のフーリエ係数を求めましょう（周期 2π）（例題 1）。

2　$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ で 3、$\frac{\pi}{2} < |t| < \pi$ で 0 をくり返すパルス（周期 2π）のフーリエ係数を求めましょう（例題 2）。

3　$-\pi < t < \pi$ で $f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ をくり返す三角波のフーリエ係数を求めましょう（例題 3）。

4　9-1 の棒（$L = 0.1\,\mathrm{m}$）で、はじめの温度が $f(x) = 20\frac{x}{L}$ のときの b_n と、b_1、b_2 の値を求めましょう（例題 4）。

5 周期 1 ms（1 kHz）で、前半が 2 V、後半が −2 V をくり返す電圧の、1 kHz・3 kHz・5 kHz の成分の大きさを、$\frac{2}{T}\int$ の式で求めましょう（例題 6）。

6 最大値が 283 V（200 V の交流）の電圧を半波整流しました。平均の電圧は何 V ですか（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

7 半波整流した波の a_6 を求めましょう（例題 8）。

8 例題 9 のデータから、$\sin 2t$ の係数 b_2 を求めましょう（$\sin 2t_k$ は、0、0.866、0.866、0、−0.866、−0.866、0、0.866、0.866、0、−0.866、−0.866）（例題 9）。

9 0 と 1 をくり返す信号（9-1 の例題 2。$b_n = \frac{2}{n\pi}$、奇数番）のひずみ率を、パーセバルの等式で求めましょう。平均 $\frac{1}{2}$ をひいた形の 2 乗の平均は $\frac{1}{4}$ です（例題 10）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ ちがう周波数の sin どうしの積を 1 周期でたすと 0 になることを、表計算とグラフで確かめられる。 → 85 ページ
- ☐ 直交性を使って、係数が「かけて積分し、長さの 2 乗でわる」で取り出せるわけを説明できる。 → 89 ページ
- ☐ 場合分けの表 9-2 と流れ図で、波の形に合った楽な求め方を選び、係数を計算できる。 → 93 ページ

ミナ

sin と cos を 2 つ使うと、式が長くなるね。次の 9-3 では、6-10 の $e^{j\theta}$ を使って、2 つを 1 つにまとめてみよう。

第 1 部　フーリエ解析

★★★★★

9-3 複素数で書くフーリエ級数

道しるべ　この章の前に 6-8 6-9 6-10 6-13 8-13 9-1 9-2　この章の先に 9-4 9-8

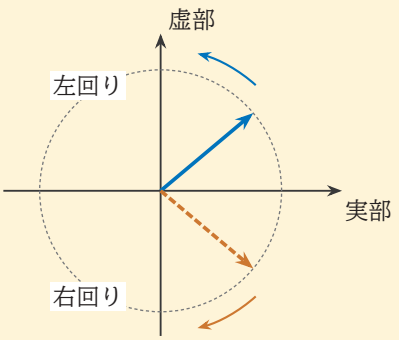
この章でできるようになること

- ★★★ 反対向きに回る 2 本の矢印をたすと cos の波になることを作図で確かめ、「負の周波数」の意味を言える。
- ★★★★ a_n・b_n から複素フーリエ係数 $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ を求め、両側のスペクトルを読める。
- ★★★★★ 場合分けの表を使って c_n を e の定積分で求め、回路に入れた周期の波や、輪の形の針金の熱を計算できる。

はてな？

長さ 1 の矢印を 2 本用意します。1 本は左回り（時計の針と反対の向き）に、もう 1 本は右回り（時計の針と同じ向き）に、同じ速さで回します。はじめは 2 本とも右を向いています。

この 2 本の矢印をたし算すると、和の矢印は、どんな動きをするでしょうか。



青の実線が左回りの矢印、オレンジの点線が右回りの矢印。

9-1・9-2 では、くり返す波を sin と cos の波の和に分けました。係数は a_n と b_n の 2 種類で、計算も 2 回ずつ必要でした。この章では、6-10 で学んだ回る矢

印 $e^{j\theta}$ を使って、sin と cos を 1 つの式にまとめます。そうすると、係数は c_n の 1 種類だけになり、積分も e の積分 1 種類ですみます。

この書き方は、回路や機械に周期の波を入れたときの計算（6-13 の複素数の方法）と、とても相性がよい書き方です。電気・通信・量子力学の専門書の多くは、フーリエ級数をこの形で書いています。最後に、8-13 の熱方程式を、輪の形の針金で解きます。

この章は複素数をたくさん使います。j のかけ算やオイラーの公式を思い出せなくても大丈夫です。思い出そうの章にもどりながら、ゆっくり進みましょう。1 回でわからなくても、例題を 1 つ解くと見えてくることがあります。

やってみよう　2 本の回る矢印を、表計算でたそう

はてな？ の 2 本の矢印の先の点の座標を、30° ごとに計算します。左回りの矢印は角 θ、右回りの矢印は角 $-\theta$ の所にあります。

1. A 列（A2〜A14）に、回った角 θ を 0, 30, 60, …, 360 と入れる。
2. B2 に `=COS(RADIANS(A2))`、C2 に `=SIN(RADIANS(A2))` と入れる（左回りの矢印の先の x・y）。
3. D2 に `=COS(RADIANS(-A2))`、E2 に `=SIN(RADIANS(-A2))` と入れる（右回りの矢印の先）。
4. F2 に `=B2+D2`、G2 に `=C2+E2` と入れる（和の矢印の先）。
5. B2:G2 を 14 行めまでコピーし、F 列と G 列を、方眼紙の上に点でうってみる。

RADIANS は、度を弧度（4-2）に直す関数です。180° までの結果は、次のようになりました（小数第 3 位まで）。

	A	B	C	D	E	F	G
1	角 θ（°）	左の x	左の y	右の x	右の y	和の x	和の y
2	0	1	0	1	0	2	0
3	30	0.866	0.5	0.866	−0.5	1.732	0
4	60	0.5	0.866	0.5	−0.866	1	0
5	90	0	1	0	−1	0	0
6	120	−0.5	0.866	−0.5	−0.866	−1	0
7	150	−0.866	0.5	−0.866	−0.5	−1.732	0
8	180	−1	0	−1	0	−2	0

表 1　2 本の矢印の先の座標と、その和。G 列（和の y）は、いつも 0 になる。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 6-10　オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$。$e^{j\theta}$ は単位円の上の角 θ の点。
- 6-10　$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$、$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$。微分は $j\omega$ をかけること。
- 6-8　$z = a + bj$ の共役な複素数は $\bar{z} = a - bj$。$\frac{1}{j} = -j$（分母と分子に j をかける）。
- 9-1　くり返す波は $\frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$。$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$。
- 9-2　係数は「かけて 1 周期で積分し、$\frac{2}{T}$ 倍」。場合分けの表 9-2 と流れ図で求め方を選ぶ。
- 8-13　熱方程式 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$。sin の形の温度は、形を保ったまま小さくなる。

数学の道具

目でわかる 回る矢印2本で、ゆれる波 ★★★

1 反対向きに回る2本の矢印をたす

表1の和の矢印は、y がいつも 0 で、x だけが次のように変わりました。

$$2 \to 1.732 \to 1 \to 0 \to -1 \to -1.732 \to -2$$

和の矢印の先は、横の軸の上を行ったり来たりするだけです。

なぜ y が 0 になるのでしょう。左回りの矢印と右回りの矢印は、いつも横の軸について**折り返した位置**（上下に対称な位置）にあります。だから、たての成分は「$+\sin\theta$ と $-\sin\theta$」で、たすと打ち消しあいます。横の成分は、どちらも $\cos\theta$ なので、たすと $2\cos\theta$ です。

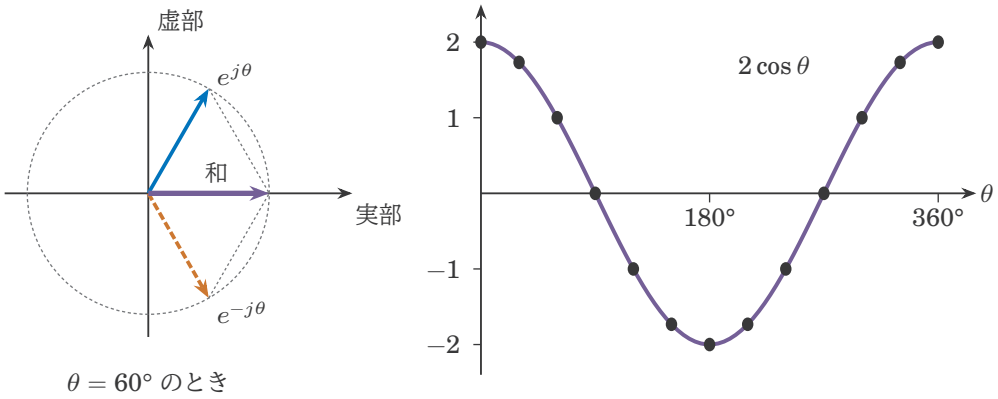


図1 左：$\theta = 60°$ のときの2本の矢印（青とオレンジの点線）と、その和（むらさき）。たての成分は打ち消しあう。右：和の x を角 θ ごとにならべると、$2\cos\theta$ の波（黒い点は表1の値）。

はてな？ の答え：和の矢印は、横の軸の上だけを、長さ 2 と -2 の間で行ったり来たりします。その長さ（横の成分）は $2\cos\theta$ で、cos の波です。回る2本の矢印をたすと、まっすぐゆれる波になるのです。

式で書くと、6-10 で作った式そのものです。

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

ひき算をすると、横の成分が打ち消しあい、たての成分だけが残ります。

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

「cos は 2 本の矢印の和の半分」「sin は 2 本の矢印の差を $2j$ でわったもの」です。

2 右回りは「負の周波数」

時刻 t に角 ωt の所にある矢印は $e^{j\omega t}$ です（6-10）。ω〔rad/s〕は、1 秒に何ラジアン回るかを表す角周波数で、$\omega > 0$ なら左回りです。では、右回りの矢印 $e^{-j\omega t}$ は、どう読めばよいでしょう。

$$e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t}$$

と書くと、「角周波数が $-\omega$ の矢印」と読めます。このように、右回りに回る矢印の角周波数を、**負の周波数**（ふのしゅうはすう）といいます。マイナスは「回る向きが反対」という印で、「1 秒にマイナス何回ゆれる」という意味ではありません。

$\cos\omega t$ は、角周波数 ω の矢印と $-\omega$ の矢印に、それぞれ $\frac{1}{2}$ をかけてたしたものです。$\sin\omega t$ は、$\frac{1}{2j}$ と $-\frac{1}{2j}$ をかけてたしたものです。

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}, \qquad \sin\omega t = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}$$

「どの角周波数の矢印に、何をかけるか」を、横軸に角周波数、たて軸にかける数の大きさをとって棒で表したものが、図 2 です。9-1 で、方形波の成分を棒グラフ（スペクトル）にしました。そのときは横軸が正の周波数だけでした。矢印で考えると、負の周波数の側にも棒が立ちます。

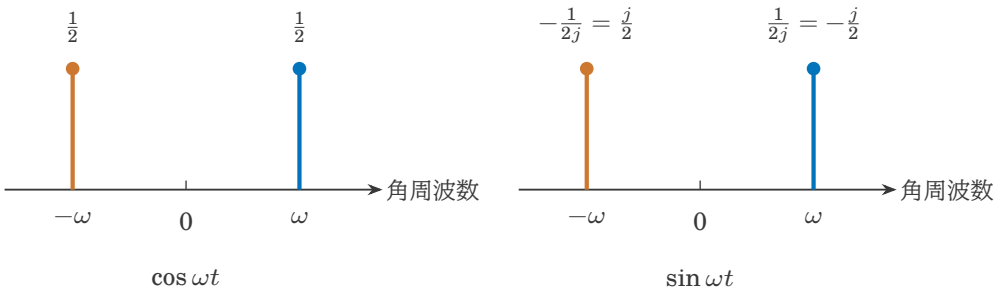


図 2 $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ を、回る矢印に分けたときのスペクトル。棒の高さは、かける数の大きさ（どれも $\frac{1}{2}$）。棒の上の数が、かける数そのもの（複素数）。オレンジの棒が負の周波数（右回り）。

cos と sin は、棒の高さ（大きさ $\frac{1}{2}$）は同じで、かける数の「向き」（複素平面の上の角）だけがちがいます。cos では 2 本とも実数 $\frac{1}{2}$、sin では $-\frac{j}{2}$ と $\frac{j}{2}$ です。かける数の角が、波の山の位置（位相）を表しています。

もう 1 つ大事なことがあります。どちらも、ω の棒と $-\omega$ の棒にかける数は、**共役な複素数**（6-8）の組です（$\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$、$-\frac{j}{2}$ と $\frac{j}{2}$）。共役な 2 本の矢印は、いつも横の軸について折り返した位置にあるので、和のたての成分が打ち消しあい、和が実数になります。ふつうの音や電圧のような、実数の波はすべてこの形です。

たいせつ

- **反対向きに回る 2 本の矢印 $e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ をたすと、横にゆれる $2\cos\omega t$ になる。**
- **右回りの矢印 $e^{-j\omega t}$ の角周波数 $-\omega$ を、負の周波数という。マイナスは回る向きの印。**
- **実数の波では、ω と $-\omega$ の矢印にかける数は、共役な複素数の組になる。**

手でわかる　a_n・b_n から c_n へ　★★★★

③ フーリエ級数を、回る矢印で書きかえる

9-1 のフーリエ級数の n 番めの成分 $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$ に、①の cos と sin の式を入れます（$\theta = n\omega_0 t$）。目標は、「左回りの矢印 $e^{jn\omega_0 t}$ に何をかけるか」と「右回りの矢印 $e^{-jn\omega_0 t}$ に何をかけるか」の形に整理することです。

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \qquad \text{9-1 の } n \text{ 番めの成分}$$

$$= a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \qquad \text{①の式で書きかえる}$$

$$= a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - jb_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2} \qquad \frac{1}{j} = -j \text{（6-8）}$$

$$= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \qquad \text{同じ矢印どうしをまとめる}$$

左回りの矢印にかける数を c_n、右回りの矢印にかける数を c_{-n} と名前をつけます。

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

c_{-n} は、c_n の虚部の符号を変えたもの、つまり**共役な複素数** $\overline{c_n}$ です（a_n・b_n は実数なので）。②で見た「実数の波では、共役な組」が、ここでも出てきました。

平均の項も、矢印で

9-1 の級数のはじめの項 $\frac{a_0}{2}$ は、回らない矢印（$n = 0$、$e^{j0t} = 1$）にかける数と見て、$c_0 = \frac{a_0}{2}$ とします。こうすると、フーリエ級数全体が、$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ のすべての整数についての和になります。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

「いろいろな速さで回る矢印に、c_n をかけてたしたもの」

この形を**複素フーリエ級数**、c_n を**複素フーリエ係数**（ふくそフーリエけいすう）といいます。$\sum$ の下の $n = -\infty$ は、「負の n もすべてたす」という意味です。n が負の項が、右回り（負の周波数）の矢印です。

逆に、c_n から a_n・b_n へ

上の 2 つの式をたすと $c_n + c_{-n} = a_n$、ひくと $c_n - c_{-n} = -jb_n$ です。両辺に j をかけると、$j(c_n - c_{-n}) = -j^2 b_n = b_n$ です。

$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \times (c_n$ の実部$)$,　　$b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2 \times (c_n$ の虚部$)$

c_n の実部が cos の成分、虚部が sin の成分を表しています。

数で確かめる

$f(t) = 3\cos t + 4\sin t$（$a_1 = 3$、$b_1 = 4$）なら、$c_1 = \frac{3-4j}{2} = 1.5 - 2j$、$c_{-1} = 1.5 + 2j$ です。もどしてみます。$c_{-1}e^{-jt}$ は $c_1 e^{jt}$ の共役なので、2 つをたすと虚部が打ち消しあい、実部の 2 倍になります。

$c_1 e^{jt} = (1.5 - 2j)(\cos t + j\sin t)$	オイラーの公式
$= (1.5\cos t + 2\sin t) + j(1.5\sin t - 2\cos t)$	展開する（$j^2 = -1$）
$c_1 e^{jt} + c_{-1} e^{-jt} = 2(1.5\cos t + 2\sin t)$	実部の 2 倍
$= 3\cos t + 4\sin t$	もとの式にもどった

❹ 方形波の c_n と、両側のスペクトル

9-1 の高さ 1 の方形波（$0 < t < \pi$ で 1、$\pi < t < 2\pi$ で -1、周期 2π）は、$a_n = 0$、$b_n = \frac{4}{n\pi}$（n が奇数）、$b_n = 0$（n が偶数）でした。③の式に入れます。

$$c_n = \frac{0 - j \cdot \frac{4}{n\pi}}{2} = -\frac{2j}{n\pi} \qquad n \text{ が正の奇数}$$

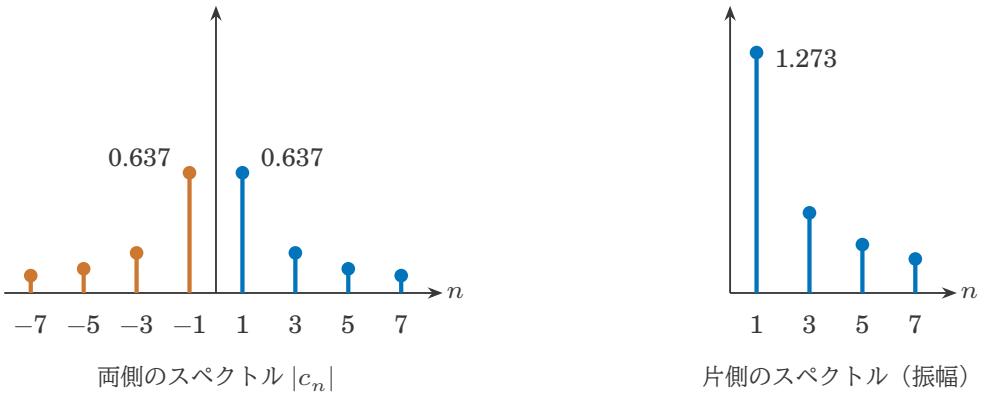
$$= \frac{2}{jn\pi} \qquad -j = \frac{1}{j} \text{ を使って書きかえる}$$

$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{2j}{n\pi} \qquad \text{共役：虚部の符号を変える}$$

n が負のときも、次のように同じ式で書けます。

$$c_{-n} = \frac{2j}{n\pi} = \frac{2}{j(-n)\pi} \qquad \left(c_n = \frac{2}{jn\pi} \text{ の } n \text{ を } -n \text{ にしたもの}\right)$$

数にすると、$c_{\pm 1} = \mp 0.6366j$、$c_{\pm 3} = \mp 0.2122j$、$c_{\pm 5} = \mp 0.1273j$ です（$\pm$ と $\mp$ は、上どうし・下どうしの符号を組にして読む）。n が偶数と $n = 0$ では $c_n = 0$ です。



両側のスペクトル $|c_n|$　　片側のスペクトル（振幅）

図 3　高さ 1 の方形波のスペクトル（たての目もりは左右で同じ）。左：両側のスペクトル。$|c_n| = \frac{2}{|n|\pi}$ の棒が、$n = 0$ について左右対称に立つ。右：片側のスペクトル。正の n だけで、高さは $2|c_n|$（9-1 の振幅 $\frac{4}{n\pi}$ と同じ）。

$|c_n|$ を棒の高さにして、負の n もふくめてならべた図 3 の左を、**両側スペクトル**（りょうがわスペクトル）といいます。正の n だけで、高さを振幅（9-1 の $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$）にした右の図を、**片側スペクトル**といいます。

両側スペクトルの棒の高さは、片側スペクトルの半分です。n 番めの成分の振幅（山の高さ）は、左回りの矢印と右回りの矢印に、半分ずつ分けられているからです。①の図で、長さ 1 の矢印 2 本の和の長さが最大 2 になったのと同じで、2 本の棒をあわせて、はじめて 1 つの波の振幅になります。

$$\text{振幅} = 2|c_n| = |c_n| + |c_{-n}|$$

専門書や計測器の画面がどちらのスペクトルかは、負の周波数の側があるかどうかで見分けます。

ここまでで十分

反対向きに回る 2 本の矢印の和が cos の波になること、$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ で a_n・b_n から c_n が求められること、両側スペクトルの高さは振幅の半分であることがわかれば十分です。この先は、c_n を直接計算する方法と、その使いみちです。

∂ 式でわかる c_n を直接求めて、使う ★★★★★

5 c_n を直接求める：止めて、平均する

③では、a_n・b_n を先に求めてから c_n を作りました。でも、a_n と b_n の 2 回の積分をしなくても、c_n を 1 回の積分で直接求めることができます。9-2 の「かけて 1 周期で積分する」と同じ考えです。

ほしい矢印だけを止める

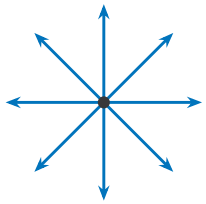
$f(t) = \sum c_k e^{jk\omega_0 t}$ は、いろいろな速さで回る矢印の和です。ここに、右回りの矢印 $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけます。6-10 の「かけ算は肩のたし算」から、

$$c_k\, e^{jk\omega_0 t} \times e^{-jn\omega_0 t} = c_k\, e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

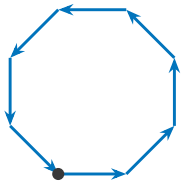
となります。$k = n$ の矢印は、$e^{j0} = 1$ になって**止まります**。n 番めの矢印と同じ速さで逆に回すので、回転が打ち消されるのです。ほかの矢印（$k \neq n$）は、速さ $(k-n)\omega_0$ で回り続けます。

1 周期で平均すると、回る矢印は 0 になる

回り続ける矢印 $e^{jm\omega_0 t}$（m は 0 でない整数）は、1 周期 T の間にちょうど m 周します。1 周期の間の矢印を、同じ時間の間かくで何本もとってならべると、図 4 のように、どの向きも同じだけ出てくるので、たすと 0 になります。



$m = 1$：8 本の矢印



先から先へつなぐと、
もとの点にもどる（和は 0）

$m = 0$（止まった矢印）は
8 本とも同じ向き：
和は 8 本分

図 4　1 周期を 8 つに分け、回り続ける矢印 $e^{jm\omega_0 t}$（$m = 1$）を 8 本とる。左：8 本は、どの向きにも同じだけある。中：先から先へつなぐと正八角形になって、もとの点にもどる。右：止まった矢印（$m = 0$）だけは、たすと本数分の長さが残る。

本数を細かくした先が、1 周期の積分です。式でも確かめます（$m \neq 0$。$e^{jm\omega_0 t}$ の積分は、5-14 の $\int e^{at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}e^{at}$ で $a = jm\omega_0$）。

$$\int_0^T e^{jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{jm\omega_0 t}}{jm\omega_0}\right]_0^T \qquad e^{at} \text{ の積分（} a = jm\omega_0 \text{）}$$

$$= \frac{e^{jm\omega_0 T} - 1}{jm\omega_0} = \frac{e^{j2m\pi} - 1}{jm\omega_0} \qquad \omega_0 T = 2\pi$$

$$= \frac{1-1}{jm\omega_0} = 0 \qquad e^{j2m\pi} = 1 \text{（} m \text{ 周してもとの所）}$$

$m = 0$ なら、$\int_0^T 1\,\mathrm{d}t = T$ です。これが、矢印 $e^{jk\omega_0 t}$ どうしの**直交性**です（9-2 の sin・cos の直交性の、矢印の形）。

だから、かけて平均すると c_n だけが残る

$$\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, \mathrm{d}t = \sum_k c_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\, \mathrm{d}t$$

項ごとに積分する

$$= c_n \times T$$

$k = n$ の項だけが T、ほかは 0

両辺を T でわると、c_n を求める式ができます。

$$\underbrace{c_n}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

①名前の段　記号を読む：何に・何をかけて・どこからどこまで

1. **何に**：$f(t)$ は、周期 T でくり返す波です。
2. **何をかけて**：右回りの矢印 $e^{-jn\omega_0 t}$。n 番めの矢印を止めるための矢印です。**マイナス**がつきます。
3. **どこからどこまで**：1 周期（0 から T まで。1 周期分なら、$-\frac{T}{2}$ から $\frac{T}{2}$ までなど、どこからでもよい）。
4. **何でわるか**：T でわる。つまり「1 周期の**平均**」。

なぜ $\frac{2}{T}$ でなく $\frac{1}{T}$ なのか

9-2 の a_n・b_n の式には $\frac{2}{T}$ がありました。$\cos n\omega_0 t$ をかけると、$\cos^2 n\omega_0 t$ の平均は $\frac{1}{2}$ にしかならないので、2 倍してもどしたのでした。矢印では、$e^{jn\omega_0 t} \times e^{-jn\omega_0 t} = 1$ で、平均は 1 です。だから 2 倍する必要がなく、$\frac{1}{T}$ になります。「c_n は、かけて平均したそのもの」と覚えておくとよいでしょう。

記号 c_n は「名前」

c_n は、「1 周期で、f に $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけてたし合わせ、T でわる」という操作の**名前**です。記号を見ただけでは、まだ数は出ません。実際の値は、ふつうの定積分に**直して**求めます。e の積分は「$\frac{1}{a}$ をかける」の 1 種類なので、cos と sin の 2 種類の積分をする 9-2 より、計算は短くなります。

② 直す段　ふつうの定積分に直す：方形波

③で $a_n \cdot b_n$ から求めた方形波の c_n を、こんどは直接求めます。周期は $T = 2\pi$、$\omega_0 = 1$ です。1 周期を、$f = 1$ の区間と $f = -1$ の区間に分けます（9-2 と同じ）。$n \neq 0$ とします。

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-jnt}\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnt}\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{区間に分ける}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-jnt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-jnt}}{-jn}\right]_0^{\pi} = \frac{1 - e^{-jn\pi}}{jn} \qquad e^{at} \text{ の積分（} a = -jn \text{）}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-jn\pi} - 1}{jn} \qquad \text{同じように（} e^{-j2n\pi} = 1 \text{）}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 - 2e^{-jn\pi}}{jn} = \frac{1 - (-1)^n}{jn\pi} \qquad e^{-jn\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$$

n が奇数なら $1 - (-1) = 2$ で $c_n = \frac{2}{jn\pi}$、偶数なら $1 - 1 = 0$ で $c_n = 0$。③と同じ答えが、積分 1 回で出ました。$e^{-jn\pi}$ は、単位円の上の角 $-n\pi$ の点なので、n が奇数なら -1、偶数なら 1 です（$\sin n\pi = 0$ だから）。

6 場合分けの表と流れ図

c_n の求め方も、9-2 と同じく場合によって選びます。9-2 の場合分けの表 9-2 に、複素数の係数の行 J・J′ を足しました。A・F・G は表 9-2 と同じ記号で、c_n を求めるときの手順を書いています。J′ の「′」は「J のなかま」という印で、微分の印ではありません。

流れ図の使い方：方形波の c_n

⑤で計算した方形波の c_n を、場合分けの表 9-2（つづき）と、図 5 の流れ図でたどってみます。

1. 名前の段：f ＝高さ 1 の方形波、周期 $T = 2\pi$、ほしいのはすべての n の c_n。
2. f が $e^{jn\omega_0 t}$ や cos・sin の和で書いてある？ いいえ（1 と -1 をくり返す形で書いてある）。sin・cos の積やべき？ いいえ。
3. 平均 c_0 だけほしい？ いいえ。周期が 2π でない？ いいえ（2π）。
4. 区間ごとに一定・1 次式？ はい（1 と -1）。

こうして場合 J に決まります。⑤でしたとおりです。全部の場合を一度に覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどりましょう。

どの場合かな？

次の c_n は、どの場合でしょう。流れ図を上からたどって、先に考えてから答えを見ましょう。

1. $f(t) = 2\cos 3t - \sin t$ の c_n
   答え：J′。cos・sin の和で書いてある（$a_3 = 2$、$b_1 = -1$）。
2. $f(t) = \cos^2 t$ の c_n
   答え：A。cos の 2 乗（べき）。
3. 周期 0.01 s で、前の半分が 1、後ろの半分が 0 の波の c_n
   答え：F→J。周期が 2π でなく、区間ごとに一定。

4 スマホの充電器の中の、整流した電圧の平均

答え：**G**。平均だけ。

場合分けの表 9-2（つづき）複素数の係数 c_n：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
J′	f が $e^{jn\omega_0 t}$ や $\cos n\omega_0 t$・$\sin n\omega_0 t$ の（定数倍の）和で書いてある	**楽をする** 積分しない。$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$、$c_{-n} = \overline{c_n}$、$c_0 = \frac{a_0}{2}$。逆は $a_n = c_n + c_{-n}$、$b_n = j(c_n - c_{-n})$	1・2・9
A	sin・cos の積やべき（$\sin^3 t$ など）で書ける	**楽をする** 積分しない。オイラーの公式で e の式に直し、展開して、e^{jnt} の前の数を読む	3
G	平均 c_0（直流分）だけほしい	**楽をする** 積分の意味から：c_0 ＝ 1 周期の面積 ÷ T	4
F	周期が 2π でない（50 Hz なら $T = 0.02$ s）	**楽をする** $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ にする。形が同じなら、c_n は周期 2π のときと同じ。このあと下の問いへ	7
J	区間ごとに一定、または区間ごとに 1 次式	**ふつうの定積分** $\frac{1}{T}\int_0^T f e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$。区間に分ける。1 次式は部分積分 1 回。$e^{-jn\pi} = (-1)^n$	5・6・7・8

表 9-2 の B〜E・H・I の形（sin だけの半区間・整流した波・データなど）は、9-2 の流れ図で a_n・b_n を求めてから J′ で c_n にします。式がなく、はかった値だけのときは、9-4 の DFT（表 9-4 の G）で c_n が直接出ます。

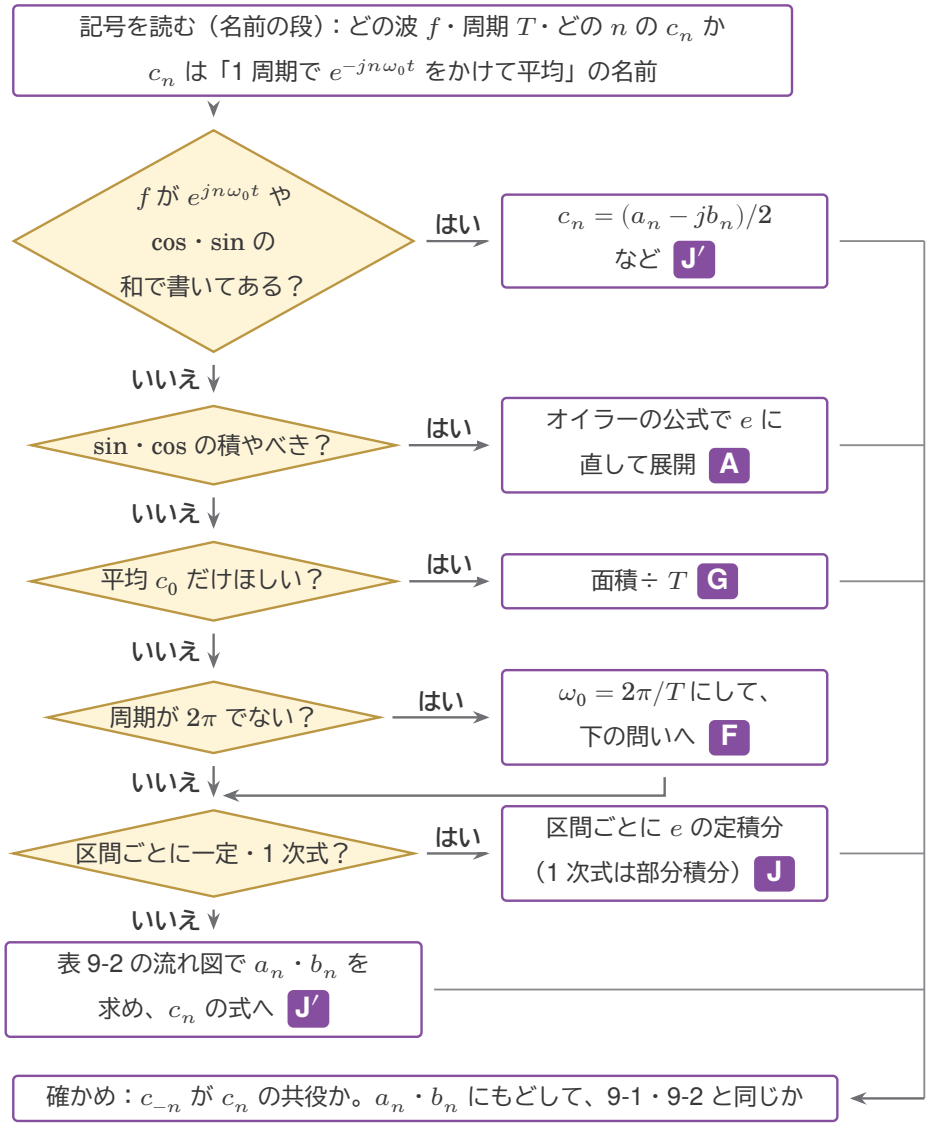


図 5　複素フーリエ係数 c_n の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 4 つの問い（J′・A・G・F）が楽をする段、その下が直す段。F のあとは左の列の次の問いへもどる。計算した四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

⑦ 1 次式の区間は、部分積分 1 回

のこぎり波 $f(t) = t$（$-\pi < t < \pi$）のように、区間の中で 1 次式になっている波では、$t\,e^{at}$ の積分が必要になります。5-16 の部分積分を 1 回使います。a は 0 でない数（ここでは複素数 $-jn$）です。

$$\int t\,e^{at}\,\mathrm{d}t = t\cdot\frac{e^{at}}{a} - \int 1\cdot\frac{e^{at}}{a}\,\mathrm{d}t$$

部分積分：t を微分、e^{at} を積分

$$= \frac{t\,e^{at}}{a} - \frac{e^{at}}{a^2}$$

残りの積分をもう 1 回 $\frac{1}{a}$

$$= \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}$$

e^{at} でくくる

右辺を積の微分（5-7）で微分すると、もとの te^{at} にもどることも確かめられます。

$$\left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)'e^{at} + \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)ae^{at} = \frac{e^{at}}{a} + te^{at} - \frac{e^{at}}{a} = te^{at}$$

9-2 では、$t\cos nt$ と $t\sin nt$ の 2 つの部分積分が必要でした。e の形なら 1 つですみます。a が複素数でも、e^{at} の微分が ae^{at} になることは 6-10 で確かめたので、同じ計算ができます。のこぎり波の c_n は例題 6 で求めます。

8 回路に周期の波を入れる：成分ごとにかけ算

c_n の形がいちばん役に立つのは、回路や機械に周期の波を入れるときです。3-12 の図にあった、抵抗とコンデンサーで作る「低い音だけを通す回路」（ローパスフィルター）を例にします。

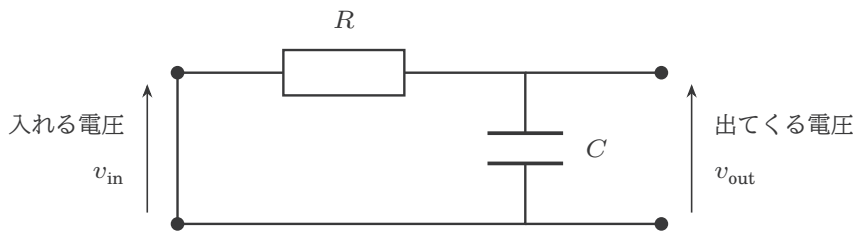


図 6　抵抗 R とコンデンサー C のローパスフィルター。出てくる電圧は、コンデンサーの両はしの電圧。

抵抗に流れる電流を i〔A〕とすると、入れる電圧は「抵抗の電圧＋コンデンサーの電圧」で、$v_{\text{in}} = Ri + v_{\text{out}}$ です。コンデンサーの電流は $i = C\,\mathrm{d}v_{\text{out}}/\mathrm{d}t$（6-10）です。入れると、時定数 $\tau = RC$〔s〕（6-4）の式になります。

$$\tau\frac{\mathrm{d}v_{\text{out}}}{\mathrm{d}t} + v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$$

1 本の回る矢印を入れると

入れる電圧が、1 本の回る矢印 $v_{\text{in}} = e^{j\omega t}$ だとします。6-13 と同じく、出てくる電圧も同じ速さで回る矢印 $v_{\text{out}} = Ke^{j\omega t}$ と置きます（K は複素数）。微分は $j\omega$ をかけること（6-10）なので、

$$\tau \cdot j\omega K e^{j\omega t} + K e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \qquad \text{式に入れる}$$

$$K(1 + j\omega\tau) = 1 \qquad \text{両辺を } e^{j\omega t} \text{ でわる}$$

$$K = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{両辺を } 1 + j\omega\tau \text{ でわる}$$

回る矢印は、この回路を通ると $\frac{1}{1+j\omega\tau}$ 倍になって出てきます。大きさは $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ で、ω が大きい（速く回る）ほど小さくなります。だから、高い周波数ほど通りにくいのです。3-12 の折れ点 100 Hz は、$\omega\tau = 1$ になる所で、$\tau = \frac{1}{2\pi \times 100} \approx 1.592 \times 10^{-3}$ s（1.592 ms）です。

たくさんの矢印の和を入れると

この式は線形（5-18）なので、入れるものの和には、出てくるものの和が対応します。周期の波 $v_{\text{in}} = \sum c_n e^{jn\omega_0 t}$ を入れると、n 番めの矢印は $\frac{1}{1+jn\omega_0\tau}$ 倍になります。

$$v_{\text{out}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{1 + jn\omega_0\tau} e^{jn\omega_0 t}$$

出てくる波の係数＝入れる波の係数×その周波数の倍率

cos と sin のままだと、成分ごとに大きさの変化と山のずれ（位相）を別々に計算しなければなりません。c_n なら、複素数のかけ算 1 回で両方が出ます。この「その周波数の倍率」を、9-8 では $G(j\omega)$ と書き、周波数応答とよびます。

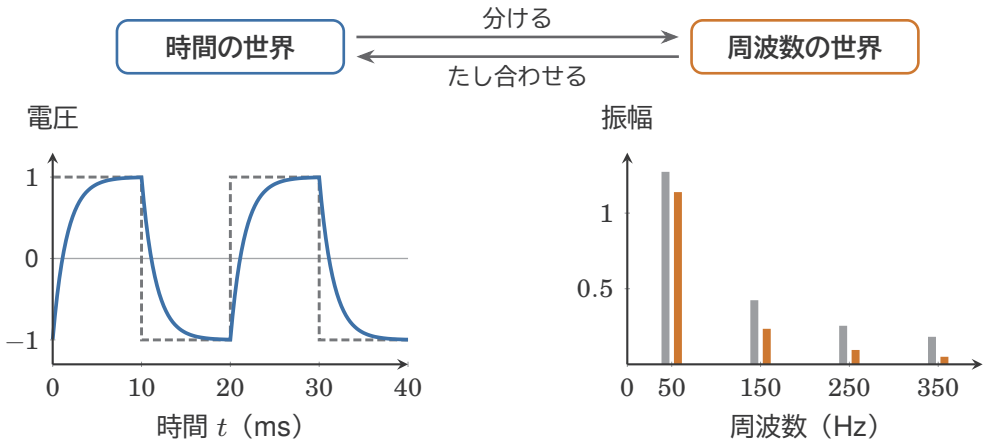


図 7　50 Hz の方形波（高さ 1）を、折れ点 100 Hz のローパスフィルターに入れた。左（時間の世界）：灰色の破線が入れる波、青の実線が出てくる波。出てくる波は角が丸くなる。右（周波数の世界）：成分ごとの振幅。どの周波数でも、左の灰色の棒が入れる波、右のオレンジの棒が出てくる波。50 Hz は 1.273 から 1.139 へ、150 Hz は 0.424 から 0.235 へ、250 Hz は 0.255 から 0.095 へ。高い成分ほど小さくなる（例題 7）。

角の所の急な変化は、高い周波数の成分が作っていました（9-1 のギブズ現象のところで、角を作るには細かい sin がたくさん要った）。ローパスフィルターはその成分を小さくするので、出てくる波は角が丸くなります。時間の世界の「角が丸くなる」と、周波数の世界の「高い成分が小さくなる」は、同じことを 2 つの世界で見たものです。

9 電力は、$|c_n|^2$ の和

9-2 では、波の 2 乗の平均（電力に比例する量）が、成分ごとの 2 乗の平均の和になること（パーセバルの等式）を学びました。c_n で書くと、さらに簡単な形になります。

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

左辺は 2 乗の平均、右辺は「すべての矢印の長さの 2 乗」の和です。n 番めの成分 $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$ の 2 乗の平均は $\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ でした（9-2）。いっぽ

う、$|c_n|^2+|c_{-n}|^2=2\times\frac{a_n^2+b_n^2}{4}=\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ で、同じです。両側スペクトルでは、1 つの成分の電力を左右の 2 本の棒が半分ずつ受けもっているのです。

方形波で確かめる

高さ 1 の方形波の 2 乗はいつも 1 なので、左辺は 1 です。右辺は、$|c_n|^2=\frac{4}{n^2\pi^2}$（$n$ は奇数）を、正と負の n の両方でたします。

$$2\times\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=\frac{8}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{8}=1$$

（$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ は 9-2 で求めた値。）左辺と右辺が一致しました。$n=\pm1$ の 2 本だけで $\frac{8}{\pi^2}\approx0.811$、つまり電力の約 81 % が基本波にあります。

10 輪の形の針金の熱を解く

8-13 で学んだ熱方程式を、細い針金を丸めた**輪**で考えます。9-1 では、両はしを 0 ℃に保った棒を解きました。輪には**はしがありません**。ぐるっと 1 周すると、もとの場所にもどります。針金のまわりは熱を通さない材料でおおい、熱は針金にそってだけ流れるとします。

輪の上の熱方程式

輪の上の場所を、角 θ〔rad〕で表します。半径が R〔m〕なら、$\theta=0$ から測った針金にそった長さは $x=R\theta$ です（4-2 の弧の長さ）。だから、x での微分は「θ で微分して $\frac{1}{R}$ をかける」ことで、2 回微分すると $\frac{1}{R^2}$ がかかります。8-13 の熱方程式 $\partial T/\partial t=\alpha\,\partial^2T/\partial x^2$ は、次のようになります（α〔m²/s〕は熱拡散率、T〔℃〕は温度。周期は使わないので、T は温度の文字です）。

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\alpha}{R^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}$$

はしがない＝周期 2π

θ と $\theta+2\pi$ は同じ場所なので、温度は θ について周期 2π の関数です。だから、どの時刻でも、複素フーリエ級数で書けます。係数は時刻によって変わるので、$c_n(t)$ と書きます。

$$T(\theta,\ t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{jn\theta}$$

9-1 ⑧の棒では、両はしが 0℃なので、はしで 0 になる $\sin\frac{n\pi x}{L}$ だけを使いました（9-2 ⑩の半区間の展開）。輪にははしがないので、cos も sin も必要で、両方をまとめて書ける $e^{jn\theta}$ がぴったりです。$e^{jn\theta}$ は、θ が 2π ふえると n 周してもとにもどる矢印なので、輪の「1 周するともどる」という性質を、はじめからもっています。

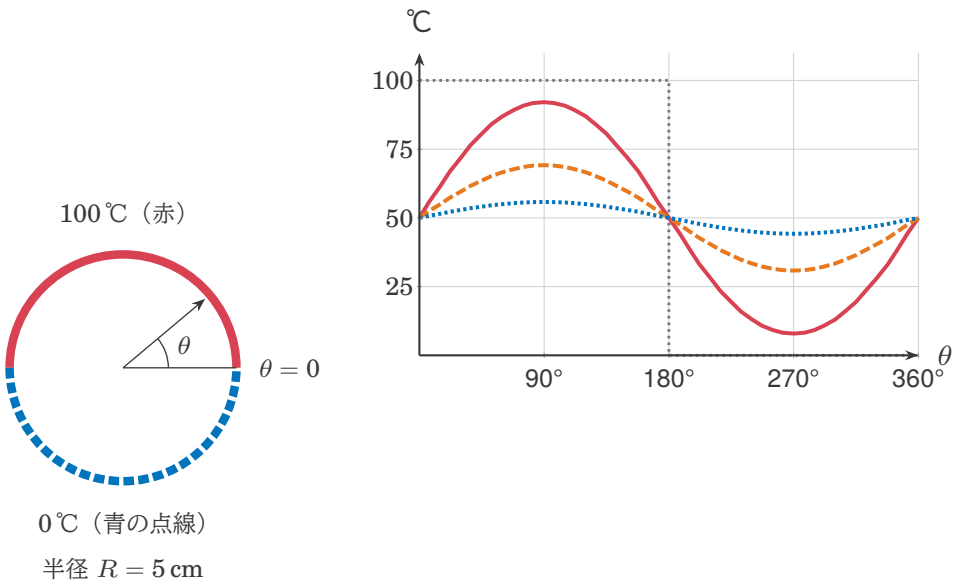


図 8　左：はじめに上半分が 100℃、下半分が 0℃の輪。場所は角 θ で表す。右：輪にそった温度。黒の細かい点線がはじめ、赤の実線が 10 秒後、オレンジの破線が 30 秒後、青の点線が 60 秒後。時間がたつと、でこぼこは $\sin\theta$ の形に近づきながら小さくなり、平均の 50℃に近づく。

分けて解いて、たし直す

$e^{jn\theta}$ を θ で 2 回微分すると、$(jn)^2 e^{jn\theta} = -n^2 e^{jn\theta}$ です（6-10）。だから、n 番めの項を熱方程式に入れると、次のようになります。

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}\, e^{jn\theta} = \frac{\alpha}{R^2}\, c_n\, (-n^2)\, e^{jn\theta} \qquad n \text{ 番めの項を入れる}$$

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha n^2}{R^2}\, c_n \qquad \text{両辺を } e^{jn\theta} \text{ でわる}$$

$$c_n(t) = c_n(0)\, e^{-\alpha n^2 t/R^2} \qquad \text{6-4 の「自分に比例してへる」式の答え}$$

場所の形 $e^{jn\theta}$ と、時間の変化 $c_n(t)$ に分かれました。これが 9-1 と同じ**変数分離**です。熱方程式は線形なので、項ごとの答えをたし直したものが、全体の答えです。

$$T(\theta,\ t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0)\, e^{-\alpha n^2 t/R^2}\, e^{jn\theta}$$

はじめの温度の c_n に、それぞれ $e^{-\alpha n^2 t/R^2}$ をかける

数を入れると

$R = 0.05\,\mathrm{m}$（半径 5 cm）、$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$（8-13 の棒と同じ）なら、$\frac{\alpha}{R^2} = \frac{1\times10^{-4}}{0.0025} = 0.04\,\mathrm{/s}$ です。

- $n = \pm1$ の項は $e^{-0.04t}$ でへる。半分になるのは $\frac{\ln 2}{0.04} \approx 17.3$ 秒ごと。
- $n = \pm2$ は $e^{-0.16t}$、$n = \pm3$ は $e^{-0.36t}$。細かいでこぼこほど n^2 に比例して速く消える（8-13 と同じ）。
- $n = 0$ の項 c_0 は、$e^0 = 1$ で、**いつまでも変わらない**。

c_0 は温度の平均です。輪からは熱が逃げないので、平均の温度は変わらず、最後は輪全体が平均の温度になります。両はしを 0℃に保った 9-1 の棒では、はしから熱が逃げるので、まん中は 9.47 秒で 50℃、10 秒で 47.45℃と下がり続

け、最後は 0℃になりました。ここが輪と棒のちがいです。図 8 の輪の温度の変わり方は、例題 8 で計算します。

せいかくに言うと

$c_{-n}=\overline{c_n}$ は、実数の波のとき

$c_{-n}=\overline{c_n}$ は、$f(t)$ が実数の値をとる波のときに成り立ちます。c_n を求める式で n を $-n$ にすると $e^{+jn\omega_0 t}$ をかけることになり、f が実数なら、これは c_n の式の虚部の符号を変えたものだからです。量子力学の波動関数のように、もともと複素数の値をとる関数では、c_{-n} と c_n は関係がなく、両側のスペクトルは左右対称になりません。

また、不連続な点（方形波の角）では、9-1 と同じく、級数は左右の値の平均に近づきます。$\sum_{n=-N}^{N}$ のように、正と負の n を同じ所まで組にしてたせば、9-1 の和と同じものです。

もっと知りたい ★★★★★

量子力学の e^{jkx}

物理の量子力学（原-5）では、電子の状態を表す波動関数に e^{jkx}（専門書では e^{ikx}）の形がよく出てきます。k は波数（8-13）で、$k>0$ なら右へ、$k<0$ なら左へ進む波を表します。音の波のように実数の波では、左回りと右回りの矢印がいつも組で出てきましたが、電子の波動関数では、片方だけの e^{jkx} が「一方向に進む電子」を表し、意味をもちます。この章の負の周波数の考えは、そのまま「負の波数」として使われます。長さ L の輪の上を回る電子の波動関数は、輪の熱と同じく $e^{j2\pi nx/L}$ の形になり、n は整数にかぎられます。

専門書をのぞいてみよう　複素フーリエ級数の専門書ふうの書き方

周期 2π の関数 f に対し $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ とおくと，$f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$．$f$ が実数値ならば $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$.

訳　i はこの本の j（数学・物理の本は i、電気の本は j）。$\hat{f}(n)$（エフ・ハット・エヌ）はこの本の c_n。積分の区間は $-\pi$ から π で、この本の「1 周期ならどこからでもよい」の 1 つ。$\sim$ は「この級数を対応させる」という印で、どの点でも等しいとはかぎらない（角の点などがあるため）。「両側スペクトル」は two-sided spectrum、「片側スペクトル」は one-sided spectrum。

ひずみ波交流 $i = I_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, I_n \sin(n\omega t + \theta_n)$．$I_n$ は第 n 調波の実効値.

訳　電気の本の書き方。「ひずみ波」は sin の形からずれた（ひずんだ）波。「第 n 調波」は n 番めの成分（高調波）。I_n は振幅を $\sqrt{2}$ でわった実効値（5-15）で、この本の c_n とは $\sqrt{2}\, I_n = 2|c_n|$ の関係。θ_n は c_n の角から決まる山の位置。I_0 は平均（c_0）。

この章で出てきたことば

複素フーリエ級数　くり返す波を、回る矢印 $e^{jn\omega_0 t}$ に c_n をかけてたした形 $\sum c_n e^{jn\omega_0 t}$ で表したもの。

複素フーリエ係数　$c_n = (a_n - jb_n)/2$。1 周期で $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけて平均したもの。

負の周波数　右回りの矢印 $e^{-j\omega t}$ の角周波数 $-\omega$。マイナスは回る向きの印。

両側スペクトル　$|c_n|$ を、負の n もふくめてならべた図。棒の高さは振幅の半分。

片側スペクトル　正の n だけで、振幅 $2|c_n|$ をならべた図。

たいせつ

c_n の 3 つの段

名前　記号を読む：何に（f）・何をかけて（$e^{-jn\omega_0 t}$。マイナス）・1 周期で・T でわる

楽をする　直す前に：cos・sin・$e^{jn\omega_0 t}$ の和で書いてある？　積やべき？　平均だけ？　周期は？

直す　区間に分けて、e の定積分（1 次式は部分積分 1 回）

$$\underset{\text{名前}}{c_n} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

場合分けの表 9-2（c_n の行のまとめ）

記号	こんなとき	直し方
J′	$e^{jn\omega_0 t}$ や cos・sin の和で書いてある	$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$、$c_{-n} = \overline{c_n}$
A	積やべき	オイラーの公式で展開
G	平均だけ	c_0 ＝面積÷ T
F	周期が 2π でない	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
J	区間ごとに一定・1 次式	e の定積分（部分積分 1 回）

使い方

回路や機械に周期の波を入れたら、出てくる c_n ＝入れる c_n ×その周波数の倍率。電力は $\sum |c_n|^2$。輪の熱は、c_n に $e^{-\alpha n^2 t/R^2}$ をかける。

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-2（c_n の行）のどの場合かを書きました。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜9 を、図 5 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。どれも、考え方の 1 行めの場合に着きます。じぶんでとこうも同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	矢印の和を実数に	f が $e^{jn\omega_0 t}$ や cos・sin の和で書いてある？	J′
2	a_n・b_n から c_n	f が $e^{jn\omega_0 t}$ や cos・sin の和で書いてある？	J′
3	$\sin^3 t$	sin・cos の積やべき？	A
4	整流した波の平均	平均 c_0 だけほしい？	G
5	0 と 2 の方形波	区間ごとに一定・1 次式？	J
6	のこぎり波	区間ごとに一定・1 次式？	J
7	50 Hz の方形波と回路	周期が 2π でない？ → 区間ごとに一定・1 次式？	F J
8	輪の熱	区間ごとに一定・1 次式？	J
9	電力の割合	f が $e^{jn\omega_0 t}$ や cos・sin の和で書いてある？	J′

表 2　例題 1〜9 の流れ図の道すじ。

記号カード　初めて出た章 9-3

c_n

読み方　シー・エヌ
意味　複素フーリエ係数。1 周期で $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけて平均した値。$\frac{a_n - jb_n}{2}$
英語　complex Fourier coefficient

記号カード　初めて出た章 9-3

$e^{jn\omega_0 t}$

読み方　イー・ジェイ・エヌ・オメガ・ゼロ・ティー
意味　n 番めの回る矢印。$n > 0$ は左回り、$n < 0$ は右回り（負の周波数）
英語　complex exponential

例題 1　回る矢印の和を、実数の式にする

次の式を、cos と sin だけの実数の式にしましょう。

$$(1)\ 2e^{j3t}+2e^{-j3t} \qquad (2)\ (1-2j)e^{jt}+(1+2j)e^{-jt}$$

考え方　**場合：** $e^{jn\omega_0 t}$ の和で書いてある（表 9-2 の J′）

名前　名前は c_n だが、ここでは積分しない。c_n は式に見えている。

楽をする　$a_n=c_n+c_{-n}$、$b_n=j(c_n-c_{-n})$ を使う。

式　(1)　$c_3=c_{-3}=2$

$a_3=2+2=4$、$b_3=j(2-2)=0$

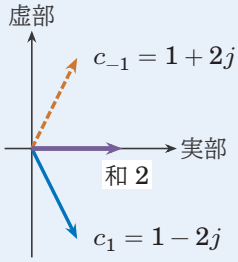
だから $4\cos 3t$

(2)　$c_1=1-2j$、$c_{-1}=1+2j$（共役の組になっている）

$a_1=(1-2j)+(1+2j)=2$

$b_1=j((1-2j)-(1+2j))=j\times(-4j)=-4j^2=4$

だから $2\cos t+4\sin t$



(2) の $t=0$ の 2 本の矢印。共役の組は、横の軸について折り返した位置にあり、和は実数 $2=a_1$ になる。

答え　(1)　$4\cos 3t$　(2)　$2\cos t+4\sin t$

じぶんでとこう 1

次の式を、cos と sin だけの実数の式にしましょう。

(1)　$5e^{j2t}+5e^{-j2t}$

(2)　$(3+j)e^{jt}+(3-j)e^{-jt}$

例題 2　a_n・b_n から c_n を求める

周期 2π の波 $f(t) = 1 + 2\cos t + 4\sin 2t$ の、0 でない c_n をすべて求め、両側スペクトルの棒の高さ $|c_n|$ を答えましょう。

考え方　**場合：**cos・sin の和で書いてある（表 9-2 の J′）

名前　名前は c_n だが、ここでは積分しない。

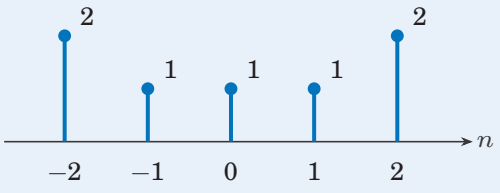
楽をする　$\frac{a_0}{2} = 1$、$a_1 = 2$、$b_2 = 4$。ほかは 0。$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$、$c_{-n} = \overline{c_n}$。

式　$c_0 = \dfrac{a_0}{2} = 1$

$$c_1 = \frac{2 - j \times 0}{2} = 1、\quad c_{-1} = \overline{1} = 1$$

$$c_2 = \frac{0 - j \times 4}{2} = -2j、\quad c_{-2} = \overline{-2j} = 2j$$

高さ：$|c_0| = 1$、$|c_{\pm 1}| = 1$、$|c_{\pm 2}| = |\mp 2j| = 2$



両側スペクトル $|c_n|$。左右対称になる。

答え　$c_0 = 1$、$c_{\pm 1} = 1$、$c_{\pm 2} = \mp 2j$。高さは $n = 0$ で 1、$n = \pm 1$ で 1、$n = \pm 2$ で 2

じぶんでとこう 2

周期 2π の波 $f(t) = 3 + 4\cos 2t - 6\sin 3t$ の、0 でない c_n をすべて求めましょう。

1

例題 3　sin のべきを、オイラーの公式で分ける

$f(t)=\sin^3 t$ の c_n を、積分しないで求めましょう。また、a_n・b_n にもどして、$\sin^3 t$ を $\sin t$ と $\sin 3t$ の和で書きましょう。

考え方　**場合：**sin の 3 乗（べき）（表 9-2 の **A**）

名前　名前は c_n だが、ここでは積分しない。

楽をする　$\sin t=\dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$ を 3 乗して展開し、e^{jnt} の前の数を読む。

式　$(2j)^3=8j^3=-8j$

$$(e^{jt}-e^{-jt})^3=e^{j3t}-3e^{jt}+3e^{-jt}-e^{-j3t}$$

$((a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ と、$e^{j2t}e^{-jt}=e^{jt})$

$$\sin^3 t=\frac{e^{j3t}-3e^{jt}+3e^{-jt}-e^{-j3t}}{-8j}$$

$\dfrac{1}{-8j}=\dfrac{j}{8}$（分母と分子に j をかけ、$j^2=-1$）

$$c_3=\frac{j}{8},\ c_1=-\frac{3j}{8},\ c_{-1}=\frac{3j}{8},\ c_{-3}=-\frac{j}{8}$$

$$b_1=j(c_1-c_{-1})=j\times\left(-\frac{6j}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

$$b_3=j(c_3-c_{-3})=j\times\frac{2j}{8}=-\frac{1}{4}$$

答え　$c_{\pm1}=\mp\dfrac{3j}{8}$、$c_{\pm3}=\pm\dfrac{j}{8}$。$\sin^3 t=\dfrac{3}{4}\sin t-\dfrac{1}{4}\sin 3t$

じぶんでとこう 3

$f(t)=\cos^3 t$ の c_n を、積分しないで求めましょう。また、$\cos^3 t$ を $\cos t$ と $\cos 3t$ の和で書きましょう。

例題 4　整流した電圧の平均 c_0

最大 1 の交流 $\sin t$ の、負の部分を 0 にした波（半波整流：$0 < t < \pi$ で $\sin t$、$\pi < t < 2\pi$ で 0）があります。平均の値 c_0 を求めましょう。

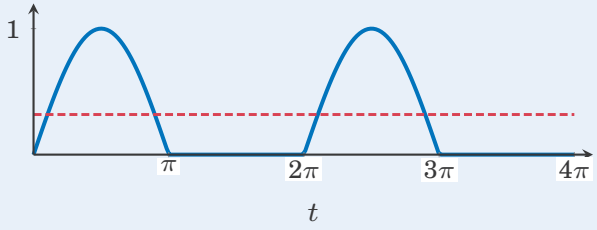
考え方　**場合：**平均だけほしい（表 9-2 の G）

名前　c_0：1 周期で $e^{-j0t} = 1$ をかけて平均、つまり、ただの平均。

楽をする　平均＝ 1 周期のグラフの面積÷周期。$\pi < t < 2\pi$ の部分は 0 なので、山 1 つ分の面積だけ。

式　山 1 つの面積 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \, dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$（5-15）

$$c_0 = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$$



赤の破線が平均 $c_0 = 0.318$。山の面積を、1 周期にならした高さ。

答え　$\dfrac{1}{\pi} \approx 0.318$（最大の値の約 32 %）

じぶんでとこう 4

$\sin t$ の負の部分を正に折り返した波（全波整流 $|\sin t|$。周期は π だが、周期 2π と見てもよい）の平均 c_0 を求めましょう。

例題 5　0 と 2 の方形波の c_n

周期 2π で、$0 < t < \pi$ では $f = 2$、$\pi < t < 2\pi$ では $f = 0$ の波の c_n を求めましょう。

考え方　**場合**：区間ごとに一定（表 9-2 の J）

名前　c_n：1 周期で f に e^{-jnt} をかけて平均（$T = 2\pi$、$\omega_0 = 1$）。

直す：ふつうの定積分　$f = 0$ の区間は 0 なので、0 から π までの積分だけ。

$n = 0$ は別に計算する。

式

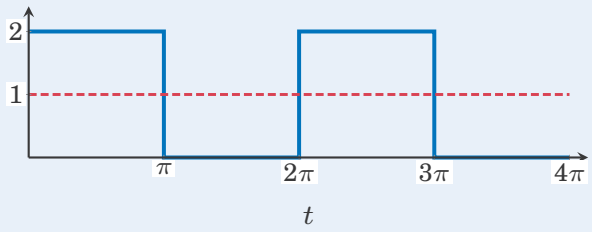
$$n = 0 : c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$n \neq 0 : c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2e^{-jnt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-jnt}}{-jn}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn} = \frac{1-(-1)^n}{jn\pi}$$

n が奇数：$\dfrac{2}{jn\pi}$。n が偶数：0



赤の破線が $c_0 = 1$（平均）。高さ 1 の方形波（± 1）を 1 だけ上げた形。

答え　$c_0 = 1$。n が奇数なら $c_n = \dfrac{2}{jn\pi}$（$c_{\pm 1} = \mp 0.637j$）、偶数なら 0

じぶんでとこう 5

周期 2π で、$0 < t < \pi$ では $f = 3$、$\pi < t < 2\pi$ では $f = 0$ の波の c_n を求めましょう。

例題 6　のこぎり波の c_n：部分積分 1 回

周期 2π で、$-\pi < t < \pi$ では $f(t) = t$ ののこぎり波の c_n（$n \neq 0$）を求め、9-1 の $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ と同じになるか確かめましょう。

考え方　**場合**：区間の中で 1 次式（表 9-2 の **J**）

名前　c_n：1 周期（$-\pi$ から π）で t に e^{-jnt} をかけて平均。

直す：ふつうの定積分　⑦の $\int te^{at}\mathrm{d}t = \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{at}$ で、$a = -jn$。

式　$\frac{1}{a} = \frac{1}{-jn} = \frac{j}{n}$、$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{(-jn)^2} = -\frac{1}{n^2}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} te^{-jnt}\,\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{jt}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$e^{-jn\pi} = e^{jn\pi} = (-1)^n$ なので

$$= \left(\frac{j\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right)(-1)^n - \left(-\frac{j\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right)(-1)^n$$

$$= \frac{2j\pi}{n}(-1)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2j\pi(-1)^n}{n} = \frac{j(-1)^n}{n}$$

確かめ：$c_{-n} = \frac{j(-1)^{-n}}{-n} = -\frac{j(-1)^n}{n}$ なので

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j \cdot \frac{2j(-1)^n}{n} = \frac{-2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

答え　$c_n = \frac{j(-1)^n}{n}$（$c_1 = -j$、$c_2 = 0.5j$、$c_3 = -0.333j$）。9-1 の b_n と一致する

じぶんでとこう 6

周期 2π で、$-\pi < t < \pi$ では $f(t) = 3t$ ののこぎり波の c_n（$n \neq 0$）を求めましょう。

例題 7　50 Hz の方形波をローパスフィルターに通す

高さ 1 の 50 Hz の方形波（前の半周期が 1、後ろの半周期が -1）の c_n を求めましょう。次に、この波を、折れ点 100 Hz のローパスフィルターに入れたとき、出てくる波の 50 Hz と 150 Hz の成分の振幅を求めましょう。

考え方　**場合：**周期 0.02 s で、区間ごとに一定（表 9-2 の F と J）

名前　c_n：1 周期 T で f に $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけて平均。

楽をする　$T = \dfrac{1}{50} = 0.02\,\mathrm{s}$、$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 100\pi\,\mathrm{rad/s}$。

直す：ふつうの定積分　$\theta = \omega_0 t$ と置く（5-16 の置換積分。$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta/\omega_0$、$\theta$ は 0 から 2π まで）。

式　$c_n = \dfrac{1}{T\omega_0}\displaystyle\int_0^{2\pi} f e^{-jn\theta}\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f e^{-jn\theta}\,\mathrm{d}\theta$　$(T\omega_0 = 2\pi)$

周期 2π の方形波と同じなので、⑤から $c_n = \frac{2}{jn\pi}$（奇数）、偶数は 0

倍率は $1/(1 + jn\omega_0\tau)$、$n\omega_0\tau = n \times \frac{50}{100} = 0.5n$

50 Hz：倍率の大きさ $1/\sqrt{1.25} = 0.894$、$1.273 \times 0.894 = 1.139$

150 Hz：倍率の大きさ $1/\sqrt{3.25} = 0.555$、$0.424 \times 0.555 = 0.235$

答え　$c_n = \dfrac{2}{jn\pi}$（奇数）。50 Hz は約 1.14、150 Hz は約 0.24（150 Hz のほうが大きく減る）

じぶんでとこう 7

高さ 1 の 25 Hz の方形波を、同じフィルター（折れ点 100 Hz）に入れたとき、出てくる波の 25 Hz と 75 Hz の成分の振幅を求めましょう。

例題 8　輪の熱

半径 5 cm の細い輪（熱拡散率 $\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$、まわりは熱を通さない）の上半分（$0 < \theta < \pi$）が 100 ℃、下半分（$\pi < \theta < 2\pi$）が 0 ℃の状態から始めます。(1) はじめの温度の c_n を求めましょう。(2) 上半分のまん中（$\theta = \frac{\pi}{2}$）が 60 ℃になるのは何秒後か、$n = \pm 1$ の項だけで求めましょう。(3) 十分に時間がたつと、輪は何℃になりますか。(4) $n = \pm 1$ の項が半分になる時間を求めましょう。

考え方　**場合：**はじめの温度が区間ごとに一定（表 9-2 の J）

名前　c_n：θ について 1 周期（0〜2π）で $e^{-jn\theta}$ をかけて平均。

直す：ふつうの定積分　0 ℃の区間は 0。0 から π までの積分だけ（例題 5 の 2 を 100 にした形）。

式　(1) $c_0 = \dfrac{100\pi}{2\pi} = 50$

$c_n = \dfrac{100}{2\pi} \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{jn}$ で、奇数なら $\dfrac{100}{jn\pi}$、偶数なら 0

(2) $\dfrac{\alpha}{R^2} = \dfrac{1 \times 10^{-4}}{0.05^2} = 0.04\,\mathrm{/s}$

$n = \pm 1$ の 2 つの項：$\dfrac{100}{j\pi} e^{-0.04t} e^{j\theta} + \dfrac{100}{-j\pi} e^{-0.04t} e^{-j\theta}$

$= \dfrac{100}{\pi} e^{-0.04t} \cdot \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j} = \dfrac{200}{\pi} e^{-0.04t} \sin\theta$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で：$50 + 63.66\, e^{-0.04t} = 60$

$e^{-0.04t} = \dfrac{10}{63.66} = 0.1571$

$t = \dfrac{\ln(63.66/10)}{0.04} = \dfrac{1.851}{0.04} \approx 46.3$

(3) $n \neq 0$ の項はすべて 0 に近づき、$c_0 = 50$ だけが残る

(4) $e^{-0.04t} = \dfrac{1}{2}$ から $t = \dfrac{\ln 2}{0.04} = \dfrac{0.693}{0.04} \approx 17.3$

答え　(1) $c_0 = 50$、奇数で $c_n = \frac{100}{jn\pi}$、偶数で 0　(2) 約 46 秒後　(3) 50 ℃　(4) 約 17 秒

（2）で $n=\pm3$ の項は $\frac{200}{3\pi}e^{-0.36t}$ で、46 秒後には 10^{-6} ℃ほどしかありません。だから 1 項だけで十分です（すべての項をたした計算でも 46.3 秒）。

じぶんでとこう 8

例題 8 と同じ輪とはじめの温度で、（1）上半分のまん中が 70 ℃になるのは何秒後か、$n=\pm1$ の項だけで求めましょう。（2）$n=\pm3$ の項が半分になる時間を求めましょう。

例題 9　基本波にある電力の割合

高さ 1 の方形波は、⑤から $f(t)=\sum_{n\text{ は奇数}}\frac{2}{jn\pi}e^{jnt}$ と書けます。$n=\pm1$・±3・±5 の成分だけで、全体の電力（2 乗の平均＝ 1）の何 % になるか求めましょう。

考え方　**場合：** $e^{jn\omega_0 t}$ の和で書いてある（表 9-2 の J′）

名前　名前は c_n だが、ここでは積分しない（c_n は式に見えている）。

楽をする　⑨の $\sum|c_n|^2$ を、正と負の n の両方でたす。

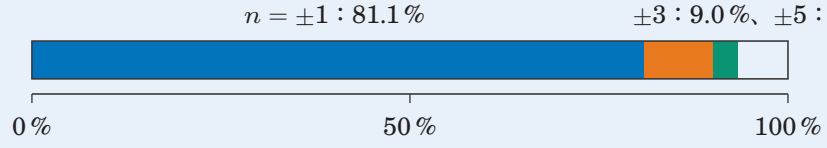
式　$|c_n|^2=\dfrac{4}{n^2\pi^2}$、　$\dfrac{4}{\pi^2}=0.4053$

$$n=\pm1：2\times0.4053=0.8106$$

$$n=\pm3：2\times\frac{0.4053}{9}=0.0901$$

$$n=\pm5：2\times\frac{0.4053}{25}=0.0324$$

合計 $0.8106+0.0901+0.0324=0.9331$



答え　約 93 %（5 番めまでの成分で、電力の 93 %）

じぶんでとこう 9

例題 9 と同じ方形波 $f(t)=\sum_{n\text{ は奇数}}\frac{2}{jn\pi}e^{jnt}$ で、$n=\pm1\cdot\pm3$ の成分だけで、全体の電力の何 % になるか求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 名前の式から、そのまま c_n を読もうとする

✕ $c_n=\frac{1}{T}f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}$（$t$ が残る）

○ 1 周期で積分して、t の入らない数にする

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}2e^{-jnt}\,\mathrm{d}t=\frac{1-(-1)^n}{jn\pi}$$

c_n は「かけて、1 周期で平均する」という操作の名前です。平均した結果は、t によらない数です。

まちがえやすいところ

② c_n に $\frac{2}{T}$ をつける

✕ $c_n=\frac{2}{T}\int_0^{T}f\,e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$

○ $c_n=\frac{1}{T}\int_0^{T}f\,e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$

$e^{jn\omega_0 t}\times e^{-jn\omega_0 t}=1$ で、平均は 1。2 倍はいりません（a_n・b_n は $\frac{2}{T}$）。

まちがえやすいところ

③ 両側スペクトルの高さを振幅と読む

✕ 方形波の基本波の振幅は 0.637

○ 振幅は $2|c_1|=1.273$

負の周波数の棒にも同じ高さがあり、2 本で 1 つの波です。

⚠ まちがえやすいところ

④ $e^{-jn\omega_0 t}$ のマイナスを忘れる

× $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f e^{+jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$ を c_n とする

○ かけるのは右回り $e^{-jn\omega_0 t}$

マイナスを忘れると c_{-n}（共役）が出て、sin の成分の符号が逆になります。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ c_{-n} を $-c_n$ にする

× $c_1 = 1 - 2j$ なら

$c_{-1} = -1 + 2j$

○ $c_{-1} = \overline{c_1} = 1 + 2j$

実数の波では、c_{-n} は c_n の共役（虚部だけ符号が変わる）です。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $\frac{1}{j} = j$ としてしまう

× $\dfrac{1}{-8j} = -\dfrac{j}{8}$

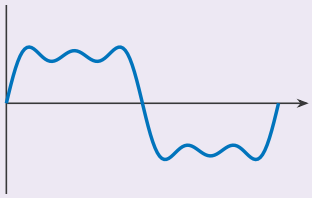
○ $\dfrac{1}{-8j} = \dfrac{j}{-8j^2} = \dfrac{j}{8}$

$\frac{1}{j} = -j$ です（$j \times (-j) = -j^2 = 1$ で確かめられる）。符号のまちがいは、sin の成分の向きを逆にします。

物理・工学ではこう使う

交流のフェーザは、c_n の 1 本

6-10 で、50 Hz の交流を回る矢印（フェーザ）で表しました。それは、c_n のうちの $n=1$ の 1 本だけを見たものです。家の電気製品には、電流がきれいな sin の形でなく、ひずんだ形で流れるものがあります（電源の回路で、電流が短い時間に集まって流れるものなど）。そのような電流は、50 Hz・150 Hz・250 Hz…の矢印の組 c_n で表し、成分ごとにフェーザの計算をして、たし直します。



ひずんだ電流

音のフィルターとイコライザー

スマホや音楽プレーヤーの音の調整（イコライザー）は、低い音・高い音の成分ごとに倍率を変えるしくみです。⑧のローパスフィルターのように、「成分ごとにかけ算」で考えます。周期の音なら c_n に倍率をかけたものが、出てくる音の c_n です。くり返さない音には、次の 9-4 のフーリエ変換を使います。

たくさんの sin をたして音を作る

電子楽器の中には、いろいろな周波数の成分をたし合わせて音色を作るものがあります（加算合成とよばれる方法）。どの n に、どんな大きさと角の c_n を置くかを決めることが、音色を決めることになります。

コラム　フーリエと、輪の熱

フーリエは、1822 年の本『熱の解析的理論』(6-3) の中で、熱が伝わるいろいろな形の物を調べました。その 1 つの章が「輪の中の熱の動き」です。はしのない輪では、温度は 1 周でもとにもどる形になり、それを三角関数の和で表して解きました。この章の⑩は、その問題を、オイラーの公式 (6-10) を使った複素数の形で解き直したものです。同じ本の中で、フーリエは棒・球・円柱・立方体の熱も調べています。どれも「分けて解いて、たし直す」方法で、形に合った関数の和で温度を表しました。

章末問題　9-3 のまとめ

基本 ★★★★★

1　$(2-j)e^{j2t}+(2+j)e^{-j2t}$ を、cos と sin だけの実数の式にしましょう (例題 1)。

2　周期 2π の波 $f(t)=2-6\cos t+8\sin 3t$ の、0 でない c_n をすべて求めましょう (例題 2)。

3　$f(t)=\cos^2 t$ の c_n を、オイラーの公式を使って積分しないで求め、$\cos^2 t$ を定数と $\cos 2t$ の和で書きましょう (例題 3)。

4　周期 2π で、$0<t<\pi$ では $f=4$、$\pi<t<2\pi$ では $f=0$ の波の平均 c_0 と、c_n ($n\neq 0$) を求めましょう (例題 4・例題 5)。

5　半径 10 cm の輪 ($\alpha=1\times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$) で、例題 8 と同じはじめの温度 (上半分 100 ℃、下半分 0 ℃) から始めます。$n=\pm 1$ の項が半分になる時間と、上半分のまん中が 60 ℃になる時刻を、$n=\pm 1$ の項だけで求めましょう (例題 8)。

チャレンジ ★★★★★

6 周期 2π で、$-\pi < t < \pi$ では $f(t) = 2t$ の波の c_n（$n \neq 0$）を求め、b_n にもどしましょう（例題 6）。

7 高さ 1 の 100 Hz の方形波を、折れ点 100 Hz のローパスフィルターに入れたとき、出てくる波の 100 Hz・300 Hz・500 Hz の成分の振幅を求めましょう（例題 7）。

8 高さ 1 の方形波で、$n = \pm 1$ の成分だけで全体の電力の何 % になるか求めましょう。また、残りの電力は、どの成分にありますか（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 反対向きに回る 2 本の矢印をたすと cos の波になることを作図で確かめ、「負の周波数」の意味を言える。 → 127 ページ
- ☐ a_n・b_n から複素フーリエ係数 $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ を求め、両側のスペクトルを読める。 → 130 ページ
- ☐ 場合分けの表を使って c_n を e の定積分で求め、回路に入れた周期の波や、輪の形の針金の熱を計算できる。 → 137 ページ

ソラ

回る矢印 2 本で cos になるって、6-10 の図がここで生きたね。次は、くり返さない音も周波数に分けるフーリエ変換だよ。

第 1 部　フーリエ解析

★★★★★

9-4 スペクトル：フーリエ変換

道しるべ　この章の前に 3-12 3-14 3-17 5-14 6-10 8-6 9-3
この章の先に 9-5 9-12

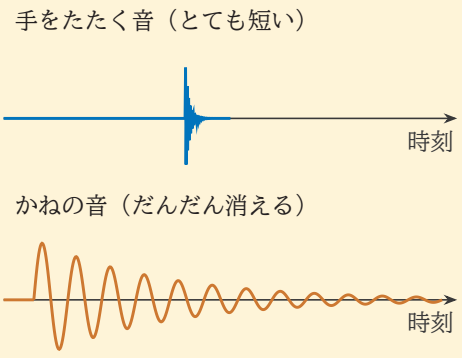
この章でできるようになること

- ★★★ 口笛・声・手をたたく音のスペクトルのちがいを説明でき、短いパルスほどスペクトルが広がることを言える。
- ★★★★ フーリエ変換 $F(\omega)$ の記号を読み、方形パルスの変換をふつうの定積分で求め、表計算の和で確かめられる。
- ★★★★★ 場合分けの表を使って変換を求め、DFT・FFT の結果を読み、サンプリング定理とエイリアシングを説明できる。

はてな？

手を 1 回たたいた「パン」という音や、だんだん消えていくかねの音は、くり返しません。

くり返さない音にも、スペクトル（周波数の成分）はあるのでしょうか。



9-1〜9-3 では、くり返す波を、基本の周波数の 1 倍・2 倍・3 倍…の成分に分け、その成分を c_n で表しました。くり返す波のスペクトルは、とびとびの位置に立つ棒（線）でした。この章では、くり返さない波の成分の表し方を作ります。

それが**フーリエ変換**です。名前は「変換」ですが、することは 9-3 と同じ「かけて、たす」です。

フーリエ変換は、音声の分析、スマホの音や画像の処理、機械の故障の見つけ方、電波の通信など、身のまわりの多くの機械の中で使われています。それらの機械の中では、録音した音のような「とびとびの数のデータ」を、FFT とよばれる速い計算で変換しています。この章の後半では、データを変換する方法（DFT と FFT）と、データをとるときの大事な約束（サンプリング定理）を学びます。

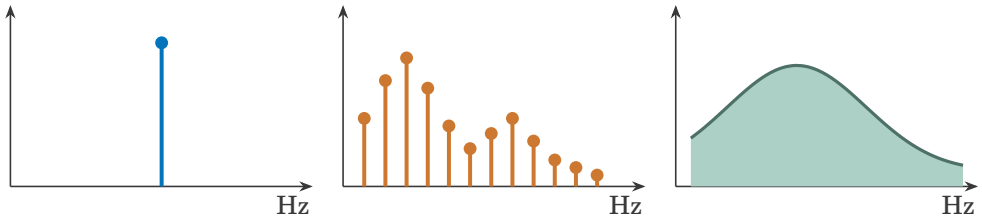
この章は、第 9 巻の第 1 部のまとめで、新しいことがたくさん出てきます。1 回で全部わからなくても大丈夫です。まず「目でわかる」の図をながめて、全体の形をつかみましょう。

やってみよう　スマホで、いろいろな音のスペクトルを見よう

スマホには、マイクで拾った音のスペクトルを表示するアプリがあります（「スペクトラムアナライザー」「周波数分析」などの名前）。横軸が周波数（Hz）、たて軸がその成分の大きさです。

1. 静かな部屋でアプリを開き、何も音を出さないときの画面を見ておく（まわりの小さな音）。
2. 口笛を、同じ高さで 3 秒くらい続けてふく。
3. 「あー」と声を出す。次に「いー」と声を出して、ちがいを見る。
4. 手を 1 回たたく。画面を止められるアプリなら、たたいた直後で止める。
5. ②〜④で、成分が「1 本の線」「等間隔に並ぶ線」「広い帯」のどれに近いかを書きとめる。

結果は、だいたい図 1 のようになります。数は人や部屋によってちがうので、自分の結果と形だけくらべましょう。



口笛　　声「あー」　　手をたたく

図 1　いろいろな音のスペクトル（形を見るための作った例。数は書いていない）。口笛は 1 本の線。声は等間隔に並ぶ線で、線の高さに山（フォルマント）がある。手をたたく音は、線ではなく広い帯になる。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 9-3　くり返す波は $\sum c_n e^{jn\omega_0 t}$。$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, \mathrm{d}t$（かけて平均）。
- 5-14　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-at}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a}$（$a > 0$）。$\infty$ までの積分は、上のはしを大きくした先。
- 8-6　ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$。
- 3-14　標準偏差 σ は、ばらつきのはば。
- 3-17　正規分布のグラフは、つりがねの形。はばは標準偏差で決まる。
- 3-8　平方完成：$x^2 + 2bx = (x+b)^2 - b^2$。

数学の道具

目でわかる　線がつながって帯になる　★★★

1 3 つの音のスペクトルのちがい

やってみようの 3 つの音は、スペクトルの形がはっきりちがいました。

- **口笛**は、sin の波に近い音です。1 つの周波数だけなので、スペクトルは 1 本の線になります（9-3 の $\sin\omega t$ の線を、正の周波数の側だけ見たもの）。
- **声**は、のどの声帯が同じ間かくでふるえて出る、くり返す波です。くり返す波は、基本の周波数の 1 倍・2 倍・3 倍…の成分の和（9-1）なので、スペクト

ルは等間隔の線です。線の間かくが、声の高さ（基本の周波数）です。線の高さの山（フォルマント）は、口の形で変わり、「あ」と「い」のちがいになります。

- **手をたたく音**は、くり返しません。スペクトルは線ではなく、すきまのない**広い帯**になります。

くり返さない音のスペクトルは、なぜ「帯」になるのでしょうか。それを、次の②で見ていきます。

② くり返す間かくをのばしていくと

高さ 1、はば 2（$-1 < t < 1$）のパルスが、周期 T ごとにくり返す波を考えます。パルスとパルスの間かくをのばしていき、最後は「1 回しかないパルス」にします。

9-3 の c_n を求めます。1 周期の中で 0 でないのは $-1 < t < 1$ だけなので、そこだけ積分します（$n \neq 0$、$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$）。

$$Tc_n = \int_{-1}^{1} e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_{-1}^{1} \qquad \text{9-3 の式の両辺に } T \text{ をかけた}$$

$$= \frac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{jn\omega_0} \qquad \text{上のはし－下のはし。符号を整理}$$

$$= \frac{2\sin n\omega_0}{n\omega_0} \qquad \text{6-10 の } e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$$

ここでは、c_n ではなく、T をかけた Tc_n を棒の高さにします。なぜ T をかけるのかは、③で説明します。$n\omega_0$ を ω と書くと、Tc_n は「$\frac{2\sin\omega}{\omega}$ という 1 つの曲線の、$\omega = n\omega_0$ の所の値」です。

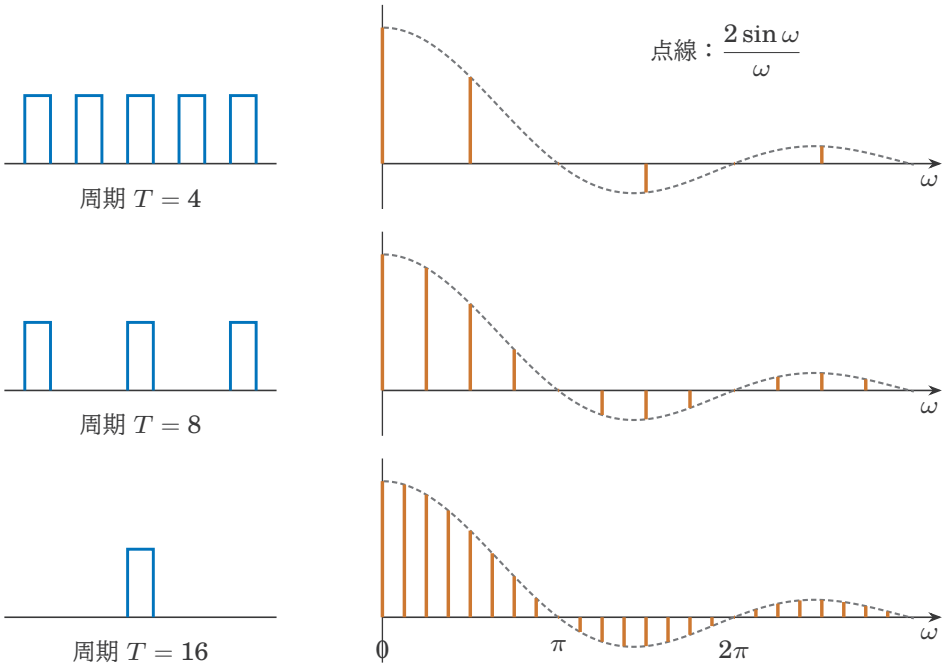


図 2　左：はば 2 のパルスが、周期 $T=4$、8、16 でくり返す波。右：Tc_n の棒（オレンジ）を、角周波数 $\omega=n\omega_0$ の所に立てた。棒の先は、いつも同じ曲線（灰色の点線）の上にある。周期をのばすと、棒の間かく $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ がつまっていく。

図 2 を見ると、次のことがわかります。

- 棒の先は、周期を変えても、いつも同じ曲線 $2\sin\omega/\omega$ の上にある。曲線の形は、パルス 1 つの形で決まっている。
- 周期を 2 倍にすると、棒の間かく $\omega_0=2\pi/T$ は半分になり、棒の数が 2 倍になる。
- 周期を限りなく長くした先（くり返さない、1 回だけのパルス）では、棒の間かくが 0 になり、棒が曲線をすきまなくうめる。

くり返さない波のスペクトルは、とびとびの棒ではなく、すきまのない**曲線**になるのです。やってみようの手をたたく音が「帯」に見えたのは、このためです。

手でわかる 定義と、方形パルス ★★★★

③ フーリエ変換の定義

②の Tc_n は、周期を限りなく長くした先で、ω の関数になりました。この関数を $F(\omega)$ と書き、$f(t)$ の**フーリエ変換**（フーリエへんかん）といいます。9-3 の式の両辺に T をかけ、周期を限りなく長くすると、積分の区間「1 周期」は「$-\infty$ から ∞ まで」になり、$n\omega_0$ は ω になります。

$$\underbrace{F(\omega)}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

①名前の段 記号を読む：何に・何をかけて・どこからどこまで

1. **何に**：$f(t)$ は、くり返さなくてよい、時間の関数（音・電圧・振動など）です。
2. **何をかけて**：右回りの矢印 $e^{-j\omega t}$。9-3 と同じく、角周波数 ω の成分を「止める」ための矢印です。
3. **どこからどこまで**：$-\infty$ から ∞ まで。すべての時刻でたします。
4. **何でわるか**：わらない（9-3 の $\frac{1}{T}$ がない）。

なぜ $\frac{1}{T}$ をつけないのか

9-3 の c_n は「1 周期の平均」でした。②のパルスでは、周期 T を長くするほど、1 周期の中でパルスがある時間の割合が小さくなるので、c_n はどんどん 0 に近づきます。$T=4$ の c_1 は 0.318、$T=16$ の c_1 は 0.122 です。平均をとると、長くした先ではすべて 0 になってしまい、形が見えません。だから T をかけて、「平均」ではなく「1 周期の合計」の大きさで見ます。

$F(\omega)$ は名前

$F(\omega)$ は、「$-\infty$ から ∞ まで、f に $e^{-j\omega t}$ をかけてたす」という操作の**名前**です。$-\infty$ から ∞ までといっても、実際には f が 0 でない所だけを積分すればよいことが多く、ふつうの定積分に**直して**計算します。どう直すかは、f の形で決まります（⑥の表）。

$F(\omega)$ は、ふつうは複素数です。大きさ $|F(\omega)|$ が「角周波数 ω の成分がどれだけあるか」、角が「その成分の山の位置」を表します。スペクトルのグラフは、ふつう大きさ $|F(\omega)|$ をかきます。また、f が実数なら、9-3 と同じく $F(-\omega)$ は $F(\omega)$ の共役です。だから、大きさのグラフは $\omega = 0$ について左右対称で、正の側だけを見れば十分です。

④ 方形パルスの変換

②のパルス 1 つ（高さ 1、$-1 < t < 1$ で 1、それ以外は 0）を変換します。

②直す段　ふつうの定積分に直す

$-1 < t < 1$ の外では $f = 0$ なので、そこは積分しても 0 です。$-\infty$ から ∞ までの積分は、-1 から 1 までのふつうの定積分になります（$\omega \neq 0$）。

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{0 でない区間だけ}$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-j\omega} - e^{j\omega}}{-j\omega} \qquad e^{at} \text{ の積分（} a = -j\omega \text{）}$$

$$= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{2j\sin\omega}{j\omega} \qquad \text{分子と分母に } -1 \text{ をかける。 6-10}$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega} \qquad j \text{ を約分}$$

②の点線の曲線と同じ式になりました。$\omega = 0$ のときは、$F(0) = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t = 2$ です（$\frac{2\sin\omega}{\omega}$ も、ω を 0 に近づけると 2 に近づく：5-15）。

グラフから読めること

- $F(0)=2$ は、パルスのグラフの**面積**（高さ 1 ×はば 2）です。$e^{-j0t}=1$ なので、$F(0)$ はいつも「f のグラフの面積」になります。
- はじめて 0 になるのは $\sin\omega=0$ となる $\omega=\pi$（約 3.14 rad/s）です。
- はばを半分（$-0.5<t<0.5$）にすると、同じ計算で $F(\omega)=\frac{2\sin 0.5\omega}{\omega}$ になり、$F(0)=1$、はじめて 0 になるのは $\omega=2\pi$ です。グラフのはばが 2 倍に広がります。

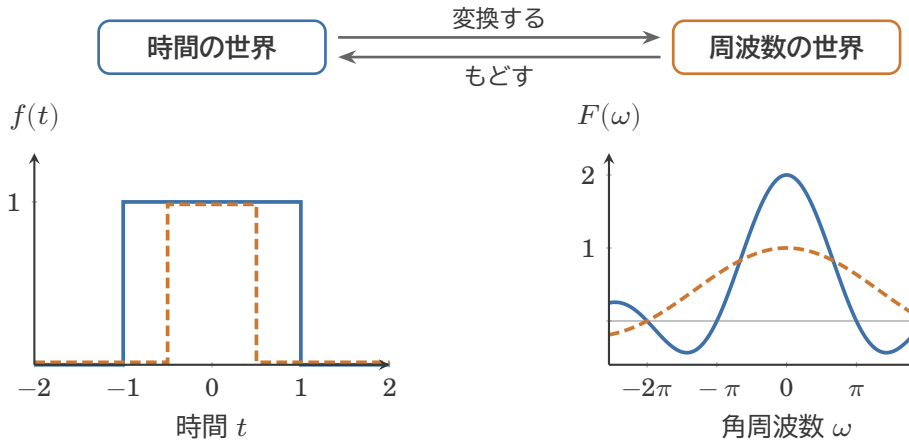


図 3　2 つの世界で見た方形パルス。左（時間の世界）：高さ 1、はば 2 のパルス（青の実線）と、はば 1 のパルス（オレンジの破線）。右（周波数の世界）：それぞれのフーリエ変換 $2\sin\omega/\omega$（青の実線。$\omega=0$ で 2）と $2\sin 0.5\omega/\omega$（オレンジの破線。$\omega=0$ で 1）。時間のはばを半分にすると、スペクトルのはばは 2 倍に広がる。

はてな？ の答え：くり返さない音にも、スペクトルはあります。くり返さないので、とびとびの線ではなく、すきまのない曲線（帯）になります。手をたたく音は、とても短いパルスに近い音です。パルスは短いほど、スペクトルが広い周波数に広がるので、手をたたく音のスペクトルは広い帯になります。かねの音は、1 つの周波数でゆれながら、長い時間かけて消えていくので、その周波数の所に、細い山ができます（⑧の図 6）。

短いほど広い

図 3 のように、時間の世界でせまい（短い）ものは、周波数の世界で広くなり、時間の世界で広い（長い）ものは、周波数の世界でせまくなります。これは、どんな形の波でも成り立つ大事な性質で、⑨でもう一度確かめます。

5 表計算で、かけてたす

④の答えを、表計算で確かめます。$-1 < t < 1$ を、はば $\Delta t = 0.25$ の 8 つの区間に分け、区間のまん中の時刻 t_i で $f(t_i)\, e^{-j\omega t_i}\, \Delta t$ を計算してたします（5-10 の細かく分けてたす方法）。$\omega = 1$ とします。

$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$ なので、実部は $\cos t_i$、虚部は $-\sin t_i$ の和です。虚部は、左右対称な場所の $-\sin t_i$ と $-\sin(-t_i) = \sin t_i$ が打ち消しあうので 0 になります。だから実部だけを計算します。B2 に `=COS(1*A2)*0.25` と入れて、B9 までコピーし、B10 に合計を出します。

	A	B
1	時刻 t_i（区間のまん中）	$\cos(1 \times t_i) \times 0.25$
2	−0.875	0.1601
3	−0.625	0.2024
4	−0.375	0.2326
5	−0.125	0.2480
6	0.125	0.2480
7	0.375	0.2326
8	0.625	0.2024
9	0.875	0.1601
10	合計	1.6873

表 1　方形パルスのフーリエ変換 $F(1)$ を、8 つの区間の和で近づけた。式の値 $2 \sin 1 = 1.6829$ に近い。

合計は 1.6873 で、④の式の値 $F(1) = 2\sin 1 \approx 1.6829$ に近い値です。区間を 20 こ（$\Delta t = 0.1$）にすると 1.6836 になり、さらに近づきます。式で求めた値と、細かく分けてたした値が一致しました。

ここまでで十分

くり返さない波のスペクトルはすきまのない曲線になること、フーリエ変換 $F(\omega)$ は「$e^{-j\omega t}$ をかけて、すべての時刻でたす」操作の名前で、方形パルスなら 0 でない区間のふつうの定積分に直せること、短いパルスほどスペクトルが広がることがわかれば十分です。この先は、いろいろな形の変換と、データの変換です。

∂ 式でわかる 形で直し方を選ぶ・データの変換 ★★★★★

6 もとの波にもどす式

9-3 では、c_n をたせば、もとの波にもどりました。フーリエ変換も、もとにもどせます。9-3 のもどす式を、Tc_n を使って書きなおします。

$$f(t) = \sum_n c_n\, e^{jn\omega_0 t} = \sum_n Tc_n\, e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T}$$

9-3 の式。T をかけて T でわる

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n Tc_n\, e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

入れる

ω_0 は、となりの棒との間かく（ω のきざみ）です。周期を長くすると、「高さ×きざみ」の和は、5-10 と同じく積分になります。Tc_n は $F(\omega)$ に近づくので、次の式になります。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

この式を**逆フーリエ変換**（ぎゃくフーリエへんかん）といいます。かける矢印は左回り $e^{j\omega t}$（マイナスがない）で、前に $\frac{1}{2\pi}$ がつきます。

もどす式で、方形パルスにもどるか確かめる

④の方形パルスの $F(\omega) = 2\sin\omega/\omega$ を、もどす式に入れます。ただし、ω を $-\infty$〜∞ まで全部たさずに、$-W$ から W までだけたしてみます（積分は Python で数値で計算した）。

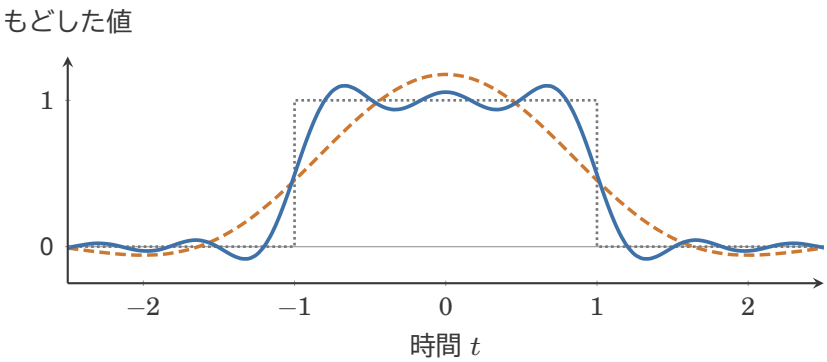


図 4　もどす式の ω を $-W$〜W までだけたした値。灰色の点線がもとのパルス、オレンジの破線が $W = 3$、青の実線が $W = 10$。たす ω の範囲を広げるほど、もとのパルスに近づく（角の近くの小さな山は、9-1 のギブズ現象と同じ）。

たす範囲を広げるほど、もとのパルスに近づきました。高い周波数の成分ほど、角のような急な変化を作ります。9-1 で、方形波の角を作るには細かい sin がたくさん必要だったのと同じです。

2π の置き場所は、本によってちがう

変換する式に $\frac{1}{2\pi}$ をつけないかわりに、もどす式に $\frac{1}{2\pi}$ がつきました。この本では、電気・制御の本に多いこの形を使います。数学や物理の本には、2 つの式の両方に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ をつけたり、ω のかわりに周波数（Hz）を使って 2π を肩に入れたりする書き方もあります（専門書をのぞいてみようの表）。どの形でも、変換してもどすと、もとの f にもどります。ほかの本の式を使うときは、2π がどこにあるかを、はじめに確かめましょう。

7 場合分けの表と流れ図

フーリエ変換を求める方法は、f の形によって変わります。9-2・9-3 と同じく、「こんなときは、こう求める」を表 9-4（記号 A～G）と流れ図にまとめました。A～D がふつうの定積分に直す場合、E は性質の表を引く場合、F・G は積分しないで楽をする場合です。E の性質の表は⑩にあります。

流れ図の使い方：方形パルス

④の方形パルス（$-1 < t < 1$ で 1）を、図 5 の流れ図でたどります。

1. 名前の段：f ＝高さ 1、はば 2 のパルス。$-\infty$ から ∞ まで $e^{-j\omega t}$ をかけてたす。
2. 式がなく、はかった値だけ？ いいえ（式で書ける）。くり返す波？ いいえ（1 回だけ）。
3. 知っている形を、ずらした・cos をかけた？ いいえ（まん中が $t = 0$ で、cos もかかっていない）。
4. 0 でない所が有限の区間？ はい（$-1 < t < 1$ だけ）。

こうして場合 A に決まります。④でしたとおりです。

場合分けの表 9-4　フーリエ変換：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
G	式がなく、はかった値だけ（録音・測定したとびとびの値）	楽をする　積分しない。DFT $X_k = \sum x_m e^{-j2\pi km/N}$。計算は FFT（⑫・⑬）	8・9・10
F	くり返す波（sin・cos の和、方形波など）	楽をする　積分しない。9-3 の c_n で、$\pm n\omega_0$ に立つ線のスペクトル（⑪）	7
E	知っている形を、ずらした・cos をかけた	楽をする　性質の表を引く（⑩。のばした・微分したときも表を使える）。このあと下の問いへ（もとの形の変換を求める）	5・6
A	0 でない所が有限の区間だけ（パルス）	ふつうの定積分　その区間のふつうの定積分。$F(0)$ ＝面積	1・5
D	ガウスの形 $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	ふつうの定積分　肩を平方完成し、ガウス積分 $\sqrt{\pi}$（8-6）	4・6
B	$t \geqq 0$ だけの e^{-at}（だんだん消える）	ふつうの定積分　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+j\omega}$（5-14 の広義積分）	2
C	両側の $e^{-a\lvert t\rvert}$	ふつうの定積分　$t<0$ と $t>0$ に分けて B を 2 回：$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$	3

流れ図の最後の「いいえ」（どの形でもない）は、式があっても、表計算で細かく分けてたす（⑤の方法。G と同じ考え）。

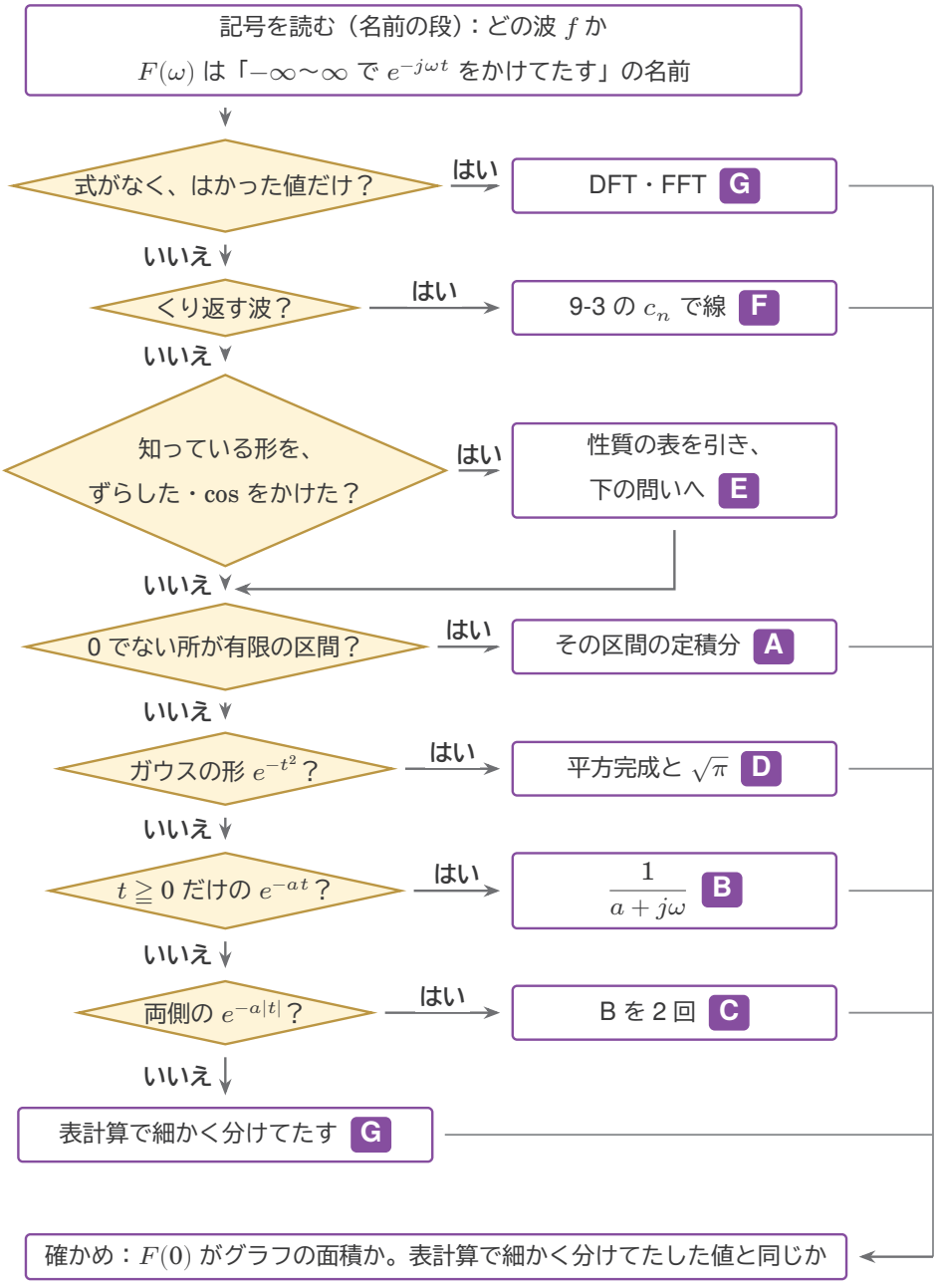


図 5　フーリエ変換の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 3 つの問い（G・F・E）が楽をする段、その下が直す段。E のあとは左の列の次の問いへもどる。計算した四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

どの場合かな？

次のフーリエ変換は、どの場合でしょう。流れ図を上からたどって考えましょう。

1. マイクで録音した声のデータのスペクトル

   答え：G。式がなく、はかった値だけ。

2. $t \geqq 0$ で $5e^{-0.1t}$、$t < 0$ で 0 の電圧

   答え：B。$t \geqq 0$ だけの e^{-at}。

3. $1 < t < 2$ で 1、それ以外で 0 のパルス

   答え：E→A。$-0.5 < t < 0.5$ のパルスをずらした形。

4. e^{-t^2}

   答え：D。ガウスの形。

8 場合 B：だんだん消える音

$t \geqq 0$ で $f(t) = e^{-at}$（$a > 0$）、$t < 0$ で $f = 0$ の波は、スイッチを入れた瞬間から、だんだん小さくなる電圧や音です。$t < 0$ の部分は 0 なので、0 から ∞ までの積分になります。

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad t < 0 \text{ の部分は } 0$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{肩のたし算（6-10）}$$

$$= \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} \qquad e^{bt} \text{ の積分（} b = -(a+j\omega)\text{）}$$

$$= 0 - \frac{1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \qquad t \to \infty \text{ で } e^{-at} \to 0 \text{（5-14）}$$

$t \to \infty$ で 0 になるのは、$e^{-(a+j\omega)t} = e^{-at}e^{-j\omega t}$ の大きさが e^{-at}（回る矢印 $e^{-j\omega t}$ の大きさは 1）で、$a > 0$ なら 0 に近づくからです。大きさは

$$|F(\omega)| = \frac{1}{|a+j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

で、$\omega = 0$ で最大の $\frac{1}{a}$、$\omega = a$ でその $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍です。速く消える（a が大きい）ほど、スペクトルは広くなります（④の「短いほど広い」と同じ）。9-3 のローパス

フィルターの倍率 $\frac{1}{1+j\omega\tau}$ と同じ形が出てきたのは、偶然ではありません（9-6・9-8 で学びます）。

かねの音：ゆれながら消える

かねの音のように、角周波数 ω_1 でゆれながら消える音 $e^{-at}\sin\omega_1 t$（$t \geqq 0$）は、$\sin\omega_1 t = (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})/(2j)$ と分けると、$e^{-(a-j\omega_1)t}$ と $e^{-(a+j\omega_1)t}$ の 2 つになり、それぞれ B と同じ計算ができます。大きさのグラフをかくと、図 6 のように、ω_1 の所に山ができます。ゆっくり消える（a が小さい）ほど、山は細く高くなります。長く鳴るかねほど、音の高さがはっきり聞こえるのは、このためです。

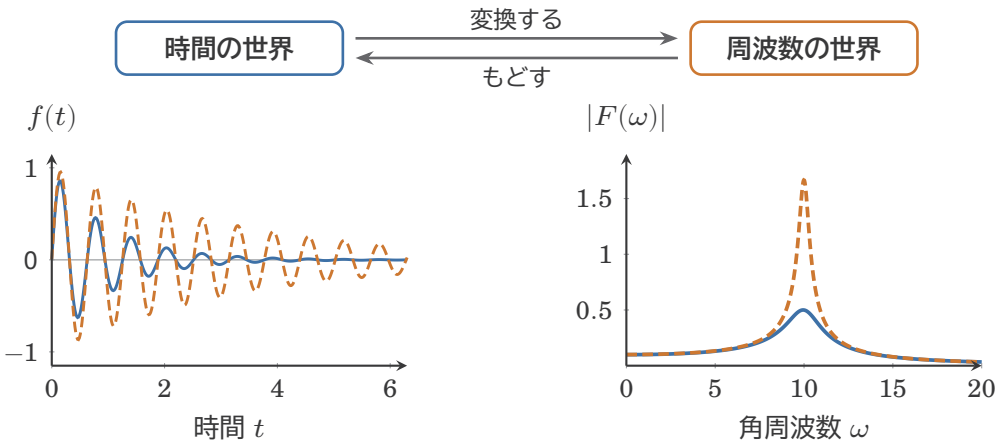


図 6 ゆれながら消える音 $e^{-at}\sin 10t$。青の実線は $a = 1$（速く消える）、オレンジの破線は $a = 0.3$（ゆっくり消える）。左（時間の世界）：波形。右（周波数の世界）：スペクトルの大きさ。どちらも $\omega = 10$ の近くに山ができ、ゆっくり消えるほど山は細く高い（青の山の高さは 0.50、オレンジは 1.67）。

せいかくに言うと

図 6 の右のグラフは、この式の大きさ（$\omega_1 = 10$）

$e^{-at}\sin\omega_1 t = \frac{1}{2j}(e^{-(a-j\omega_1)t} - e^{-(a+j\omega_1)t})$ に、B の $\frac{1}{a+j\omega}$ を 2 回使います。

$$F(\omega) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{a - j\omega_1 + j\omega} - \frac{1}{a + j\omega_1 + j\omega}\right)$$ B の a を $a \mp j\omega_1$ にする

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega_1}{(a+j\omega)^2 + \omega_1^2} = \frac{\omega_1}{(a+j\omega)^2 + \omega_1^2}$$ 通分する

9 場合 C・D：左右に広がる形

場合 C：両側の指数 $e^{-a|t|}$

$t=0$ で山になり、左右に $e^{-a|t|}$ でへる形です。$t<0$ では $|t|=-t$ なので e^{at}、$t>0$ では e^{-at} です。2 つに分けて、B の計算を 2 回します。

$$\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+j\omega} \qquad t>0 \text{ の部分（B と同じ）}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} \qquad t<0 \text{ の部分}$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} \qquad t\to-\infty \text{ で } e^{at}\to 0$$

$$F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} \qquad 2 \text{ つをたす}$$

$$= \frac{(a-j\omega)+(a+j\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad \text{通分。}(a+j\omega)(a-j\omega)=a^2+\omega^2$$

答えは実数になりました。f が左右対称（偶関数、9-2）なので、sin の部分が打ち消しあうからです（9-2 の「偶関数なら cos だけ」と同じ）。

場合 D：ガウスの形 $e^{-t^2/2}$

3-17 の正規分布の形（つりがねの形）です。予告カードで約束したとおり、8-6 のガウス積分を使います。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+2j\omega t)/2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{肩をまとめる}$$

$$t^2+2j\omega t = (t+j\omega)^2-(j\omega)^2 = (t+j\omega)^2+\omega^2 \qquad \text{平方完成（3-8）。}(j\omega)^2=-\omega^2$$

平方完成した肩を入れて、t によらない部分を積分の外へ出し、ガウス積分の形にします。

$$F(\omega) = e^{-\omega^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+j\omega)^2}\,\mathrm{d}t$$

t によらない $e^{-\omega^2/2}$ を外に出す

$$= e^{-\omega^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

$u = t + j\omega$（せいかくに言うと）

$$= e^{-\omega^2/2}\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v$$

$u = \sqrt{2}\,v$（5-16）

$$= \sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$$

ガウス積分 $\sqrt{\pi}$（8-6）

ガウスの形を変換すると、またガウスの形になりました。$\omega = 0$ で $\sqrt{2\pi} \approx 2.507$、$\omega = 1$ で $2.507 \times e^{-0.5} \approx 1.520$、$\omega = 2$ で $2.507 \times e^{-2} \approx 0.339$ です。

> **せいかくに言うと**
>
> **複素数だけずらしてもよいわけ**
>
> $u = t + j\omega$ と置くと、u は実数の軸から $j\omega$ だけ上にずれた横の線の上を動きます。そのような線の上の積分でも、$e^{-u^2/2}$ の積分の値は、実数の軸の上の積分と同じになることが、複素関数論という分野で確かめられます（この本では、その結果を使う）。表計算で $F(1)$ を細かく分けてたすと 1.5203 になり、式の値 1.5203 と一致します。

時間のはば σ と、周波数のはば $\frac{1}{\sigma}$

3-17 の正規分布のように、はばを標準偏差 σ（3-14）で表した $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ を変換すると、同じ計算で次のようになります（$t = \sigma v$ と置けば、上の計算にもどる）。

$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ を変換すると $\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

時間のはば $\sigma \longrightarrow$ 周波数のはば $\dfrac{1}{\sigma}$

右の式は $e^{-\omega^2/(2\cdot(1/\sigma)^2)}$ と書けるので、周波数の世界でも正規分布の形で、そのはば（標準偏差）は $\frac{1}{\sigma}$ です。時間のはば×周波数のはば＝ 1 で、いつも一定です。④の「短いほど広い」が、ここでは式ではっきり出ました。

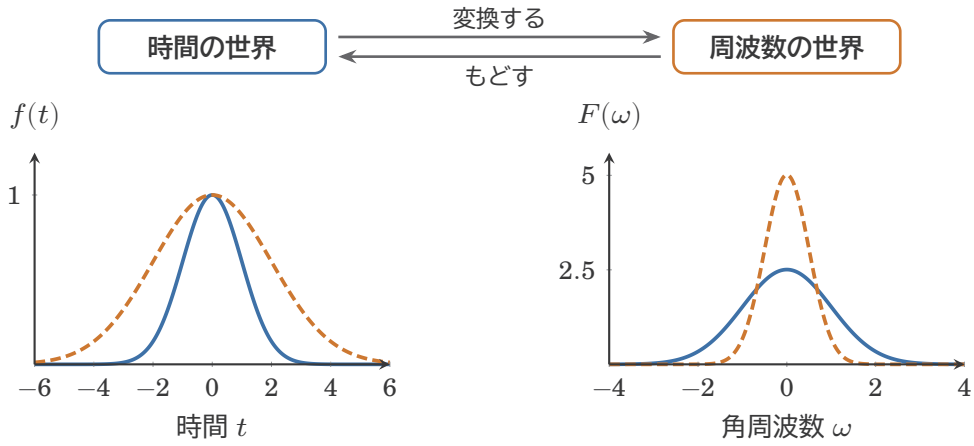


図 7　ガウスの形の変換。青の実線は $\sigma = 1$、オレンジの破線は $\sigma = 2$。時間の世界で 2 倍広いオレンジは、周波数の世界では半分のはばで、2 倍の高さになる（$F(0)$ はどちらもグラフの面積）。

⑩ 場合 E：性質の表で、積分しない

知っている形を少し変えた波は、もう一度積分しなくても、変換の性質（表 2）を使って求められます。

ずらすと、$e^{-j\omega t_0}$ がかかる

$f(t-t_0)$ は、f のグラフを右へ t_0 ずらしたものです（3-9）。$u = t - t_0$ と置くと（5-16 の置換積分。$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$）、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega(u+t_0)}\, \mathrm{d}u \qquad t = u + t_0$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u}\, \mathrm{d}u \qquad \text{肩を分けて、} u \text{ によらないものを外へ}$$

$$= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \qquad \text{残りは } F(\omega) \text{ そのもの}$$

$|e^{-j\omega t_0}| = 1$ なので、大きさ $|F(\omega)|$ は変わりません。同じ音を 1 秒おくれて鳴らしても、成分の大きさは同じで、山の位置（角）だけが変わります。

時間の世界	周波数の世界	意味
$af(t)+bg(t)$	$aF(\omega)+b\times$（g の変換）	線形（たしたものの変換は、変換の和）
$f(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}F(\omega)$	ずらす：t_0 おくらせても、大きさは同じ。角だけ変わる
$f(kt)$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{\omega}{k}\right)$	ちぢめる（$k>0$）：時間を $\frac{1}{k}$ にちぢめると、スペクトルは k 倍に広がる
$f(t)\cos\omega_c t$	$\frac{F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)}{2}$	cos をかける：スペクトルが $\pm\omega_c$ へ移る（変調）
$f'(t)$	$j\omega F(\omega)$	微分は $j\omega$ のかけ算（6-10・9-3）

表 2　フーリエ変換の性質の表（場合 E）。

cos をかけると、スペクトルが移る

$\cos\omega_c t=\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}$（9-3 の①）なので、$f(t)\cos\omega_c t$ の変換は、$fe^{j\omega_c t}$ の変換と $fe^{-j\omega_c t}$ の変換の和の半分です。$fe^{j\omega_c t}$ の変換は、肩が $-j(\omega-\omega_c)t$ になるので $F(\omega-\omega_c)$ です。

$$f(t)\cos\omega_c t\text{ の変換}=\frac{F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)}{2}$$

F のグラフを右へ ω_c と左へ ω_c ずらして、半分ずつたしたものです。AM ラジオは、声の波（低い周波数）に、放送局の高い周波数 $\cos\omega_c t$ をかけて送ります。声のスペクトルは、放送局の周波数のまわりへ移されます。局ごとに ω_c がちがうので、たくさんの局の電波がまざらずに届きます（物理の波-14）。

ちぢめる・微分する

$f(kt)$ は、$u=kt$ と置くと $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{k}$、肩は $-j\frac{\omega}{k}u$ なので、$\frac{1}{k}F\left(\frac{\omega}{k}\right)$ です。④のはばを半分にしたパルスは、$k=2$ の場合です。微分の行は、⑥のもどす式を t で微分すると、$e^{j\omega t}$ の微分で $j\omega$ が出てくることからわかります。

⑪ 場合 F：くり返す波は、線のスペクトル

$\cos\omega_0 t$ のようにいつまでもくり返す波は、$-\infty$ から ∞ までたしても、値が決まりません（$\omega=\omega_0$ のときは $e^{-j\omega t}\cos\omega_0 t$ の平均が $\frac{1}{2}$ で、限りなく大きくなる）。だから、くり返す波は、9-3 の c_n で表します。スペクトルは、$\pm n\omega_0$ の所に立つ線です。くり返さない波の曲線のスペクトルと、くり返す波の線のスペクトルは、②の図 2 の両はし（周期が有限と、限りなく長い）にあたります。

> **せいかくに言うと**
>
> **くり返す波のフーリエ変換は、「とても細くて高い山」**
>
> くり返す波も、無理にフーリエ変換すると、$\pm\omega_0$ の所だけにある「はばが 0 で、高さが限りなく大きく、面積が決まっている山」になります。この山の名前と記号は、9-6 で学びます。$\cos\omega_0 t$ の変換は、ω_0 と $-\omega_0$ の所に、面積 π の山が 1 つずつ立ったものです。9-3 の $c_{\pm1}=\frac{1}{2}$ に 2π をかけた面積です（⑥のもどす式の $\frac{1}{2\pi}$ と組になる）。

⑫ 場合 G：データの変換 DFT

録音した音や、センサーでとった振動は、式ではなく、とびとびの時刻の値（データ）です。時間のきざみ Δt〔s〕ごとに値をとることを**サンプリング**（標本化、ひょうほんか）といい、1 秒にとる回数 $f_s=\frac{1}{\Delta t}$〔Hz〕を**サンプリング周波数**といいます。

c_n の積分を、データの和にする

9-2 ⑦では、データだけのときの係数を「値× sin の平均の 2 倍」の和で求め、「9-4 の DFT につながる」と予告しました。その和を、9-3 の c_n の形で書いたものが DFT です。N 個の値 x_0, x_1, …, x_{N-1}（x_m は時刻 $m\Delta t$ の値）を、長さ $N\Delta t$ の 1 周期と考えます。9-3 の c_k の積分を、5-10 と同じく「値×きざみ」の和にします。

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}t$$ 9-3 の式

$$\approx \frac{1}{N\Delta t}\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-jk\omega_0 m\Delta t}\, \Delta t$$ $T = N\Delta t$、$t = m\Delta t$、「値×きざみ」の和

$$k\omega_0 m\Delta t = k\cdot\frac{2\pi}{N\Delta t}\cdot m\Delta t = \frac{2\pi km}{N}$$ Δt が消える

$$c_k \approx \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-j2\pi km/N}$$ Δt を約分

この和（$\frac{1}{N}$ をつけない形）を、**離散フーリエ変換**（DFT）といいます。

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-j2\pi km/N}$$

X_k の周波数は $k \times \frac{f_s}{N}$〔Hz〕、振幅は $\frac{2|X_k|}{N}$

- X_k は Nc_k に近い値です。振幅は $2|c_k|$（9-3 の④）なので、$2|X_k|/N$ です（$k = 0$ は平均で、X_0/N）。
- X_k の周波数は、角周波数で $k\omega_0 = 2\pi k/(N\Delta t)$、Hz で $k/(N\Delta t)$、つまり $k \times f_s/N$ です。f_s/N が、周波数の目もりのきざみです。
- k が $N/2$ より大きい所は、負の周波数（$k - N$ 番め）の成分です。$e^{-j2\pi Nm/N} = e^{-j2\pi m} = 1$ なので、$e^{-j2\pi km/N}$ と $e^{-j2\pi(k-N)m/N}$ は同じ値だからです。

8 点の DFT を手で計算する

$x_m = \sin\frac{2\pi\times 2m}{8}$（1 周期 8 点の中で 2 回ゆれる sin）の 8 つの値は、0、1、0、−1、0、1、0、−1 です。$k = 2$ のとき、かける矢印は $e^{-j2\pi\cdot 2m/8} = e^{-j\pi m/2}$ で、m がふえるごとに右回りに 90° ずつ回ります。

	A	B	C	D
1	m	x_m	$e^{-j\pi m/2}$	$x_m \times e^{-j\pi m/2}$
2	0	0	1	0
3	1	1	$-j$	$-j$
4	2	0	-1	0
5	3	-1	j	$-j$
6	4	0	1	0
7	5	1	$-j$	$-j$
8	6	0	-1	0
9	7	-1	j	$-j$
10			合計 X_2	$-4j$

表 3　8 点の DFT の X_2 を、1 行ずつ計算した。

$X_2 = -4j$ で、振幅は $\frac{2\times|-4j|}{8} = 1$、もとの sin の振幅 1 と合います。ほかの k も同じように計算すると、$X_6 = 4j$（$k = 6$ は $6 - 8 = -2$ 番め、負の周波数の側で、X_2 の共役）、残りはすべて 0 です。9-3 の sin の両側スペクトル（$c_{\pm 1} = \mp\frac{j}{2}$）と同じ形です。

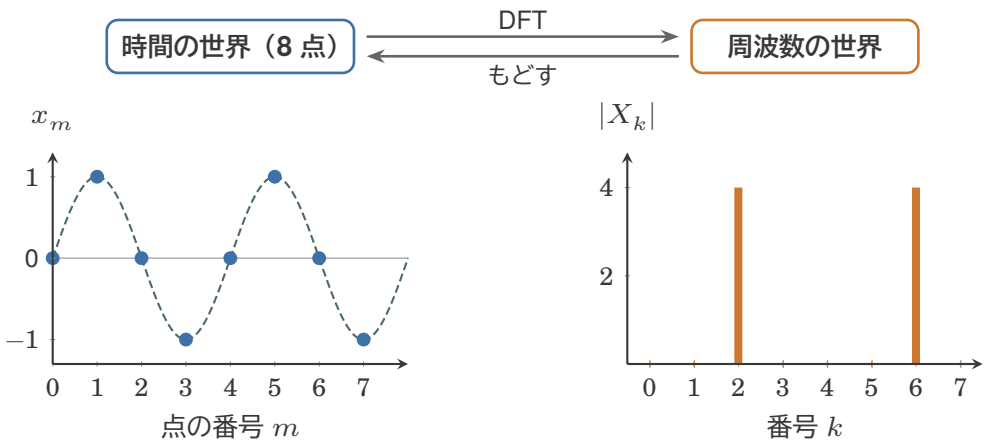


図 8　8 点のデータ（左の点。細い破線はもとの波）と、その DFT の大きさ（右の棒）。$k = 2$ の棒は「8 点で 2 回くり返す成分」。$k = 6$ の棒は $k = 2$ の鏡うつし（9-3 の負の周波数）。

手で計算した $|X_k|$ を、numpy の `np.fft.fft`（N 点の DFT を、FFT で計算する命令）で確かめます。

Python

```
import numpy as np
m = np.arange(8)                    # 点の番号 0, 1, …, 7
x = np.sin(2*np.pi*2*m/8)           # 8 点で 2 回くり返す sin
X = np.fft.fft(x)                   # 8 点の DFT
print(np.round(np.abs(X), 3))       # 大きさ |X_k|（k = 0〜7）
```

実行結果

```
[0. 0. 4. 0. 0. 0. 4. 0.]
```

表 3 の手計算と同じく、$k = 2$ と $k = 6$ だけが 4 になりました。

⑬ 速く計算する FFT

DFT を式のとおりに計算すると、X_k 1 つに N 回のかけ算（とたし算）、それを N 個求めるので、およそ N^2 回の計算が必要です。録音した音 1 秒分（N が数千〜数万）では、とても大きな数になります。

半分ずつに分けて、くり返す

N 個の値を、番号が偶数のもの（x_0, x_2, …）と奇数のもの（x_1, x_3, …）に分けます。偶数番は $m = 2r$、奇数番は $m = 2r + 1$ と書けます（r は 0 から $\frac{N}{2} - 1$ まで。下の $\sum_r$ はこの和）。それぞれの $\frac{N}{2}$ 点の DFT に名前をつけます。

$$E_k = \sum_r x_{2r}\, e^{-j2\pi kr/(N/2)}, \qquad O_k = \sum_r x_{2r+1}\, e^{-j2\pi kr/(N/2)}$$

X_k の和を、偶数番と奇数番に分けて書き直します。

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-j2\pi km/N} \qquad \text{DFT の定義（⑫）}$$

$$= \sum_r x_{2r}\, e^{-j2\pi k(2r)/N} \qquad \text{偶数番 } m = 2r \text{ と}$$

$$+ \sum_r x_{2r+1}\, e^{-j2\pi k(2r+1)/N} \qquad \text{奇数番 } m = 2r + 1 \text{ に分ける}$$

$$= \sum_r x_{2r}\, e^{-j2\pi kr/(N/2)} \qquad \frac{2r}{N} = \frac{r}{N/2}$$

$$+ e^{-j2\pi k/N} \sum_r x_{2r+1}\, e^{-j2\pi kr/(N/2)} \qquad \text{奇数番の肩から } e^{-j2\pi k/N} \text{ をくくる}$$

$$= E_k + e^{-j2\pi k/N} O_k \qquad E_k \cdot O_k \text{ の名前を使う}$$

次に、後ろの半分の $X_{k+N/2}$ です。$E_k \cdot O_k$ は $\frac{N}{2}$ 点の DFT なので、k が $\frac{N}{2}$ ふえても同じ値です（肩が $-j2\pi r$ だけふえ、$e^{-j2\pi r} = 1$）。

$$X_{k+N/2} = E_k + e^{-j2\pi(k+N/2)/N} O_k \qquad \text{上の式の } k \text{ を } k + \frac{N}{2} \text{ に}$$

$$= E_k + e^{-j2\pi k/N} e^{-j\pi} O_k \qquad \text{肩を分ける：} \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2} = \pi$$

$$= E_k - e^{-j2\pi k/N} O_k \qquad e^{-j\pi} = -1$$

後ろの半分の X は、前の半分と同じ $E_k \cdot O_k$ を使い回せて、符号が変わるだけです。E_k と O_k も、さらに半分ずつに分けられます。これを N が 1 になるまでくり返すと、計算の回数はおよそ $N\log_2 N$ 回になります。この計算の方法を**高速フーリエ変換**（FFT）といいます。8 点なら、図 9 のように 3 回半分に分けます。

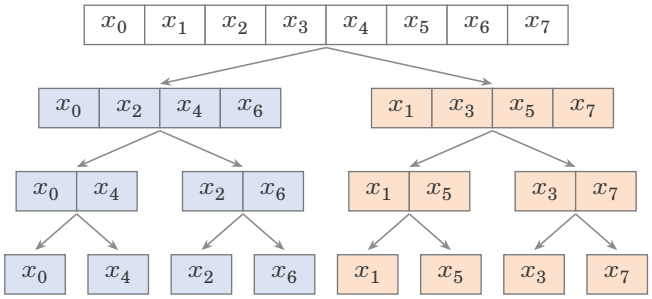


図 9　8 点の FFT の分け方。偶数番（青）と奇数番（オレンジ）に分け、それをまた半分に分ける。$\log_2 8 = 3$ 回分けると 1 点になる。下から上へ、1 つの段で約 8 回の計算をして $E_k \cdot O_k$ から X_k をつくるので、全部で約 $8 \times 3 = 24$ 回（表 4）。

Python で FFT

numpy の `np.fft.rfft` は、FFT で正の周波数の側の X_k を求めます。9-0 で使ったプログラムを、もう一度見てみましょう。440 Hz・880 Hz・1320 Hz の音を、振幅 1・0.5・0.25 でたした音を、1 秒に 8000 回はかったデータです。

Python

```
import numpy as np
fs = 8000                          # 1 秒に何回はかるか
t = np.arange(fs) / fs             # 1/8000 秒ごとの 8000 個の時刻
x = (np.sin(2*np.pi*440*t) + 0.5*np.sin(2*np.pi*880*t)
     + 0.25*np.sin(2*np.pi*1320*t))   # 3 つの成分をたした音
X = np.fft.rfft(x)                 # FFT（周波数の世界へ）
freq = np.fft.rfftfreq(len(x), 1/fs)  # 1 つ 1 つの成分の周波数
A = 2*np.abs(X) / len(x)           # 成分の大きさ（振幅）にそろえる
print(freq[A > 0.1])               # 大きさが 0.1 より大きい周波数
print(np.round(A[A > 0.1], 3))     # その大きさ（小数第 3 位まで）
```

実行結果

```
[ 440.  880. 1320.]
[1.   0.5  0.25]
```

9-0 では「なぜ `2*np.abs(X)/len(x)` の形になるかは 9-4」と書きました。その答えが、⑫の DFT です。

- **`len(x)` でわる**：X_k は N 個の値の**和**で、Nc_k に近い値でした。N（`len(x)`、ここでは 8000）でわると、9-3 の c_k になります。
- **2 をかける**：`rfft` は正の周波数の側だけを出します。9-3 の④で見たように、1 つの成分の振幅は、正の周波数の $|c_k|$ と負の周波数の $|c_{-k}|$ の和、つまり $2|c_k|$ です。

周波数のきざみは $f_s/N = 8000/8000 = 1\,\mathrm{Hz}$ です。3 つの成分の周波数と振幅が、正しく取り出せました。

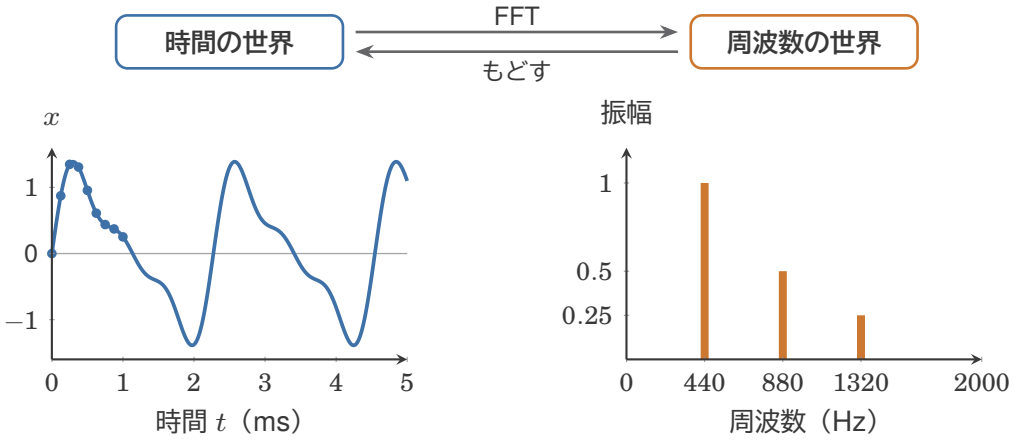


図 10　FFT の入口と出口。左（時間の世界）：はかった音の波形（はじめの 1 ms だけ、はかった点を 0.125 ms ごとに点でかいた）。右（周波数の世界）：FFT で求めた振幅 $2|X_k|/N$（Python で出した値を、本の形にかき直したもの。0〜2000 Hz の所だけ）。

> **せいかくに言うと**
>
> **きざみの間の周波数は、となりにもれる**
>
> FFT は、とった N 個のデータを「1 周期」とみなして、きざみ f_s/N の整数倍の周波数の成分に分けます（⑫）。上の例では、どの音もちょうど 1 Hz の整数倍だったので、1 本ずつの棒になりました。もし 440.5 Hz のように、きざみの間の周波数の音だと、1 秒のデータのはしで波がつながらず、成分が 440 Hz と 441 Hz に 0.637 ずつ、そのとなりの 439 Hz・442 Hz にも 0.21 ずつというように、まわりにもれて出ます（Python で確かめた値）。このことを**もれ**（リーケージ）といいます。もれを小さくするために、データの両はしをなめらかに 0 にしてから FFT をする方法（窓関数）があり、物理の本（波-11）で学びます。

FFT を使うと、計算の回数はどれくらいへるのでしょう。表 4 のように、点の数が多いほど差が大きくなります。

点の数 N	DFT（N^2 回）	FFT（およそ $N\log_2 N$ 回）	FFT ÷ DFT
8	64	24	約 0.4
1024	約 105 万	約 1 万	約 100 分の 1

表 4　計算の回数のくらべ。点の数が多いほど、FFT の速さがきく。

コラム　FFT を見つけた人たち

FFT は 1965 年にクーリーとテューキーが発表し、広く使われるようになりました。後に調べると、ガウスが 1805 年ごろ、小惑星の軌道の計算で同じ「半分ずつに分ける」考えを使っていました。発表しなかったので、150 年以上知られていなかったのです（8-6 のガウス積分のガウス）。

14 サンプリング定理と、エイリアシング

9-0 では、「はかる回数が少なすぎると、成分を取りちがえる」と予告しました。そのしくみを見ます。1 秒に 8000 回とったデータで、7000 Hz の音と 1000 Hz の音をくらべます。cos の値を、とった時刻 $\frac{m}{8000}$ 秒で計算します。

$$\cos\left(2\pi \times 7000 \times \frac{m}{8000}\right) = \cos\left(2\pi m - \frac{2\pi m}{8}\right) \qquad \frac{7000}{8000} = 1 - \frac{1}{8}$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi m}{8}\right) = \cos\frac{2\pi m}{8} \qquad 2\pi m \text{ は何周しても同じ。} \cos \text{ は偶関数}$$

$$= \cos\left(2\pi \times 1000 \times \frac{m}{8000}\right) \qquad 1000\,\text{Hz} \text{ の音の値}$$

とった点の値は、7000 Hz でも 1000 Hz でも、まったく同じです（図 11）。データだけを見て、どちらの音かは区別できません。「サンプリング周波数－もとの周波数」（$8000 - 7000 = 1000$）の音は、もとの音と同じ点を通るのです。

高い周波数の音が、とり方のせいで低い周波数の音に化けることを、**エイリアシング**（折り返し）といいます。

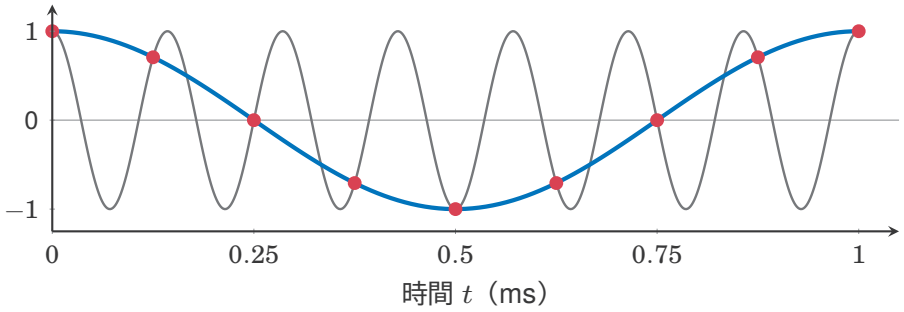


図 11　1 秒に 8000 回（0.125 ms ごと）とった点（赤）。細い灰色の線が 7000 Hz、太い青の線が 1000 Hz の cos。どちらの線も、赤の点を全部通る。

サンプリング定理

もとの音に、$f_s/2$ より高い周波数の成分がなければ、この取りちがえはおきません。$f_s/2$ より低い成分 f なら、同じ点を通る相手（f_s の整数倍だけずらした $f_s \pm f$、$2f_s \pm f$、…）は、どれも $f_s/2$ より高いので、とりちがえる相手がいないからです。そして、とった点から、もとの音を完全にもどすことができます。

> いちばん高い周波数の 2 倍より大きい
> サンプリング周波数でとれば、
> とったデータから、もとの波をもどせる

これを**サンプリング定理**（標本化定理）といいます。ナイキスト（1928 年）やシャノン（1949 年）らの研究で知られています。音楽の CD は、1 秒に 44 100 回とります。その半分の 22 050 Hz は、人が聞こえる高い音の上限（若い人で約 20 000 Hz。年れいとともに下がる）より少し上です。だから、聞こえる音はすべて正しく記録できます。そのかわり、録音する前に、22 050 Hz より高い音をフィルターで取り除いておきます。

動画の車輪が、逆に回って見える

動画は、1 秒に 24 まいなどの写真（コマ）を続けて見せます。これもサンプリングです。スポークが 8 本（45° ごと）の車輪が、1 秒に 2.75 回転しているとします。1 コマの間に回る角は、$2.75 \times 360° \div 24 = 41.25°$ です。スポークは 45° ごとに同じ形なので、41.25° 進むのは、$41.25° - 45° = -3.75°$、つまり「少しもどった」のと区別がつきません。画面では、車輪は 1 秒に $-3.75° \times 24 = -90°$、ゆっくり逆に回って見えます。

もっと知りたい ★★★★★

無限に長い棒の熱は、ガウスの形で広がる

とても長い金属の棒のまん中を、一瞬だけ熱したとします。8-13 で学んだように、温度の sin（ここでは回る矢印 e^{jkx}）の成分は、それぞれ $e^{-\alpha k^2 t}$ でへります（k は波数、α〔m²/s〕は熱拡散率）。一瞬の熱は、とても短いパルスに近いので、はじめはすべての k の成分を同じだけもっています。時間 t がたつと、成分は $e^{-\alpha k^2 t}$ 倍、つまり k について**ガウスの形**になります。⑨から、ガウスの形をもどすと、場所 x についてもガウスの形です。温度は、つりがねの形のまま広がり、そのはば（標準偏差）は $\sqrt{2\alpha t}$ です。$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$ なら、1 秒で約 1.4 cm、10 秒で約 4.5 cm、100 秒で約 14 cm。はばは時間の 2 乗根に比例するので、2 倍の距離に広がるには 4 倍の時間がかかります。この形の答えは、ラプラスも 1809 年に使っていて、フーリエの『熱の解析的理論』（1822 年）にも、長い棒の熱の広がりの章があります。

たいせつ

フーリエ変換の 3 つの段

名前　**記号を読む：何に（f）・何をかけて（$e^{-j\omega t}$）・$-\infty\sim\infty$・わらない**

楽をする　**直す前に：はかった値だけ？　くり返す？　知っている形をずらした・cos をかけた？**

直す　**0 でない区間のふつうの定積分。e^{-at}・ガウスは広義積分**

$$\underset{\text{名前}}{F(\omega)} = \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

場合分けの表 9-4（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
G	式がなく、はかった値だけ	DFT・FFT。振幅 $\frac{2\lvert X_k\rvert}{N}$
F	くり返す	9-3 の c_n（線）
E	知っている形を、ずらした・cos をかけた	性質の表
A	有限の区間	その区間の定積分
D	ガウス	平方完成と $\sqrt{\pi}$
B	$t \geqq 0$ の e^{-at}	$\frac{1}{a+j\omega}$
C	両側の $e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

短いほど広い

時間の世界でせまいものは、周波数の世界で広い（ガウスでは、はば σ と $\frac{1}{\sigma}$）。データは、いちばん高い周波数の 2 倍より大きい f_s でとる。

この章で出てきたことば

フーリエ変換　$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$。くり返さない波の成分。操作の名前。

逆フーリエ変換　$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$。スペクトルから波にもどす。

サンプリング　とびとびの時刻で値をとること。1 秒にとる回数がサンプリング周波数 f_s。

DFT・FFT　DFT はデータの成分 $X_k=\sum x_m e^{-j2\pi km/N}$。FFT はその速い計算の方法。

サンプリング定理　いちばん高い周波数の 2 倍より大きい f_s でとれば、もとの波をもどせる。

エイリアシング　$f_s/2$ より高い成分が、低い周波数に化けること。

専門書をのぞいてみよう　フーリエ変換の専門書ふうの書き方

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx,\quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi.$$

訳　$\mathcal{F}$（筆記体のエフ）はフーリエ変換の名前の記号。$\hat{f}$ は F と同じ。i はこの本の j。この本では角周波数 ω を使い、もどす式に $\frac{1}{2\pi}$ をつけたが、この書き方は周波数 ξ（Hz）を使い、2π を肩に入れたので、どちらの式にも前の数がつかない。

書き方	変換の式	もどす式
この本（電気・制御）	$\int f e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int F e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$
両方に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int F e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$
周波数で書く	$\int f e^{-j2\pi\xi t}\mathrm{d}t$	$\int F e^{j2\pi\xi t}\mathrm{d}\xi$

訳　制御の本では、9-5 のラプラス変換の s に $j\omega$ を入れた形として、$F(j\omega)$ と書くことも多い。

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-4 のどの場合かを書きました。ω の単位は rad/s、t の単位は s です。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜10 を、図 5 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。どれも、考え方の 1 行めの場合に着きます。じぶんでとこうも同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	方形パルス	0 でない所が有限の区間？	A
2	だんだん消える波	$t \geqq 0$ だけの e^{-at}？	B
3	両側の指数	両側の $e^{-a\|t\|}$？	C
4	ガウスの形	ガウスの形 e^{-t^2}？	D
5	ずらしたパルス	知っている形を、ずらした・cos をかけた？ → 0 でない所が有限の区間？	E A
6	cos をかけたガウス	知っている形を、ずらした・cos をかけた？ → ガウスの形 e^{-t^2}？	E D
7	くり返す波	くり返す波？	F
8	8 点の DFT	式がなく、はかった値だけ？	G
9	FFT の結果を読む	式がなく、はかった値だけ？	G
10	エイリアシング	式がなく、はかった値だけ？	G

表 5　例題 1〜10 の流れ図の道すじ。

記号カード 初めて出た章 9-4

$F(\omega)$

読み方 エフ・オメガ
意味 $f(t)$ のフーリエ変換。角周波数 ω の成分。ふつうは複素数で、大きさがスペクトル
英語 Fourier transform

記号カード 初めて出た章 9-4

f_S

読み方 エフ・エス
意味 サンプリング周波数〔Hz〕。1 秒に値をとる回数。$1/\Delta t$
英語 sampling frequency

例題 1　方形パルスの変換

$-0.5 < t < 0.5$ で $f = 2$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めましょう。また、$F(0)$ と、$F(\omega)$ がはじめて 0 になる正の ω を求めましょう。

考え方 **場合：**0 でない所が有限の区間だけ（表 9-4 の A）

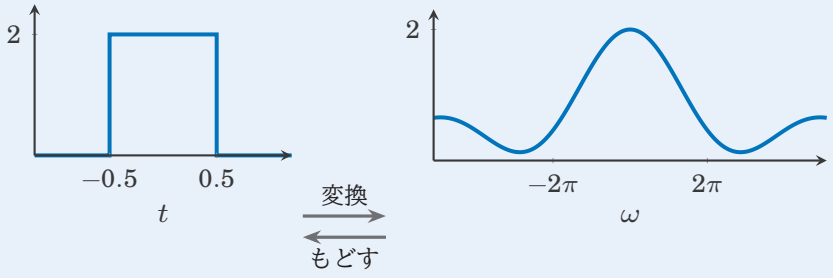
名前　$F(\omega)$：$-\infty$ から ∞ まで、f に $e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

直す：ふつうの定積分　0 でないのは $-0.5 < t < 0.5$ だけ。そこのふつうの定積分（$\omega \neq 0$）。

式
$$F(\omega) = \int_{-0.5}^{0.5} 2e^{-j\omega t}\,dt = 2\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-0.5}^{0.5}$$
$$= \frac{2\left(e^{j0.5\omega} - e^{-j0.5\omega}\right)}{j\omega} = \frac{2 \times 2j\sin 0.5\omega}{j\omega} = \frac{4\sin 0.5\omega}{\omega}$$

$$F(0) = \int_{-0.5}^{0.5} 2\,dt = 2$$（グラフの面積：高さ 2 ×はば 1）

はじめて 0：$\sin 0.5\omega = 0$ で $0.5\omega = \pi$、$\omega = 2\pi \approx 6.28$



答え $F(\omega) = \dfrac{4\sin 0.5\omega}{\omega}$。$F(0) = 2$、はじめて 0 になるのは $\omega = 2\pi$

じぶんでとこう 1

$-2 < t < 2$ で $f = 1$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換を求め、$F(0)$ と、はじめて 0 になる正の ω を求めましょう。

例題 2　だんだん消える波の変換

$t \geqq 0$ で $f(t) = e^{-3t}$、$t < 0$ で $f = 0$ の波のフーリエ変換を求め、$F(4)$ と、大きさ $|F(0)| \cdot |F(3)|$ を求めましょう。

考え方　**場合：**$t \geqq 0$ だけの e^{-at}（表 9-4 の B）

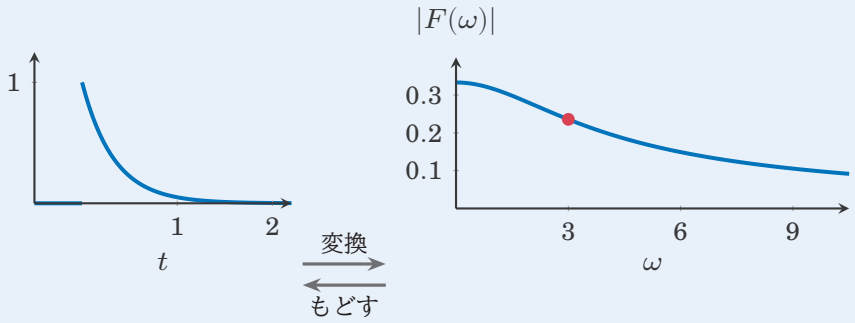
名前　$F(\omega)$：$e^{-j\omega t}$ をかけてたす。$t < 0$ は 0 なので、0 から ∞ まで。

直す：ふつうの定積分　肩をまとめて $e^{-(3+j\omega)t}$ の広義積分（5-14）。

式
$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(3+j\omega)t}}{-(3+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{3+j\omega}$$

$$F(4) = \frac{1}{3+4j} = \frac{3-4j}{(3+4j)(3-4j)} = \frac{3-4j}{25} = 0.12 - 0.16j$$

$$|F(0)| = \frac{1}{3} \approx 0.333,\quad |F(3)| = \frac{1}{\sqrt{9+9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0.236$$



答え　$F(\omega) = \dfrac{1}{3+j\omega}$、$F(4) = 0.12 - 0.16j$。$|F(0)| \approx 0.333$、$|F(3)| \approx 0.236$（$|F(0)|$ の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍）

じぶんでとこう 2

$t \geqq 0$ で $f(t) = e^{-t}$、$t < 0$ で $f = 0$ の波のフーリエ変換を求め、$F(1)$ と $|F(1)|$ を求めましょう。

例題 3　両側の指数の変換

$f(t) = e^{-2|t|}$ のフーリエ変換を求め、$F(0)$ と $F(2)$ を求めましょう。

考え方　**場合**：両側の $e^{-a|t|}$（表 9-4 の C）

名前　$F(\omega)$：$-\infty$ から ∞ まで、$e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

直す：ふつうの定積分　$t > 0$（e^{-2t}）と $t < 0$（e^{2t}）に分けて、B の計算を 2 回。

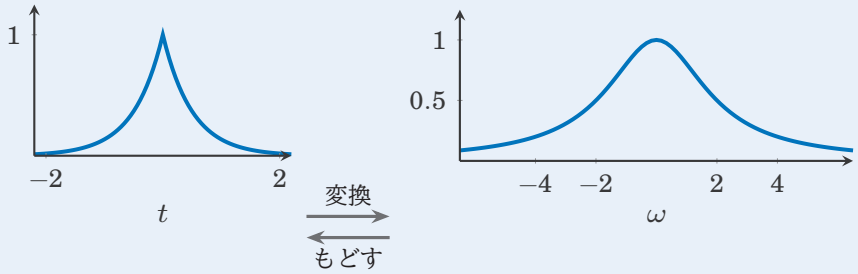
式

$$t > 0 : \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$t < 0 : \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2-j\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{2-j\omega} = \frac{(2-j\omega)+(2+j\omega)}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$F(0) = \frac{4}{4} = 1,\quad F(2) = \frac{4}{4+4} = 0.5$$



答え　$F(\omega) = \dfrac{4}{4+\omega^2}$。$F(0) = 1$、$F(2) = 0.5$

じぶんでとこう 3

$f(t) = e^{-3|t|}$ のフーリエ変換を求め、$F(0)$ と $F(3)$ を求めましょう。

例題 4　ガウスの形の変換

$f(t) = e^{-t^2/8}$ のフーリエ変換を求め、$F(0)$ と $F(0.5)$ を求めましょう。
また、時間の世界と周波数の世界のはば（標準偏差）を答えましょう。

考え方　**場合：**ガウスの形 $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$（表 9-4 の D）

名前　$F(\omega)$：$-\infty$ から ∞ まで、$e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

直す：ふつうの定積分　$\dfrac{t^2}{8} = \dfrac{t^2}{2 \times 2^2}$ なので $\sigma = 2$。⑨の平方完成とガウス積分の結果 $\sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\sigma^2\omega^2/2}$ を使う。

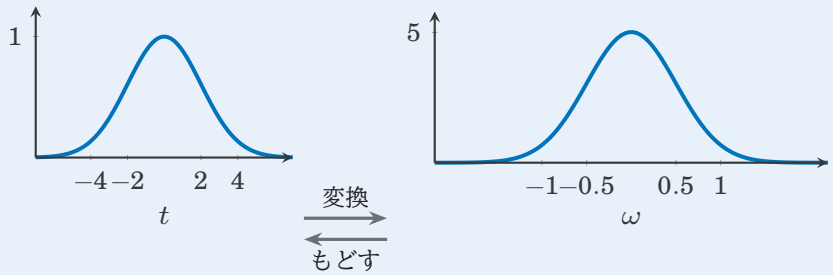
式　$F(\omega) = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-4\omega^2/2} = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-2\omega^2}$

$$F(0) = 2\sqrt{2\pi} \approx 2 \times 2.507 = 5.013$$

$$F(0.5) = 5.013 \times e^{-2\times 0.25} = 5.013 \times e^{-0.5}$$

$$\approx 5.013 \times 0.6065 \approx 3.041$$

$e^{-2\omega^2} = e^{-\omega^2/(2\times 0.5^2)}$ なので、周波数のはばは $0.5 = \dfrac{1}{2}$



答え　$F(\omega) = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-2\omega^2}$。$F(0) \approx 5.01$、$F(0.5) \approx 3.04$。はばは、時間で 2、周波数で $\dfrac{1}{2}$

じぶんでとこう 4

$f(t) = e^{-2t^2}$ のフーリエ変換を求め、$F(0)$ と $F(2)$ を求めましょう。

例題 5　ずらしたパルスの変換

$1 < t < 3$ で $f = 1$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換を求めましょう。また、$F(\frac{\pi}{2})$ と、その大きさを求めましょう。

考え方　**場合：**パルスを 2 だけずらした形（表 9-4 の E と A）

名前　$F(\omega)$：$-\infty$ から ∞ まで、$e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

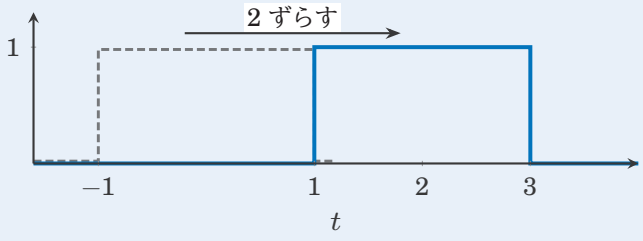
楽をする　この波は、④の $-1 < t < 1$ のパルスを、右へ $t_0 = 2$ ずらしたもの。性質の表のずらす行で、$e^{-j2\omega}$ をかける。

直す：ふつうの定積分　もとのパルスの変換は、④のふつうの定積分で $\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$。

式　$F(\omega) = e^{-j2\omega} \times \dfrac{2\sin\omega}{\omega}$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\pi} \times \frac{2 \times 1}{\pi/2} = (-1) \times \frac{4}{\pi} \approx -1.273$$

大きさ $|e^{-j\pi}| \times 1.273 = 1.273$（ずらす前と同じ）



灰色の破線が④のパルス、青がずらしたパルス。

答え　$F(\omega) = e^{-j2\omega}\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$。$F(\frac{\pi}{2}) \approx -1.273$、大きさ 1.273

じぶんでとこう 5

$0 < t < 2$ で $f = 1$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換を求め、$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めましょう。

例題 6　cos をかけたガウスの形

$f(t) = e^{-t^2/2}\cos 10t$ のフーリエ変換を求め、$F(10)$ と $F(9)$ を求めましょう。

考え方　**場合：**ガウスの形に cos をかけた（表 9-4 の **E** と **D**）

名前　$F(\omega)$：$-\infty$ から ∞ まで、$e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

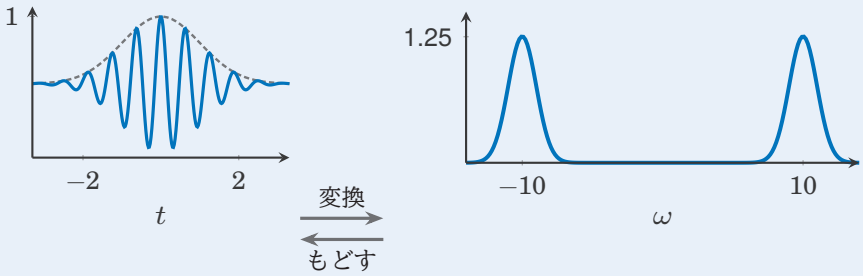
楽をする　性質の表の cos の行：$e^{-t^2/2}$ の変換を、右と左へ 10 ずらして、半分ずつたす。

直す：ふつうの定積分　もとの $e^{-t^2/2}$ の変換は、⑨の平方完成とガウス積分で $\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$。

式　$F(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(e^{-(\omega-10)^2/2} + e^{-(\omega+10)^2/2}\right)$

$F(10) = 1.2533 \times \left(e^{0} + e^{-200}\right) \approx 1.253$（$e^{-200}$ はほぼ 0）

$F(9) = 1.2533 \times \left(e^{-0.5} + e^{-180.5}\right) \approx 1.2533 \times 0.6065 \approx 0.760$



答え　$F(10) \approx 1.253$、$F(9) \approx 0.760$（$\omega = \pm 10$ の所に、ガウスの形の山が 2 つ）

じぶんでとこう 6

$f(t) = e^{-t^2/2}\cos 20t$ のフーリエ変換を求め、$F(20)$ と $F(21)$ を求めましょう。

例題 7　くり返す波のスペクトル

$f(t) = 4\cos 100t + 2\sin 300t$ のスペクトルを、両側スペクトルの線で表しましょう。どの角周波数に、どんな高さの線が立ちますか。

考え方　**場合：**くり返す波（表 9-4 の F）

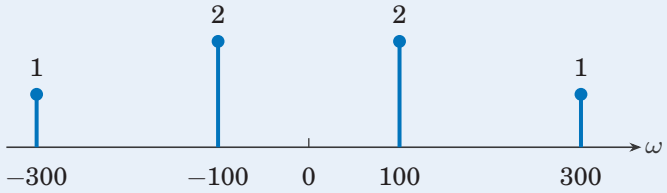
名前　名前は $F(\omega)$ だが、ここでは積分しない（くり返す波は値が決まらない）。

楽をする　9-3 の c_n で表す。$\omega_0 = 100\,\text{rad/s}$ とすると、$a_1 = 4$、$b_3 = 2$。

式　$c_{\pm 1} = \dfrac{a_1}{2} = 2$（$\omega = \pm 100$）

$c_3 = \dfrac{0 - 2j}{2} = -j$、　$c_{-3} = j$（$\omega = \pm 300$）

線の高さ：$|c_{\pm 1}| = 2$、$|c_{\pm 3}| = 1$



答え　$\omega = \pm 100$ に高さ 2、$\omega = \pm 300$ に高さ 1 の線（ほかの所は 0）

じぶんでとこう 7

$f(t) = 6\cos 50t + 3\sin 150t$ のスペクトルを、両側スペクトルの線で表しましょう。

例題 8　8 点の DFT

1 ms ごとにとった 8 つの値 $x_m = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0$ の DFT の X_2 を求めましょう。X_2 以外の X_k は、X_6 だけが 0 でなく $X_6 = X_2$ です。この波は、何 Hz で、振幅はいくつの成分ですか。

考え方　**場合：**式がなく、はかった値だけ（表 9-4 の G）

名前　名前は $F(\omega)$ だが、データなので積分しない。DFT の和を計算する。

楽をする　$N = 8$、$k = 2$ なので、かける矢印は $e^{-j\pi m/2}$。

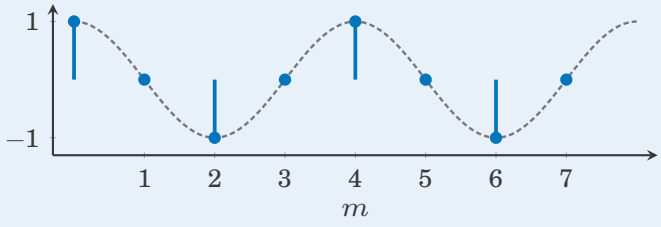
$m = 0$ から順に 1、$-j$、-1、j、1、$-j$、-1、j

式　$X_2 = 1 \times 1 + 0 + (-1) \times (-1) + 0$

$$+1 \times 1 + 0 + (-1) \times (-1) + 0 = 4$$

$f_s = \dfrac{1}{0.001} = 1000$ Hz、きざみ $\dfrac{1000}{8} = 125$ Hz

周波数 $2 \times 125 = 250$ Hz、振幅 $\dfrac{2 \times |4|}{8} = 1$



8 つの値（青）と、それを通る 250 Hz の cos（灰色の破線）。

答え　$X_2 = 4$。250 Hz で振幅 1 の成分（cos の波）

じぶんでとこう 8

1 ms ごとにとった 8 つの値 1, 1, −1, −1, 1, 1, −1, −1 の DFT の X_2 を求め、その成分の周波数と振幅を答えましょう。

例題 9　FFT の結果を読む

1 秒に 8000 回（$f_s = 8000\,\mathrm{Hz}$）、1 秒間とった音のデータを FFT しました。(1) 点の数 N と周波数のきざみはいくつですか。(2) 440 Hz の所の $|X_k|$ が 4000 でした。この成分の振幅はいくつですか。(3) 正しく調べられる、いちばん高い周波数は何 Hz ですか。

考え方　**場合：**式がなく、はかった値だけ（表 9-4 の G）

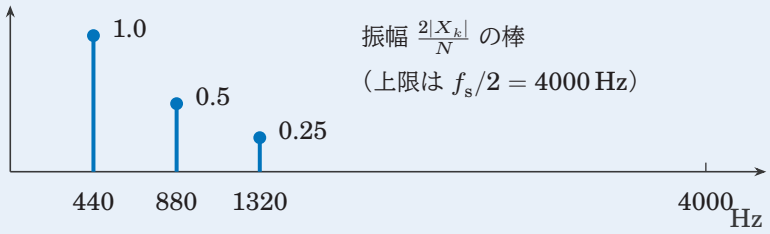
名前　名前は $F(\omega)$ だが、データなので FFT で X_k を求めた。

楽をする　きざみ f_s/N、振幅 $2|X_k|/N$、上限 $f_s/2$。

式　(1) $N = 8000 \times 1 = 8000$、きざみ $\dfrac{8000}{8000} = 1\,\mathrm{Hz}$

(2) $\dfrac{2 \times 4000}{8000} = 1$

(3) $\dfrac{8000}{2} = 4000\,\mathrm{Hz}$



答え　(1) $N = 8000$、1 Hz　(2) 1　(3) 4000 Hz

じぶんでとこう 9

$f_s = 8000\,\mathrm{Hz}$ で 0.5 秒間とった音を FFT しました。点の数ときざみを求め、880 Hz の所の $|X_k|$ が 1000 のときの振幅を求めましょう。

例題 10　エイリアシング

1 秒に 8000 回（$f_s = 8000\,\mathrm{Hz}$）音をはかり、はかった値だけを残します。（1）7000 Hz の音、（2）9000 Hz の音をはかった値は、何 Hz の音と同じ点になりますか。cos の波で考えましょう。（3）9000 Hz までの音を正しくとるには、f_s を何 Hz より大きくすればよいですか。

考え方　**場合：**式がなく、はかった値（とった点）だけ（表 9-4 の G）

名前　名前は $F(\omega)$ だが、データの点の値だけをくらべる。

楽をする　とった時刻 $\dfrac{m}{8000}$ 秒で、肩の $2\pi m$ は何周しても同じ（⑭）。

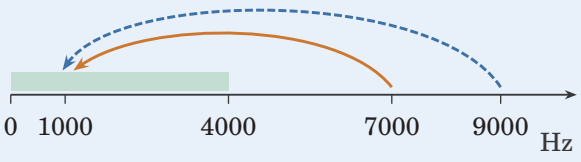
式　（1）$\cos\left(2\pi \times 7000 \times \dfrac{m}{8000}\right) = \cos\left(2\pi m - \dfrac{2\pi m}{8}\right) = \cos\dfrac{2\pi m}{8}$

これは $\cos\left(2\pi \times 1000 \times \dfrac{m}{8000}\right)$。8000−7000= 1000

（2）$\cos\left(2\pi \times 9000 \times \dfrac{m}{8000}\right) = \cos\left(2\pi m + \dfrac{2\pi m}{8}\right) = \cos\dfrac{2\pi m}{8}$

これも 1000 Hz。9000−8000= 1000

（3）サンプリング定理：高い方の 2 倍で $9000 \times 2 = 18\,000$



うすい緑：正しくとれる範囲（4000 Hz まで）。7000 Hz（実線）と 9000 Hz（破線）は 1000 Hz に化ける。

答え　（1）（2）どちらも 1000 Hz（低い音に化ける）　（3）18 000 Hz より大きく

じぶんでとこう 10

$f_s = 8000\,\mathrm{Hz}$ でとるとき、（1）6000 Hz、（2）10 000 Hz の cos の音は、何 Hz の音と同じ点になりますか。（3）10 000 Hz までを正しくとるには、f_s を何 Hz より大きくしますか。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 名前の式の $-\infty\sim\infty$ を、そのまま計算しようとする

✕ パルスの $F(\omega)$ を、$\int_{-\infty}^{\infty}$ のまま計算しようとして、はしが決まらない

○ 0 でない区間だけの、ふつうの定積分に直す

$$F(\omega)=\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$-\infty\sim\infty$ は、名前の上の「すべての時刻」という意味です。$f=0$ の所は、たしても 0 です。

まちがえやすいところ

② ω と Hz を取りちがえる

✕ $F(\omega)$ の山が $\omega=10$ だから、10 Hz の音

○ $\omega=10$ rad/s は $\frac{10}{2\pi}\approx 1.6$ Hz

ω は角周波数〔rad/s〕で、Hz の 2π 倍です（$\omega=2\pi\times$ 周波数）。

まちがえやすいところ

③ 2π の置き場所をまぜる

✕ 別の本のもどす式（$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$）を、この本の変換と組にする

○ 変換ともどす式は、同じ本の組で使う

組がちがうと、もとの波にもどらず、$\sqrt{2\pi}$ 倍ずれます。

⚠ まちがえやすいところ

④ FFT の $|X_k|$ を、そのまま振幅と読む

✕ 440 Hz の $|X_k| = 4000$ だから、振幅 4000

○ 振幅は $\frac{2|X_k|}{N} = \frac{8000}{8000} = 1$

N 個の値の和なので N でわり、負の周波数の分の 2 をかけます。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ $f_s/2$ より上を、そのまま読む

✕ 7000 Hz の音が、FFT でも 7000 Hz に出る

○ 1000 Hz に化けて出る

$f_s = 8000$ Hz なら、とる前に 4000 Hz より上を取り除きます。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ $F(\omega)$ の複素数を、そのままグラフにする

✕ $F(4) = 0.12 - 0.16j$ を、たて軸の値としてかく

○ 大きさ $|F(4)| = 0.2$ をかく

成分の大きさは $|F(\omega)|$、山の位置（位相）は角で見ます。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ くり返す波を、$-\infty$〜∞ で積分する

✕ $\cos t$ の $F(\omega)$ を、名前の式で計算する

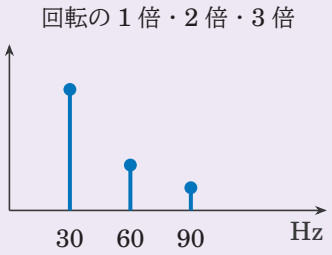
○ 9-3 の c_n で線（場合 F）

$-\infty$〜∞ では値が決まりません。

物理・工学ではこう使う

機械の振動で、故障を見つける

工場のモーターやポンプには、振動をはかるセンサーがつけられています。とった振動のデータを FFT すると、スペクトルの線の位置と高さがわかります。1 分に 1800 回転（1 秒に 30 回転）の軸なら、30 Hz（回転と同じ）の成分や、その 2 倍・3 倍の成分が出ます。回転する部分のつりあいがずれると 1 倍の成分が、軸のつなぎ目がずれると 2 倍の成分が大きくなることが多く、故障の目安として使われます（物理 波-10）。軸受けにきずがあると、回転数とはちがう、きずの位置で決まる周波数の線が現れます。



雑音を消す・声を聞き分ける

録音した音を FFT し、雑音の成分（たとえば、電源から入る 50 Hz や 60 Hz の「ブーン」という音）の所だけを小さくして、もとにもどすと、雑音がへった音になります。スマホの音声入力も、声を短い時間に区切ってスペクトルを求め、フォルマントの並び方から、どの音（「あ」「い」…）かを調べることから始まります。

画像のフーリエ変換

写真のような 2 次元の画像も、横と縦の 2 つの向きでフーリエ変換できます。画像のなめらかな部分は低い周波数、細かいもようは高い周波数の成分です。病院の MRI という装置は、体の中からの電波の信号を、2 次元のフーリエ変換で画像にもどしていることが知られています（9-12 で、写真の圧縮とあわせて読みます）。

章末問題

9-4 のまとめ

基本 ★★★★★

1 $-1 < t < 1$ で $f = 3$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換を求め、$F(0)$ と $F(\frac{\pi}{2})$ を求めましょう（例題 1）。

2 $t \geqq 0$ で $f(t) = e^{-4t}$、$t < 0$ で $f = 0$ の波のフーリエ変換を求め、$|F(0)|$ と $|F(4)|$ を求めましょう（例題 2）。

3 $f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求め、$F(0) \cdot F(1) \cdot F(3)$ を求めましょう（例題 3）。

4 1 ms ごとにとった 8 つの値 2, 0, −2, 0, 2, 0, −2, 0 の DFT の X_2 を求め、その成分の周波数と振幅を答えましょう（例題 8）。

5 音楽の CD と同じ $f_s = 44\,100$ Hz で 1 秒間とった音を FFT しました。点の数、周波数のきざみ、正しく調べられるいちばん高い周波数を求めましょう。また、ある成分の $|X_k|$ が 22 050 のとき、振幅はいくつですか（例題 9）。

チャレンジ ★★★★★

6 $f(t) = e^{-t^2/18}$ のフーリエ変換を求め、$F(0)$ と、周波数の世界のはばを求めましょう（例題 4）。

7 $2 < t < 4$ で $f = 1$、それ以外で $f = 0$ のパルスのフーリエ変換を求め、$F(\frac{\pi}{2})$ と、その大きさを求めましょう（例題 5）。

8 $f(t) = e^{-t^2/2} \cos 5t$ のフーリエ変換を求め、$F(5)$ と $F(4)$ を求めましょう（例題 6）。

9 $f_s = 1000\,\mathrm{Hz}$ でとるとき、900 Hz と 1100 Hz の cos の音は、それぞれ何 Hz の音と同じ点になりますか。また、どちらも正しくとるには、f_s を何 Hz より大きくすればよいですか（例題 10）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- □ 口笛・声・手をたたく音のスペクトルのちがいを説明でき、短いパルスほどスペクトルが広がることを言える。 → 166 ページ
- □ フーリエ変換 $F(\omega)$ の記号を読み、方形パルスの変換をふつうの定積分で求め、表計算の和で確かめられる。 → 169 ページ
- □ 場合分けの表を使って変換を求め、DFT・FFT の結果を読み、サンプリング定理とエイリアシングを説明できる。 → 175 ページ

ミナ

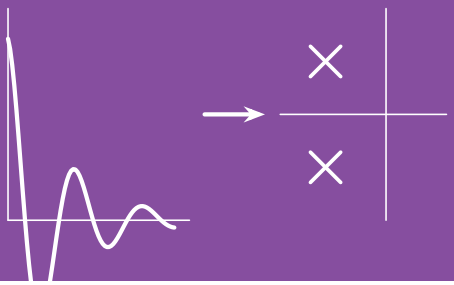
くり返さない音も、すきまのない曲線のスペクトルになるんだね。次の第 2 部では、$e^{-j\omega t}$ を e^{-st} にかえたラプラス変換で、微分方程式を解くよ。

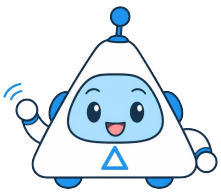
第９巻　第２部

ラプラス変換

2

- 微分方程式が、ふつうの方程式に変わる？
- 箱をつなぐと、どうなる？
- 落ち着くかどうかは、どこを見ればわかる？





微分を s のかけ算に変える「翻訳機」がラプラス変換だよ。変換表と部分分数で微分方程式を解き、伝達関数と極で、機械や回路のふるまいを見通すよ。

この部で学ぶこと

9-5 微分をかけ算に変える翻訳機：ラプラス変換 ×2 ★★★★★ P.214

微分方程式が、ふつうの方程式に変わる

9-6 変換表と性質 ×2 ★★★★★ P.248

よく使う関数の「翻訳表」を作ろう

9-7 ラプラス変換で微分方程式を解く ×2 ★★★★★ P.292

部分分数に分けて、表で元にもどす

9-8 伝達関数：入れると出てくるを s で表す ×2 ★★★★★ P.346

箱をつなぐと、伝達関数のかけ算になる

9-9 極と安定性：s の値でふるまいがわかる ×2 ★★★★★ P.388

極の場所を見るだけで、落ち着くかどうかがわかる

2

この部を読むと…

ラプラス変換を、定積分・変換表・部分分数を使い分けて計算し、回路やばね・制御の微分方程式を解けるようになります。伝達関数と極の位置から、落ち着くかどうかを読めるようになります。

第 2 部　ラプラス変換

★★★★★

9-5 微分をかけ算に変える翻訳機：ラプラス変換

道しるべ　この章の前に 3-8 3-11 3-12 5-14 5-16 5-18 6-4 6-10 6-12 6-15
この章の先に 9-6 9-7 9-9

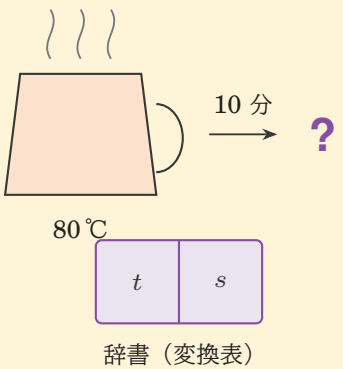
この章でできるようになること

- ★★★「微分→ s をかける」の辞書を使って、冷めるお湯の微分方程式を s の式に書きかえ、表でもどして答えを出せる。
- ★★★★ ラプラス変換の記号を「名前」として読み、辞書（変換表）の行を、定義の積分で 1 回だけ作れる。
- ★★★★★ 微分の行 $sF(s)-f(0)$ を部分積分で導き、場合分けの表 9-6（A・B・E）を使って微分方程式を変換できる。

はてな？

80℃のお湯を、20℃の部屋に置きます。温度は、部屋との差の 0.05 倍の速さ（1 分あたり）で下がります（6-1・6-4 の冷めるお湯）。

10 分後の温度を、微分も積分もしないで、「辞書」を引くだけで求められるでしょうか。



6-4 では、冷めるお湯の式を、変数を分けて積分して解きました。6-12 では、ばねとダンパーの式に e^{st} を入れて、特性方程式という s の 2 次方程式にしました。どちらも、そのたびに頭をひねる必要がありました。

この章では、微分方程式を「s **の世界**」の式に**翻訳**する道具、**ラプラス変換**を学びます。翻訳すると、微分が「s をかける」に変わり、微分方程式が、かけ算・わり算・たし算だけのふつうの方程式になります。答えは、辞書を逆に引いて時間の世界にもどします。制御工学・電気回路で毎日のように使われる道具です。

翻訳の辞書（**変換表**）は、一度だけ自分で作ります。作り方は、5-14 の e の積分と、5-16 の部分積分です。新しい考えが多い章です。1 回で全部わからなくても大丈夫。辞書を使うやってみようから始めて、あとで「なぜその辞書でよいのか」を確かめます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 6-4　冷めるお湯 $\frac{dT}{dt} = -0.05(T-20)$、$T(0)=80$ の答えは $T = 20 + 60e^{-0.05t}$（t は分）。10 分後 56.39 ℃。
- 3-8　部分分数：$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$。方法 2：分母をはらってから、分母を 0 にする数を代入する。
- 5-14　$(e^{at})' = ae^{at}$、$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at}$（$a \neq 0$）。$e^{-t}$ は t が大きくなると 0 に近づく。
- 5-16　部分積分 $\int fg'\,dt = fg - \int f'g\,dt$。定積分では fg にもはんいをつける。
- 5-18　t^3e^{-t} は $t=10$ で 0.045、$t=20$ で 0.00002。e^{-t} がかかると、t^n がかかっていても 0 に近づく。
- 6-12　$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に e^{st} を入れると、特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$。車 A は $s^2 + 3s + 2 = 0$ で $s = -1,\ -2$。

やってみよう　辞書を引いて、お湯の式を書きかえよう

下の辞書を使います。左の列（時間の世界の形）を見つけたら、右の列（s の世界の形）に書きかえます。$T(t)$ を書きかえたものは、大文字のまま $T(s)$ と書きます。

時間の世界	s の世界	意味
$T(t)$	$T(s)$	名前を大文字に
$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$	$sT(s)-T(0)$	微分は「s をかけて、はじめの値をひく」
定数 c	$\dfrac{c}{s}$	定数は s でわる
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	e の肩の数が、分母に入る
$f+g$、cf	$F+G$、cF	たし算と定数倍は、そのまま

表 1　翻訳の辞書（変換表）のはじめの 5 行。どの行も、この章の数学の道具で作る。

1. お湯の式の右辺 $-0.05(T-20)$ を、かっこを外して $-0.05T+1$ にする（$0.05\times 20=1$）。
2. 左辺の微分を、辞書で $sT(s)-80$ に（はじめの温度 $T(0)=80$）。右辺の $-0.05T$ は $-0.05T(s)$、定数 1 は $\frac{1}{s}$ に。
3. できた式を、$T(s)$ について、ふつうの 1 次方程式として解く。
4. 3-8 の部分分数で、辞書にある形（c/s と $c/(s-a)$）に分ける。
5. 辞書を右から左へ引いて、時間の世界にもどす。$t=10$ を入れて、10 分後の温度を求める。

①〜⑤を 1 行ずつ進めます。②の式は、次のようになります。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.05\,T + 1$$ ①：$-0.05 \times (-20) = 1$

$$sT(s) - 80 = -0.05\,T(s) + \frac{1}{s}$$ ②：辞書で 1 項ずつ書きかえる

$$sT(s) + 0.05\,T(s) = 80 + \frac{1}{s}$$ ③：$T(s)$ の項を左へ

$$(s + 0.05)\,T(s) = 80 + \frac{1}{s}$$ $T(s)$ でくくる

$$T(s) = \frac{80}{s + 0.05} + \frac{1}{s(s + 0.05)}$$ 両辺を $s + 0.05$ でわる

微分が消えて、s のわり算だけの式になりました。2 つめの分数は、辞書にない形です。④で、3-8 の方法 2（分母をはらって、数を代入する）を使って分けます。

$$\frac{1}{s(s + 0.05)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.05}$$ 分けた形を置く

$$1 = A(s + 0.05) + Bs$$ 両辺に $s(s + 0.05)$ をかける

$$1 = 0.05A, \quad A = 20$$ $s = 0$ を入れる（B の項が消える）

$$1 = -0.05B, \quad B = -20$$ $s = -0.05$ を入れる（A の項が消える）

$$T(s) = \frac{20}{s} + \frac{80 - 20}{s + 0.05}$$ A、B を入れ、分母が同じ項をまとめる

$$= \frac{20}{s} + \frac{60}{s + 0.05}$$ $80 - 20 = 60$

⑤：辞書を右から左へ引きます。1 つめの項は「定数 20」です。2 つめの項は、e^{at} の行で $a = -0.05$ としたものの 60 倍なので、「$60e^{-0.05t}$」です。だから

$$T = 20 + 60\,e^{-0.05t}$$

6-4 で求めた答えと、まったく同じです（9-0 で予告した翻訳の道すじも、この式でした）。10 分後は、次のとおりです。

$$T(10) = 20 + 60e^{-0.5} = 20 + 60 \times 0.6065 = 56.39\,℃$$

微分も積分もせずに、辞書と、たし算・かけ算・わり算だけで答えが出ました。

❓はてな？ の答えは「求められる。10 分後は 56.39 ℃」です。

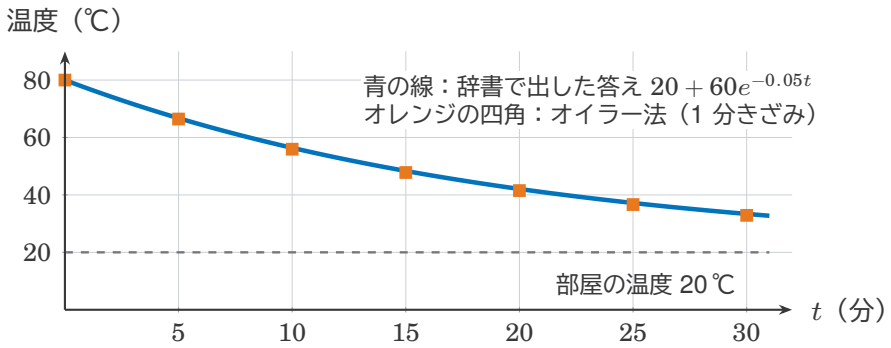


図 1　辞書で出した答え（青の線）と、6-2 のオイラー法（1 分きざみ、オレンジの四角）。10 分後は 56.39 ℃ と 55.92 ℃。オイラー法は、きざみを細かくすると線に近づく。

数学の道具

目でわかる 翻訳して、解いて、もどす　★★★

1 2 つの世界と、3 つの矢印

やってみようでしたのは、むずかしい計算を、計算しやすい世界に**翻訳**して解き、もとにもどす、ということです。この考えは、前にも使いました。3-12 の対数を思い出しましょう。かけ算 2×3 を、対数の表で「たし算」に翻訳し、たして、表を逆に引いてもどしました。計算尺は、このしくみの道具でした。ラプラス変換も、同じ形の考えです。

	対数（3-12）	ラプラス変換（この章）
むずかしい計算	かけ算	微分（微分方程式）
翻訳すると	たし算になる	s のかけ算になる
翻訳の辞書	対数の表	変換表
もどし方	表を逆に引く	表を逆に引く（9-7）

表 2　対数とラプラス変換は、同じ形の「翻訳の道具」。

やってみようでしたことを、1 枚の図にまとめます。左の列が**時間の世界**（t で書いた式とグラフ）、右の列が s **の世界**（s で書いた式）です。

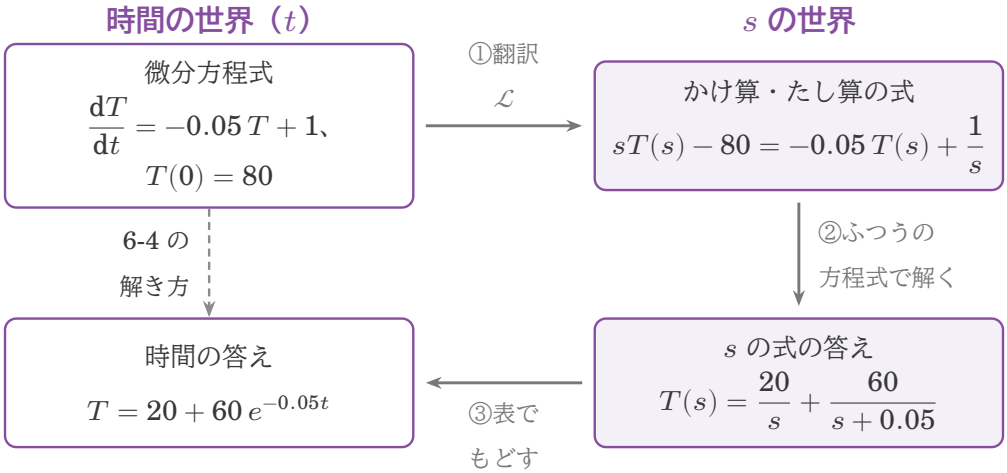


図 2　翻訳の道すじ。時間の世界で直接解く（点線、6-4）かわりに、s の世界に翻訳し（①）、ふつうの方程式として解き（②）、辞書を逆に引いてもどす（③）。

遠回りに見えますが、①と③は辞書を引くだけ、②はかけ算・わり算・たし算だけです。むずかしい所が 1 つもない道に取りかえたのです。

せいかくに言うと

表を逆に引いてよいわけ：もどし方は 1 つに決まる

③で「辞書を逆に引いてもどす」ことができるのは、**ちがう関数は、ちがう $F(s)$ に翻訳される**からです。もし、2 つのちがう関数 $f(t)$ と $g(t)$ が同じ $F(s)$ になってしまうと、$F(s)$ からもどすときに、どちらにもどせばよいか決まりません。数学では、$t \geqq 0$ でとちゅうでとばずにつながった（連続な）関数どうしなら、ある数より大きいすべての s で $F(s)$ が同じとき、$f(t)$ と $g(t)$ も同じであることが証明されています（レルヒの定理）。だから、$\frac{60}{s+0.05}$ を見たら、もとは $60e^{-0.05t}$ だと決めてよいのです。ただし、$t < 0$ の値は翻訳に入っていないので、もどした答えは $t \geqq 0$ の所だけの答えです。

② はじめの値が、自動で入る

6-12 で e^{st} を入れたときは、まず特性方程式で s を決め、そのあとで、はじめの位置や速度に合うように A、B を別に決めました。辞書の微分の行 $sT(s) - T(0)$ には、はじめの値 $T(0)$ が入っています。だから、翻訳した式には、はじめから 80 が入っていて、$T(s)$ を求めると、はじめの値に合った答えが 1 回で出ます。これが、ラプラス変換のうれしい所の 1 つです。

手でわかる　辞書の行を、自分で作る　★★★★

③ 名前の段：ラプラス変換の記号を読む

辞書の行は、どこから来たのでしょう。ラプラス変換は、次の式で決めます。

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

「$f(t)$ に e^{-st} をかけて、$t = 0$ から、どこまでもたし合わせる」

$\mathcal{L}$ は、ラプラス（Laplace）の頭文字を、筆記体ふうにした字で、「ラプラス」と読みます（「エル」と読む人もいます）。これを $f(t)$ の**ラプラス変換**（らぷらすへんかん）といいます。時間の関数は小文字 $f(t)$、変換したものは大文字 $F(s)$ で書く約束です（$x \to X$、$y \to Y$）。

①名前の段　記号を読む：何に・何をかけて・どこからどこまで

1. **何に**：時間の関数 $f(t)$（お湯の温度、コンデンサーの電圧、車の位置など）。
2. **何をかけて**：e^{-st}。s は、自分で選ぶ数です（今は正の数と考えます。複素数のときは⑧で）。
3. **どこからどこまで**：$t=0$ から ∞ まで。$t<0$ の値は使いません。スイッチを入れた時刻を 0 にして、そこから先だけを見ます。

s の値を 1 つ決めると、積分の値が 1 つ決まります。だから、変換したものは s の関数 $F(s)$ です。t の関数を、s の関数に取りかえる操作、と言うこともできます。

記号は「操作の名前」

第 8 巻の積分の記号と同じく、$\mathcal{L}[f(t)]$ は操作の**名前**です。名前を見ただけでは、まだ数は出ません。実際の値は、次の 2 つの道具のどちらかに直して出します。

$$\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}[e^{-0.05t}]}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{1}{s+0.05}}_{\text{表を引く}}$$

上の式は、辞書の行を **1 回だけ作る**ときの直し方（ふつうの定積分）、下の式は、できた辞書を**使う**ときの直し方（表を引く）です。このように、名前を、計算できる形に直してする計算を**実際の操作**といいます。ラプラス変換では、ほとんどいつも「表を引く」で終わります。

∞ までの積分

$\int_0^\infty$ は、「0 から b までのふつうの定積分を計算して、b をどこまでも大きくした先」という意味です（8-6 のガウス積分の「範囲をどんどん広げた先」と同じ）。このような積分を**広義積分**（こうぎせきぶん）とよびます。先が決まった数に近づかないときは、「変換できない（その s では積分が有限にならない）」と言います。

4 なぜ e^{-st} をかけるのか

理由は 2 つあります。1 つめは、**どこまでもたしても、有限の値にするため**です。$f(t)=1$ を、0 から ∞ まで、そのまま積分すると、面積はいくらでも大きくなります。e^{-st} をかけると、大きな t の所が小さくおさえられ、面積が決まった数になります。

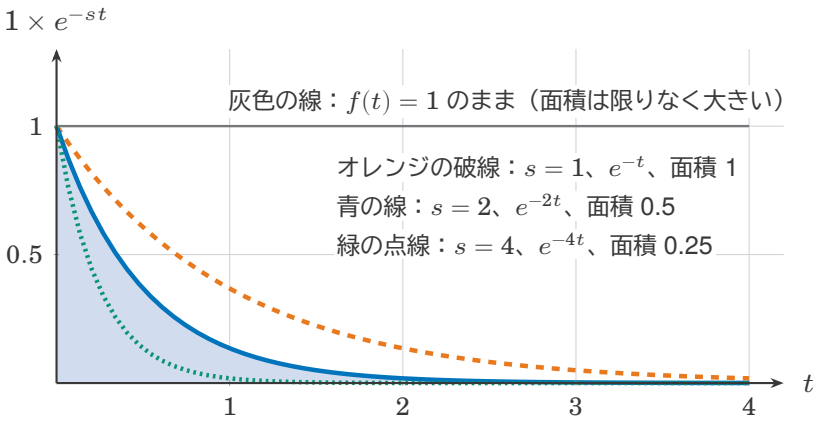


図 3　$f(t)=1$ に e^{-st} をかけたグラフ。s が大きいほど早く 0 に近づき、下の面積（$s=2$ の所をぬった）は小さくなる。面積は $\frac{1}{s}$：これが辞書の「定数 1 → $\frac{1}{s}$」。

5-18 で見たように、e^{-t} は、t^3 のような累乗の関数よりずっと速く 0 に近づきます。だから、$f(t)$ が t、t^2、$e^{0.5t}$ のようにふえる関数でも、s を十分大きくすれば、$f(t)e^{-st}$ は 0 に近づき、面積が決まった数になります。

2 つめの理由は、**微分が s のかけ算に変わるため**です。これは⑥の部分積分で見ます。e^{-st} は微分しても $-s$ 倍になるだけの、形の変わらない関数（5-14）なので、部分積分をすると s だけが前に出てくるのです。

5 直す段：辞書の行を、定義の積分で作る

②直す段 ふつうの定積分に直す（1 回だけ）

辞書の行を、定義の積分で 1 行ずつ作ります。どの行も、0 から b までの定積分を計算して、b を大きくします。

定数 1 の行：$\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$

$$\int_0^b 1 \times e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^b$$ e^{-st} の積分（5-14。$a = -s$）

$$= -\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}$$ 上のはし b と下のはし 0 を入れて、ひく

$$\to 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$ b を大きくすると $e^{-sb} \to 0$（$s > 0$ のとき）

定数 c なら、c を前に出して $\frac{c}{s}$ です（定数倍は積分の外に出せる：5-11）。s が 0 や負の数だと、e^{-sb} は 0 に近づかず、積分は有限になりません。だから、この行は「$s > 0$ のとき」の行です。

表計算で確かめる

定義の積分を、表計算の台形の和（5-10）で近い値にしてみます。$f(t) = 1$、$s = 2$ として、$t = 0$ から 10 まで $\Delta t = 0.1$ ずつ、f と e^{-2t} とその積を並べ、となりどうしの台形（上の値と下の値の平均× 0.1）をたします。∞ のかわりに $t = 10$ で止めてよいのは、$e^{-20} = 2.1 \times 10^{-9}$ で、その先はほとんど 0 だからです。

E3 `=(D2+D3)/2*0.1`

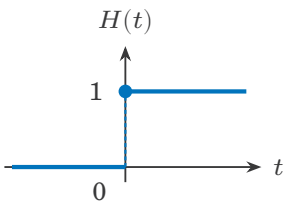
	A	B	C	D	E
1	t	$f(t)$	e^{-2t}	fe^{-2t}	台形
2	0	1	1.0000	1.0000	
3	0.1	1	0.8187	0.8187	0.0909
4	0.2	1	0.6703	0.6703	0.0745
5	0.3	1	0.5488	0.5488	0.0610
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
102	10	1	0.0000	0.0000	0.0000
103	合計				0.50167

表 3　$\int_0^\infty fe^{-2t}\,\mathrm{d}t$ を台形でたす表（$\Delta t = 0.1$、$t = 10$ まで）。C2 は `=EXP(-2*A2)`、D2 は `=B2*C2`、E103 は `=SUM(E3:E102)`。表の値は $\frac{1}{s} = 0.5$。

表計算の値 0.50167 は、辞書の $\frac{1}{s} = \frac{1}{2} = 0.5$ に近い値です。$\Delta t = 0.01$ にすると 0.50002 になり、さらに近づきます。辞書の行は、この「たし合わせ」を、式で一度に計算したものなのです。

ステップ関数 $H(t)$：時刻 0 にスイッチを入れる

ラプラス変換は $t \geqq 0$ だけを見るので、「定数 1」は、正確には「$t < 0$ では 0、$t \geqq 0$ では 1」という関数のことです。これを**ステップ関数**（すてっぷかんすう。ヘビサイドの階段関数）といい、$H(t)$ と書きます。「時刻 0 にスイッチを入れて、電池の 1V をつなぐ」ようすを表す関数で、$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$ です。H は、6-12 のコラムに出てきたヘビサイドの頭文字です。



e^{at} の行：$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

$e^{at} \times e^{-st} = e^{-(s-a)t}$（肩のたし算：5-14）なので、上の計算の s を $s-a$ に取りかえるだけです。

$$\int_0^b e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^b e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{肩をまとめる}$$

$$= \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^b \qquad \text{5-14（肩の係数 } -(s-a) \text{ でわる）}$$

$$\to \frac{1}{s-a} \qquad s > a \text{ なら、} b \text{ を大きくすると } e^{-(s-a)b} \to 0$$

お湯の $e^{-0.05t}$ は $a = -0.05$ なので $\frac{1}{s+0.05}$ です（$s > -0.05$ のとき）。「$s > a$ のとき」という条件は、「e^{-st} が、e^{at} のふえ方に勝つくらい速く小さくなるとき」という意味です。

t の行：$\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$（部分積分）

$t \times e^{-st}$ は、5-16 の部分積分を使います。微分すると簡単になる t を f、積分しやすい e^{-st} を g' にします（$g = -\frac{1}{s}e^{-st}$）。

$$\int_0^\infty t\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{求めたいもの}$$

$$= \left[t \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{部分積分 } fg - \int f'g$$

$$= (0-0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{はしの項は 0（下の説明）}$$

$$= \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad \text{残りは } \mathcal{L}[1] = \tfrac{1}{s}$$

はしの項 $\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty$ は、$t = 0$ では 0、t が大きくなると、te^{-st} が 0 に近づくので 0 です（5-18：e^{-t} がかかると、t^n がかかっていても 0 に近づく）。

Python で確かめる

Python では、∞ までの積分を数値で計算する quad（scipy）が使えます。$s=2$ のときの $\mathcal{L}[1]$・$\mathcal{L}[t]$・$\mathcal{L}[e^{-t}]$ を計算し、辞書の値 $\frac{1}{s}$・$\frac{1}{s^2}$・$\frac{1}{s+1}$ とくらべます。

Python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
s = 2
fs = [lambda t: 1, lambda t: t, lambda t: np.exp(-t)]
table = [1/s, 1/s**2, 1/(s+1)]      # 辞書の値
for f, F in zip(fs, table):
    v = quad(lambda t: f(t)*np.exp(-s*t), 0, np.inf)[0]
    print(round(v, 5), round(F, 5))
```

実行結果

```
0.5 0.5
0.25 0.25
0.33333 0.33333
```

左が数値の積分、右が辞書の値です。どれも同じになりました。

6 微分の行：$\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$

いよいよ、この章でいちばん大事な行です。5-16 で「e^{-st} をかけて積分すると、微分が s のかけ算に変わります。そのしくみが、部分積分です」と予告しました。$f'(t)$（f を微分したもの）のラプラス変換を、部分積分で計算します。こんどは、e^{-st} を f の役（微分するほう）、$f'(t)$ を g' の役（積分するほう）にします。f' を積分すると f にもどる（5-11）ので、$g = f(t)$ です。

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{求めたいもの}$$

$$= \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s\,e^{-st})\, f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{部分積分。}(e^{-st})' = -se^{-st}$$

$$= (0 - e^0 f(0)) + s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{はしの項（下の説明）。}-s\text{ を外へ}$$

$$= -f(0) + s\,F(s) \qquad \text{残った積分は、}f\text{ のラプラス変換 }F(s)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0)$$

- s **が前に出る**のは、e^{-st} を微分すると $-s$ 倍になるから。部分積分で、微分が f' から e^{-st} に移り、そのとき s が出てきます。
- $-f(0)$ **は、はしの項**です。$t=\infty$ の側は、e^{-st} が $f(t)$ のふえ方に勝って 0。$t=0$ の側は $e^0 f(0) = f(0)$ で、それをひきます。

はじめの値 $f(0)$ が、計算のしくみから自然に入ってきます。②で見た「はじめの値が自動で入る」は、この部分積分のはしの項のおかげでした。

数で確かめる：$f = e^{-2t}$

$f = e^{-2t}$ なら、$f' = -2e^{-2t}$ です。左辺を辞書で直接、右辺を微分の行で計算して、くらべます。

$$\mathcal{L}[f'] = \mathcal{L}[-2e^{-2t}] = \frac{-2}{s+2}$$ 直接：e^{at} の行で $a=-2$、-2 倍

$$sF(s) - f(0) = \frac{s}{s+2} - 1$$ 微分の行：$F = \frac{1}{s+2}$、$f(0) = e^0 = 1$

$$= \frac{s-(s+2)}{s+2} = \frac{-2}{s+2}$$ 通分する

同じになりました。

ここまでで十分

辞書を引いて微分方程式を s の式に書きかえ、部分分数と辞書でもどせること、辞書の行が「e^{-st} をかけて 0 から ∞ までの積分」で作れること、微分の行 $sF - f(0)$ が部分積分から出ることがわかれば十分です。この先は、2 回微分の行、s が複素数のとき、場合分けの表です。

∂ 式でわかる　2 回微分、複素数の s、場合分け　★★★★★

7 2 回微分の行と、6-12 の特性方程式

2 回微分 f'' は、「f' をもう一度微分したもの」です。微分の行を 2 回使います。

$$\mathcal{L}[f''] = s\,\mathcal{L}[f'] - f'(0)$$　微分の行を、f のかわりに f' に使う

$$= s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$$　$\mathcal{L}[f'] = sF - f(0)$ を入れる

$$= s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$　かっこを外す

$$\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0)}$$

はじめの位置 $f(0)$ と、はじめの速度 $f'(0)$ の両方が、自動で入ります。

車 A を翻訳する

3-10・6-12 の車 A $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$（はじめ $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$）を翻訳します。

$$(s^2X - s\cdot 1 - 0) + 3(sX - 1) + 2X = 0$$　1 項ずつ辞書で（$\ddot{x}$、$\dot{x}$、x）

$$(s^2 + 3s + 2)\,X = s + 3$$　X の項を左に、残りを右に

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$　わる。分母を因数分解

分母の $s^2 + 3s + 2$ は、6-12 で e^{st} を入れて作った特性方程式の左辺と同じです。6-12 で「第 9 巻のラプラス変換でも同じ s を使います」と書いたのは、このためでした。この $X(s)$ を部分分数に分けて表でもどす方法は 9-7 でくわしく学びますが、やってみようと同じ方法で $\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ に分かれ、6-12 と同じ答え $x = 2e^{-t} - e^{-2t}$ になります。

もっと知りたい ★★★★★

6-12 の解き方と、ラプラス変換の解き方をくらべる

車 A（$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）を、2 つの方法で解いた手順を並べます。

	6-12（e^{st} を入れる）	9-5（ラプラス変換）
①	e^{st} を入れて、特性方程式 $s^2+3s+2=0$	両辺を変換： $(s^2+3s+2)X=s+3$
②	解 $s=-1$、-2 から $x=Ae^{-t}+Be^{-2t}$	$X=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ を部分分数に
③	はじめの値から連立方程式 $A+B=1$、$-A-2B=0$	$s=-1$、-2 を代入して係数 2、-1
④	$A=2$、$B=-1$	表でもどす
答え	$x=2e^{-t}-e^{-2t}$	$x=2e^{-t}-e^{-2t}$

6-12 では、はじめの値を最後に連立方程式で入れました。ラプラス変換では、①の翻訳のときに、はじめの値が $s+3$ の中に入っています。式がもっと複雑になったり、右辺に入力があったりしても、ラプラス変換の手順は同じです（9-7）。

8 s は複素数でもよい：$s=\sigma+j\omega$

ここまで、s は正の数として考えてきました。じつは、s は複素数でもかまいません。6-10 ⑪で学んだように、$s=\sigma+j\omega$（σ はシグマ、ω はオメガ）なら、

$$e^{-st}=e^{-\sigma t}\times e^{-j\omega t}$$

です。$e^{-\sigma t}$ は「小さくする」役（$\sigma>0$ なら、t が大きいほど小さく）、$e^{-j\omega t}$ は「回る」役（長さ 1 のまま、角度 $-\omega t$ で回る矢印）です。だから、e^{-st} をかけることは、「σ でだんだん小さくしながら、ω の速さで回してかける」ことです。

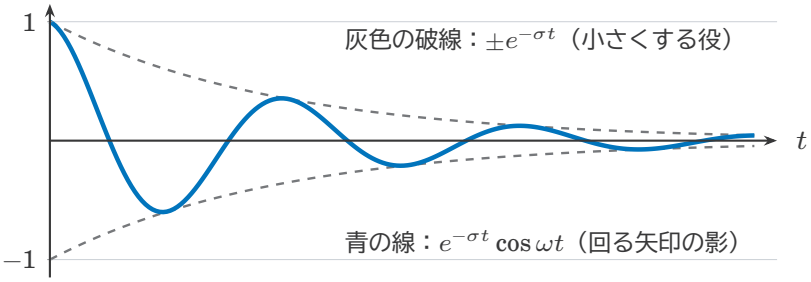


図 4　$s = 0.5 + 3j$ のときの e^{-st} の実部 $e^{-0.5t}\cos 3t$。回る矢印の影がゆれながら、$e^{-0.5t}$ の中に小さくなっていく。

周波数の世界は、s の世界の $s = j\omega$ の所

9-0 で、「周波数の世界は、s の世界の一部」と予告しました。9-4 のフーリエ変換は、$f(t)$ に $e^{-j\omega t}$ をかけて、$-\infty$ から ∞ までたしました。$f(t)$ が $t < 0$ で 0 なら、これはラプラス変換で $\sigma = 0$（$s = j\omega$）にしたものです（その積分が有限になるとき）。ラプラス変換は、フーリエ変換に「小さくする役」$e^{-\sigma t}$ をつけ足して、ふえていく関数（t、$e^{0.5t}$ など）でも積分が有限になるようにしたもの、と見ることもできます。

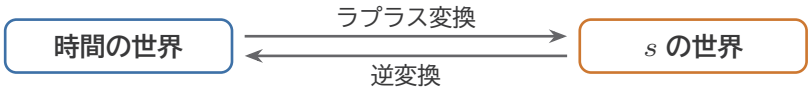
s の条件は、s の平面の「右側」

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ の計算は、s が複素数でも同じで、条件「$s > a$」は「s の実部 σ が a より大きい」に変わります。s の平面（6-9 の複素平面。横が σ、たてが ω）では、たての線 $\sigma = a$ より右側の全部です（図 5 の右の平面で、$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$ なら、×の -1 を通るたての線より右）。

なぜ、6-12 と同じ s なのか

e^{at} を変換すると $\frac{1}{s-a}$ で、$s = a$ のとき分母が 0 になります。つまり、**時間の世界の動き e^{at} の a が、s の世界では「分母が 0 になる場所」として現れる**のです。車 A の $X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ の分母が 0 になる $s = -1$、-2 は、6-12 で特性方程式を解いて出した s、つまり動き e^{-t}、e^{-2t} の肩の数そのものです。だから、6-12 の s と、ラプラス変換の s は同じ文字で書くのです（9-0 で「偶然で

はありません」と予告したわけ）。分母が 0 になるこの場所を、9-9 では**極**とよび、その場所で動きが「落ち着くか・ゆれるか・あばれるか」を読みます。



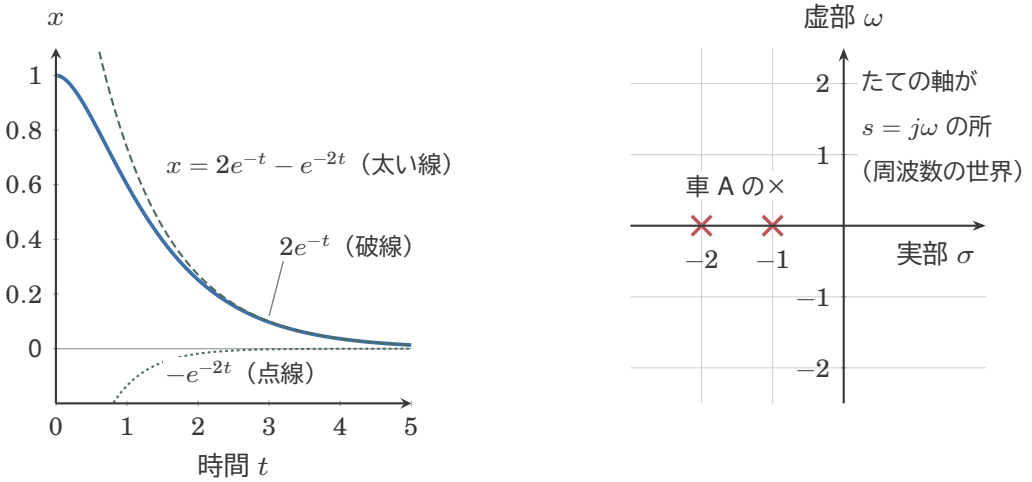


図 5　車 A の動き（左）と、$X(s)$ の分母が 0 になる場所（右の×）。×の -1、-2 が、動きの e^{-t}、e^{-2t} の肩の数。右のたての軸（$\sigma = 0$、$s = j\omega$）が、9-4 の周波数の世界にあたる所。

9 たし算と定数倍は、そのまま（線形）

③楽をする段　計算する前に、楽な道をさがす：項ごとに分ける

ラプラス変換は積分なので、たし算と定数倍はそのまま通ります（5-11 の定積分の性質）。

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s)$$

5-18 で、「答えどうしをたしても答え」になる式を**線形**な式とよび、「第 6 巻・第 9 巻の中心になる考え」と書きました。ラプラス変換も線形です。だから、いくつかの項の和は、項ごとに辞書を引いてたせばよいのです。たとえば

$$\mathcal{L}[20 + 60e^{-0.05t}] = 20 \times \frac{1}{s} + 60 \times \frac{1}{s + 0.05} = \frac{20}{s} + \frac{60}{s + 0.05}$$

で、やってみようの $T(s)$ にもどります。

ただし、**かけ算は、そのまま通りません**。$\mathcal{L}[f\,g]$ は、$F(s) \times G(s)$ ではありません。$f = g = 1$ なら、$\mathcal{L}[1 \times 1] = \frac{1}{s}$ ですが、$\mathcal{L}[1] \times \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}$ です。s の世界のかけ算 $F(s)G(s)$ が時間の世界の何になるかは、9-6 の「たたみこみ」で学びます。

⑩ 場合分けの表 9-6（はじめの 3 行）

ラプラス変換を求めるとき、「どの場合に、どう直すか」を表にします。この章では、表 9-6 のはじめの 3 行（A・B・E）を使います。9-6 で、ずらす・おくれる・t をかけるなどの行（C・D・F〜I）を足して、表と流れ図を完成させます。

場合分けの表 9-6　ラプラス変換：どんなときに、どう求める？（はじめの 3 行）

記号	こんなとき	手順	例題
A	辞書（表）にある形（1、t、e^{at} など）	表を引く　表を引く。まだない行は、定義の積分（ふつうの定積分）で 1 回だけ作る	1・7
B	表の形の和・定数倍	楽をする　線形：項ごとに A で引いて、たす	7
E	f'・f'' のある式（微分方程式）を変換する	表を引く　$f' \to sF - f(0)$、$f'' \to s^2F - sf(0) - f'(0)$。ほかの項は A・B で	2〜6

どの場合かは、図 6 の流れ図で、上から順に問いに答えて決めます。9-6 の流れ図は、この図に問いを足したものです。

どの場合かな？

図 6 の流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1　$\mathcal{L}[e^{3t}]$

答え：A。e^{at} の行で $a = 3$。$\frac{1}{s-3}$（$s > 3$）。

2 $\mathcal{L}[5-2t]$

答え：B→A。2 つの項の和。$\frac{5}{s}-\frac{2}{s^2}$。

3 RC 回路の式 $2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+V=10$ の変換

答え：E。f' のある式。

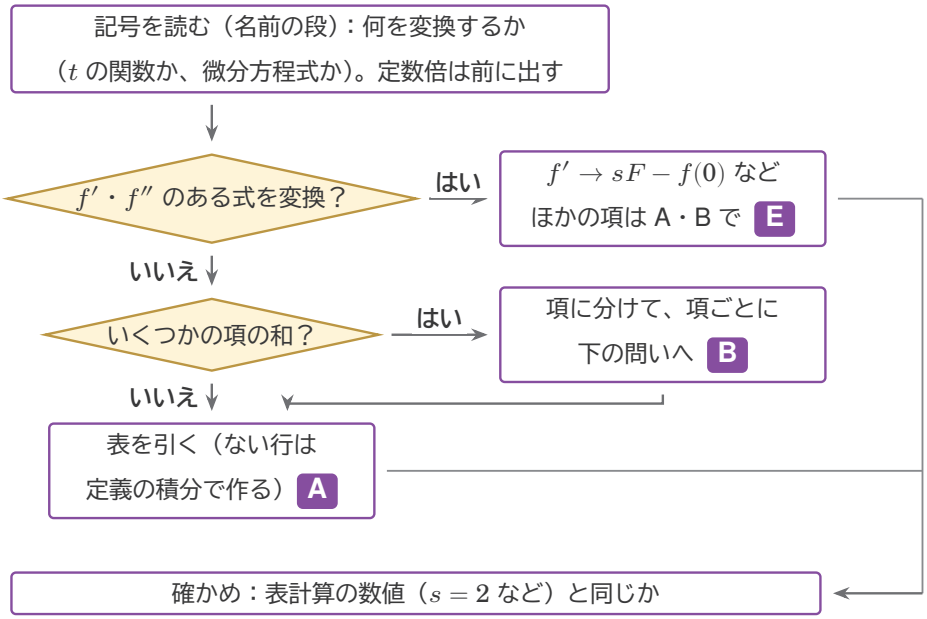


図 6 9-5 で使う流れ図（9-6 の流れ図のはじめの部分）。ひし形は問い、四角はすること。B のあとは、項ごとに左の列の下（A）へ。計算した四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

例題を、流れ図でたどってみよう

この章の例題 1〜7 を、図 6 の流れ図の上からたどると、次のようになります。じぶんでとこう・章末問題も、同じ番号の例題と同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	辞書の行を作る	なし（どちらも「いいえ」）	A
2	冷めるコーヒー	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
3	RC の充電	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
4	RL 回路	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
5	車 A	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
6	微分の行を確かめる	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
7	たし算の形	いくつかの項の和？ → 項ごとに A	B A

表 4　例題 1〜7 の流れ図の道すじ。

せいかくに言うと

どんな関数でも変換できるわけではない

ラプラス変換ができるのは、$f(t)$ が、ある数 a について e^{at} より速くはふえない（$|f(t)| \leqq Me^{at}$ となる数 M がある）ときです。そのとき、実部が a より大きい s で積分が有限になります。e^{t^2} のように、どんな e^{at} よりも速くふえる関数は、変換できません。工学で出てくる関数（定数・t^n・e^{at}・sin・cos とその組み合わせ）は、どれも変換できます。また、$f(t)$ がとちゅうでとんでもかまいません（9-6 のパルス）。

記号カード　初めて出た章 9-5

$\mathcal{L}[f(t)]$

読み方 ラプラス・エフ・ティー（エルと読む人もいる）
意味 $f(t)$ に e^{-st} をかけて 0 から ∞ までたしたもの。大文字で $F(s)$ と書く
英語 Laplace transform

記号カード　初めて出た章 9-5

$H(t)$

読み方 エイチ・ティー（ステップ関数）
意味 $t < 0$ で 0、$t \geqq 0$ で 1。$u(t)$・$1(t)$ とも書く
英語 step function

この章で出てきたことば

ラプラス変換　$f(t)$ に e^{-st} をかけて、$t=0$ から ∞ までたし合わせたもの $F(s)$。操作の名前。実際は、表を引いて求める。

s の世界　s で書いた式の世界。微分が s のかけ算になる。$s=\sigma+j\omega$ は複素数でもよい。

変換表（辞書）　時間の関数と、そのラプラス変換を並べた表。行は、定義の積分で 1 回だけ作る。

広義積分　∞ までの積分。b までの定積分の、b を大きくした先。

ステップ関数 $H(t)$　$t<0$ で 0、$t \geqq 0$ で 1。時刻 0 にスイッチを入れる。$\mathcal{L}[H]=\frac{1}{s}$。

コラム　ラプラスとヘビサイド：翻訳機ができるまで

e^{-st} をかけて積分する形は、オイラー（1744 年ごろ）やラプラス（1782 年ごろから）が調べました。約 100 年後、イギリスの電気技術者ヘビサイドは、1880 年代から 1900 年ごろにかけて、微分を文字のかけ算として計算する方法（演算子法）で電信や電話の回路を次々に計算しました（6-12 のコラム）。なぜそれでよいのかは説明されず、数学者に疑われましたが、ブロムウィッチ（1916 年）たちが数学として整え、ドェッチ（1937 年の本）たちが広めました。第二次世界大戦のころから、制御や回路の設計で広く使われています。

専門書をのぞいてみよう　ラプラス変換の専門書ふうの書き方

$t \geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ に対し，

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

をラプラス変換という．$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ならば，$F(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ で存在し，$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ が成り立つ．

訳　$\mathcal{L}\{\ \}$ は、この本の $\mathcal{L}[\ ]$（かっこの形がちがうだけ）。「定義された」は「値が決められている」。$\mathrm{Re}\, s$ は s の実部 σ。「存在し」は「積分が有限の値になり」。α は、この本の「$s > a$」の a。dt は、この本の $\mathrm{d}t$。$f(0)$ を $f(0+)$ や $f(0-)$ と書く本もある（9-6 のせいかくに言うと）。

たいせつ

ラプラス変換の 3 つの段

名前　**記号を読む：何に（$f(t)$）・何をかけて（e^{-st}）・どこからどこまで（0〜∞）**

楽をする　**直す前に：いくつかの項の和なら、項ごとに（線形）**

直す　**表を引く。表の行は、定義の積分で 1 回だけ作る**

$$\underset{\text{名前}}{\mathcal{L}[f(t)]} = \underset{\text{ふつうの定積分}}{\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t}$$

場合分けの表 9-6（はじめの 3 行のまとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	辞書（表）にある形	表を引く（$1 \to \frac{1}{s}$、$t \to \frac{1}{s^2}$、$e^{at} \to \frac{1}{s-a}$）
B	表の形の和・定数倍	項ごとに引いて、たす（線形）
E	f'・f'' のある式	$sF - f(0)$、$s^2F - sf(0) - f'(0)$

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-6 のどの場合かを書きました（流れ図の道すじは、表 4）。

例題 1　辞書の行を、定義の積分で作る

次のラプラス変換を、定義の積分で求めましょう。どんな s のときに使えるかも答えましょう。(1) $\mathcal{L}[e^{-2t}]$　(2) $\mathcal{L}[3t]$

考え方　**場合：**表の行を作る（表 9-6 の A）

名前　$\mathcal{L}$：f に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす。

直す：ふつうの定積分　0 から b までの定積分を計算し、b を大きくする。(2) は部分積分。

式

$$\int_0^b e^{-(s+2)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s+2}\left(1-e^{-(s+2)b}\right)$$

(1) 肩をまとめて積分 (5-14)

$$\to \frac{1}{s+2}$$

$s+2>0$（$s>-2$）なら $e^{-(s+2)b}\to 0$

$$3\int_0^\infty t\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

(2) 3 を外に出す

$$= 3\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{3}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

部分積分（$f=t$、$g'=e^{-st}$）

$$= 3\times 0 + \frac{3}{s}\times\frac{1}{s} = \frac{3}{s^2}$$

はしの項は 0 (5-18)。$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$

答え　(1) $\dfrac{1}{s+2}$ $(s>-2)$　(2) $\dfrac{3}{s^2}$ $(s>0)$

じぶんでとこう 1

次のラプラス変換を、定義の積分で求め、どんな s のときに使えるかも答えましょう。(1) $\mathcal{L}[e^{4t}]$　(2) $\mathcal{L}[4t]$

例題 2　冷めるコーヒー

90 ℃のコーヒーを 25 ℃の部屋に置くと、温度 T〔℃〕は次の式にしたがいます（t は分）。T をラプラス変換で求め、10 分後の温度を求めましょう（$e^{-0.4} = 0.6703$）。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.04\,(T - 25), \qquad T(0) = 90$$

考え方　**場合：**微分方程式を変換する（表 9-6 の **E**）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる：両辺に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす。

直す：表を引く　微分は $sT(s) - 90$、定数 1（0.04×25）は $\frac{1}{s}$。

式

$$sT(s) - 90 = -0.04\,T(s) + \frac{1}{s}$$　右辺は $-0.04T + 1$

$$(s + 0.04)\,T(s) = 90 + \frac{1}{s}$$　$T(s)$ の項を左へ、くくる

$$T(s) = \frac{90}{s + 0.04} + \frac{1}{s(s + 0.04)}$$　$s + 0.04$ でわる

$$\frac{1}{s(s + 0.04)} = \frac{25}{s} - \frac{25}{s + 0.04}$$　部分分数：$s = 0$ で $A = 25$、$s = -0.04$ で $B = -25$

$$T(s) = \frac{25}{s} + \frac{65}{s + 0.04}$$　$90 - 25 = 65$

$$T = 25 + 65e^{-0.04t}$$　辞書を逆に引く

答え　$T = 25 + 65e^{-0.04t}$、10 分後は $25 + 65 \times 0.6703 \approx 68.6$ ℃

じぶんでとこう 2

70℃のお湯を 20℃の部屋に置きます。温度は $\frac{dT}{dt} = -0.1(T-20)$、$T(0)=70$（$t$ は分）にしたがいます。ラプラス変換で T を求め、5 分後の温度を求めましょう（$e^{-0.5}=0.6065$）。

例題 3　RC 回路の充電

6-4 の回路（電池 10 V、$R=20\,\mathrm{k\Omega}$、$C=100\,\mu\mathrm{F}$、時定数 $RC=2\,\mathrm{s}$）で、コンデンサーの電圧 V〔V〕は次の式にしたがいます。ラプラス変換で V を求め、2 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）。

$$2\frac{dV}{dt}+V=10,\qquad V(0)=0$$

考え方　**場合**：微分方程式を変換する（表 9-6 の E）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる。

直す：表を引く　微分は $sV(s)-0$、V は $V(s)$、定数 10 は $\frac{10}{s}$。

式

$$2(sV(s)-0)+V(s)=\frac{10}{s}$$　1 項ずつ辞書で

$$V(s)=\frac{10}{s(2s+1)}=\frac{5}{s(s+0.5)}$$　$2s+1$ でわり、分母・分子を 2 でわる

$$\frac{5}{s(s+0.5)}=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+0.5}$$　部分分数：$s=0$ で $A=10$、$s=-0.5$ で $B=-10$

$$V=10-10e^{-0.5t}$$　辞書を逆に引く

$$V(2)=10-10\times0.3679=6.321$$　$t=2$ を入れる

答え　$V=10-10e^{-t/2}$、2 秒後は約 6.32 V（6-4 の答えと同じ）

じぶんでとこう 3

電池 5 V・時定数 1 s の RC 回路の電圧は $\frac{dV}{dt}+V=5$、$V(0)=0$ にしたがいます。V を求め、3 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-3}=0.0498$）。

例題 4　コイルの回路（RL 回路）

6-4 の RL 回路（電池 10 V、$R=10\,\Omega$、$L=0.5$ H）の電流 i〔A〕は次の式にしたがいます。i を求め、0.1 秒後の電流を求めましょう（$e^{-2}=0.1353$）。

$$0.5\frac{di}{dt}+10\,i=10,\qquad i(0)=0$$

考え方　**場合：**微分方程式を変換する（表 9-6 の **E**）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる。

直す：表を引く　微分は $sI(s)-0$、i は $I(s)$、定数 10 は $\frac{10}{s}$。

式

$$0.5\,sI(s)+10\,I(s)=\frac{10}{s}$$　1 項ずつ辞書で

$$I(s)=\frac{10}{s(0.5s+10)}=\frac{20}{s(s+20)}$$　わって、分母・分子を 2 倍

$$\frac{20}{s(s+20)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+20}$$　部分分数（$s=0$、-20 を代入）

$$i=1-e^{-20t}$$　辞書を逆に引く

答え　$i=1-e^{-20t}$、0.1 秒後は $1-0.1353\approx0.865$ A

じぶんでとこう 4

RL 回路の電流 i〔A〕が $0.2\frac{di}{dt}+4i=12$、$i(0)=0$ にしたがうとき、i を求め、0.05 秒後の電流を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）。

例題 5　車 A を翻訳する

車 A の式とはじめの値は、次のとおりです。ラプラス変換で $X(s)$ の式にし、分母が 0 になる s を求めましょう。また、部分分数に分けて x を求めましょう。

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

考え方　**場合**：微分方程式を変換する（表 9-6 の E）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる。

直す：表を引く　$\ddot{x}$ は $s^2X - s \cdot 1 - 0$、$\dot{x}$ は $sX - 1$、x は X。

式

$(s^2X - s) + 3(sX - 1) + 2X = 0$　　1 項ずつ辞書で

$(s^2 + 3s + 2)\,X = s + 3$　　X でくくり、$-s - 3$ を右へ

$X(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$　　分母を因数分解。0 になるのは $s = -1$、-2

$\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$　　部分分数：$s = -1$ で $A = 2$、$s = -2$ で $B = -1$

$x = 2e^{-t} - e^{-2t}$　　辞書を逆に引く

確かめ：$x(0) = 2 - 1 = 1$、$\dot{x}(0) = -2 + 2 = 0$ で、はじめの値に合っています。

はじめの位置が $x(0) = 2$ なら、$\ddot{x}$ は $s^2X - 2s - 0$、$\dot{x}$ は $sX - 2$ になります（$s\,x(0) = 2s$。2 をかけ忘れない）。

答え　$X(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$、分母が 0 は $s = -1$、-2（6-12 の特性方程式の解）、$x = 2e^{-t} - e^{-2t}$

じぶんでとこう 5

$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0$、はじめ $x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で $X(s)$ の式にし、分母が 0 になる s を求め、部分分数に分けて x を求めましょう。

例題 6　微分の行を、数で確かめる

$f(t)=e^{-5t}$ について、$\mathcal{L}[f']$ を、(1) f' を先に計算してから辞書で、(2) 微分の行 $sF(s)-f(0)$ で求め、同じになることを確かめましょう。

考え方　**場合：** f' の変換（表 9-6 の **E**）

名前　$\mathcal{L}[f']$：f' に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす。

直す：表を引く　(1) は e^{at} の行、(2) は微分の行を引く。

式

$$\mathcal{L}[-5e^{-5t}]=\frac{-5}{s+5}$$

(1) $f'=-5e^{-5t}$。e^{at} の行の -5 倍

$$\frac{s}{s+5}-1=\frac{s-(s+5)}{s+5}=\frac{-5}{s+5}$$

(2) $F=\frac{1}{s+5}$、$f(0)=1$。通分

答え　どちらも $\dfrac{-5}{s+5}$ で、同じになる

じぶんでとこう 6

$f(t)=e^{3t}$ について、$\mathcal{L}[f']$ を、(1) f' を先に計算してから辞書で、(2) $sF(s)-f(0)$ で求め、同じになることを確かめましょう。

例題 7　たし算の形を変換する

$\mathcal{L}[3-2e^{-t}+4t]$ を求めましょう。

考え方　**場合：**いくつかの項の和（表 9-6 の **B** と **A**）

名前　$\mathcal{L}$：$3-2e^{-t}+4t$ に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす。

楽をする　線形なので、項ごとに辞書を引いてたす。積分はしない。

直す：表を引く　$1 \to \frac{1}{s}$、$e^{-t} \to \frac{1}{s+1}$、$t \to \frac{1}{s^2}$。

式　$3 \times \dfrac{1}{s} - 2 \times \dfrac{1}{s+1} + 4 \times \dfrac{1}{s^2}$

答え　$\dfrac{3}{s} - \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{4}{s^2}$

じぶんでとこう 7

$\mathcal{L}[5+2t-3e^{2t}]$ を求めましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 微分の行の $-f(0)$ を忘れる

× $\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right] = sT(s)$

○ $\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right] = sT(s) - T(0)$

$-T(0)$ は、部分積分のはしの項です。忘れると、はじめの値が答えに入らず、お湯の答えが「ずっと 20℃」のようなまちがいになります。

⚠ まちがえやすいところ

② 記号 $\mathcal{L}$ を「かける数」と思う

✕ $\mathcal{L}[3t] = \mathcal{L} \times 3t$

○ 名前を、ふつうの定積分か表に直す

$$\underbrace{\mathcal{L}[3t]}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^\infty 3t\, e^{-st}\, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}} = \frac{3}{s^2}$$

$\mathcal{L}$ は数ではなく、「e^{-st} をかけて 0 から ∞ までたす」操作の名前です。

⚠ まちがえやすいところ

③ かけ算もそのまま通る

✕ $\mathcal{L}[t\, e^{-t}] = \dfrac{1}{s^2} \times \dfrac{1}{s+1}$

○ $\mathcal{L}[fg]$ は $F \times G$ ではない

（$\mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2}$：9-6）

そのまま通るのは、たし算と定数倍だけです。

⚠ まちがえやすいところ

④ 定数を定数のままにする

✕ $\mathcal{L}[10] = 10$

○ $\mathcal{L}[10] = \dfrac{10}{s}$

定数も、0 から ∞ までたすので、面積は $\frac{10}{s}$ です。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ s の条件を考えない

✕ $\mathcal{L}[e^{4t}]$ で $s = 2$ にする

○ 使えるのは $s > 4$ だけ

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 小文字と大文字をまぜる

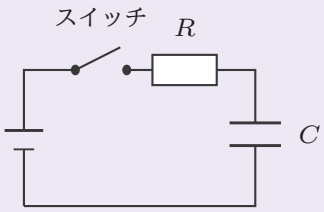
✕ $sx - x(0) + x = \dfrac{1}{s}$

○ $sX(s) - x(0) + X(s) = \dfrac{1}{s}$

物理・工学ではこう使う

スイッチを入れた直後の電気回路（過渡現象）

スイッチを入れたり切ったりした直後の、電圧や電流の変わり方を**過渡現象**（かとげんしょう）といいます。抵抗・コイル・コンデンサーの回路の式は、$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$、$\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$ をふくむ微分方程式です。ラプラス変換すると、コイルは「sL」、コンデンサーは「$\frac{1}{sC}$」（はじめの電流と電荷が 0 のとき）という、抵抗と同じように計算できる量になり、回路をオームの法則のように解けます（物理 電-9）。



制御の設計

エアコン・エレベーター・ドローンなど、目標に合わせて機械を動かす「制御」では、機械の式をラプラス変換して s の式で表し、かけ算・わり算で設計します（9-8・9-9、物理 波-4）。微分方程式を毎回解かなくてよいので、たくさんの部品をつないだ大きな機械でも計算できます。

電信と電話の回路

ヘビサイドが演算子法を使ったのは、遠くまで信号を送る電信・電話の線（送電線と同じ、分布定数回路）の計算でした。信号がゆがまずに届く条件（ヘビサイドの条件）も見つけています。

章末問題

9-5 のまとめ

基本 ★★★★★

1 $\mathcal{L}[e^{-3t}]$ を、定義の積分で求めましょう。どんな s のときに使えますか（例題 1）。

2 $\mathcal{L}[5t]$ を、定義の積分と部分積分で求めましょう（例題 1）。

3 $f(t)=e^{-3t}$ について、$\mathcal{L}[f']$ を、f' を先に計算する方法と、$sF(s)-f(0)$ の方法で求め、同じになることを確かめましょう（例題 6）。

4 $\mathcal{L}[3+2t-e^{-4t}]$ を求めましょう（例題 7）。

5 60 ℃のお湯を 20 ℃の部屋に置きます。温度は $\frac{dT}{dt}=-0.05(T-20)$（$t$ は分）にしたがいます。ラプラス変換で T を求め、10 分後の温度を求めましょう（$e^{-0.5}=0.6065$）（例題 2）。

6 $f(t)=e^{2t}$ について、$\mathcal{L}[f']$ を、f' を先に計算する方法と、$sF(s)-f(0)$ の方法で求め、同じになることを確かめましょう（例題 6）。

7 $\mathcal{L}[6-t+2e^{3t}]$ を求めましょう（例題 7）。

チャレンジ ★★★★★

8 電池 12 V、$R=10\,\mathrm{k\Omega}$、$C=100\,\mu\mathrm{F}$ の回路で、コンデンサーの電圧は $\frac{dV}{dt}+V=12$、$V(0)=0$ です（時定数 1 s）。ラプラス変換で V を求め、2 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-2}=0.1353$）（例題 3）。

9 電池 6 V、$R=3\,\Omega$、$L=0.3\,\mathrm{H}$ の RL 回路で、電流 i〔A〕は $0.3\frac{di}{dt}+3i=6$、$i(0)=0$ にしたがいます。ラプラス変換で i を求め、0.1 秒後の電流を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）（例題 4）。

10 $\ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$、はじめ $x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で $X(s)$ の式にし、分母が 0 になる s を求め、部分分数に分けて x を求めましょう（例題 5）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- □「微分→ s をかける」の辞書を使って、冷めるお湯の微分方程式を s の式に書きかえ、表でもどして答えを出せる。 → 218 ページ
- □ ラプラス変換の記号を「名前」として読み、辞書（変換表）の行を、定義の積分で 1 回だけ作れる。 → 223 ページ
- □ 微分の行 $sF(s)-f(0)$ を部分積分で導き、場合分けの表 9-6（A・B・E）を使って微分方程式を変換できる。 → 226 ページ

ソラ

微分が s のかけ算になって、はじめの値も自動で入る。次は、辞書の行をふやして、表を完成させよう。

第 2 部　ラプラス変換

★★★★★

9-6 変換表と性質

道しるべ　この章の前に 5-14 5-15 5-16 5-18 6-7 6-10 6-13 8-6 9-5
この章の先に 9-7 9-8 9-9

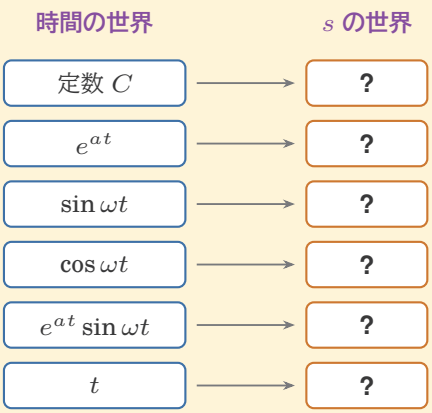
この章でできるようになること

- ★★★ 表計算で $f(t)e^{-st}$ を台形でたし、変換表の値と同じになることを確かめられる。
- ★★★★ t^n・sin・cos と、e^{-at} がかかった形の変換表の行を、部分積分・オイラーの公式・s のずらしで作れる。
- ★★★★★ 場合分けの表 9-6 と流れ図を使って、おくれ・パルス・デルタ関数・たたみこみをふくむ関数を変換し、初期値・最終値の定理で確かめられる。

はてな？

5-18 で、微分方程式の「答えの候補カード」を作りました。定数、e^{at}、$\sin\omega t$、$\cos\omega t$、$e^{at}\sin\omega t$、t です。5-18 には「ラプラス変換の表（9-6）にならぶのも、この章の表と同じ関数です」と書きました。

候補カードの関数は、s の世界では、どんな式に翻訳されるでしょうか。



9-5 では、翻訳の辞書（変換表）の行を、定数・t・e^{at} と、微分の行まで作りました。この章では、機械や回路の動きに出てくる関数の行を全部そろえて、変換表を完成させます。表の行は、どれも 1 回だけ自分で作り、あとは引くだけにします。行を作る道具は、第 5 巻の部分積分、第 6 巻のオイラーの公式、そしてこの章で作る「ずらし」の 3 つだけです。

表を引くだけでは足りない形もあります。スイッチをおくれて入れる、短い間だけ電圧をかける、ハンマーでたたく、ずっと入れ続けたものの効き目をたし合わせる、などです。これらは、表の行どうしを組み合わせる「性質」で計算します。どの場合にどうするかを、場合分けの表と流れ図にまとめます。行の数が多い章ですが、1 回で全部覚えなくても大丈夫です。表は、引くためにあります。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

- 9-5　$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$。$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$、$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$、$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$、$\mathcal{L}[f'] = sF - f(0)$。
- 5-16　部分積分 $\int f g'\,\mathrm{d}t = fg - \int f' g\,\mathrm{d}t$。
- 6-10　オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$。複素数の実部と虚部を分けて読む。
- 5-15　$(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$、$(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t$。2 回微分すると $-\omega^2$ 倍。
- 5-16　置換積分：$u = t - t_0$ と置くと $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$。積分の範囲も u の値に直す。
- 8-6　重積分は、内側と外側の積分の順番を入れかえてよい。三角形の範囲は、たて線でも横線でも切れる（場合 B）。

やってみよう　表計算で、4 つの関数を翻訳しよう

$s = 2$ として、1、t、e^{-t}、$\sin 3t$ の 4 つの関数に e^{-2t} をかけ、$t = 0$ から 10 まで台形でたします（9-5 の表計算の続き）。

1. A 列に時刻 t を、0 から 10 まで 0.1 ずつ入れる（A2～A102）。
2. B2 に `=EXP(-2*A2)` を入れる（かけるもの e^{-2t}）。
3. C2～F2 に、$1 \times e^{-2t}$、$t\,e^{-2t}$、$e^{-t}e^{-2t}$、$\sin 3t\,e^{-2t}$ を入れる（`=B2`、`=A2*B2`、`=EXP(-A2)*B2`、`=SIN(3*A2)*B2`）。
4. 2 行めを 102 行めまでコピーする。
5. 103 行めに台形の和 `=0.1*(SUM(C2:C102)-(C2+C102)/2)` を入れ、右へコピーする。

⑤の式は、9-5 の表の「台形」の列をたしたものと同じです。台形をすべてたすと、両はしの値だけが半分の重みになるので、「全部の合計から、両はしの半分をひいて、$\Delta t = 0.1$ をかける」になります。

	A	B	C	D	E	F
1	t	e^{-2t}	1	t	e^{-t}	$\sin 3t$
2	0	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
3	0.1	0.8187	0.8187	0.0819	0.7408	0.2420
4	0.2	0.6703	0.6703	0.1341	0.5488	0.3785
5	0.3	0.5488	0.5488	0.1646	0.4066	0.4299
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
102	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
103	台形		0.50167	0.24917	0.33583	0.22827

表 1　4 つの関数に e^{-2t} をかけた表（小数第 4 位まで）。1 行めは、かける前の関数。103 行めが、$s = 2$ のときのラプラス変換の近い値。

数学の道具

目でわかる 表計算の値と、表の式をくらべる ★★★

1 面積が、変換の値

表計算の 103 行めは、$f(t)e^{-2t}$ のグラフの下の面積です（下の面積は正、上の面積は負：5-10）。グラフで見ると、e^{-2t} をかけたおかげで、どの関数も $t = 3$ くらいでほとんど 0 になり、面積が決まった数になっています。

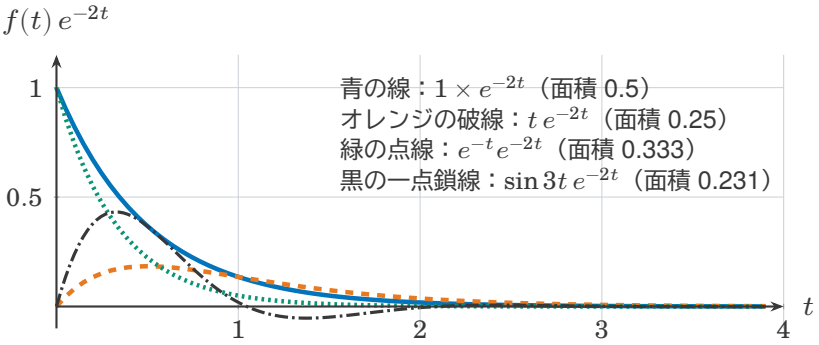


図 1 4 つの関数に e^{-2t} をかけたグラフ。下の面積が、$s = 2$ のときのラプラス変換。$\sin 3t\,e^{-2t}$ は、$t = 1.05 \sim 2.09$ などで負になり、その分の面積はひかれる。

この章で作る表の式に $s = 2$ を入れた値と、表計算の値をくらべます。

$f(t)$	表の式 $F(s)$	$s = 2$	台形 $\Delta t = 0.1$	台形 $\Delta t = 0.01$
1	$\frac{1}{s}$	0.5	0.50167	0.50002
t	$\frac{1}{s^2}$	0.25	0.24917	0.24999
e^{-t}	$\frac{1}{s+1}$	0.33333	0.33583	0.33336
$\sin 3t$	$\frac{3}{s^2+9}$	0.23077	0.22827	0.23074

表 2 表の式（この章で作る）と、表計算の値。Δt を小さくすると、表の式の値に近づく。

Δt を $\frac{1}{10}$ にすると、ずれはおよそ $\frac{1}{100}$ になります（台形の和のずれは、Δt の 2 乗に比例して小さくなる：5-10 の考えの続き）。表の式は、Δt を限りなく小さくした先の値を、1 回の計算で出したものです。

手でわかる　表の行を、自分で作る　★★★★

2 t^n の行：部分積分をくり返す

①名前の段　記号を読む：$\mathcal{L}[t^n]$

$\mathcal{L}[t^n]$ は、「t^n に e^{-st} をかけて、0 から ∞ までたす」の名前です。名前のままでは数は出ません。1 回だけ、ふつうの定積分（部分積分）に直して、行を作ります。

$$\underbrace{\mathcal{L}[t^n]}_{\text{名前}} = \underbrace{\int_0^\infty t^n\, e^{-st}\, \mathrm{d}t}_{\text{ふつうの定積分}}$$

②直す段　部分積分で、n を 1 つずつ下げる

t^n を f（微分するほう）、e^{-st} を g'（積分するほう、$g = -\frac{1}{s}e^{-st}$）にします。

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

求めたいもの

$$= \left[-\frac{t^n}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

部分積分。$(t^n)' = nt^{n-1}$

$$= 0 + \frac{n}{s}\,\mathcal{L}[t^{n-1}]$$

はしの項は 0（$t = 0$ で 0、∞ 側は 5-18）

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}[t^{n-1}]$$

「t の次数が 1 つ下がり、$\frac{n}{s}$ がかかる」というきまりです。$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ から始めて、くり返します。

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad n = 1\text{（9-5 と同じ）}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s} \times \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} \qquad n = 2$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3}{s} \times \frac{2}{s^3} = \frac{6}{s^4} = \frac{3!}{s^4} \qquad n = 3。3 \times 2 \times 1 = 3!$$

分子は 1、2×1、$3 \times 2 \times 1$ と、かけ算が 1 つずつふえていきます。だから $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ です（$n!$ は 5-17 の階乗）。表計算の t の列（$s = 2$）は $\frac{1}{4} = 0.25$ に近い値でした。

❸ sin と cos の行：2 通りで作る

1 つめの作り方：オイラーの公式

9-5 の e^{at} の行 $\frac{1}{s-a}$ は、a が複素数でも同じ計算で成り立ちます（s の実部が a の実部より大きいとき）。$a = j\omega$ とすると、$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$（6-10）なので、

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega} \qquad e^{at}\text{ の行で }a = j\omega$$

$$= \frac{s + j\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{分母・分子に } s + j\omega \text{ をかける}\ (j^2 = -1)$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{実部と虚部に分ける}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] + j\,\mathcal{L}[\sin\omega t] \qquad \text{左辺は、線形で 2 つに分ける}$$

s が実数なら、実部どうし・虚部どうしが等しいので、

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

2 つめの作り方：微分の行で確かめる

$f = \sin \omega t$ は、2 回微分すると $-\omega^2$ 倍になり（5-15）、$f(0) = 0$、$f'(0) = \omega$ です。9-5 の 2 回微分の行を使います。

$$\mathcal{L}[f''] = -\omega^2 F \qquad f'' = -\omega^2 f \text{ の両辺を変換}$$

$$s^2 F - s \cdot 0 - \omega = -\omega^2 F \qquad \text{左辺に 2 回微分の行}$$

$$(s^2 + \omega^2) F = \omega, \quad F = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad F \text{ についてまとめる}$$

同じ式が出ました。$\cos \omega t$ なら $f(0) = 1$、$f'(0) = 0$ で、$s^2 F - s = -\omega^2 F$ から $F = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ です。$s = 2$、$\omega = 3$ では $\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{4+9} = 0.23077$ で、表計算の値 0.22827（$\Delta t = 0.01$ で 0.23074）に合っています。

4 s のずらし：e^{-at} がかかった形

5-18 のカードの「ゆれながら止まる」形 $e^{-at} \sin \omega t$ は、$\sin \omega t$ に e^{-at} がかかった形です。定義の積分の中で、e^{-at} と e^{-st} をまとめます。

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-at} e^{-st}\, \mathrm{d}t \qquad \text{名前を、定義の積分に}$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s+a)t}\, \mathrm{d}t \qquad \text{肩のたし算（5-14）}$$

$$= F(s+a) \qquad F(s) \text{ の式の } s \text{ を、} s+a \text{ に取りかえたもの}$$

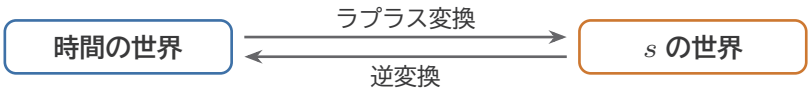
$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)}$$

e^{-at} をかけることは、s の世界では「s を a だけ大きくする（ずらす）」ことです。これを s **のずらし**といいます。$F(s)$ を求めてから、s を $s+a$ に書きかえます。

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$ $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ の s を $s+a$ に

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$ $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ の s を $s+a$ に（分子の s も）

$$\mathcal{L}[t\,e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$$ $\frac{1}{s^2}$ の s を $s+a$ に



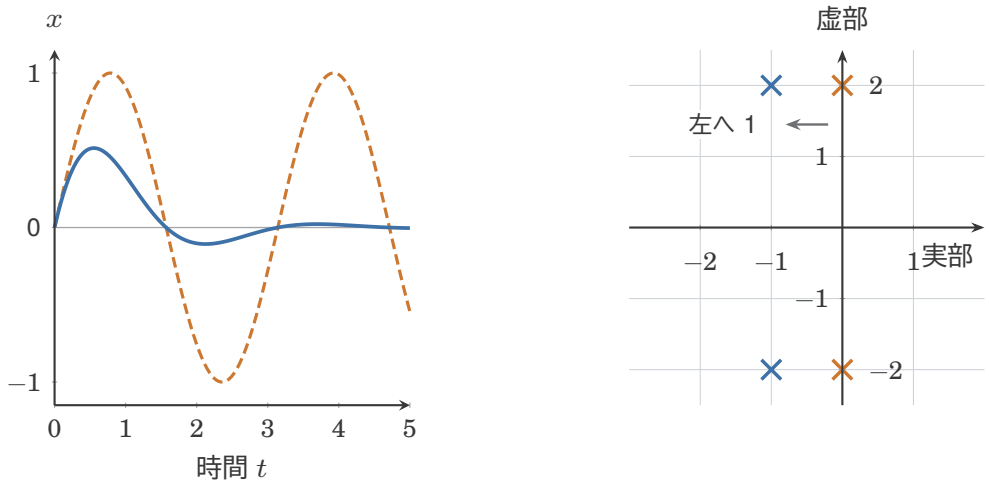


図 2 左：$\sin 2t$（オレンジの破線）と $e^{-t}\sin 2t$（青い線）。右：それぞれの変換の分母が 0 になる所（オレンジの×が $\sin 2t$、青の×が $e^{-t}\sin 2t$）。e^{-t} をかけると、×が左へ 1 だけずれる。

$\sin 2t$ の変換 $\frac{2}{s^2+4}$ は、$s = \pm 2j$ で分母が 0 です。$e^{-t}\sin 2t$ の変換 $\frac{2}{(s+1)^2+4}$ は、$s+1 = \pm 2j$、つまり $s = -1 \pm 2j$ で分母が 0 です。分母が 0 になる点が、そろって左へ 1 だけずれました。「ずっとゆれる」動きが「ゆれながら止まる」動きに変わると、点は左へ動くのです（9-9 の極の読み方の入口）。車 B の s^2+2s+5 は $(s+1)^2+4$ と書けるので、この形です（9-7）。

ここまでで十分

表計算の値と表の式をくらべ、t^n・sin・cos の行を部分積分とオイラーの公式で作り、e^{-at} がかかった形を s のずらしで表を引けることがわかれば十分です。この先は、おくれ・パルス・デルタ関数・たたみこみ・最終値の定理と、それらをまとめた場合分けの表です。

∂ 式でわかる　性質の行と、場合分けの表　★★★★★

5 時間のずらし：おくれて始まる（場合 D・F）

スイッチを t_0 秒後に入れる

9-5 のステップ関数 $H(t)$ は、時刻 0 にスイッチを入れる形でした。t_0 秒後に入れるなら、グラフを右へ t_0 ずらした $H(t-t_0)$ です（3-9 の放物線を動かす考え：x を $x-p$ にすると右へ p）。一般に、$f(t)$ のグラフを右へ t_0 ずらし、$t<t_0$ では 0 にした関数は $f(t-t_0)H(t-t_0)$ と書けます。

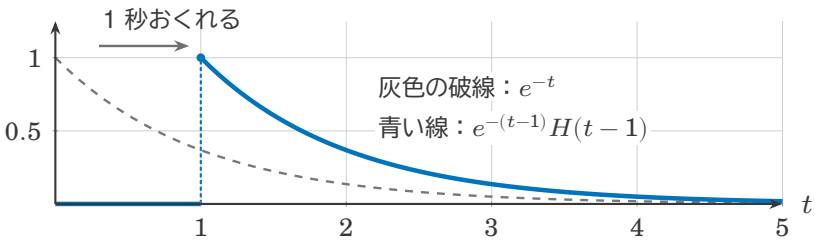


図 3　e^{-t}（灰色の破線）を右へ 1 ずらし、$t<1$ を 0 にした関数（青い線）。

変換：e^{-st_0} をかける

$t<t_0$ では関数が 0 なので、積分は t_0 からです。$u=t-t_0$ と置いて、置換積分（5-16）をします。

$\mathcal{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)]$ 求めたいもの

$= \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ $t<t_0$ は 0 なので、t_0 から

$= \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(u)\,e^{-s(u+t_0)}\,\mathrm{d}u$ $u=t-t_0$。$t=t_0$ で $u=0$

$= e^{-st_0}\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(u)\,e^{-su}\,\mathrm{d}u = e^{-st_0}F(s)$ e^{-st_0} は u に関係しないので外へ

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)\,H(t-t_0)] = e^{-st_0}\,F(s)$$

時間の世界で「t_0 おくれる」ことは、s の世界では「e^{-st_0} をかける」ことです。これを**時間のずらし**といいます。たとえば $\mathcal{L}[H(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s}$、$\mathcal{L}[e^{-(t-1)}H(t-1)] = \frac{e^{-s}}{s+1}$ です。s のずらし（④）と向きがちがうので注意します：e^{-at} を「かける」と s がずれ、時間を「ずらす」と e^{-st_0} がかかります。

パルス：ステップ関数の和に直す（場合 F）

はじめの 1 秒間だけ 1V をかけ、そのあと 0V にする電圧（幅 1 秒・高さ 1 の**パルス**）は、区間ごとに式が変わります。「時刻 0 に 1 を足し、時刻 1 に 1 をひく」と考えると、

$$\text{パルス} = H(t) - H(t-1)$$

と、ステップ関数の和に直せます。あとは項ごとに表と時間のずらしで、

$$\mathcal{L}[H(t)-H(t-1)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

です。$s=2$ では $\frac{1-e^{-2}}{2} = 0.43233$ です。

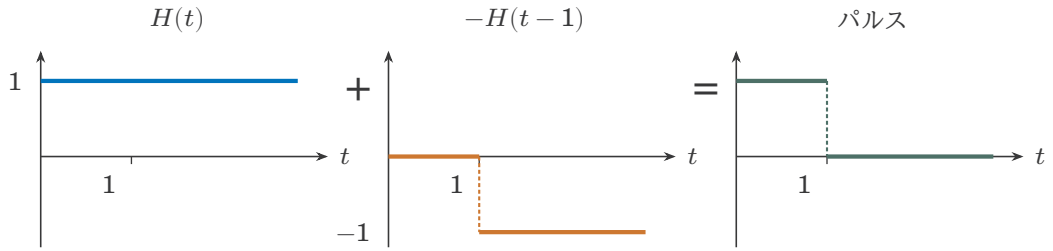


図 4　パルスは、時刻 0 に始まるステップ（左）と、時刻 1 に始まる -1 のステップ（まん中）の和（右）。

むだ時間

お風呂のシャワーの温度を変えても、新しいお湯が配管を通って出てくるまで、少し時間がかかります。このように「入れたものが、そのまま L 秒おくれて出てくる」ことを**むだ時間**といいます。時間のずらしから、むだ時間は s の世界では e^{-sL} をかけることです。ベルトコンベアや、長い配管の工場の制御で大切になります（物理 波-4）。

⑥ 積分の行と、t をかける行（場合 E・G）

積分の行：s でわる

$g(t) = \int_0^t f(t_1)\,\mathrm{d}t_1$（0 から t までの面積）とすると、$g' = f$、$g(0) = 0$ です（5-11）。微分の行を g に使います。

$$\mathcal{L}[g'] = sG(s) - g(0) \qquad \text{微分の行}$$

$$F(s) = sG(s) - 0 \qquad g' = f,\ g(0) = 0$$

$$G(s) = \frac{F(s)}{s} \qquad s \text{ でわる}$$

微分は「s をかける」、積分は「s でわる」です。$f = 1$ なら $\int_0^t 1\,\mathrm{d}t_1 = t$ で、$\frac{1}{s} \div s = \frac{1}{s^2}$ は t の行と合っています。

t をかける行：s で微分する

$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ を s で微分します。積分の中の e^{-st} を s で微分すると、$-te^{-st}$ です（t は止めておく：8-2 の偏微分と同じ考え）。

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = \int_0^\infty f(t)\,(-t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{積分の中で } s \text{ で微分}$$

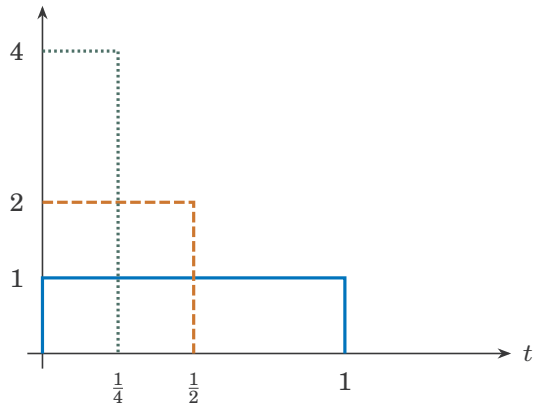
$$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = \int_0^\infty t\,f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[t\,f(t)] \qquad \text{両辺に } -1 \text{ をかける}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t\,f(t)] = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}}$$

2 通りで確かめる：te^{-t} は、s のずらし（$\frac{1}{s^2}$ の s を $s+1$ に）で $\frac{1}{(s+1)^2}$。t をかける行でも、$F = \frac{1}{s+1}$ を微分して $-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{(s+1)^2}$。同じです。この形は、9-7 の「重解」で使います。表の $t\sin\omega t \cdot t\cos\omega t$ の行も、$\sin\omega t \cdot \cos\omega t$ の行をこの方法で微分して作ったものです（cos の行は、商の微分（5-6）を使う）。

⑦ デルタ関数：たたいた力を表す（場合 A）

ハンマーで機械をコツンとたたくと、力はとても短い時間だけはたらきます。大事なのは力の大きさそのものより、「力×時間」（力積。物理 力-3）です。そこで、面積が 1 の細いパルスを考えます。



緑の点線：幅 $\frac{1}{4}$・高さ 4

オレンジの破線：幅 $\frac{1}{2}$・高さ 2

青い線：幅 1・高さ 1

どれも面積は 1

図 5　面積が 1 のまま、幅を細くしたパルス。幅 ε、高さ $\frac{1}{\varepsilon}$。ε を 0 に近づけた先がデルタ関数 $\delta(t)$。

幅 ε（イプシロン）・高さ $\frac{1}{\varepsilon}$ のパルスは、⑤のパルスの $\frac{1}{\varepsilon}$ 倍で、幅が ε なので、変換は $\dfrac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$ です。$s=2$ で、幅を細くしていくと、次のようになります。

幅 ε	1	0.1	0.01	0.001
変換の値（$s=2$）	0.432	0.906	0.990	0.999

表 3　細いパルスの変換は、1 に近づく（$e^{-\varepsilon s} \approx 1-\varepsilon s$ だから：5-17 のテイラー展開の 1 次まで）。

幅を限りなく細くした先を**デルタ関数**（でるたかんすう。ディラックのデルタ関数）といい、$\delta(t)$ と書きます。変換は、どの s でも 1 です。

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

「時刻 0 に、力積 1 でたたく」ことを表します。ここの δ は、6-7 の対数減衰率 δ とは別の文字の使い方です。力積 P でたたくなら $P\delta(t)$、t_0 秒後にたたくなら $\delta(t-t_0)$ で、時間のずらしから $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}$ です。9-4 のせいかくに言うとで「くり返す波のスペクトルは、とびとびの線になる」と書いた、その「線」も、このデルタ関数です（周波数の世界で、幅は限りなく細く、面積だけが決まっている）。

インパルス応答

機械や回路を $\delta(t)$ でたたいたときの動きを**インパルス応答**といいます。たとえば $x'+x=\delta(t)$（はじめ $x=0$）なら、$sX+X=1$ から $X=\frac{1}{s+1}$ で、$x=e^{-t}$ です。たたいた瞬間に x が 1 にとび上がり、そのあと e^{-t} で小さくなっていきます。インパルス応答がわかると、どんな入力にもこたえられることを、次の⑧で見ます。

せいかくに言うと

デルタ関数は、ふつうの関数ではない

$\delta(t)$ は、$t \neq 0$ ではどこでも 0 で、$t = 0$ では「限りなく大きい」ものです。値で決まる関数ではなく、「面積（積分）が 1」ということで決まるものです。だから、$\delta(t)$ の値を表に書いたり、グラフを高さでかいたりはできません（図では、高さ 1 の矢印でかく本が多い）。また、$\delta(t)$ は時刻 0 にあるので、ラプラス変換の積分は、0 のほんの少し前（$0-$ と書く）から始める約束です。こうしないと、たたいた分が積分に入りません。微分の行の $f(0)$ も、そのときは $f(0-)$（たたく直前の値）です。数学として正しくあつかう方法（超関数）は、1945 年ごろにシュワルツが作りました。

もっと知りたい ★★★★★

デルタ関数のスペクトルは、どの周波数も同じ高さ

9-4 で、手をたたく音のような短い音は、スペクトルが広い帯になることを見ました。9-4 の方形パルスの変換を使うと、まん中が $t = 0$ で幅 ε・高さ $\frac{1}{\varepsilon}$ のパルスのフーリエ変換は $F(\omega) = \mathrm{sin}(\omega\varepsilon/2) \div (\omega\varepsilon/2)$ です。$\omega = 0$ ではいつも 1（面積）で、はじめて 0 になる ω は $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ です。幅を細くするほど、1 に近い所が右へ広がり（図 6）、デルタ関数では、どの ω でも 1 になります。ハンマーでたたいて機械を調べる（物理・工学ではこう使う）のは、1 回たたくだけで、すべての周波数で機械をゆすったのと同じになるからです。

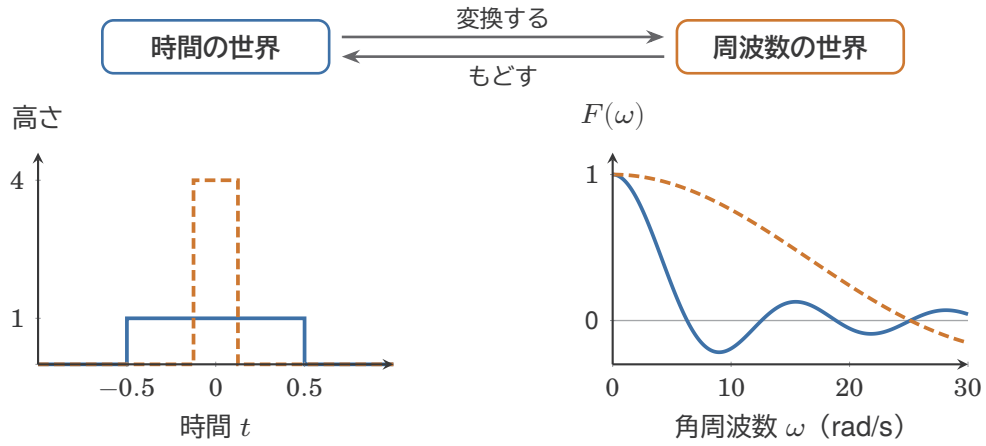


図 6　面積 1 のパルス（左）と、そのフーリエ変換（右）。青い線は幅 1・高さ 1（最初の 0 は $\omega = 2\pi \approx 6.3$）、オレンジの破線は幅 $\frac{1}{4}$・高さ 4（最初の 0 は $\omega = 8\pi \approx 25$）。細いほど、1 に近い所が広い。

8 たたみこみ：たたいた答えを、たし合わせる（場合 I）

6-13 では、「cos でない一般の形の右辺には、第 9 巻のラプラス変換・たたみこみ（9-6・9-7）を使います」と予告しました。インパルス応答 $g(t)$ がわかっている機械に、時間とともに変わる入力 $u(t)$ を入れたときの出力 $y(t)$ を考えます。

入力を細い柱に分けて、たす

1. 入力を、幅 Δt_1 の細い柱に分ける。時刻 t_1 の柱の面積は $u(t_1)\Delta t_1$ で、これは「時刻 t_1 に、力積 $u(t_1)\Delta t_1$ でたたく」のとほぼ同じ（⑦）。
2. 1 本の柱に対する出力は、インパルス応答を t_1 だけおくらせて、$u(t_1)\Delta t_1$ 倍したもの：$g(t-t_1)\,u(t_1)\Delta t_1$。
3. 機械が線形（5-18）なら、全部の柱の出力をたしたものが、本当の出力。柱を細くした先は積分になる。

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1)\,u(t_1)\,\mathrm{d}t_1 = (g * u)(t)$$

これを g と u の**たたみこみ**といい、$g*u$ と書きます。積分の中の文字 t_1 は「前の時刻 t_1 に入れた分」です（専門書では τ と書くことが多いが、この本の τ は時定数）。

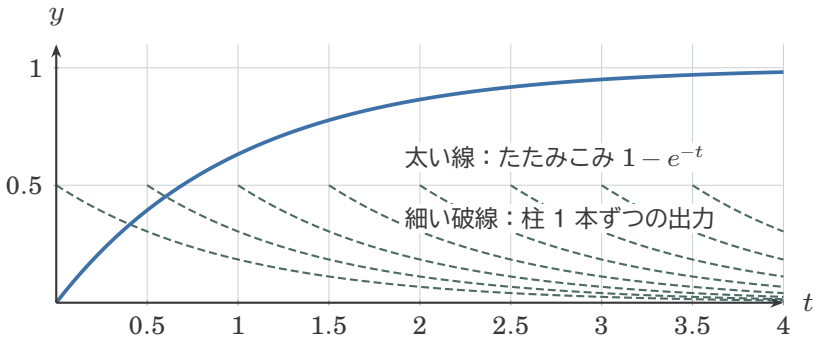


図 7　入力 $u=1$（スイッチを入れたまま）を幅 0.5 の柱に分け、1 本ずつの出力 $0.5e^{-(t-t_1)}$（細い破線）を作る。柱を細くして、全部たした先が、太い線 $1-e^{-t}$。

s の世界では、かけ算

たたみこみをラプラス変換すると、かけ算になります（理由は、すぐあとのせいかくに言うと）。

$$\mathcal{L}[g*u]=G(s)\,U(s)$$

図 7 の例 $g=e^{-t}$、$u=1$ で、2 通りに確かめます。

$$\int_0^t e^{-(t-t_1)}\cdot 1\,\mathrm{d}t_1 = e^{-t}\left[e^{t_1}\right]_0^t = 1-e^{-t}$$

時間の世界：たたみこみの積分

$$\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s+1)}$$

s の世界：$G(s)U(s)$

$$\mathcal{L}[1-e^{-t}]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}$$

時間の世界の答えを変換（通分）

同じになりました。時間の世界のめんどうな積分が、s の世界ではかけ算 1 回です。これが、9-8 の伝達関数（出てくるもの＝箱×入れるもの）の土台です。なお、ふつうのかけ算 gu の変換は GU ではありません（9-5 の⑨）。s の世界でかけ算になるのは、たたみこみのほうです。

せいかくに言うと

なぜ、たたみこみが、かけ算になるのか

$\mathcal{L}[g*u]=\displaystyle\int_0^\infty\Big(\int_0^t g(t-t_1)u(t_1)\,\mathrm{d}t_1\Big)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ は、t_1 と t の平面の三角形 $0\leqq t_1\leqq t$ の上の重積分です。8-6 の場合 B のように、積分の順番を入れかえ、先に t で（t_1 から ∞ まで）積分します。$t-t_1=v$ と置くと $e^{-st}=e^{-st_1}e^{-sv}$ なので、

$$\int_0^\infty u(t_1)e^{-st_1}\Big(\int_0^\infty g(v)e^{-sv}\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}t_1=G(s)\,U(s)$$

となり、2 つの変換のかけ算に分かれます（8-6 の場合 A′ と同じ形）。

9 初期値の定理・最終値の定理：もどさずに、はじめと最後を知る

s の式を時間の世界にもどすのは 9-7 で学びますが、はじめの値と、最後に落ち着く値だけなら、もどさずにわかります。9-5 の微分の行で、s を 0 に近づけます。

$$\int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t=sF(s)-f(0)$$ 微分の行（9-5）

$$\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{s\to0}sF(s)-f(0)$$ $s\to0$ で $e^{-st}\to1$

$$f(\infty)-f(0)=\lim_{s\to0}sF(s)-f(0)$$ 左辺は、変化をたすと、最後－はじめ（5-11）

両辺の $f(0)$ が消えて、**最終値の定理**が出ます。s を大きくすると e^{-st} で左辺の積分は 0 に近づくので、**初期値の定理**も出ます。

最終値の定理　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$（落ち着くときだけ）

初期値の定理　$\displaystyle f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

- お湯 $T(s)=\frac{20}{s}+\frac{60}{s+0.05}$：$sT(s)=20+\frac{60s}{s+0.05}$。$s\to0$ で 20（最後は部屋の温度）、$s\to\infty$ で $20+60=80$（はじめの温度）。

- $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$：$sF(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\to\dfrac{1}{2}$。9-7 でもどすと $f=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$ で、$t=5$ で 0.4933、$t=10$ で 0.49995 と、$\frac{1}{2}$ に近づきます。

落ち着かないときは使えません。$\sin t$ の変換 $\frac{1}{s^2+1}$ では $s\cdot\frac{1}{s^2+1}\to 0$ ですが、$\sin t$ はずっとゆれて 0 に落ち着きません。e^t でも $\frac{s}{s-1}\to 0$ ですが、e^t は限りなく大きくなります。使ってよいのは、$sF(s)$ の分母が 0 になる点が、すべて s の平面の左半分（実部が負）にあるときです（9-9 の安定）。

⑩ 場合分けの表 9-6 と流れ図

ここまでで、変換の求め方がそろいました。9-5 で表 9-6 のはじめの 3 行（A・B・E）を使いました。この章で、残りの行（C・D・F〜I）を足して、表を完成させます。I（たたみこみ）は、9-5 の予告にはなかった行です。見開きの左のページが場合分けの表、右のページが流れ図です。流れ図の使い方は、そのあとにあります。

③楽をする段　直す前に、楽な道をさがす

表を引く前に、流れ図の上のほうの問いで、分けたり数値にしたりできないかを見ます。データだけなら数値で（H）、区間ごとに式が変わるならステップ関数の和に分けて（F）、いくつかの項の和なら項ごとに分けて（B）から、表を引きます。変換したあとは、初期値・最終値の定理で、はじめと最後の値をもどさずに確かめます。

場合分けの表 9-6　ラプラス変換：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
A	表にある形（1、t^n、e^{at}、$\sin\omega t$、$\cos\omega t$、$\delta(t)$）	表を引く　表を引く。まだない行は、定義の積分（ふつうの定積分）で 1 回だけ作る	1〜4・7・10・11
B	いくつかの項の和（定数倍は前に出す）	楽をする　線形：項ごとに下の問いで変換して、たす	2・7・11
C	e^{-at} に、表にある別の関数（sin・cos・t^n など）がかかっている（e^{-at} だけなら A）	表を引く　e^{-at} をとった形の $F(s)$ を引き、s を $s+a$ に（s のずらし）	3
D	おくれて始まる（$H(t-t_0)$ がかかっている。$t_0>0$）	表を引く　おくれをとった形の $F(s)$ を引き、e^{-st_0} をかける（時間のずらし）	4・7
E	f'・f'' のある式（微分方程式）を変換する	表を引く　$f'\to sF-f(0)$、$f''\to s^2F-sf(0)-f'(0)$、$\int_0^t f\to\frac{F}{s}$。ほかの項は表で	5・6
F	区間ごとに式が変わる（パルス・階段）	楽をする　ステップ関数 $H(t-t_0)$ の和に直して、B・D へ	7
G	t^n 以外の関数（sin・cos など）に t がかかっている（t^n だけなら A）	表を引く　t をとった形の $F(s)$ を引き、$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$	8
H	表にない形・データだけで、数値で求めたい	楽をする　定義の積分を、表計算の台形で（e^{-st} が十分小さくなる t まで）	9
I	たたみこみ $(f*g)(t)$ を変換する	表を引く　それぞれを変換して、かけ算 $F(s)\,G(s)$	10

A〜D・G・I は直す段（表を引く・ずらす・かけ算）、E は微分方程式を翻訳する所、F・B・H は楽をする段（分ける・数値）です。

図 8　ラプラス変換の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。I・F・B・D・C のあとは、左の列の次の問いへもどる（B なら項ごとに、D・C ならおくれや e^{-at} をとった形で）。計算した四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

流れ図の使い方：$e^{-t}\sin 2t$

1. 名前の段：何を＝ $e^{-t}\sin 2t$（t の関数）。
2. $f'\cdot f''$ のある式？ いいえ。データだけ？ いいえ。たたみこみ？ いいえ。区間ごと？ いいえ。項の和？ いいえ。おくれ？ いいえ。
3. e^{-at} に別の関数がかかる？ はい（$a=1$、別の関数は $\sin 2t$）→ **C**。e^{-t} をとった $\sin 2t$ で下の問いへ。
4. t^n 以外に t がかかる？ いいえ → **A**：$\sin 2t$ の行は $\frac{2}{s^2+4}$。
5. C にもどって、s を $s+1$ にする。答えは次のとおり。

$$\mathcal{L}[e^{-t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

流れ図の問いの順番にも、わけがあります。微分方程式の問い（E）をいちばん上に置いたのは、微分方程式は「いくつかの項の和」にも見えるので、先に見分けておくためです。また、e^{-t} だけ、t^3 だけのように表の 1 行そのものの関数は、C・G の問いに「いいえ」と答えて A に着きます（e^{-t} を「$e^{-t}\times 1$」と見ない）。

どの場合かな？

流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答え（右）を見ましょう。

1. $\mathcal{L}[\cos 5t]$　　答え：**A**（表の $\cos\omega t$ の行）
2. $\mathcal{L}[e^{-3t}\cos t]$　　答え：**C**→**A**
3. 3 秒後に 12 V をつなぐ電圧 $12H(t-3)$　　答え：**D**→**A**
4. はじめの 1 秒間だけ 5 V をかける電圧　答え：**F**→**B**→（**A** と **D**→**A**）
5. $x'+4x=0$、$x(0)=3$ の両辺の変換　　答え：**E**

$\mathcal{L}[t^2e^{-t}]$ なら、e^{-t} に t^2 がかかっているので C に行き、e^{-t} をとると t^2 だけが残ります。t^2 は「t^n 以外に t がかかる」ではないので、A（t^n の行）に着きます。答えは $\frac{2}{s^3}$ の s を $s+1$ にした $\frac{2}{(s+1)^3}$ です。

Python で、表の行を確かめる

表の行が正しいかは、s に数を入れて、定義の積分を数値で計算すればわかります（9-5 と同じ quad）。$s=2$ で、t^3、$e^{-t}\sin 2t$、$t\sin 2t$、$e^{-(t-1)}H(t-1)$ の 4 行を確かめます。∞ のかわりに $t=50$ まで積分します（e^{-100} はほとんど 0）。

Python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
s = 2
rows = [(lambda t: t**3, 6/s**4),
        (lambda t: np.exp(-t)*np.sin(2*t), 2/((s+1)**2+4)),
        (lambda t: t*np.sin(2*t), 4*s/(s**2+4)**2),
        (lambda t: (t >= 1)*np.exp(-(t-1)), np.exp(-s)/(s+1))]
for f, F in rows:                    # f は関数、F は表の値
    v = quad(lambda t: f(t)*np.exp(-s*t), 0, 50, limit=200)[0]
    print(round(v, 5), round(F, 5))
```

実行結果

```
0.375 0.375
0.15385 0.15385
0.125 0.125
0.04511 0.04511
```

左が数値の積分、右が表の式の値です。4 つの行とも同じになりました。（t >= 1）は、$t \geqq 1$ のとき 1、そうでないとき 0 になる書き方で、$H(t-1)$ のかわりです。

もっと知りたい ★★★★★

電気の回路で見る、たたみこみ

RC 回路（$\tau = RC$）のコンデンサーの電圧は、電池の電圧 $e(t)$ が時間とともに変わっても、インパルス応答 $g(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$ とのたたみこみ $v=g*e$ で求められます。「少し前に入れた電圧ほど、効き目が $e^{-(t-t_1)/\tau}$ で小さくなって残っている」と読めます。コンデンサーが、過去の入力を少しずつ忘れながら覚えている、ということです。6-13 で「cos でない一般の形の右辺」と言ったのは、このような入力のことです。

11 変換表（見開き）

9-5 とこの章で作った行の表です。左は関数、右は性質の表です。9-7 からは、この表を引いて計算します。❓はてな？の答えは、表の 1・3・5・7〜10 行めです：定数 $C \to \frac{C}{s}$、$t \to \frac{1}{s^2}$、$e^{at} \to \frac{1}{s-a}$、$\sin \omega t \to \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$、$\cos \omega t \to \frac{s}{s^2+\omega^2}$、$e^{-at}\sin \omega t \to \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$。

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f]$	作り方	s の条件
$\delta(t)$	1	細いパルスの先（9-6 ⑦）	どの s も
1（$H(t)$）	$\dfrac{1}{s}$	定義の積分（9-5）	$s>0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	部分積分（9-5）	$s>0$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	部分積分のくり返し（9-6 ②）	$s>0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	定義の積分（9-5）	$s>a$
$t\,e^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s>a$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	オイラーの公式（9-6 ③）	$s>0$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	オイラーの公式（9-6 ③）	$s>0$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s>-a$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s>-a$
$t\sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	t をかける行（9-6 ⑥）	$s>0$
$t\cos \omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	t をかける行（9-6 ⑥）	$s>0$
$H(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-st_0}}{s}$	時間のずらし（9-6 ⑤）	$s>0$
パルス（高さ 1、0〜t_0）	$\dfrac{1-e^{-st_0}}{s}$	ステップの和（9-6 ⑤）	どの s も

表 4　ラプラス変換の表（関数）。a、ω、t_0 は定数（$\omega>0$、$t_0>0$）。s の条件は、s が複素数なら「実部が」と読む。

性質	時間の世界	s の世界	作り方
線形	$af+bg$	$aF+bG$	積分の性質（9-5 ⑨）
微分	f'	$sF-f(0)$	部分積分（9-5 ⑥）
2 回微分	f''	$s^2F-sf(0)-f'(0)$	微分の行を 2 回（9-5 ⑦）
積分	$\int_0^t f\,\mathrm{d}t_1$	$\frac{F}{s}$	微分の行から（9-6 ⑥）
s のずらし	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	肩のたし算（9-6 ④）
時間のずらし	$f(t-t_0)H(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$	置換積分（9-6 ⑤）
t をかける	$t\,f(t)$	$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$	s で微分（9-6 ⑥）
たたみこみ	$(f*g)(t)$	$F(s)\,G(s)$	積分の順番を入れかえ（9-6 ⑧）
初期値の定理	$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	微分の行から（9-6 ⑨）
最終値の定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$	落ち着くときだけ（9-6 ⑨）

表 5 ラプラス変換の表（性質）。ふつうのかけ算 fg の行はない（FG にはならない）。

表を引くときは、表の形と「文字の置き方」まで同じかを確かめます。たとえば $\frac{3}{s+2}$ は、e^{at} の行の 3 倍で $a=-2$（$3e^{-2t}$）です。$\frac{1}{s^2+9}$ は $\sin 3t$ の行 $\frac{3}{s^2+9}$ の $\frac{1}{3}$ 倍（$\frac{1}{3}\sin 3t$）です。分子の数を合わせてから引きます（9-7 で何度も使います）。

専門書をのぞいてみよう　変換表の専門書ふうの書き方

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

$f(t)$ と $g(t)$ の畳み込みを

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

で定義すると，$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$ が成り立つ．

訳　$u(t-a)$ は、この本のステップ関数 $H(t-t_0)$（u や $1(t)$ と書く本も多い）。「畳み込み」は、この本の「たたみこみ」。積分の中の τ は、この本の t_1（この本の τ は時定数）。$f(\tau)g(t-\tau)$ と、g のほうをずらして書いても、同じ値になる（t_1 を $t-t_1$ に置きかえるとわかる）。

この章で出てきたことば

変換表　時間の関数と、そのラプラス変換の表。関数の表と性質の表がある。行は 1 回だけ作り、あとは引く。

s のずらし　e^{-at} をかけると、$F(s)$ の s が $s+a$ になる。

時間のずらし　t_0 おくれて始まると、$F(s)$ に e^{-st_0} がかかる。むだ時間は e^{-sL}。

デルタ関数　面積 1 のまま幅を細くした先。$\delta(t)$。たたいた力積を表す。$\mathcal{L}[\delta] = 1$。

インパルス応答　$\delta(t)$ でたたいたときの出力。

たたみこみ　$(g*u)(t) = \int_0^t g(t-t_1)u(t_1)\,\mathrm{d}t_1$。変換するとかけ算。

最終値の定理　落ち着くときだけ、$\lim_{t\to\infty} f = \lim_{s\to 0} sF$。

記号カード　初めて出た章 9-6

$\delta(t)$

読み方　デルタ・ティー（デルタ関数）
意味　面積 1 で幅が限りなく細いパルス。たたいた力積。6-7 の δ とは別
英語　Dirac delta function

記号カード　初めて出た章 9-6

$f * g$

読み方　エフ・たたみこみ・ジー（$*$ をスターと読む人もいる）
意味　前の時刻の入力の効き目をたし合わせたもの。変換すると $F(s)G(s)$
英語　convolution

たいせつ

ラプラス変換の 3 つの段

名前 記号を読む：何を変換するか（t の関数か、微分方程式か）

楽をする 直す前に：データなら数値で、区間ごとならステップの和、項の和なら項ごとに

直す 表を引く。ずれ・おくれ・t は性質の表で表の形にもどしてから

場合分けの表 9-6（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	表にある形	表を引く
B	項の和	項ごとに変換して、たす
C	$e^{-at} \times f$	$F(s+a)$
D	おくれて始まる	$e^{-st_0}F(s)$
E	微分方程式	$sF - f(0)$ など
F	区間ごと	ステップ関数の和
G	$t \times f$	$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$
H	データ・数値	台形で数値の積分
I	たたみこみ	$F(s)G(s)$

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-6 のどの場合かを書きました。

例題を、流れ図でたどってみよう

例題 1〜11 を、図 8 の流れ図でたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。

例題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	なし	A
2	項の和？ → 項ごとに A	B A
3	e^{-at} に別の関数がかかる？ → A	C A
4	おくれて始まる？ → おくれをとって A	D A
5	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
6	$f' \cdot f''$ のある式を変換？	E
7	区間ごと？ → 項の和？ → 項ごとに A・D	F B D A
8	t^n 以外に t がかかる？	G
9	データだけ・数値で？	H
10	たたみこみ？ → それぞれ A	I A
11	項の和？ → 項ごとに A → 確かめ	B A

表 6　例題 1〜11 の流れ図の道すじ（じぶんでとこう・章末問題も、同じ番号の例題と同じ）。

例題 1　表を引く

次のラプラス変換を、表を引いて求めましょう。(1) $\mathcal{L}[t^3]$　(2) $\mathcal{L}[\sin 3t]$　(3) $\mathcal{L}[\cos 3t]$

考え方　**場合：**表にある形（表 9-6 の A）

名前　名前は $\mathcal{L}$ だが、ここでは積分しない（行は②・③で作ってある）。

直す：表を引く　t^n の行で $n=3$、$\sin\omega t$・$\cos\omega t$ の行で $\omega=3$。

式

$$\mathcal{L}[t^3]=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}$$　$\frac{n!}{s^{n+1}}$ で $n=3$

$$\mathcal{L}[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+3^2}=\frac{3}{s^2+9}$$　分子は $\omega=3$

$$\mathcal{L}[\cos 3t]=\frac{s}{s^2+9}$$　分子は s

答え　(1) $\frac{6}{s^4}$　(2) $\frac{3}{s^2+9}$　(3) $\frac{s}{s^2+9}$

じぶんでとこう 1

次のラプラス変換を、表を引いて求めましょう。

(1) $\mathcal{L}[t^2]$

(2) $\mathcal{L}[\sin 5t]$

(3) $\mathcal{L}[\cos 2t]$

例題 2　項の和

$\mathcal{L}[2+3t^2-4\cos 2t]$ を求めましょう。

考え方　**場合：**いくつかの項の和（表 9-6 の **B** と **A**）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

楽をする　線形なので、項ごとに変換して、たす。定数倍は前に出す。

直す：表を引く　$1 \to \frac{1}{s}$、$t^2 \to \frac{2}{s^3}$、$\cos 2t \to \frac{s}{s^2+4}$。

式　$2 \times \dfrac{1}{s} + 3 \times \dfrac{2}{s^3} - 4 \times \dfrac{s}{s^2+4}$

答え　$\dfrac{2}{s} + \dfrac{6}{s^3} - \dfrac{4s}{s^2+4}$

例題 3　ゆれながら止まる形

次のラプラス変換を求めましょう。(1) $\mathcal{L}[e^{-t}\sin 2t]$　(2) $\mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t]$

考え方　**場合：**e^{-at} とほかの関数のかけ算（表 9-6 の **C** と **A**）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

直す：表を引く　e^{-t} をとった $\sin 2t$・$\cos 2t$ の行を引き、s を $s+1$ にする。

式

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} \to \frac{2}{(s+1)^2+4}$$　(1) s を $s+1$ に

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4} \to \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$　(2) 分子の s も $s+1$ に

答え　(1) $\dfrac{2}{(s+1)^2+4} = \dfrac{2}{s^2+2s+5}$　(2) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$（分母は展開した）

じぶんでとこう 2

$\mathcal{L}[1-t+\sin t]$ を求めましょう。

じぶんでとこう 3

次のラプラス変換を求めましょう。

(1) $\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t]$

(2) $\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 3t]$

例題 4　おくれて入れる

次の関数のラプラス変換を求めましょう。(1) 2 秒後にスイッチを入れて 10 V をつなぐ電圧 $10H(t-2)$　(2) $e^{-(t-1)}H(t-1)$　(3) 3 秒後に力積 5 N s でたたく力 $5\delta(t-3)$

考え方　**場合**：おくれて始まる（表 9-6 の D と A）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

直す：表を引く　おくれをとった形（10、e^{-t}、$5\delta(t)$）の行を引き、e^{-st_0} をかける。

式

$$\mathcal{L}[10]=\frac{10}{s}\ \to\ \frac{10e^{-2s}}{s}$$　(1) $t_0=2$ なので e^{-2s} をかける

$$\mathcal{L}[e^{-t}]=\frac{1}{s+1}\ \to\ \frac{e^{-s}}{s+1}$$　(2) $t_0=1$ なので e^{-s} をかける

$$\mathcal{L}[5\delta(t)]=5\times 1\ \to\ 5e^{-3s}$$　(3) $t_0=3$ なので e^{-3s} をかける

答え　(1) $\dfrac{10e^{-2s}}{s}$　(2) $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$　(3) $5e^{-3s}$

じぶんでとこう 4

次の関数のラプラス変換を求めましょう。

(1) $5H(t-3)$

(2) $\sin(t-2)\,H(t-2)$

(3) 1 秒後に力積 $2\,\mathrm{N\,s}$ でたたく力 $2\delta(t-1)$

例題 5　車 B の式を変換する

車 B の式とはじめの値は、次のとおりです。両辺をラプラス変換して、$X(s)$ を求めましょう。

$$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0, \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0$$

考え方　**場合**：微分方程式を変換する（表 9-6 の E）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる。

直す：表を引く　$\ddot{x}$ は $s^2X-s\cdot 1-0$、$\dot{x}$ は $sX-1$、x は X。

式

$$(s^2X-s)+2(sX-1)+5X=0$$　1 項ずつ表で

$$(s^2+2s+5)\,X=s+2$$　X でくくり、$-s-2$ を右へわる

$$X(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

$$=\frac{s+2}{(s+1)^2+4}$$　分母は例題 3 と同じ形

確かめ（初期値の定理）：$sX(s)=\dfrac{s^2+2s}{s^2+2s+5}$ は、s を大きくすると 1 に近づく。$x(0)=1$ と合っています。

答え　$X(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}$（分母は 6-12 の車 B の特性方程式の左辺。もどし方は 9-7）

例題 6　インパルス応答

$x' + 2x = \delta(t)$、はじめ $x = 0$ の両辺をラプラス変換して $X(s)$ を求め、表を逆に引いて x を求めましょう。

考え方　**場合**：微分方程式を変換する（表 9-6 の **E**）

名前　両辺の $\mathcal{L}$ をとる。

直す：表を引く　x' は $sX - 0$、$\delta(t)$ は 1。

式

$$sX + 2X = 1$$　　1 項ずつ表で

$$X(s) = \frac{1}{s+2}$$　　$s + 2$ でわる

$$x = e^{-2t}$$　　表を逆に引く（e^{at} の行で $a = -2$）

答え　$X(s) = \dfrac{1}{s+2}$、$x = e^{-2t}$

じぶんでとこう 5

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$、はじめ $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$ の両辺をラプラス変換して、$X(s)$ を求めましょう。

じぶんでとこう 6

$x' + 0.5x = 4\delta(t)$、はじめ $x = 0$ の両辺をラプラス変換して $X(s)$ を求め、表を逆に引いて x を求めましょう。

例題 7　パルスを変換する

はじめの 2 秒間だけ 3 V をかけ、そのあと 0 V にする電圧のラプラス変換を求めましょう。また、$s = 2$ のときの値を求めましょう（$e^{-4} = 0.0183$）。

考え方　**場合：**区間ごとに式が変わる（表 9-6 の F と B と D と A）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

楽をする　「時刻 0 に 3 を足し、時刻 2 に 3 をひく」：$3H(t) - 3H(t-2)$。項ごとに。

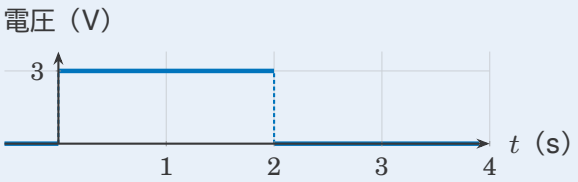
直す：表を引く　$H(t) \to \frac{1}{s}$（A）、$H(t-2) \to \frac{e^{-2s}}{s}$（D）。

式

$$\mathcal{L}[3H(t) - 3H(t-2)] = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}$$　項ごとに

$$= \frac{3(1 - e^{-2s})}{s}$$　まとめる

$$s = 2 : \frac{3(1 - 0.0183)}{2} = 1.4725$$　$e^{-2\times 2} = e^{-4}$



途中から始まるパルス（たとえば時刻 1 秒から 3 秒までだけ 5 V）なら、「時刻 1 に 5 を足し、時刻 3 に 5 をひく」で $5H(t-1) - 5H(t-3)$ と、おくれたステップ 2 つの和になり、どちらも D で変換します。

答え　$\frac{3(1 - e^{-2s})}{s}$、$s = 2$ で約 1.47

じぶんでとこう 7

時刻 1 秒から 3 秒までの間だけ 5 V をかけ、ほかの時刻は 0 V の電圧のラプラス変換を求めましょう。

例題 8　t がかかった形

$\mathcal{L}[t\sin 2t]$ を求めましょう。

考え方　**場合：**t とほかの関数のかけ算（表 9-6 の G）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

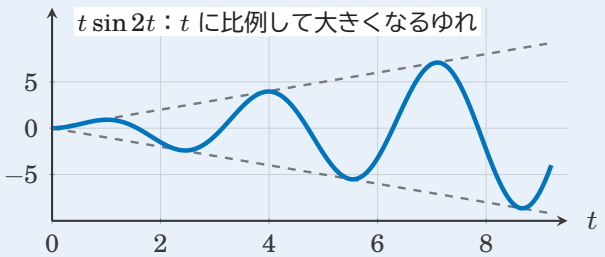
直す：表を引く　t をとった $\sin 2t$ の行 $F=\frac{2}{s^2+4}$ を引き、$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$。

式

$$F(s)=2(s^2+4)^{-1}$$　微分しやすい形に

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=2\times(-1)(s^2+4)^{-2}\times 2s$$　合成関数の微分（5-6）

$$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$　-1 をかける



答え　$\frac{4s}{(s^2+4)^2}$（$s=2$ で $\frac{8}{64}=0.125$。数値の積分も 0.125）。6-13 の共振 $\frac{t}{4}\sin 2t$ もこの形（9-7）

じぶんでとこう 8

$\mathcal{L}[t\sin t]$ を求めましょう。

例題 9　表にない形を、数値で

$f(t)=\dfrac{1}{1+t}$ のラプラス変換の、$s=1$ のときの値を、表計算の台形（$\Delta t=0.1$、$t=10$ まで）で、数値で求めましょう。

考え方　**場合：**表にない形を、数値で（表 9-6 の H）

名前　名前は $\mathcal{L}$：$\frac{1}{1+t}$ に e^{-t} をかけて、0 から ∞ までたす。

楽をする　表にない形なので、数値で。$t=10$ で $e^{-10}=0.000045$ なので、そこで止める。

式

	A	B	C	D
1	t	$\frac{1}{1+t}$	e^{-t}	かけた値
2	0	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.1	0.9091	0.9048	0.8226
4	0.2	0.8333	0.8187	0.6823
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
102	10	0.0909	0.0000	0.0000
103	台形			0.5980

D103 は `=0.1*(SUM(D2:D102)-(D2+D102)/2)`（台形の和：両はしは半分）。

答え　約 0.598（$\Delta t=0.01$ にすると 0.5964 になり、本当の値 0.59635 に近づく）

じぶんでとこう 9

$f(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ のラプラス変換の、$s=1$ のときの値を、表計算の台形（$\Delta t=0.1$、$t=10$ まで）で求めましょう。

例題 10　たたみこみを 2 通りで

$e^{-t}*e^{-2t}$ を、(1) たたみこみの積分で、(2) s の世界のかけ算で求め、同じになることを確かめましょう。

考え方　**場合：**たたみこみ（表 9-6 の I と A）

名前　$(e^{-t}*e^{-2t})(t)=\int_0^t e^{-(t-t_1)}e^{-2t_1}\,\mathrm{d}t_1$。$\mathcal{L}$ はかけ算になる。

直す：ふつうの定積分　(1) は t_1 の定積分。e^{-t} は t_1 に関係しないので外へ。

式

$$\int_0^t e^{-t}e^{t_1}e^{-2t_1}\,\mathrm{d}t_1=e^{-t}\int_0^t e^{-t_1}\,\mathrm{d}t_1$$

(1) 肩を分けて、e^{-t} を外へ

$$=e^{-t}(1-e^{-t})=e^{-t}-e^{-2t}$$

$\int_0^t e^{-t_1}\mathrm{d}t_1=1-e^{-t}$

$$\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

(2) それぞれ表で (A)、かけ算

$$\mathcal{L}[e^{-t}-e^{-2t}]=\frac{(s+2)-(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

(1) の答えを変換して通分

答え　$e^{-t}-e^{-2t}$。変換は $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ で、(2) と同じ

じぶんでとこう 10

$1*e^{-3t}$ を、たたみこみの積分と、s の世界のかけ算で求め、同じになることを確かめましょう。

例題 11　はじめと最後の値で確かめる

$f(t) = 1 - e^{-2t}$ を変換して $F(s)$ を求め、初期値の定理と最終値の定理で、$t = 0$ の値と最後の値を確かめましょう。

考え方　**場合：**いくつかの項の和（表 9-6 の B と A）

名前　名前は $\mathcal{L}$。ここでは積分しない。

楽をする　項ごとに表を引く。確かめは、もどさずに $sF(s)$ の $s \to \infty$ と $s \to 0$。

式

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s(s+2)}$$　項ごとに表で。通分

$$sF(s) = \frac{2}{s+2}$$　s をかける

$s \to \infty$ で $\dfrac{2}{s+2} \to 0$　初期値の定理：はじめは 0

$s \to 0$ で $\dfrac{2}{s+2} \to 1$　最終値の定理（-2 は左半分）

答え　$F(s) = \dfrac{2}{s(s+2)}$。はじめ 0、最後は 1 で、$1 - e^{-2t}$ の $t = 0$ の値・最後の値と合う

じぶんでとこう 11

$f(t) = 10 - 10e^{-0.5t}$（RC の充電）を変換して $F(s)$ を求め、初期値の定理と最終値の定理で、はじめの値と最後の値を確かめましょう。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① s のずらしの向き

✕ $\mathcal{L}[e^{-t}\sin 2t] = \dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

○ e^{-at} は $s+a$。$\mathcal{L}[e^{-t}\sin 2t] = \dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

$e^{-t}e^{-st} = e^{-(s+1)t}$ なので、s が $s+1$ になります。e^{at}（ふえる）なら $s-a$ です。

⚠ まちがえやすいところ

② 名前を、そのままかけ算と読む

✕ $\mathcal{L}[t\sin 2t] = \mathcal{L}[t] \times \mathcal{L}[\sin 2t]$

○ t をかける行で、$-\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$ に直す

$$\underset{\text{名前}}{\mathcal{L}[t\sin 2t]} = \underset{\text{表を引く}}{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$\mathcal{L}$ は「かける数」ではなく操作の名前です。かけ算の形は、性質の表（C・D・G・I）で直します。

⚠ まちがえやすいところ

③ $H(t-t_0)$ を忘れる

✕ $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}] = \dfrac{e^{-s}}{s+1}$

○ $e^{-(t-1)}H(t-1)$ のときだけ $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$

H がないと、$t<1$ でも式が生きています。$e^{-(t-1)} = e\cdot e^{-t}$ で、変換は $\frac{e}{s+1}$ です。

⚠ まちがえやすいところ

④ δ を「高さ 1」と思う

✕ $\delta(t)$ は、時刻 0 で高さ 1

○ 面積（力積）が 1。高さは限りなく大きい

高さ 1 で幅 0 なら、面積は 0 で、たたいたことになりません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 落ち着かない式に最終値の定理

✕ $\mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$ なので、最後は $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{s^2+1} = 0$

○ 分母が 0 の点 $\pm j$ は左半分にないので使えない

$\sin t$ は落ち着きません。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ たたみこみを、ふつうのかけ算と思う

✕ $e^{-t} * e^{-2t} = e^{-3t}$

○ $e^{-t} * e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t}$

かけ算になるのは、s の世界でだけです。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 分子の数を合わせずに表を引く

✕ $\dfrac{1}{s^2+9}$ を見て、$\sin 3t$

○ $\dfrac{1}{s^2+9}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{s^2+9}$ なので、$\dfrac{1}{3}\sin 3t$

表の行 $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ の分子は ω です。$\frac{1}{s+2}$ と $\frac{2}{s+2}$ も、e^{-2t} と $2e^{-2t}$ でちがいます。

⚠ まちがえやすいところ

⑧ 2 つのずらしを取りちがえる

✕ $e^{-t}f(t)$ の変換で、$F(s)$ に e^{-s} をかける

○ e^{-at} をかける → s を $s+a$ に（s のずらし）。t_0 おくれる → e^{-st_0} をかける（時間のずらし）

時間の世界で e^{-at} をかけると s の世界でずれ、時間の世界でずらすと s の世界で e^{-st_0} がかかります。

コラム　デルタ関数と、ヘビサイド・ディラック・シュワルツ

短い時間にはたらく「たたく力」を、ふつうの関数のように式に入れる考えは、ヘビサイドが電気回路の計算で使っていました（9-5 のコラム）。物理学者ディラックは、量子力学の研究で、1927 年の論文と 1930 年の本でこの関数を使い、δ という記号を広めました。値で決まらないこの「関数」は、数学者からは長く疑われましたが、1945 年ごろにフランスの数学者シュワルツが、超関数（分布）という考えで正しく整えました。工学者の便利な道具が、あとから数学として認められた例の 1 つです。

もっと知りたい ★★★★★

9-4 のフーリエ変換の性質の表と、くらべてみる

9-5 で、フーリエ変換は、ラプラス変換の s を $j\omega$ にした所だと見ました（$t<0$ で 0 で、その積分が有限になるとき）。だから、この章の性質の表は、9-4 の性質の表と同じ形をしています。

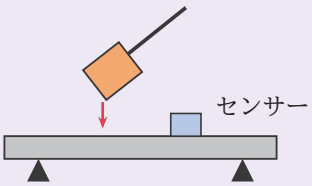
	ラプラス変換（9-6）	フーリエ変換（9-4）
$e^{-at}H(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$
微分 f'	s をかける（$-f(0)$ も）	$j\omega$ をかける
t_0 おくれる	e^{-st_0} をかける	$e^{-j\omega t_0}$ をかける
たたみこみ $f*g$	$F(s)\,G(s)$	$F(\omega)\,G(\omega)$

ちがいは、ラプラス変換の微分の行に $-f(0)$ があることです。ラプラス変換は $t=0$ から先だけを見るので、はじめの値が残ります。フーリエ変換は $-\infty$ から見るので、はじめの値という考えがありません。だから、はじめの値のある微分方程式を解くときは、ラプラス変換を使います。たとえば 9-4 で求めた $e^{-2t}H(t)$ のフーリエ変換 $\frac{1}{2+j\omega}$ は、この章の表の $\frac{1}{s+2}$ に $s=j\omega$ を入れたものと同じです。$\omega=1$ なら、どちらも $\frac{1}{2+j}=0.4-0.2j$ です。

物理・工学ではこう使う

ハンマーでたたいて、機械の性質を調べる

機械の部品や建物のはりを、力をはかれるハンマー（インパルスハンマー）でたたき、ゆれをセンサーではかる試験があります。たたく力はほぼ $\delta(t)$ なので、はかったゆれはインパルス応答です。インパルス応答がわかれば、たたみこみで、どんな力を加えたときのゆれも計算できます。車や飛行機の部品の設計で使われています（物理 波-10）。



ホールの響きを、手をたたいて調べる

コンサートホールで、短く大きな音（風船を割る音・ピストルの音）を出し、客席のマイクで響きを録音すると、ホールのインパルス応答になります。これとのたたみこみで、録音室で演奏した音を「そのホールで聞いたような音」にできます。音楽ソフトの「残響」の効果は、このしくみを使ったものがあります。

シャワーと工場のむだ時間

シャワーの温度調節がむずかしいのは、むだ時間 e^{-sL} があるからです。温度を見て調節しても、効き目が L 秒おくれて出るので、調節しすぎてしまいます。工場の長い配管やベルトコンベアの制御でも、むだ時間が設計のむずかしさになります（9-12）。

章末問題

9-6 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次のラプラス変換を、表を引いて求めましょう（例題 1）。

（1）$\mathcal{L}[t^4]$

（2）$\mathcal{L}[\sin 4t]$

（3）$\mathcal{L}[\cos t]$

2 $\mathcal{L}[3-2t^2+5\sin t]$ を求めましょう（例題 2）。

3 次のラプラス変換を求めましょう（例題 3）。

（1）$\mathcal{L}[e^{-3t}\sin t]$

（2）$\mathcal{L}[e^{-3t}\cos t]$

（3）$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 4t]$

4 次の関数のラプラス変換を求めましょう（例題 4）。

（1）3 秒後にスイッチを入れて 12 V をつなぐ電圧 $12H(t-3)$

（2）$2H(t-5)$

（3）$3\delta(t-2)$

5 $\ddot{x}+6\dot{x}+10x=0$、はじめ $x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ の両辺をラプラス変換して、$X(s)$ を求めましょう（例題 5）。

6 $x'+3x=2\delta(t)$、はじめ $x=0$ の両辺を変換して $X(s)$ を求め、表を逆に引いて x を求めましょう（例題 6）。

7 $f(t)=5-5e^{-4t}$ を変換し、初期値の定理と最終値の定理で、はじめの値と最後の値を確かめましょう（例題 11）。

チャレンジ ★★★★★

8 次の電圧のラプラス変換を求めましょう（例題 7）。

（1）はじめの 1 秒間だけ 4 V をかけ、そのあと 0 V にする電圧

（2）時刻 2 秒から 5 秒までの間だけ 1 V をかけ、ほかの時刻は 0 V の電圧

9 $\mathcal{L}[t\sin 3t]$ と $\mathcal{L}[t\sin 4t]$ を求めましょう（例題 8）。

10 $e^{-t} * e^{-3t}$ を、たたみこみの積分と、s の世界のかけ算で求め、同じになることを確かめましょう（例題 10）。

11 $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ のラプラス変換の、$s = 2$ のときの値を、表計算の台形（$\Delta t = 0.1$、$t = 10$ まで）で求めましょう（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 表計算で $f(t)e^{-st}$ を台形でたし、変換表の値と同じになることを確かめられる。 → 251 ページ
- ☐ t^n・sin・cos と、e^{-at} がかかった形の変換表の行を、部分積分・オイラーの公式・s のずらしで作れる。 → 252 ページ
- ☐ 場合分けの表 9-6 と流れ図を使って、おくれ・パルス・デルタ関数・たたみこみをふくむ関数を変換し、初期値・最終値の定理で確かめられる。 → 265 ページ

ミナ

変換表がそろった！　次は、部分分数に分けて、表を逆に引き、微分方程式の答えを出そう。

第 2 部　ラプラス変換

★★★★★

9-7 ラプラス変換で微分方程式を解く

道しるべ　この章の前に 3-8 3-10 6-2 6-4 6-12 6-13 9-5 9-6
この章の先に 9-8 9-9 9-10 9-11

この章でできるようになること

- ★★★ 微分方程式を「変換する・わり算で解く・部分分数に分ける・表でもどす」の 4 つの手順で解く流れを、図とオイラー法の表で説明できる。
- ★★★★ 分母がちがう 1 次式のかけ算になる式を、部分分数に分けて、表を逆に引いて時間の関数にもどせる。
- ★★★★★ 場合分けの表 9-7 を使って、重解・分母が 0 になる s が複素数の式・入力のある式・おくれて始まる式・最後の値だけの場合も、もどし方を選んで計算できる。

はてな？

3-10・6-12 の車 A（$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$）と車 B（$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$）は、段差をこえたあと、高さのずれ $x(0)=1$、速さ $\dot{x}(0)=0$ から、もとの高さにもどります（車 A はゆれずに、車 B はゆれながら。図 3）。6-12 では、e^{st} を入れて s を求め、最後に A、B をはじめの値に合わせて答えを作りました。

e^{st} を入れたり、あとから A、B を合わせたりしないで、表を引くだけで、この答えが出せるでしょうか。

9-5 で、微分を s のかけ算に変える翻訳（ラプラス変換）を作り、9-6 で、よく使う関数の変換表を作りました。この章では、その 2 つを使って、微分方程式を解きます。

翻訳すると、微分方程式は s の世界の「ふつうの方程式」になり、わり算で解けます。でも、解けた $X(s)$ は s の式なので、そのままでは動きがわかりません。s の式を時間の世界へ**もどす**ことが必要です。この「もどす」の名前が**逆ラプラス変換**です。

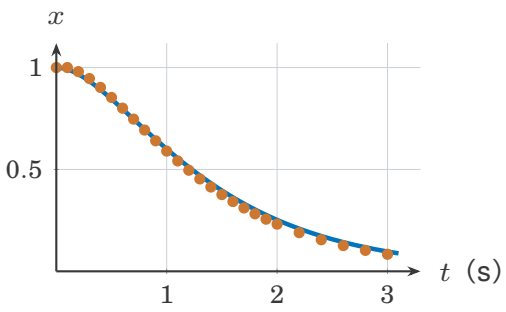
もどすときの実際の道具は、3-8 で学んだ**部分分数**と、9-6 の変換表を**逆に引く**ことの 2 つです。3-8 で「第 9 巻で機械の動きを調べるときに使う計算です」と予告した計算を、ここで使います。

手順は多く見えますが、することは 4 つだけです。1 回でわからなくても大丈夫。例題を 1 つずつ、表と流れ図を見ながら進めましょう。

やってみよう　オイラー法の表と、表を引いた答えをくらべよう

6-2 のオイラー法で、車 A（$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）を $\Delta t=0.1\,\mathrm{s}$ ずつ計算し、この章で作る答え $2e^{-t}-e^{-2t}$ とくらべます。

1. A 列に時刻 t（0, 0.1, …, 1）を入れる。B2 に $x(0)=1$、C2 に速さ $\dot{x}(0)=0$ を入れる。
2. D2 に加速度 `=-3*C2-2*B2` を入れる（式を $\ddot{x}=-3\dot{x}-2x$ と変形した）。
3. B3 に `=B2+C2*0.1`、C3 に `=C2+D2*0.1` を入れ、D2 を D3 にコピーする。3 行めを 12 行めまでコピーする。
4. E2 に `=2*EXP(-A2)-EXP(-2*A2)` と入れて、E12 までコピーする。B 列と E 列を同じグラフにかく。



線は表を引いた答え、点はオイラー法（表 1）です。点は線のすぐ近くにならびます。Δt を 0.01 にすると、$x(1)$ は 0.5994 になり、0.6004 にもっと近づきます。

E 列の式 $2e^{-t} - e^{-2t}$ は、6-12 の答えと同じです。この章では、これを**表を引くだけで**作ります（④）。

	A	B	C	D	E
1	t	x（オイラー法）	速さ $\dot{x}$	加速度 $\ddot{x}$	$2e^{-t} - e^{-2t}$
2	0	1	0	−2	1
3	0.1	1	−0.2	−1.4	0.9909
4	0.2	0.98	−0.34	−0.94	0.9671
5	0.3	0.946	−0.434	−0.59	0.9328
6	0.4	0.9026	−0.493	−0.3262	0.8913
7	0.5	0.8533	−0.5256	−0.1297	0.8452
8	0.6	0.8007	−0.5386	0.0143	0.7964
9	0.7	0.7469	−0.5372	0.1177	0.7466
10	0.8	0.6932	−0.5254	0.1898	0.6968
11	0.9	0.6406	−0.5064	0.2380	0.6478
12	1	0.5900	−0.4826	0.2679	0.6004

表 1　車 A の表（$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$）。オイラー法の $x(1) = 0.5900$ と、表を引いた答えの 0.6004 は、ほぼ同じ。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-8 部分分数分解：$\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$。係数は、分母をはらった式に $x=0$、$x=-1$ を代入すると決まる（数を代入する方法）。

6-12 車 A の特性方程式 $s^2+3s+2=0$、$s=-1,\ -2$。はじめの値に合わせて $x=2e^{-t}-e^{-2t}$。

9-5 $\mathcal{L}[\dot{x}]=sX-x(0)$、$\mathcal{L}[\ddot{x}]=s^2X-sx(0)-\dot{x}(0)$（部分積分のはしの項）。小文字は時間の世界、大文字は s の世界。

9-6 変換表：$1\to\dfrac{1}{s}$、$e^{-at}\to\dfrac{1}{s+a}$、$\sin\omega t\to\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$、$\cos\omega t\to\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$。$e^{-at}$ がかかると s が $s+a$ にずれる。

6-2 オイラー法：次の値＝今の値＋変化の速さ× Δt。

数学の道具

目でわかる 翻訳して、解いて、分けて、もどす ★★★

1 4 つの手順

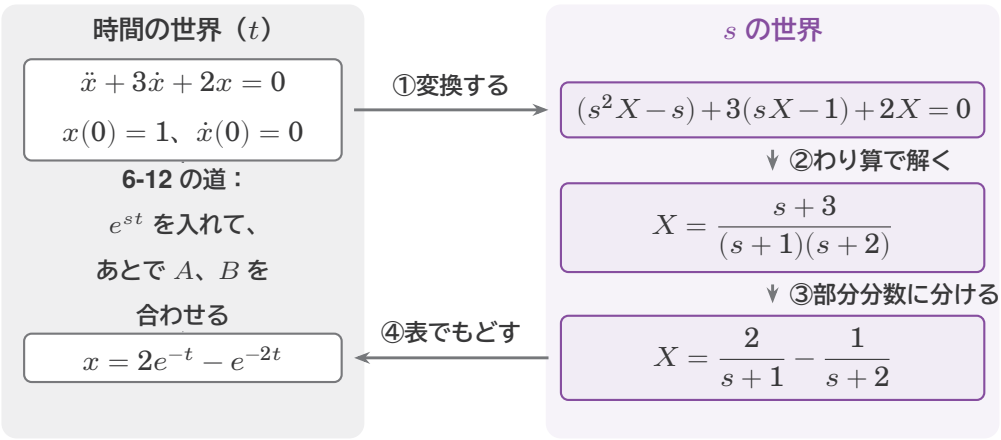


図 1 ラプラス変換で解く 4 つの手順（実線の矢印）。①と④は表を引くだけ、②はふつうの方程式、③は 3-8 の部分分数。点線は 6-12 で通った道。

車 A（$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）を例に、ラプラス変換で微分方程式を解く道すじを、図 1 にかきました。左が時間の世界、右が s の世界です。

1. **変換する**：式の項を 1 つずつ、9-5 の辞書で s の世界へ翻訳する。はじめの値もここで入る。
2. **わり算で解く**：X の 1 次方程式になるので、わり算で「$X =$ 分数の式」の形にする。
3. **部分分数に分ける**：表にある形（$\frac{1}{s+a}$ など）の和に分ける（3-8）。
4. **表でもどす**：1 つずつ、表を逆に引いて時間の関数にもどし、たす。

なぜ、まわり道をするのか

時間の世界では、x と、その微分 $\dot{x}$・$\ddot{x}$ がからみあっていて、ふつうのわり算では解けません。s の世界では、微分が s のかけ算に変わる（9-5）ので、X についての**ふつうの 1 次方程式**になり、わり算 1 回で解けます。図 1 は遠回りに見えますが、どの矢印も、表を引くか、ふつうの計算をするだけです。

同じ考えは、3-12 の対数にもありました。大きな数のかけ算は、対数に直すとたし算になり、計算してから、もとの数にもどしました。「むずかしい計算は、やさしい世界に翻訳して行い、答えをもどす」のです。

2 名前の段：$\mathcal{L}^{-1}$ の記号を読む

④の「もどす」には、次の名前がついています。

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

「ラプラス変換すると $F(s)$ になる、時間の関数 $f(t)$」

これを**逆ラプラス変換**（ぎゃくラプラスへんかん）といいます。

①名前の段　記号を読む：どの s の式を、時間の世界へもどすか

1. **何を**：かっこの中の $F(s)$ は、s の世界の式です。
2. **-1 の印**：「逆向き」の印です。逆関数 f^{-1} や、逆行列 A^{-1}（7-5）と同じ印で、$1/\mathcal{L}$ という意味ではありません。
3. **答え**：$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ となる $f(t)$（$t \geqq 0$ の関数）です。

名前は、まだ計算していない

9-6 までの $\mathcal{L}$ と同じく、$\mathcal{L}^{-1}$ も操作の**名前**です。専門書には、名前の上の式（s を複素数として積分する式）がのっていますが、この本では使いません（専門書をのぞいてみようで名前だけ）。実際は、次の 2 つの道具に**直して**求めます。

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]}_{\text{名前}} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]}_{\text{部分分数}}$$

$$= \underbrace{2e^{-t} - e^{-2t}}_{\text{表を引く}}$$

左の点線の枠は、まだ名前のままです。1 行めで**部分分数**に分け、2 行めで 1 つずつ**表を引いて**答えを出しました。

なぜ、項ごとにもどしてよいのか

ラプラス変換は線形でした（9-5）。$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$ なので、逆向きも同じで、

$$\mathcal{L}^{-1}[aF + bG] = a\,\mathcal{L}^{-1}[F] + b\,\mathcal{L}^{-1}[G]$$

です。だから、和や差に分けておけば、1 つずつもどして、たせばよいのです。でも、**かけ算のままでは、1 つずつもどせません**（まちがえやすいところ①）。部分分数に分けるのは、かけ算を、たし算に変えるためです。

逆に引く表

9-6 の変換表（$f(t) \to F(s)$）を、右の列から左へ逆向きに引きます（表 2）。

行	s の世界 $F(s)$	時間の世界 $f(t)$	作った所
1	$\dfrac{1}{s}$	1	9-5
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t	9-6
3	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	9-5
4	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	9-6
5	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	9-6
6	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	9-6
7	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin \omega t$	9-6（s のずらし）
8	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	9-6（s のずらし）
9	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\sin \omega t$	9-6（t をかける）
10	1	$\delta(t)$	9-6
11	$e^{-st_0}F(s)$	$f(t-t_0)$（$t \geqq t_0$ で）	9-6（時間のずらし）

表 2　逆に引く表（9-6 の変換表から）。分子もふくめて形をぴったり合わせて引く。定数倍は、外に出してから引く。行 11 は、$t < t_0$ では 0。

せいかくに言うと

もどした答えは、1 つに決まる

表を逆に引くとき、「同じ $F(s)$ になる、別の $f(t)$ があったら困る」と思うかもしれません。$t \geqq 0$ で連続な関数なら、ラプラス変換が同じになる関数は 1 つしかないことが知られています（レルヒの定理）。だから、表を逆に引いて見つけた関数が、ただ 1 つの答えです。なお、ラプラス変換は $t \geqq 0$ の値だけで決まるので、もどした答えも $t \geqq 0$ の所だけを表します。

たいせつ

- **逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ は、「ラプラス変換すると $F(s)$ になる時間の関数」の名前。-1 は逆向きの印。**
- **実際は、部分分数で表の形の和に分け、1 つずつ表を逆に引いて、たす。**

手でわかる 部分分数に分けて、表でもどす ★★★★

③ 3-8 の約束：全体は、その差

3-8 の物理・工学ではこう使うでは、「$\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ のままでは動きがわかりませんが、分けると、1 つずつは表で引ける形で、『すぐ落ち着く動き』にもどせます。全体は、その差です（9-7）」と書きました。ここで、その約束を果たします。

この式は、どんな動きか

車 A が、止まった高さ（$x(0)=0$）にいるとき、下から速さ 1 でつき上げられた（$\dot{x}(0)=1$）とします。①で変換すると、

$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$	問題の式（$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=1$）
$(s^2X-s\times 0-1)+3(sX-0)+2X=0$	項ごとに変換（9-5 の微分の行）
$(s^2+3s+2)X=1$	X の項をまとめ、-1 を右へ
$X=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$	s^2+3s+2 でわり、因数分解

3-8 の式は、車 A をつき上げたときの動きだったのです。

②直す段　部分分数に直す：数を代入する方法

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

とおき、両辺に $(s+1)(s+2)$ をかけて分母をはらいます（3-8 の道具 9）。

$1 = A(s+2) + B(s+1)$　　両辺に $(s+1)(s+2)$ をかけた

$1 = A \times 1 + B \times 0, \quad A = 1$　　$s = -1$ を入れた。B の項が消える

$1 = A \times 0 + B \times (-1), \quad B = -1$　　$s = -2$ を入れた。A の項が消える

$s = -1$ を入れるのは、$(s+1)$ が 0 になって、B の項が消えるからです。分母が 0 になる s を、1 つずつ入れていきます（この s に、9-9 で「極」と名前をつけます）。

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} \xrightarrow{\text{残りに } s=-1} \frac{1}{-1+2} = 1$$

指でかくす

これが A（$\frac{1}{s+1}$ の係数）

図 2　かくす方法。$(s+1)$ を指でかくし、残りの式に、かくした所が 0 になる $s = -1$ を入れると、A が出る。$(s+2)$ をかくして $s = -2$ を入れると $B = \frac{1}{-2+1} = -1$。

上の計算は、もっと短くできます。両辺に $(s+1)$ だけをかけると、

$$\frac{1}{s+2} = A + \frac{B(s+1)}{s+2}$$

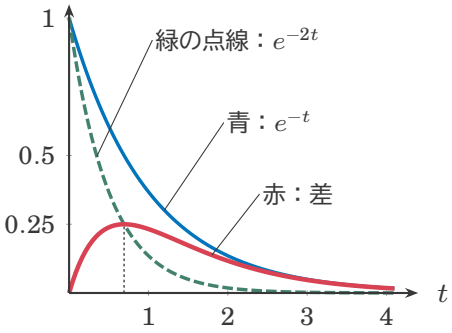
です。ここに $s = -1$ を入れると、右の項が消えて、$A = 1/(-1+2) = 1$ です。これは、図 2 のように、もとの式の $(s+1)$ を指でかくして、残りに $s = -1$ を入れたのと同じです。この本では「**かくす方法**」とよびます。

表でもどす

$$X = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

表 2 の行 3 で、$\frac{1}{s+1} \to e^{-t}$、$\frac{1}{s+2} \to e^{-2t}$ です。

$$x = e^{-t} - e^{-2t}$$



はじめは e^{-t} も e^{-2t} も 1 なので、差は 0 です（$x(0) = 0$）。e^{-2t} のほうが速くへるので差が開き、山をこえたあとは、ゆっくりへる e^{-t} だけが残って、0 にもどります。

山の時刻は、$\dot{x} = -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$ から $e^{-t} = \frac{1}{2}$、$t = \ln 2 \approx 0.69$ です。山の高さは $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0.25$ です（点線）。

3-8 の約束どおり、「すぐ落ち着く動き」e^{-t} と e^{-2t} の**差**が、全体の動きでした。

④ 車 A を、表を引くだけで解く

はてな？ の車 A（$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$）を、4 つの手順で解きます。

① 変換する、② わり算で解く

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$$

問題の式（$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）

$$(s^2X-s\times 1-0)+3(sX-1)+2X=0$$

項ごとに変換。はじめの値を入れた

$$s^2X+3sX+2X-s-3=0$$

かっこをはずした

$$(s^2+3s+2)X=s+3$$

X の項を左に、残りを右へ

$$X=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

わり算。分母を因数分解 (3-10)

③ 部分分数に分ける

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

とおいて、かくす方法で A、B を求めます。

$$A=\left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1}=\frac{-1+3}{-1+2}=2$$

$(s+1)$ をかくして $s=-1$

$$B=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}=\frac{-2+3}{-2+1}=-1$$

$(s+2)$ をかくして $s=-2$

$$X=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

部分分数に分けた

「$\left.\right|_{s=-1}$」は、「$s=-1$ を入れる」という印です。

④ 表でもどす

表 2 の行 3 を 2 回使って、

$$x = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

6-12 の答え、やってみようの E 列と同じです。

答えを確かめる

- $t = 0$ を入れる：$x(0) = 2 - 1 = 1$。はじめの高さと合う。
- 微分して $t = 0$：$\dot{x} = -2e^{-t} + 2e^{-2t}$ で、$\dot{x}(0) = -2 + 2 = 0$。はじめの速さと合う。
- 最後の値：t が大きいと、どちらの項も 0 に近づき、$x \to 0$（もとの高さにもどる）。

6-12 のように A、B をあとから決める計算は、どこにもありませんでした。はじめの値は、①の変換のときに、もう入っていたのです。

❓はてな？の答え：出せます。車 A は表を引くだけで $2e^{-t} - e^{-2t}$ になりました。車 B も、⑨で同じ 4 つの手順で解きます。

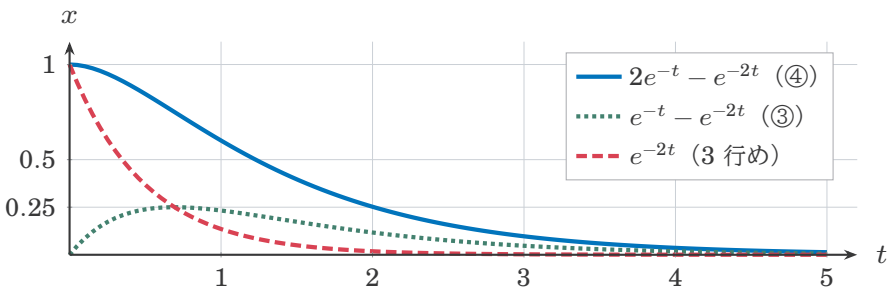
5 はじめの値は分子に、動き方は分母に

③と④でもどした 2 つの式を、ならべてみます。

はじめの値	$X(s)$	$x(t)$
$x(0) = 0$、$\dot{x}(0) = 1$（③）	$\dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$	$e^{-t} - e^{-2t}$
$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$（④）	$\dfrac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$	$2e^{-t} - e^{-2t}$
$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -2$	$\dfrac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \dfrac{1}{s + 2}$	e^{-2t}

表 3 車 A で、はじめの値だけを変えた。分母は同じで、分子だけが変わる。3 行めの分子は $(s + 3) \times 1 + (-2) = s + 1$ で、分母の $s + 1$ と約分できる。

- **分母** s^2+3s+2 は、はじめの値によらず同じです。これは 6-12 の特性方程式の左辺そのものです。6-12 で「第 9 巻のラプラス変換でも同じ s を使います」と書いたのは、このためです。分母が 0 になる $s=-1$、-2 が、答えに出てくる e^{-t}、e^{-2t} を決めます。
- **分子**は、はじめの値で変わります。分子が変わると、e^{-t}、e^{-2t} の係数（1 と -1、2 と -1）が変わります。3 行めのように、分子が分母の $s+1$ と約分されると、e^{-t} の項が消えて、e^{-2t} だけが残ります。



3 つとも、同じ分母（同じ車）なので、どれも 0 にもどります。はじめの値で、もどり方の形だけが変わります。

ばね・質量・ダンパーの形 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=u(t)$ なら、①と②をいつも同じように計算できて、

$$(s^2+a_1s+a_0)X=U(s)+(s+a_1)\,x(0)+\dot{x}(0)$$

となります。左のかっこは機械の性質、右は「外から入れたもの」と「はじめの値」です。

もっと知りたい ★★★★★

2 つの式がからむ連立の式も、同じ手順で（6-14 の水そう）

6-14 の 2 つの水そうは、$\dot{h}_1 = -0.1(h_1 - h_2)$、$\dot{h}_2 = 0.1(h_1 - h_2)$（$h$〔cm〕、$t$〔分〕）でした。はじめ $h_1(0) = 20$、$h_2(0) = 0$ として、両方の式を変換します。

$$sH_1 - 20 = -0.1(H_1 - H_2)$$ 1 つめの式を変換した

$$sH_2 - 0 = 0.1(H_1 - H_2)$$ 2 つめの式を変換した

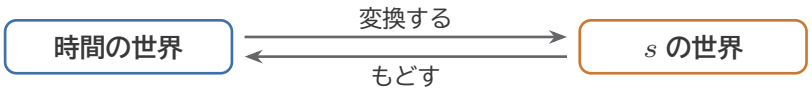
$$H_1 + H_2 = \frac{20}{s}$$ 2 つの式をたすと $s(H_1 + H_2) = 20$（6-14 の和）

$$H_1 - H_2 = \frac{20}{s + 0.2}$$ ひくと $(s + 0.2)(H_1 - H_2) = 20$（6-14 の差）

$$H_1 = \frac{10}{s} + \frac{10}{s + 0.2}$$ 和と差をたして 2 でわった

$$H_2 = \frac{10}{s} - \frac{10}{s + 0.2}$$ 和と差をひいて 2 でわった

表でもどすと、$h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$、$h_2 = 10 - 10e^{-0.2t}$。10 分後は 11.353 cm と 8.647 cm です。s の世界では、連立の微分方程式が、ふつうの連立 1 次方程式になります。たくさんの式は、行列でまとめて書きます（9-10・9-11）。



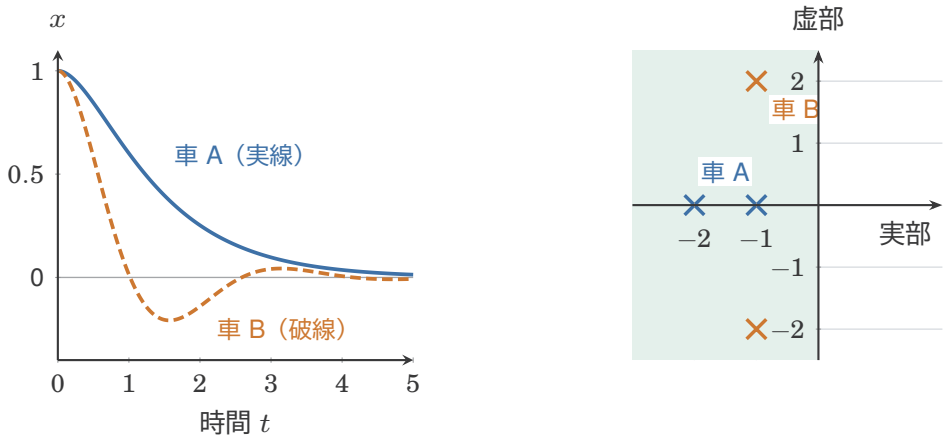


図 3　車 A・車 B の動き（左）と、分母が 0 になる s の場所（右の×）。車 A は -1 と -2（青）、車 B は $-1 \pm 2j$（オレンジ。6-12 ⑩の図と同じ点）。緑は実部が負の左半分。左の×ほど速く消え、上下にはなれた×はゆれる。

ここまでで十分

分母がちがう 1 次式のかけ算になる式を、4 つの手順（変換する・わり算で解く・部分分数に分ける・表でもどす）で解ければ十分です。この先は、重解・分母が 0 になる s が複素数の式・入力のある式など、いろいろな形のもどし方です。

∂ 式でわかる 形を見て、もどし方を選ぶ ★★★★★

6 場合分けの表と流れ図

④の車 A は、分母がちがう 1 次式のかけ算でした。でも、車 B の分母 s^2+2s+5 は実数の 1 次式に分けられません。重解のときや、外から力を入れたとき、スイッチをおくれて入れたときも、分け方が変わります。どの形なら、どう分けてどう引くかを、場合分けの表 9-7 にまとめました（記号 A〜I）。手順の頭の札は、使う道具です。

分母の形が変わると、もどした動きの形も変わります。図 4 で、先に形を見ておきましょう。

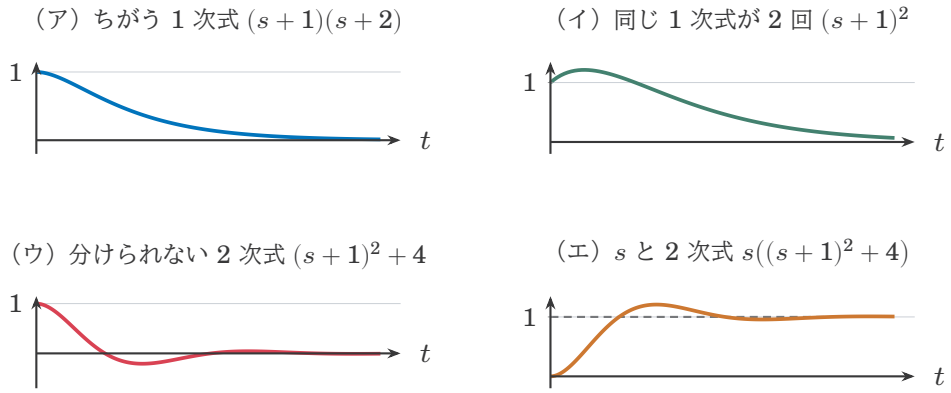


図 4　分母の形と、もどした動きの形。（ア）ゆれずにへる（場合 B）。（イ）te^{-t} が入り、少しふくらんでからへる（場合 C）。（ウ）ゆれながらへる（場合 D）。（エ）$\frac{1}{s}$ の項があるので、0 でない値に落ち着く（場合 E）。

B〜E は②の**直す段**（部分分数に直して、表を引く）、F〜I は③の**楽をする段**です。A は、もう表の形なので、引くだけです。「分けられない 2 次式」は、判別式が負で、実数の 1 次式のかけ算にできない 2 次式のことです（3-10・6-8）。どの順に問えばよいかを、図 5 の流れ図にしました。

場合分けの表 9-7　逆ラプラス変換：どんな形なら、どうもどす？

記号	こんなとき	手順	例題
A	表の形そのもの（定数倍をのぞく）	表を引く　定数倍を外に出し、表 2 を逆に引く	1・9・11
B	分母が、ちがう 1 次式のかけ算（s だけの因数もふくむ）	部分分数　$\frac{A}{s-p_1}+\frac{B}{s-p_2}+\cdots$。係数はかくす方法 表を引く　$Ae^{p_1 t}+Be^{p_2 t}+\cdots$	2・3・10
C	同じ 1 次式が 2 回以上かかる（重解）	部分分数　$\frac{A}{s+a}+\frac{B}{(s+a)^2}$。$B$ はかくす方法、A は係数を比べる 表を引く　$Ae^{-at}+Bte^{-at}$	4・5
D	分母が、実数の 1 次式に分けられない 2 次式（判別式が負）1 つだけ（ほかの因数なし）	部分分数　平方完成 $(s+a)^2+\omega^2$。分子を $(s+a)$ と定数に分ける 表を引く　行 7・行 8	6
E	分けられない 2 次式と、ほかの因数（1 次式・もう 1 つの 2 次式）がまざる	部分分数　$\frac{A}{s-p}+\frac{Bs+C}{2\text{次式}}$。2 次式の分子は 1 次式。係数は、分母が 0 になる s を入れる・係数を比べる 表を引く　B と D の形でもどす	7・8
F	e^{-st_0} がかかっている	楽をする　e^{-st_0} をはずして下の問いでもどし、答えを t_0 だけ右へずらす	10
G	分子の次数が、分母の次数と同じか大きい	楽をする　先にわり算（3-8）。残りの分数を下の問いで。定数の項は $\delta(t)$	11
H	最後の値（落ち着く値）だけほしい	楽をする　もどさない。$\lim_{s\to 0} sF(s)$（最終値の定理）。落ち着くときだけ	12
I	3 次以上の分母で、手の計算では 1 次式・2 次式に分けきれない	楽をする　Python で分母が 0 になる s と係数を出し、B・D の形で読む	13

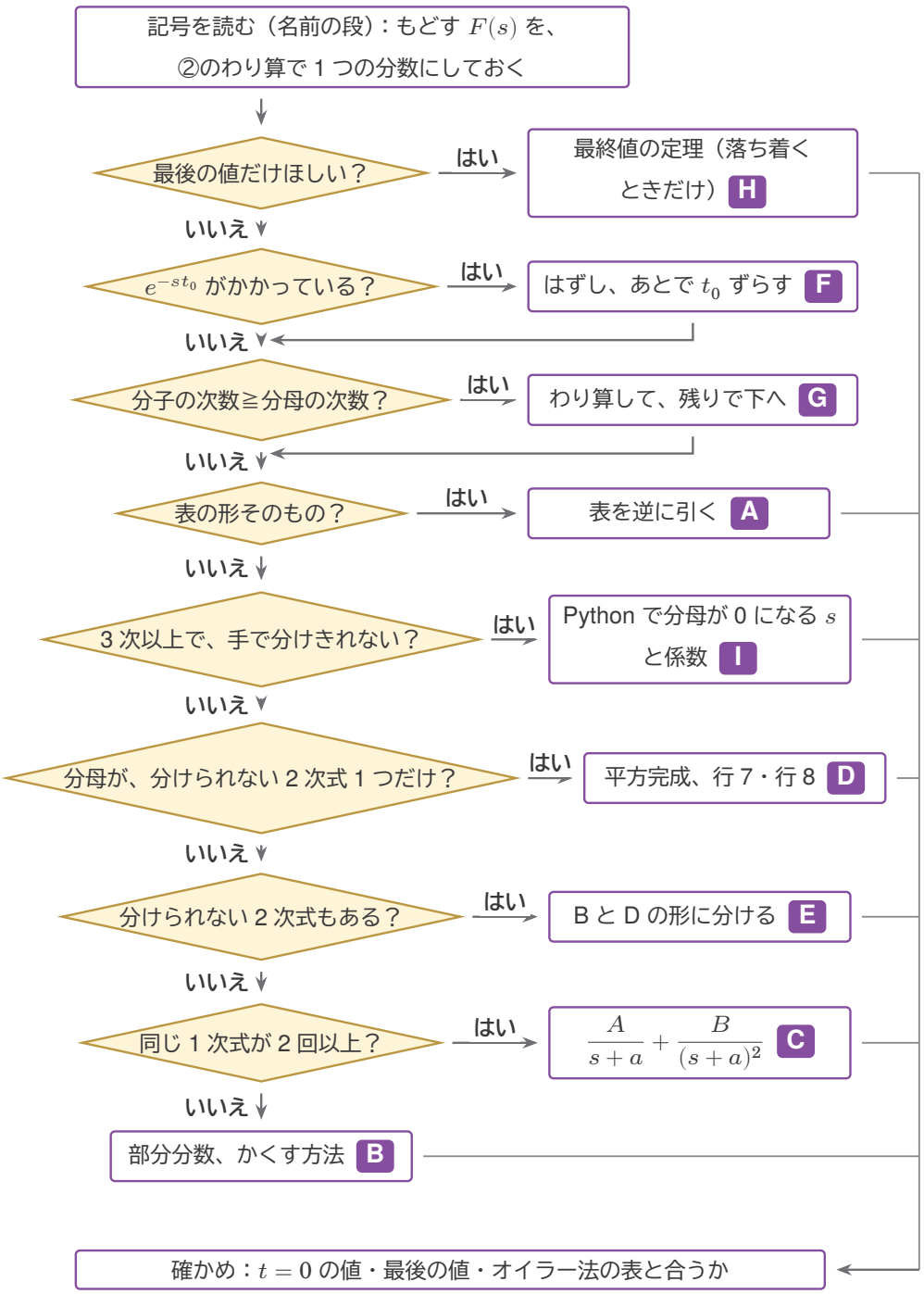


図 5 逆ラプラス変換の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 3 つ（H・F・G）と I が楽をする段。F・G のあとは左の列の次の問いへもどる。もどした四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

流れ図の使い方：車 A

④の車 A $X = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ をたどります。

1. 名前の段：もどすのは $X(s)$。②のわり算で、もう 1 つの分数になっている。
2. 最後の値だけほしい？ いいえ（動きがほしい）。e^{-st_0} がかかっている？ いいえ。
3. 分子の次数≧分母の次数？ いいえ（分子は 1 次、分母は 2 次）。表の形そのもの？ いいえ（2 つの和に分けないと引けない）。
4. 3 次以上で、手で分けきれない？ いいえ（2 次で、$(s+1)(s+2)$ に分けられた）。分母が、分けられない 2 次式 1 つだけ？ いいえ。分けられない 2 次式もある？ いいえ。
5. 同じ 1 次式が 2 回以上？ いいえ（$s+1$ と $s+2$ はちがう）。

こうして場合 **B** に着きます。④でしたとおりです。1 回で全部の問いを覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどって確かめましょう。

どの場合かな？

次の $F(s)$ は、場合分けの表 9-7 のどの場合でしょう。流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1. $\dfrac{3}{s+4}$
   答え：**A**。表の行 3 の 3 倍。
2. $\dfrac{2s+1}{s(s+1)}$
   答え：**B**。分母 s と $s+1$ は、ちがう 1 次式。
3. $\dfrac{1}{s^2+4s+4}$
   答え：**C**。$s^2+4s+4=(s+2)^2$ で、同じ 1 次式が 2 回。
4. $\dfrac{s+3}{s^2+2s+10}$
   答え：**D**。判別式 $4-40<0$ の 2 次式が 1 つだけ（ほかの因数なし）。

5 $\dfrac{e^{-3s}}{s+1}$

答え：F→A。e^{-3s} をはずすと表の形。

6 $\dfrac{5}{s(s+2)}$ が、時間がたつと近づく値

答え：H。最後の値だけ。

7 場合 A：表の形にそろえて引く

表を引くときは、分子もふくめて、形をぴったり合わせます。合わないときは、定数倍を外に出してそろえます（線形だから）。

$$\frac{5}{s+2} = 5 \times \frac{1}{s+2} \to 5e^{-2t}$$

行 3（$a=2$）の 5 倍

$$\frac{6}{s^2+9} = 2 \times \frac{3}{s^2+3^2} \to 2\sin 3t$$

行 5（$\omega=3$）。分子を 3 にそろえ、残りの 2 を外へ

$6/(s^2+9)$ を「$6\sin 3t$」とするのは、まちがいです。行 5 の分子は ω（ここでは 3）なので、分子の 6 を「3×2」と見ます。

6-13 の共振を、表で

6-13 ⑨では、はじめは静かなばねを考えました。式は次のとおりです。

$$\ddot{x} + 4x = \cos 2t$$

$P\cos 2t + Q\sin 2t$ を入れてもうまくいかず、t をかけた形 $\frac{t}{4}\sin 2t$ を入れて確かめました。9-6 の例題 8 では、t がかかった形を変換しました。ここでは逆に、表を引いてもどします。

$$s^2X + 4X = \frac{s}{s^2+4}$$　変換。はじめの値は 0。$\cos 2t \to \frac{s}{s^2+4}$（行 6）

$$X = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$　s^2+4 でわった

$$X = \frac{1}{4} \times \frac{2 \times 2 \times s}{(s^2+2^2)^2}$$　行 9（$\omega = 2$）の形にそろえた

$$x = \frac{t}{4}\sin 2t$$　行 9 でもどした

分母に、自分のゆれの s^2+4 と、ゆすりの s^2+4 が**重なって** 2 乗になったことが、ゆれがどんどん大きくなる（t がかかる）しるしです。

⑧ 場合 C：同じ 1 次式が 2 回（重解）

6-12 ⑤の臨界減衰のように、特性方程式が重解をもつと、分母に同じ 1 次式が 2 回かかります。たとえば、$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$、$x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 1$ では、

$$(s^2X - s - 1) + 2(sX - 1) + X = 0$$　変換した

$$(s^2 + 2s + 1)X = s + 3$$　まとめた

$$X = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$　分母は $(s+1)$ が 2 回

です。

$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1}$ ではうまくいかない

B と同じように分けようとすると、$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1} = \frac{A+B}{s+1}$ で、分母が $(s+1)$ の 1 つだけの式しか作れません。分子が $s+3$ で分母が $(s+1)^2$ の式にはなりません。そこで、2 回かかった分を受けもつ項を入れます。

$$\frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$s+3=A(s+1)+B$ 両辺に $(s+1)^2$ をかけた

$-1+3=A\times 0+B,\quad B=2$ $s=-1$ を入れた

$1=A$ 両辺の s の係数を比べた（3-8）

$X=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{(s+1)^2}$ 部分分数に分けた

$x=e^{-t}+2te^{-t}$ 行 3 と行 4 でもどした

$x=(1+2t)e^{-t}$ は、6-12 ⑤の重解の形 $(A+Bt)e^{st}$ と同じです。行 4 の te^{-at} は、9-6 で「t をかけると $-\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$」から作った行でした。

熱電対のおくれ（6-4 の約束）

6-4 のコラムでは、時定数 $\tau=30\,\mathrm{s}$ の熱電対で、温度が 1 秒に $r=\frac{1}{30}$ ℃（1 分に 2 ℃）ずつ上がり続けると、計器は $r\tau=1$ ℃おくれて追いかける、と書きました。このしくみを「1 次おくれ」とよぶことは、9-9 でくわしく学びます。

計器の値の上がり分を y〔℃〕とすると、$\tau\dot{y}+y=rt$、$y(0)=0$ です（6-4 ⑥の式）。

$\tau(sY-0)+Y=\dfrac{r}{s^2}$ 変換した（$t\to\frac{1}{s^2}$、行 2）

$Y=\dfrac{r}{s^2(\tau s+1)}$ $s=0$ が 2 回（重解）、$-\frac{1}{\tau}$ が 1 回

$\tau=30$ とし、次のようにおきます。

$$\frac{1}{s^2(30s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{30s+1}$$

$$1 = As(30s+1) + B(30s+1) + Cs^2 \qquad \text{分母をはらった}$$

$$B = 1 \qquad s = 0 \text{ を入れた}$$

$$1 = C \times \frac{1}{900}, \quad C = 900 \qquad s = -\tfrac{1}{30} \text{ を入れた（} s^2 = \tfrac{1}{900} \text{）}$$

$$0 = 30A + C, \quad A = -30 \qquad s^2 \text{ の係数を比べた}$$

$$\frac{1}{s^2(30s+1)} = -\frac{30}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{30}{s+\frac{1}{30}} \qquad \tfrac{900}{30s+1} = \tfrac{30}{s+1/30}$$

$$y = \frac{1}{30}(t - 30 + 30e^{-t/30}) \qquad r = \tfrac{1}{30} \text{ をかけて、行 1・2・3 でもどした}$$

本当の温度の上がり分は $rt = t/30$ なので、おくれは $t/30 - y = 1 - e^{-t/30}$〔℃〕です。30 秒で 0.632 ℃、60 秒で 0.865 ℃、150 秒で 0.993 ℃と、$r\tau = 1$ ℃に近づきます。6-4 の図の数が、表を引くだけで出ました。

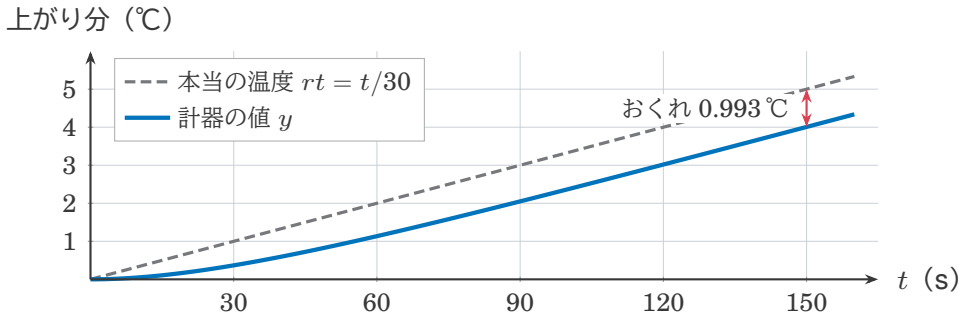


図 6　熱電対のおくれ（$\tau = 30$ s）。はじめは計器がほとんど動かず、やがて本当の温度と平行になり、1 ℃おくれて追いかける。

せいかくに言うと

3 回かかるときは、3 つ置く

$(s+a)$ が 2 回なら $\dfrac{A}{s+a} + \dfrac{B}{(s+a)^2}$ と 2 つ置きました。3 回なら、次のように 3 つ置きます。

$$\frac{\text{分子}}{(s+a)^3} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)^3}$$

いちばん高い次数の C だけは、$(s+a)^3$ をかけて $s=-a$ を入れると決まります（かくす方法）。$A\cdot B$ は、係数を比べて決めます。もどすと $\dfrac{1}{(s+a)^3}$ は $\dfrac{t^2}{2}e^{-at}$ です（9-6 の「t をかける」を 2 回）。この本の例題では、2 回まで使います。

⑨ 場合 D：分けられない 2 次式（分母が 0 になる s が複素数）

はてな？ の車 B（$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$）を解きます。変換までは 9-6 の例題 5 で済ませました。その続きの、もどす所です。

$$(s^2X-s)+2(sX-1)+5X=0$$ 変換した

$$X=\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$ まとめて、わった

分母の判別式は $2^2-4\times5=-16<0$ で、実数の 1 次式には分けられません。そこで、表の行 7・行 8 の分母 $(s+a)^2+\omega^2$ の形にします。

平方完成して、分子を分ける

$$s^2+2s+5=(s+1)^2+4$$ 平方完成（3-8）：s の係数 2 の半分 1 を使う

$$s+2=(s+1)+1$$ 分子を「$(s+1)$ ＋定数」に分けた

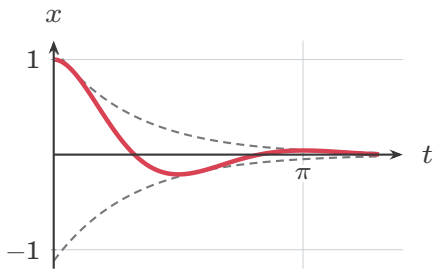
$$X=\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{(s+1)^2+2^2}$$ 2 つの分数に分けた

$$X=\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$ 2 つめの分子を $\omega=2$ にそろえた

$$x=e^{-t}\cos2t+\frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$$ 行 8 と行 7（$a=1$、$\omega=2$）でもどした

$$x=e^{-t}\left(\cos2t+\frac{1}{2}\sin2t\right)$$

6-12 と同じ答えです。e^{-t} の 1 は平方完成の $(s+1)$ から、$\cos 2t$ の 2 は 2^2 から来ました。分母が 0 になる s は $-1\pm 2j$ で、実部 -1 が「へる速さ」、虚部 2 が「ゆれの速さ」です（6-10 ⑪の $e^{(\sigma+j\omega)t}$）。



赤が車 B の動き、灰色の点線は、ゆれのはばが e^{-t} に比例してへっていくようすです（はばは $\sqrt{1+0.5^2}\,e^{-t}\approx 1.12e^{-t}$。4-9 の合成）。ゆれの 1 回分は $2\pi\div 2=\pi\approx 3.14$ 秒です。

せいかくに言うと

複素数のまま分けても、同じ答え

分母を $(s-p)(s-\bar{p})$、$p=-1+2j$ と複素数の 1 次式に分ければ、B と同じかくす方法も使えます。

$$\frac{s+2}{(s-p)(s-\bar{p})}=\frac{A}{s-p}+\frac{\bar{A}}{s-\bar{p}},\qquad A=\frac{p+2}{p-\bar{p}}=\frac{1+2j}{4j}=0.5-0.25j$$

もどすと $Ae^{pt}+\bar{A}e^{\bar{p}t}$ です。2 つは共役（6-9）なので、和は Ae^{pt} の実部の 2 倍です。

$$2e^{-t}(0.5\cos 2t+0.25\sin 2t)=e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

同じ答えになりました。この本では、計算が実数だけですむ平方完成の方法を使います。

⑩ 場合 E：外から入れたものがある式

外から電圧や力を入れると、分母に、機械の 2 次式のほかに、入れたものの分母（s や s^2+1）がかかります。これが場合 E です。

RLC 回路のスイッチを入れる（6-12 の数）

$L=10\,\mathrm{mH}$、$C=1\,\mu\mathrm{F}$、$R=20\,\Omega$ の回路に、$t=0$ で 10 V の電池をつなぎます。コンデンサーの電圧 v〔V〕は、はじめ 0、電流も 0 です。回路の式 $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+v=10$ に $i=C\dot{v}$ を入れて LC でわると、

$$\ddot{v}+2000\,\dot{v}+10^8\,v=10^9\qquad (R/L=2000、1/(LC)=10^8)$$

です。

$$(s^2+2000s+10^8)V=\frac{10^9}{s}$$ 変換した（はじめの値は 0）

$$V=\frac{10^9}{s\,(s^2+2000s+10^8)}$$ s と、分けられない 2 次式（判別式が負）

$$V=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2000s+10^8}$$ 2 次式の分子は 1 次式 $Bs+C$

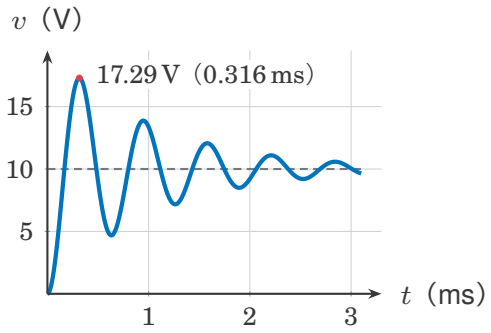
$$A=\frac{10^9}{10^8}=10$$ s をかくして $s=0$

$$10^9=10(s^2+2000s+10^8)+(Bs+C)s$$ 分母をはらった

$$B=-10,\quad C=-20000$$ s^2 と s の係数を比べた

2 次式は $(s+1000)^2+9950^2$ と平方完成できます（$10^8-1000^2=9.9\times10^7$、$\sqrt{9.9\times10^7}\approx9950$）。分子は $-10(s+2000)=-10((s+1000)+1000)$ です。

$$v=10-10e^{-1000t}\left(\cos 9950t+\frac{1000}{9950}\sin 9950t\right)$$



10 V の電池なのに、0.316 ms（ゆれの半分 $\frac{\pi}{9950}$ s）で、コンデンサーには 17.29 V もかかります（行きすぎ 72.9 %）。$\frac{1}{s}$ の係数 10 が、最後に落ち着く電圧です。回路の部品は、この行きすぎにたえるものを選びます。

6-13 の強制振動：2 つのゆれが、部分分数で分かれる

6-13 ④の $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=10\cos t$（はじめは静か）を解きます。

$$(s^2+2s+5)X=\frac{10s}{s^2+1}$$ 変換した（$\cos t \to \frac{s}{s^2+1}$）

$$X=\frac{10s}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}$$ 分けられない 2 次式が 2 つ

$$X=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$ どちらの分子も 1 次式

A、B は、両辺に s^2+1 をかけて、$s^2+1=0$ になる $s=j$（6-8）を入れると出ます（かくす方法を複素数で使う）。

$$\left.\frac{10s}{s^2+2s+5}\right|_{s=j}=Aj+B$$ s^2+1 をかくして $s=j$

$$\frac{10j}{-1+2j+5}=\frac{10j}{4+2j}$$ $j^2=-1$

$$=\frac{10j(4-2j)}{20}=1+2j$$ 分母の共役をかけた（6-9）

$$A=2,\quad B=1$$ 実部と虚部を比べた

$$10s=(2s+1)(s^2+2s+5)$$ 分母をはらった

$$+(Cs+D)(s^2+1)$$

$$0=2+C,\quad C=-2$$ s^3 の係数を比べた

$$0=5+D,\quad D=-5$$ 定数の項を比べた

2 つめの分数は、⑨と同じく平方完成して分子を分けると、

$$\frac{-2s-5}{(s+1)^2+4}=-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}-\frac{3}{2}\times\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

です。表の行 6・行 5 と行 8・行 7 でもどして、

$$x = \underbrace{2\cos t + \sin t}_{\text{ゆすりに合うゆれ}} \underbrace{- e^{-t}(2\cos 2t + 1.5\sin 2t)}_{\text{自分のゆれ（消える）}}$$

6-13 と同じ答えです。6-13 では、2 つのゆれを別々に作ってから、はじめの値に合わせました。ラプラス変換では、部分分数が、ゆすりの分母 s^2+1 から来た項と、機械の分母 s^2+2s+5 から来た項に、**自動で分けて**くれます。

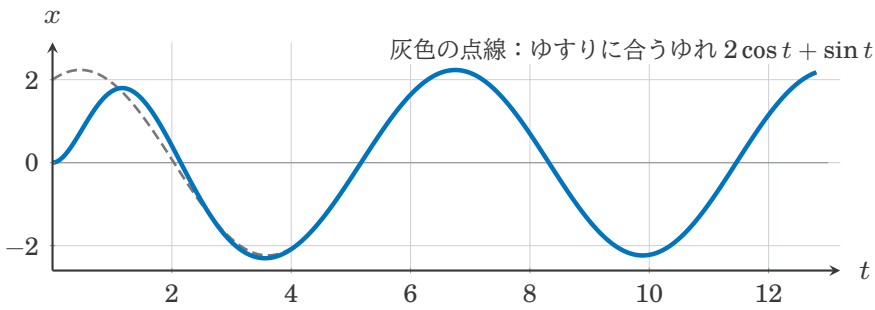


図 7　6-13 の強制振動（青）。はじめは自分のゆれがまざるが、e^{-t} で消えて、3 秒ほどで、ゆすりに合うゆれ（灰色）とほぼ重なる。

11 楽をする段：F・G・H・I

③楽をする段　もどす前に、楽な道をさがす

流れ図の上の 3 つの問いと I の問いは、部分分数に分ける前に確かめます。

F：おくれて始まる（e^{-st_0}）

6-4 の RC 回路（10 V、$\tau = 2$ s）のスイッチを、2 秒おくれて入れたとします。入れる電圧は「2 秒後から 10 V」で、変換は $\frac{10}{s}e^{-2s}$（9-6 の時間のずらし）です。$2sV + V = \frac{10}{s}e^{-2s}$ から、

$$V = e^{-2s} \times \frac{10}{s(2s+1)}$$

e^{-2s} は部分分数に入れず、外に出しておきます。残りは場合 B で $10 - 10e^{-t/2}$（例題 3）。最後に、表 2 の行 11 で、答えを 2 秒だけ右へずらします。

$$v = 0 \quad (t < 2), \qquad v = 10 - 10e^{-(t-2)/2} \quad (t \geqq 2)$$

G：分子の次数が大きい

$\dfrac{2s+5}{s+2}$ は、分子も分母も 1 次式で、表のどの行の形でもありません。3-8 の多項式のわり算で $2s+5=2(s+2)+1$ なので、

$$\frac{2s+5}{s+2}=2+\frac{1}{s+2}\ \longrightarrow\ 2\,\delta(t)+e^{-2t}$$

定数 2 は、表の行 10 で $2\delta(t)$（$t=0$ の一瞬のたたき：9-6）です。わり算の残り $\dfrac{1}{s+2}$ を、流れ図の次の問いへもどして、場合 A でもどしました。

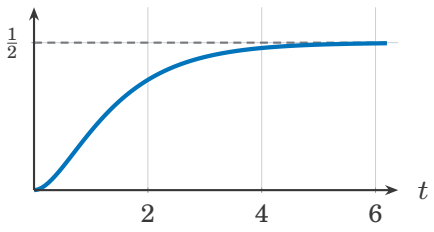
H：最後の値だけほしい（最終値の定理）

9-6 の最終値の定理 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ を使うと、もどさずに最後の値がわかります。$F=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$ なら、

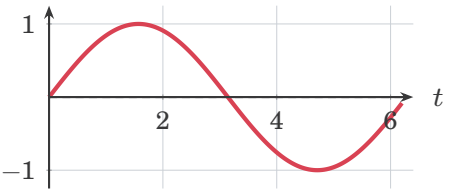
$$sF(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\ \longrightarrow\ \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}\quad(s\to 0)$$

全部もどすと $f=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$ で、たしかに $\frac{1}{2}$ に近づきます。ただし、**落ち着くときだけ**使えます。$sF(s)$ の分母が 0 になる s が、すべて実部が負（複素数の平面の左半分）のときです。$F=\dfrac{1}{s^2+1}$（$\sin t$）では、$sF\to 0$ ですが、$\sin t$ はいつまでもゆれていて、0 には落ち着きません。

（1）$\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$



（2）$\sin t$：ゆれ続ける



I：分母が分けきれない（Python）

1 次おくれの箱を 3 つつないで比例制御すると（9-9）、ステップ応答は $Y=\dfrac{4}{s\big((s+1)^3+4\big)}$ のような形になります。$(s+1)^3+4=s^3+3s^2+3s+5$ は、手の計算では因数が見つかりません。そこで Python で、分母が 0 になる s

(p) と部分分数の係数 (r) を出します。signal.residue は、部分分数の係数を出す関数です。

Python

```
import numpy as np
from scipy import signal
den = np.polymul([1, 0], [1, 3, 3, 5])    # 分母の 4 次式の係数
r, p, k = signal.residue([4], den)        # 4/den を部分分数に
print(np.round(p, 4))                     # 分母が 0 になる s
print(np.round(r, 4))                     # それぞれの係数
```

実行結果

```
[ 0.     +0.j      -0.2063+1.3747j -0.2063-1.3747j -2.5874+0.j     ]
[ 0.8    +0.j      -0.2977+0.2371j -0.2977-0.2371j -0.2045+0.j     ]
```

$s=0$ の係数 0.8 は最後の値（最終値の定理でも $\frac{4}{5}=0.8$）、-2.5874 の係数は -0.2045 です。共役な 2 つの組は、⑨のせいかくに言うとと同じく、実部の 2 倍で、$e^{-0.2063t}(-0.5954\cos 1.3747t - 0.4742\sin 1.3747t)$ になります。

$$y = 0.8 - 0.2045e^{-2.5874t}$$

$$- e^{-0.2063t}(0.5954\cos 1.3747t + 0.4742\sin 1.3747t)$$

$t=0$ で $0.8-0.2045-0.5954\approx 0$ と、はじめの値に合います。実部 -0.2063 が 0 に近いので、ゆれがなかなか消えません（9-9 でくわしく）。

もっと知りたい ★★★★★

$t=0$ の値を、もどさずに確かめる（初期値の定理）

9-6 の初期値の定理 $f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$ を使うと、もどす前に、はじめの値を確かめられます。車 A の X（④）なら、

$$sX = \frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s^2+3s}{s^2+3s+2}$$

で、s がとても大きいと、分子と分母の s^2 が主役になって 1 に近づきます。だから $x(0)=1$ で、はじめの値と合います。①の変換でまちがえると、ここで合わなくなるので、計算の確かめに使えます。

専門書をのぞいてみよう　逆ラプラス変換の専門書ふうの書き方

$F(s)$ の逆ラプラス変換は

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

（ブロムウィッチ積分）で与えられる．$F(s) = N(s)/D(s)$ で $D(s) = 0$ の根 p_k がすべて単根ならば

$$f(t) = \sum_k \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t}$$

（ヘビサイドの展開定理）．

訳　名前の上の式は、s を複素数の直線にそって積分するもの（複素関数論という分野の道具。この本では使わない）。i はこの本の j。かっこは { } の本も多い。「単根」は重解でない解。ヘビサイドの展開定理は、かくす方法の答えを 1 つの式にしたもの。車 A なら $N = s + 3$、$D' = 2s + 3$ で、$p = -1$ の係数は $\frac{2}{1} = 2$、$p = -2$ の係数は $\frac{1}{-1} = -1$（④と同じ）。係数のことを「留数」（りゅうすう）とよぶ本もある。

この章で出てきたことば

逆ラプラス変換　$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$。ラプラス変換すると $F(s)$ になる時間の関数。名前で、実際は部分分数と表で求める。

部分分数に分ける　分数の式を、表にある形（$\frac{1}{s+a}$ など）の和に直すこと（3-8）。

かくす方法　$(s-p)$ をかくして、残りに $s = p$ を入れて、$\frac{A}{s-p}$ の係数 A を出す方法。

重解　分母に同じ 1 次式が 2 回以上かかること。te^{-at} の項が出る。

過渡現象　スイッチを入れた直後などの、落ち着くまでの間の変化。

たいせつ

逆ラプラス変換の 3 つの段

名前 **記号を読む：もどす $F(s)$ を、②のわり算で 1 つの分数にしておく**

楽をする **分ける前に：最後の値だけ？ e^{-st_0}？ 分子の次数が大きい？ 表の形？ 3 次以上で分けきれない？**

直す **部分分数に分けて、1 つずつ表を逆に引き、たす**

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] \rightarrow \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} \rightarrow 2e^{-t}-e^{-2t}$$

4 つの手順（2 階の式 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=u$）

①変換：$(s^2+a_1s+a_0)X=U(s)+(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)$　②わり算

③部分分数　④表でもどす

場合分けの表 9-7（まとめ）

記号	こんなとき	もどし方
A	表の形そのもの	定数倍を外に出して引く
B	ちがう 1 次式のかけ算	かくす方法 → $Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}$
C	同じ 1 次式が 2 回（重解）	$\frac{A}{s+a}+\frac{B}{(s+a)^2}$ → te^{-at}
D	分けられない 2 次式が 1 つだけ	平方完成 → $e^{-at}\cos\omega t$、$e^{-at}\sin\omega t$
E	2 次式とほかの因数（もう 1 つの 2 次式も）	2 次式の分子は $Bs+C$。分母が 0 になる s を入れる・係数を比べる
F	e^{-st_0}	はずしてもどし、t_0 ずらす
G	分子の次数が大きい	わり算。定数は $\delta(t)$
H	最後の値だけ	$\lim_{s\to 0} sF$（落ち着くときだけ）
I	3 次以上で分けきれない	Python で、分母が 0 になる s と係数

記号カード　　初めて出た章 **9-7**

$\mathcal{L}^{-1}[F]$

読み方　ラプラス・インバース（逆ラプラス変換）
意味　変換すると $F(s)$ になる時間の関数。-1 は逆向きの印
英語　inverse Laplace transform

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-7 のどの場合かを書きました（微分方程式は、①変換する→②わり算で解く、をすませてから場合を見る）。**例題を流れ図でたどってみよう**：図 5 でたどると表 4 のようになり、どれも 1 行めの場合に着きます（書いていない問いは「いいえ」）。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	表の形にそろえる	表の形そのもの？	A
2	ゆれずにもどる	（どれも「いいえ」）	B
3	RC の充電	（どれも「いいえ」）	B
4	臨界減衰	同じ 1 次式が 2 回以上？	C
5	熱電対のおくれ	同じ 1 次式が 2 回以上？（s が 2 回）	C
6	ゆれながらもどる	分母が、分けられない 2 次式 1 つだけ？	D
7	一定の力をかけ続ける	分けられない 2 次式もある？	E
8	強制振動	分けられない 2 次式もある？	E
9	共振	表の形そのもの？	A
10	おくれたスイッチ	e^{-st_0} がかかっている？（残りは B）	F B
11	分子が大きい	分子の次数≧分母の次数？ → 表の形そのもの？	G A
12	最後の値	最後の値だけほしい？	H
13	分けきれない分母	3 次以上で、手で分けきれない？	I

表 4　例題 1〜13 の流れ図の道すじ。

例題 1　表の形にそろえて引く

次の $F(s)$ を、時間の関数にもどしましょう。

(1) $\dfrac{5}{s+2}$　(2) $\dfrac{6}{s^2+9}$　(3) $\dfrac{3s}{s^2+4}$

考え方　**場合：**表の形そのもの（定数倍をのぞく）（表 9-7 の A）

名前　$\mathcal{L}^{-1}$ は名前。ここでは分けずに、表を引くだけ。

直す：表を引く　表 2 の行と、分子もふくめて形をそろえる。

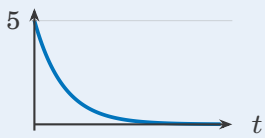
式　(1) $\dfrac{5}{s+2} = 5 \times \dfrac{1}{s+2}$　（行 3、$a=2$）

(2) $\dfrac{6}{s^2+9} = 2 \times \dfrac{3}{s^2+3^2}$　（行 5、$\omega=3$。分子を 3 にそろえた）

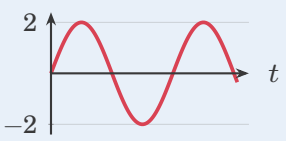
(3) $\dfrac{3s}{s^2+4} = 3 \times \dfrac{s}{s^2+2^2}$　（行 6、$\omega=2$）

答え　(1) $5e^{-2t}$　(2) $2\sin 3t$　(3) $3\cos 2t$

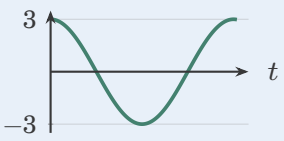
(1) $5e^{-2t}$



(2) $2\sin 3t$



(3) $3\cos 2t$



分母が $s+a$ なら e^{-at} の形でへり、$s^2+\omega^2$ なら sin・cos の形でゆれ続けます。

じぶんでとこう 1

次の $F(s)$ を、時間の関数にもどしましょう。

(1) $\dfrac{3}{s+4}$　(2) $\dfrac{10}{s^2+25}$　(3) $\dfrac{2s}{s^2+16}$

例題 2　ゆれずにもどる動き

$\ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$、$x(0)=2$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

考え方　**場合：**分母が、ちがう 1 次式のかけ算（表 9-7 の B）

名前　①②で $X(s)$ を出し、$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：部分分数　分母 $(s+1)(s+3)$ で、$\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+3}$。かくす方法で A、B。

式　① $(s^2X-2s)+4(sX-2)+3X=0$　（$x(0)=2$ を入れた）

② $(s^2+4s+3)X=2s+8$

$$X=\frac{2s+8}{(s+1)(s+3)}$$

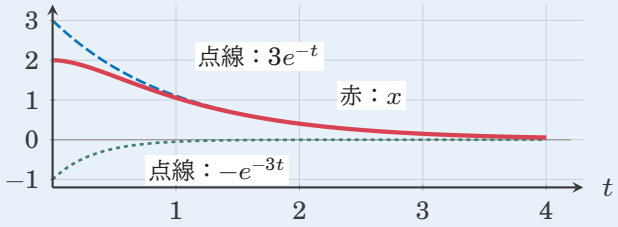
③ $A=\left.\dfrac{2s+8}{s+3}\right|_{s=-1}=\dfrac{6}{2}=3$　（$(s+1)$ をかくした）

$B=\left.\dfrac{2s+8}{s+1}\right|_{s=-3}=\dfrac{2}{-2}=-1$　（$(s+3)$ をかくした）

④ $X=\dfrac{3}{s+1}-\dfrac{1}{s+3}$ を、行 3 でもどす

確かめ：$x(0)=3-1=2$、$\dot{x}(0)=-3+3=0$

答え　$x=3e^{-t}-e^{-3t}$



じぶんでとこう 2

$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

例題 3　RC 回路の充電

6-4 の回路（電池 10 V、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$、時定数 $\tau = RC = 2\,\mathrm{s}$）で、はじめ 0 V のコンデンサーの電圧 v〔V〕は、$2\dot{v} + v = 10$ にしたがいます。v を求め、2 秒後・6 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1} = 0.3679$、$e^{-3} = 0.0498$）。

考え方　**場合：**分母が s と 1 次式のかけ算（表 9-7 の B）

名前　右辺の 10 も変換して（$10 \to \dfrac{10}{s}$）、$\mathcal{L}^{-1}[V]$ を求める。

直す：部分分数　$2s + 1$ を $2(s + 0.5)$ と、s の係数を 1 にしてから分ける。

式　① $2(sV - 0) + V = \dfrac{10}{s}$

② $V = \dfrac{10}{s(2s+1)} = \dfrac{5}{s(s+0.5)}$　（分母と分子を 2 でわった）

③ $A = \left.\dfrac{5}{s+0.5}\right|_{s=0} = 10$、　$B = \left.\dfrac{5}{s}\right|_{s=-0.5} = -10$

④ $V = \dfrac{10}{s} - \dfrac{10}{s+0.5}$ を、行 1 と行 3 でもどす

$v(2) = 10 - 10e^{-1} = 10 - 3.679 = 6.321$

$v(6) = 10 - 10e^{-3} = 10 - 0.498 = 9.502$

答え　$v = 10 - 10e^{-t/2}$。2 秒後 約 6.32 V、6 秒後 約 9.50 V（$\frac{1}{s}$ の係数 10 が、最後の電圧）

じぶんでとこう 3

電池 6 V、$R = 5\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$（$\tau = 0.5\,\mathrm{s}$）の回路で、はじめ 0 V のコンデンサーの電圧は $0.5\dot{v} + v = 6$ にしたがいます。v を求め、0.5 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1} = 0.3679$）。

例題 4　臨界減衰（重解）

$\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=1$ を、ラプラス変換で解きましょう。

考え方　**場合：**同じ 1 次式が 2 回（表 9-7 の C）

名前　①②で $X(s)$ を出し、$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：部分分数　$\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{(s+1)^2}$。$B$ は $s=-1$ を入れて、A は係数を比べる。

式　①②　$(s^2X-s-1)+2(sX-1)+X=0$ から $X=\dfrac{s+3}{(s+1)^2}$

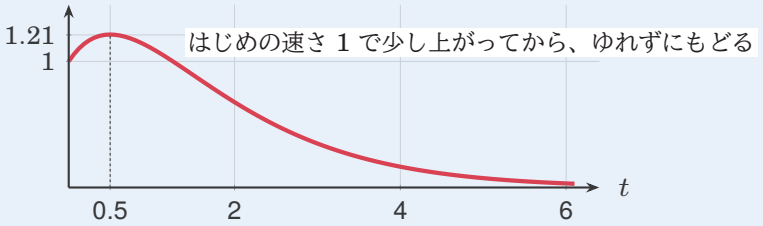
③　$s+3=A(s+1)+B$　（両辺に $(s+1)^2$ をかけた）

$s=-1$ で $B=2$。s の係数を比べて $A=1$

④　$X=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{(s+1)^2}$ を、行 3 と行 4 でもどす

確かめ：$x(0)=1$。$\dot{x}=-e^{-t}+2e^{-t}-2te^{-t}$ で $\dot{x}(0)=1$

答え　$x=e^{-t}+2te^{-t}=(1+2t)e^{-t}$



じぶんでとこう 4

$\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

例題 5　熱電対のおくれ

時定数 $\tau = 30\,\mathrm{s}$ の熱電対で、温度が 1 秒に $r = \frac{1}{30}$ ℃ずつ上がり続けます。計器の値の上がり分 y〔℃〕は $30\dot{y} + y = \frac{t}{30}$、$y(0) = 0$ にしたがいます。y と、60 秒後のおくれ（本当の上がり分 $\frac{t}{30}$ と y の差）を求めましょう（$e^{-2} = 0.1353$）。

考え方　**場合**：同じ 1 次式（s）が 2 回（表 9-7 の C）

名前　右辺 $\frac{t}{30}$ を $\frac{1}{30s^2}$ に変換し、$\mathcal{L}^{-1}[Y]$ を求める。

直す：部分分数　$\dfrac{1}{s^2(30s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{30s+1}$。$B \cdot C$ は数を入れ、A は係数を比べる。

式　①② $30sY + Y = \dfrac{1}{30s^2}$ から $Y = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{1}{s^2(30s+1)}$

③ $1 = As(30s+1) + B(30s+1) + Cs^2$

$s = 0$ で $B = 1$。$s = -\frac{1}{30}$ で $1 = \frac{C}{900}$、$C = 900$

s^2 の係数：$0 = 30A + C$ から $A = -30$

④ $Y = \dfrac{1}{30}\left(-\dfrac{30}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{30}{s + \frac{1}{30}}\right)$ を、行 1・2・3 でもどす

$y = \dfrac{1}{30}(t - 30 + 30e^{-t/30})$

おくれ $\dfrac{t}{30} - y = 1 - e^{-t/30}$。60 秒で $1 - e^{-2} = 0.865$

答え　$y = \dfrac{t}{30} - 1 + e^{-t/30}$。60 秒後のおくれ 約 0.865 ℃（やがて $r\tau = 1$ ℃）

じぶんでとこう 5

時定数 $\tau = 10\,\mathrm{s}$ の温度計で、温度が 1 秒に $r = 0.5$ ℃ずつ上がり続けます。計器の値の上がり分は $10\dot{y} + y = 0.5t$、$y(0) = 0$ にしたがいます。y と、20 秒後のおくれを求めましょう（$e^{-2} = 0.1353$）。

例題 6　ゆれながらもどる

$\ddot{x}+4\dot{x}+13x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

考え方　**場合：**分母が、分けられない 2 次式 1 つだけ（ほかの因数なし）（表 9-7 の D）

名前　①②で $X(s)$ を出し、$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：部分分数　判別式 $16-52<0$。平方完成して、分子を $(s+2)$ と定数に分ける。

式　①②　$(s^2X-s)+4(sX-1)+13X=0$ から $X=\dfrac{s+4}{s^2+4s+13}$

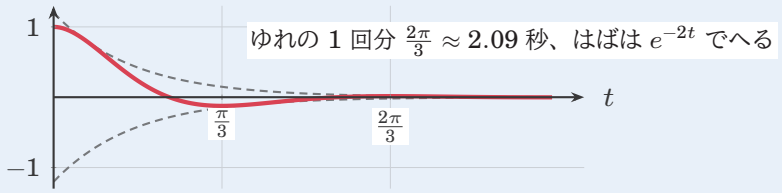
③　$s^2+4s+13=(s+2)^2+9=(s+2)^2+3^2$

$$s+4=(s+2)+2,\quad 2=\frac{2}{3}\times 3$$

$$X=\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

④　行 8 と行 7（$a=2$、$\omega=3$）でもどす

答え　$x=e^{-2t}\left(\cos 3t+\dfrac{2}{3}\sin 3t\right)$



じぶんでとこう 6

$\ddot{x}+6\dot{x}+10x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

例題 7　一定の力をかけ続ける

車 B の式に、一定の力をかけ続けたときの $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=5$（$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$）を、ラプラス変換で解きましょう。

考え方　**場合：**分けられない 2 次式と、s がまざる（表 9-7 の E）

名前　右辺 $5 \to \dfrac{5}{s}$。$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：部分分数　$\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+2s+5}$。$A$ はかくす方法、$B\cdot C$ は係数を比べる。

式　①②　$(s^2+2s+5)X=\dfrac{5}{s}$ から $X=\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}$

③　$A=\left.\dfrac{5}{s^2+2s+5}\right|_{s=0}=1$

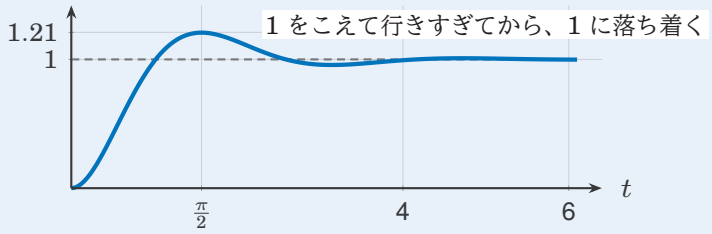
$5=(s^2+2s+5)+(Bs+C)s$　（分母をはらい、$A=1$ を入れた）

s^2 の係数：$0=1+B$、$B=-1$。s の係数：$0=2+C$、$C=-2$

④　$X=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}$

うしろの項は⑨の車 B と同じ形で、$e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

答え　$x=1-e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$（1 に落ち着く。いちばん高いのは $t=\frac{\pi}{2}$ で約 1.21）



じぶんでとこう 7

$\ddot{x}+4\dot{x}+13x=13$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう（例題 6 の答えを使ってよい）。

例題 8　強制振動

$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=5\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。ゆすりに合うゆれと、自分のゆれに分けて答えましょう。

考え方　**場合：**分けられない 2 次式が 2 つ（1 つだけではない）（表 9-7 の **E**）

名前　$\cos t \to \dfrac{s}{s^2+1}$。$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：部分分数　$\dfrac{As+B}{s^2+1}+\dfrac{Cs+D}{s^2+2s+2}$。$A$・$B$ は $s=j$ を入れ、C・D は係数を比べる。

式　①②　$X=\dfrac{5s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$

③　$\dfrac{5s}{s^2+2s+2}\Big|_{s=j}=\dfrac{5j}{1+2j}=\dfrac{5j(1-2j)}{5}=2+j$

$Aj+B=2+j$ から $A=1$、$B=2$

$5s=(s+2)(s^2+2s+2)+(Cs+D)(s^2+1)$

$(s+2)(s^2+2s+2)=s^3+4s^2+6s+4$

s^3：$0=1+C$、$C=-1$。定数：$0=4+D$、$D=-4$

④　$\dfrac{s+2}{s^2+1}\to\cos t+2\sin t$

$\dfrac{-s-4}{(s+1)^2+1}=-\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}-3\times\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

$\to -e^{-t}\cos t-3e^{-t}\sin t$　（行 8・行 7、$a=1$、$\omega=1$）

答え　$x=\underbrace{\cos t+2\sin t}_{\text{ゆすりに合うゆれ}}\underbrace{-e^{-t}(\cos t+3\sin t)}_{\text{自分のゆれ}}$

じぶんでとこう 8

$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=8\cos t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。ゆすりに合うゆれと、自分のゆれに分けて答えましょう。

例題 9　共振

6-13 ⑨の $\ddot{x}+4x=\cos 2t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

考え方　**場合：**表の形そのもの（行 9、定数倍をのぞく）（表 9-7 の A）

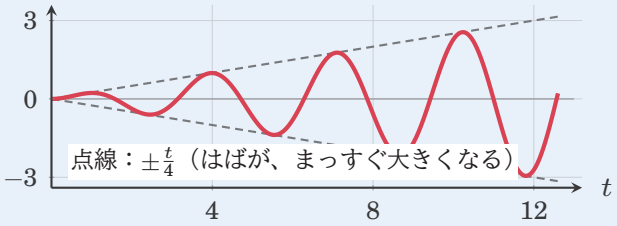
名前　$\cos 2t \to \dfrac{s}{s^2+4}$。$\mathcal{L}^{-1}[X]$ を求める。

直す：表を引く　行 9 $\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$（$\omega=2$ で $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$）にそろえる。

式　①②　$(s^2+4)X=\dfrac{s}{s^2+4}$ から $X=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

$$X=\frac{1}{4}\times\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$　（分子を 4 にそろえた）

答え　$x=\dfrac{t}{4}\sin 2t$（ゆれのはば $\frac{t}{4}$ が、時間とともに大きくなる）



じぶんでとこう 9

$\ddot{x}+9x=6\cos 3t$、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう。

例題 10　おくれて入れたスイッチ

例題 3 の RC 回路で、スイッチを 2 秒おくれて入れます。コンデンサーの電圧の変換 $V(s)$ をもとし、4 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）。

$$V(s)=e^{-2s}\times\frac{10}{s(2s+1)}$$

考え方　**場合：**e^{-2s} がかかり、残りは s と 1 次式のかけ算（表 9-7 の **F** と **B**）

名前　$\mathcal{L}^{-1}[V]$ を求める。

楽をする　e^{-2s} は分けずに外に出し、残りをもどしてから 2 秒ずらす（行 11）。

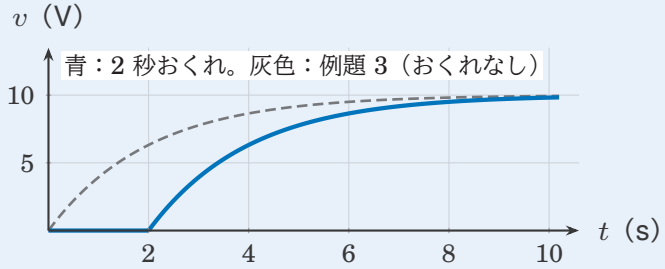
直す：部分分数　残り $\dfrac{10}{s(2s+1)}$ は、例題 3 で $\dfrac{10}{s}-\dfrac{10}{s+0.5}$。

式　残りをもどすと $10-10e^{-t/2}$（例題 3）

t を $t-2$ に変える：$v=10-10e^{-(t-2)/2}$（$t\geqq 2$）、$v=0$（$t<2$）

$v(4)=10-10e^{-1}=6.321$

答え　$t<2$ で $v=0$、$t\geqq 2$ で $v=10-10e^{-(t-2)/2}$。4 秒後 約 6.32 V



じぶんでとこう 10

次の $V(s)$ をもとし、1.5 秒後の値を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）。

$$V(s)=e^{-s}\times\frac{6}{s(0.5s+1)}$$

例題 11　分子の次数が大きい

$F(s)=\dfrac{2s+5}{s+2}$ を、時間の関数にもどしましょう。

考え方　**場合：**分子の次数が分母と同じ。わったあとは表の形（表 9-7 の G と A）

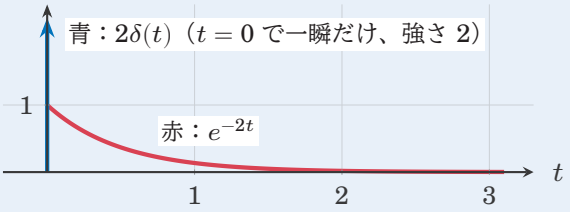
名前　$\mathcal{L}^{-1}[F]$ を求める。

楽をする　先にわり算をして、整数の部分と、分子の次数が小さい分数に分ける。

直す：表を引く　定数は行 10、分数は行 3。

式　$2s+5=2(s+2)+1$　（わり算：商 2、余り 1）

$$F=2+\frac{1}{s+2}$$



わり算の商の 2 は、δ になります。分子と分母の次数が同じときは、わり算の商が定数になり、δ が出ます（分子のほうが大きいときは、この本ではあつかいません）。

答え　$2\delta(t)+e^{-2t}$

じぶんでとこう 11

$F(s)=\dfrac{3s+4}{s+1}$ を、時間の関数にもどしましょう。

例題 12　最後の値だけ求める

次の $F(s)$ について、もとの関数が時間がたつと近づく値を、最終値の定理で求めましょう。使えないときは、そのわけを答えましょう。

(1) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$　　(2) $\dfrac{2}{s(s^2+4)}$

考え方　**場合：**最後の値だけほしい（表 9-7 の H）

名前　$\mathcal{L}^{-1}[F]$ の、$t \to \infty$ の値。ここでは、もどさない。

楽をする　$sF(s)$ の分母が 0 になる s が、すべて実部が負かを先に見る。そうなら $\lim_{s\to 0} sF(s)$。

式　(1) $sF = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$。分母が 0 になるのは -1、-2（左半分）

$s \to 0$ で $\dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{2}$

(2) $sF = \dfrac{2}{s^2+4}$。分母が 0 になるのは $\pm 2j$（実部が 0）で、落ち着かない

実際にもどすと $\dfrac{2}{s(s^2+4)} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{s}{s^2+4}$ で、$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t$

答え　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 使えない（$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ は、0 と 1 の間をゆれ続ける）

じぶんでとこう 12

次の $F(s)$ について、もとの関数が近づく値を、最終値の定理で求めましょう。使えないときは、そのわけを答えましょう。

(1) $\dfrac{6}{s(s+2)(s+3)}$　　(2) $\dfrac{3}{s(s^2+9)}$

例題 13　手で分けきれない分母

⑪の I の Python を使って、$Y = \dfrac{2}{s((s+1)^3+2)}$ をもどしましょう。実行結果は、分母が 0 になる s が 0、$-0.37 \pm 1.0911j$、-2.2599、係数が 0.6667、$-0.2404 \pm 0.274j$、-0.1858 でした。

考え方　**場合：**3 次の式 $s^3 + 3s^2 + 3s + 3$ の因数が見つからない（表 9-7 の **I**）

名前　$\mathcal{L}^{-1}[Y]$ を求める。

楽をする　Python の `residue` で分母が 0 になる s と係数を出し、実数の s は B、共役な組は実部の 2 倍で読む。

式　実数の s の項：0.6667×1、$-0.1858e^{-2.2599t}$

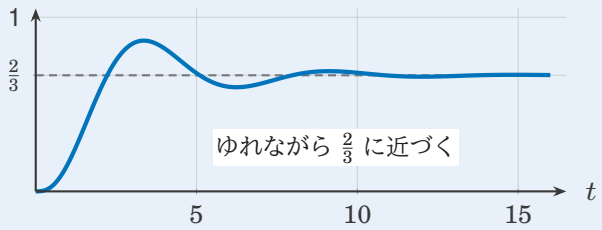
共役な組：$2e^{-0.37t}(-0.2404\cos 1.0911t - 0.274\sin 1.0911t)$

$= -e^{-0.37t}(0.4808\cos 1.0911t + 0.548\sin 1.0911t)$

確かめ：$t = 0$ で $0.6667 - 0.1858 - 0.4808 \approx 0$。最後の値 $\frac{2}{1+2} = 0.6667$（最終値の定理）

答え　$y = 0.6667 - 0.1858e^{-2.2599t}$

$-e^{-0.37t}(0.4808\cos 1.0911t + 0.548\sin 1.0911t)$



じぶんでとこう 13

⑪の Python の実行結果（$Y = \dfrac{4}{s((s+1)^3+4)}$）から y の式を書き、$t = 0$ の値と最後の値を確かめましょう。

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① かけ算のまま、1 つずつもどす

✕ $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1} \times \dfrac{1}{s+2}\right] = e^{-t} \times e^{-2t} = e^{-3t}$

○ 部分分数でひき算にしてから：$\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \to e^{-t} - e^{-2t}$

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]}_{\text{名前}} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]}_{\text{部分分数}}$$

項ごとにもどしてよいのは、和と差だけです（線形）。s の世界のかけ算は、時間の世界ではかけ算ではなく、たたみこみになります（9-6）。

まちがえやすいところ

② 落ち着かない式に、最終値の定理を使う

✕ $F = \dfrac{1}{s^2+1}$ で、$sF \to 0$ だから $\sin t$ は 0 に落ち着く

○ sF の分母が 0 になる $\pm j$ は実部が 0。落ち着かないので使えない

最終値の定理は、「落ち着くなら、その値はこれ」という定理です。落ち着くかどうかは、先に分母が 0 になる s で確かめます。

⚠ まちがえやすいところ

③ $\frac{1}{2s+1}$ をそのまま引く

✕ $\dfrac{1}{2s+1} \to e^{-2t}$、または e^{-t}

○ $\dfrac{1}{2s+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{s+0.5}$

$\to \dfrac{1}{2}e^{-t/2}$

行 3 は s の係数が 1 の形です。

先に 2 でくくります。

⚠ まちがえやすいところ

④ 2 次式の分子を定数だけにする

✕ $\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}$

$= \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2+2s+5}$

○ $\dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2+2s+5}$

2 次式の分子は 1 次式にします。

定数だけでは、係数が合いません。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 平方完成のずれ

✕ $s^2+2s+5 = (s+2)^2+1$

○ $s^2+2s+5 = (s+1)^2+4$

s の係数 2 の**半分**の 1 を使います。$(s+1)^2 = s^2+2s+1$ なので、残りは 4 です。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 重解の $\frac{B}{(s+a)^2}$ を忘れる

✕ $\dfrac{s+3}{(s+1)^2} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+1}$

○ $\dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{(s+1)^2}$

右の 2 つは $\frac{A+B}{s+1}$ と同じで、分母が 2 乗の式を作れません。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ はじめの値を入れ忘れる

✕ 車 A を
$s^2X + 3sX + 2X = 0$ と
して、$X = 0$

○ $(s^2X - s) + 3(sX - 1)$
$+2X = 0$

$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)$ です。はじめの値が、動きのもとです。

⚠ まちがえやすいところ

⑧ e^{-st_0} を部分分数に入れる

✕ $\dfrac{10e^{-2s}}{s(2s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+0.5}$
で $A = 10e^{-2s}\cdots$

○ e^{-2s} を外に出して分け、もどしてから 2 秒ずらす

e^{-st_0} は多項式ではないので、部分分数の中に入れません。

⚠ まちがえやすいところ

⑨ 共役な組の片方だけを使う

✕ 係数 $-0.2977 + 0.2371j$
の項だけを読んで、
$-0.2977e^{-0.2063t}\cos 1.3747t$

○ 2 つの組は実部の 2 倍。
$-0.5954\cos$、$-0.4742\sin$

共役な 2 つの s（$a \pm bj$）は、2 つで 1 組です。片方だけでは $t = 0$ の値が合いません。

⚠ まちがえやすいところ

⑩ 最終値の定理で s をかけ忘れる

✕ $F = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$ で、
$\lim_{s\to 0} F(s)$ を求めて「∞」

○ $\lim_{s\to 0} sF(s) = \dfrac{1}{2}$

$\frac{1}{s}$ は「最後の値」をつつんだ形です。s をかけて、取り出します。

⚠ まちがえやすいところ

⑪ 2 次式が 2 つでも D にする

× $\dfrac{5s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$ を、平方完成 1 回で、行 7・行 8 だけでもどす

○ 2 次式が 2 つなら E。$\dfrac{As+B}{s^2+1}+\dfrac{Cs+D}{s^2+2s+2}$ に分けてから

D は、分けられない 2 次式が 1 つだけのときです。2 つあれば、ゆれも 2 種類（ゆすりのゆれと自分のゆれ）あります。

⚠ まちがえやすいところ

⑫ かくす方法で、入れる s の符号をまちがえる

× $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ の A で、$(s+1)$ をかくして $s=1$ を入れ、$\dfrac{1}{3}$

○ $s+1=0$ になる $s=-1$ を入れて、$\dfrac{1}{-1+2}=1$

入れるのは、かくした 1 次式が 0 になる s です（③）。

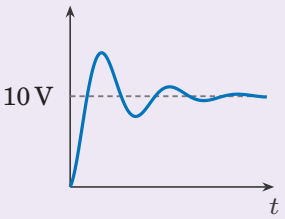
コラム　数で解くか、式で解くか

やってみようのオイラー法は、どんな微分方程式でも数の表で答えを出せる強い道具です。いっぽう、ラプラス変換で解くと答えが $2e^{-t}-e^{-2t}$ のような式で出て、分母の因数を見るだけで、速く消える動きか、ゆれる動きかがわかります。工学では、数で確かめ、式で考える、の両方を使います。

物理・工学ではこう使う

スイッチを入れた直後：回路の過渡現象

電源を入れた直後の電圧や電流の変化を、**過渡現象**（かとげんしょう）といいます。⑩の RLC 回路では、10 V の電池なのに、コンデンサーに一時 17 V 以上かかりました。モーターや電球に電源を入れた直後にも、ふだんより大きな電流（突入電流）が流れることがあります。部品がこわれないか、ブレーカーが落ちないかを、設計の段階でラプラス変換を使って調べます（物理 電-9）。



車のサスペンション

車 A・車 B は、車のばねとダンパーの式でした。設計する人は、分母の $s^2 + cs + k$（質量 1 あたり）の係数 c、k を変えて、分母が 0 になる s の場所を動かし、「ゆれずにもどる」「少しゆれて速くもどる」を選びます。部分分数の各項が、1 つ 1 つの動きの成分です（物理 波-1、9-9）。

計器のおくれ

工場の温度・圧力の計器は、本当の値を少しおくれて追いかけます。例題 5 のように、上がり続ける温度では、計器はいつも $r\tau$ だけ低い値を指します。制御の設計では、このおくれを見こんで、警報や機械の動きを決めます（9-9）。

章末問題

9-7 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次の $F(s)$ を、時間の関数にもどしましょう。

(1) $\dfrac{4}{s+3}$　(2) $\dfrac{12}{s^2+16}$　(3) $\dfrac{5s}{s^2+1}$ (例題 1)

2 次の動きを、ラプラス変換で求めましょう(例題 2)。

(1) $\ddot{x}+6\dot{x}+8x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$

(2) 車 A（$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$）を、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=2$ でつき上げたとき

3 電池 12 V、$R=40\,\mathrm{k\Omega}$、$C=100\,\mu\mathrm{F}$ の回路で、はじめ 0 V のコンデンサーの電圧は $4\dot{v}+v=12$ にしたがいます。v と、4 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）(例題 3)。

4 $\ddot{x}+6\dot{x}+9x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう(例題 4)。

5 $\ddot{x}+2\dot{x}+10x=0$、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=0$ を、ラプラス変換で解きましょう(例題 6)。

6 次の $F(s)$ について、もとの関数が近づく値を、最終値の定理で求めましょう。使えないときは、そのわけを答えましょう。

(1) $\dfrac{10}{s(s+1)(s+5)}$　(2) $\dfrac{5}{s(s^2+25)}$ (例題 12)

7 時定数 $\tau=20\,\mathrm{s}$ の温度計で、温度が 1 秒に $r=0.2$ ℃ずつ上がり続けます。計器の値の上がり分は $20\dot{y}+y=0.2t$、$y(0)=0$ にしたがいます。y と、20 秒後のおくれを求めましょう（$e^{-1}=0.3679$）(例題 5)。

8 $F(s)=\dfrac{4s+9}{s+2}$ を、時間の関数にもどしましょう(例題 11)。

チャレンジ ★★★★★

9 次の式（$x(0) = 0$、$\dot{x}(0) = 0$）を、ラプラス変換で解きましょう（例題 7・例題 8）。

（1）$\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 10$（問題 5 の答えを使ってよい）

（2）$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 40\cos t$（ゆすりに合うゆれと、自分のゆれに分けて）

10 $\ddot{x} + 16x = 8\cos 4t$、$x(0) = 0$、$\dot{x}(0) = 0$ を、ラプラス変換で解きましょう（例題 9）。

11 例題 3 の RC 回路のスイッチを、3 秒おくれて入れます。次の $V(s)$ をもどし、5 秒後の電圧を求めましょう（$e^{-1} = 0.3679$）（例題 10）。

$$V(s) = e^{-3s} \times \frac{10}{s(2s+1)}$$

12 次の Y を、⑪と同じ Python（分母の係数は `[1, 3, 3, 2]`）で分けると、実行結果は下のとおりでした。上の行が分母が 0 になる s、下の行が係数です。y の式を書き、$t = 0$ の値と最後の値を確かめましょう（例題 13）。

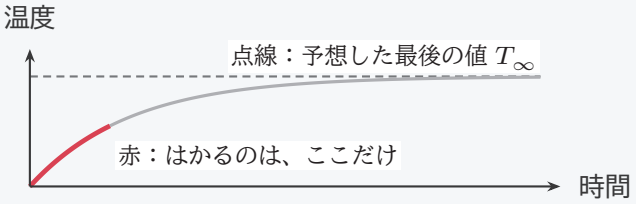
$$Y = \frac{1}{s((s+1)^3 + 1)}$$

実行結果

```
[ 0.  +0.j      -0.5+0.866j  -0.5-0.866j  -2. +0.j    ]
[ 0.5   +0.j      -0.1667+0.2887j -0.1667-0.2887j -0.1667+0.j    ]
```

コラム　はかり終わる前に、答えを予想する体温計

6-4 で、体温計をわきにはさんで、すぐに取り出してはいけないことを学びました。体温計の値が 1 次おくれの形 $T_\infty - (T_\infty - T_0)e^{-t/\tau}$ で近づくなら、はじめの数十秒の上がり方から T_∞ と τ を求めて、最後の値を先に予想できます。「予測式」とよばれる電子体温計は、このように、上がり方から最後の温度を予想する考え方を使っています（くわしい計算は会社や機種でちがいます）。



ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 微分方程式を「変換する・わり算で解く・部分分数に分ける・表でもどす」の 4 つの手順で解く流れを、図とオイラー法の表で説明できる。 → 295 ページ
- ☐ 分母がちがう 1 次式のかけ算になる式を、部分分数に分けて、表を逆に引いて時間の関数にもどせる。 → 301 ページ
- ☐ 場合分けの表 9-7 を使って、重解・分母が 0 になる s が複素数の式・入力のある式・おくれて始まる式・最後の値だけの場合も、もどし方を選んで計算できる。 → 307 ページ

ソラ

分母が 0 になる s が、答えの e^{pt} を決めていたね。次は、機械の「入れると出てくる」を、その分数のまま考える伝達関数だ。

第 2 部　ラプラス変換

★★★★★

9-8 伝達関数：入れると出てくるを s で表す

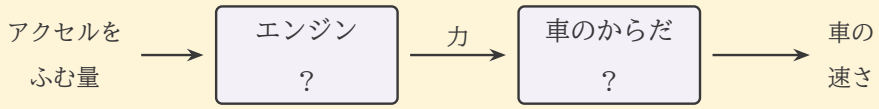
道しるべ　この章の前に 3-3 3-12 6-4 6-12 6-13 9-6 9-7
この章の先に 9-9 9-10 9-12

この章でできるようになること

- ★★★「入れると出てくる」箱を、伝達関数 $G(s) = Y(s) \div U(s)$ で表せることを、ブロック線図と表計算で説明できる。
- ★★★★ 微分方程式から伝達関数を作り、箱を直列・並列につないだ伝達関数と、ステップ応答・インパルス応答を求められる。
- ★★★★★ 場合分けの表 9-8 を使って、フィードバック・状態方程式・周波数応答（dB）の場合も、伝達関数を求めて使える。

はてな？

3-3 で、機械のしくみを「入れると出てくる箱」を矢印でつないだ図（ブロック線図）でかけることを学びました。自動車なら「アクセルをふむ量→エンジンの力→車の速さ」です。3-3 では、「第 9 巻では、この箱の中のきまりを式で書き、機械全体のふるまいを計算します」と予告しました。



箱の中の「？」に式を書き入れると、アクセルを一定にふんでから速さが落ち着くまでに、どれくらいかかるかがわかるでしょうか。

9-7 では、微分方程式を 1 つずつ、ラプラス変換と部分分数で解きました。でも、機械に入れるものは、一定の力、少しずつふえる力、ゆれる力など、いろいろです。入れるものが変わるたびに、はじめから解き直すのは大変です。

この章では、機械そのものの性質を、s の分数の式 1 つで表します。この式を**伝達関数**といいます。伝達関数がわかれば、何を入れても、s の世界では「入れたもの×伝達関数」のかけ算 1 回で出てくるものがわかります。箱をつなげば、伝達関数もかけ算でつながります。

制御工学（機械を思いどおりに動かす工学）の本は、ほとんどこの考え方で書かれています。ことばも記号も多く見えますが、1 回でわからなくても大丈夫です。3-3 の「箱と矢印」を思い出しながら、1 つずつ進みましょう。

やってみよう　アクセルを一定にふんだ車の速さを、表計算で

質量 1000 kg の車に、エンジンが一定の力 500 N を出し続けます。空気や路面の抵抗は速さに比例し、速さ 1 m/s あたり 50 N とします（たとえばの数）。だから、速さ v〔m/s〕は $1000\dot{v} = 500 - 50v$ にしたがいます。

1. A 列に時刻 t（1 秒ずつ）、B2 に $v(0) = 0$ を入れる。
2. C2 に、加速度の式を入れる（式を $\dot{v} = (500 - 50v)/1000$ と変形した）。

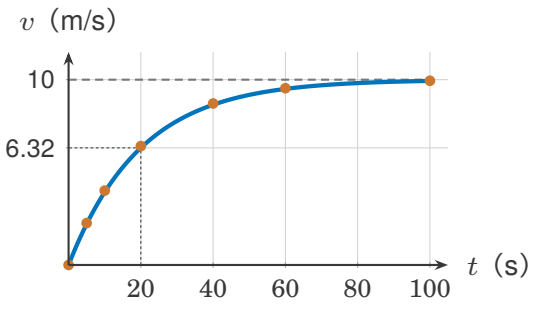
   `=(500-50*B2)/1000`
3. B3 に、6-2 のオイラー法（$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$）の式を入れ、C2 を C3 にコピーする。3 行めを下へ 102 行めまでコピーする。

   `=B2+C2*1`
4. D 列に、この章で作る式を入れて、くらべる。

   `=10*(1-EXP(-0.05*A2))`

	A	B	C	D
1	t（s）	速さ v（m/s）	加速度	$10(1-e^{-0.05t})$
2	0	0	0.5	0
3	1	0.5	0.475	0.488
4	2	0.975	0.4512	0.952
5	3	1.426	0.4287	1.393
6	4	1.855	0.4073	1.813
7	5	2.262	0.3869	2.212
12	10	4.013	0.2994	3.935
22	20	6.415	0.1792	6.321
42	40	8.715	0.0643	8.647
62	60	9.539	0.023	9.502
102	100	9.941	0.003	9.933

表 1　車の速さの表計算（8〜11 行めなどは省いた）。速さは 10 m/s（36 km/h）に近づき、20 秒で約 6.3 m/s（10 m/s の 63 %）。



点は表計算、線は式です。速さは 10 m/s に近づきます。落ち着いたら加速度は 0 なので、$500 = 50v$ から $v = 10$ です。

20 秒で 10 m/s の 63 % に着きます。6-4 の冷めるお湯と同じ「時定数」で、ここでは $1000 \div 50 = 20$ 秒です。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

3-3 入れると出てくる箱。箱をつなぐと、前の箱から出たものが次の箱に入る（合成関数）。

6-4 $\tau\dot{y}+y=$（入れたもの）の形なら、時定数 τ で 63 %、3τ で 95 % 近づく。

6-13 ばねを $F_0\cos\omega t$ でゆすると、ゆれは $\mathrm{Re}[Xe^{j\omega t}]$、複素振幅 $X=\dfrac{F_0}{k-m\omega^2+jc\omega}$。

3-12 倍率を dB で表すと $20\log_{10}$（振幅の倍率）。10 倍で 20 dB、かけ算は dB のたし算。

9-7 変換→わり算→部分分数→表でもどす。はじめの値は分子に、動き方は分母に出てくる。

数学の道具

目でわかる 入れると出てくるを、1 つの式で ★★★

1 箱の中のきまりを、s で書く

はてな？ の「車のからだ」の箱に入るのはエンジンの力 f〔N〕、出てくるのは速さ v〔m/s〕です。やってみようの式を、力を文字のままにして書くと、

$$1000\dot{v}+50v=f \qquad (v(0)=0)$$

です。時間の世界では、v と $\dot{v}$ がからみあっているので、f を入れたら v がいくつかは、すぐにはわかりません。

9-5・9-7 と同じく、s の世界へ変換します。はじめは止まっている（$v(0)=0$）ので、$\dot{v}\to sV$ です。

$1000\dot{v} + 50v = f$	車のからだの式
$1000sV + 50V = F$	変換した。$v(0) = 0$ なので $\mathcal{L}[\dot{v}] = sV$
$(1000s + 50)V = F$	Vでくくった
$V = \dfrac{1}{1000s + 50} \times F$	わった

s の世界では、出てくるもの Vは、入れたもの F に、$1/(1000s + 50)$ という式を**かけた**ものです。F が何であっても、このかけ算は同じです。この「かける式」が、車のからだという箱の性質を表しています。

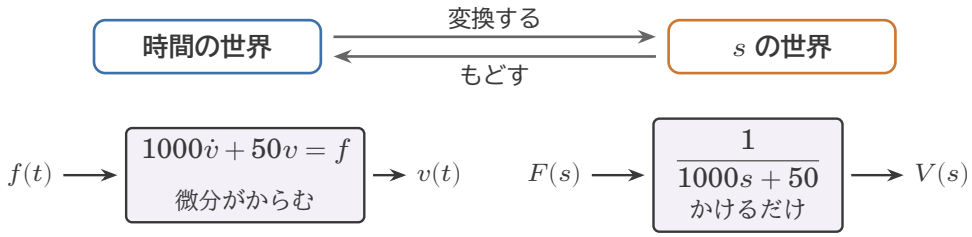


図 1　同じ「車のからだ」の箱の、2 つの書き方。左の時間の世界では微分方程式（出てくるものは、たたみこみ（9-6）で決まる）。右の s の世界では、入れたものに伝達関数をかけるだけ。

❷ 名前の段：伝達関数 $G(s)$ を読む

箱の「かける式」を、次の名前でよびます。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

「はじめの値をすべて 0 にしたときの、出てくるもの÷入れるもの」

これを、その箱の**伝達関数**（でんたつかんすう）といいます。入れるもの（入力）を u、出てくるもの（出力）を y と書き、s の世界では大文字の U、Y です（9-5 の約束）。英語の transfer function は「受けわたしの関数」という意味です。

①名前の段　記号を読む：何を何でわるか・どんな条件で

1. **何を何でわるか**：出てくるもの $Y(s)$ を、入れるもの $U(s)$ でわる。
2. **条件**：はじめの値（$y(0)$、$\dot{y}(0)$ など）は**すべて 0** にする。
3. **答えの形**：s の分数の式。U や Y は入っていない。

$$\underbrace{G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}}_{\text{名前}}=\underbrace{\frac{1}{1000s+50}}_{\text{表を引く}}$$

左の点線は名前、右の実線は、9-5 の微分の行（$\dot{v}\to sV$）を引いて作った実際の式です。

なぜ、はじめの値を 0 にするのか

9-7 の⑤で、ばね・質量・ダンパーの式は、次の形でした。

$$(s^2+a_1s+a_0)X=U(s)+(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)$$

右辺の $U(s)$ の部分は「入れたもの」で決まり、残りは「はじめの値」で決まります。伝達関数は、そのうち「機械が入れたものをどう変えるか」だけを取り出したものです。はじめの値の分は、9-7 のように別に足せばよいので、伝達関数ではいつも 0 にしておきます。

6-13 の $G(\omega)$ とは別のもの

6-13 では、ゆれの大きさの分母の式 $(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2$ に、判別式の D と区別するために $G(\omega)$ という名前をつけました。これは伝達関数 $G(s)$ とは**別のもの**です（⑧で見るように、6-13 の $G(\omega)$ は、伝達関数の大きさの 2 乗の逆数 $1/|G(j\omega)|^2$ にあたります）。

たいせつ

- **伝達関数 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ は、「はじめの値を 0 にしたときの、出てくるもの÷入れるもの」の名前。**
- **s の世界では、出てくるもの＝伝達関数×入れたもの（$Y=GU$）。何を入れても、かけ算 1 回。**

手でわかる　作って、つないで、もどす　★★★★

3 微分方程式から作る

②直す段　表を引いて、s の式に直す

伝達関数は、次の手順でいつも作れます。6-12 で特性方程式を作ったときと同じ置きかえです。

1. はじめの値をすべて 0 にして、$y \to Y$、$\dot{y} \to sY$、$\ddot{y} \to s^2Y$、入れるもの $u \to U$ と置きかえる（9-5 の微分の行）。
2. Yでくくる。
3. $\dfrac{Y}{U}$ の形にする。

箱	微分方程式	伝達関数 $G(s)$	章
RC 回路（$\tau=2\,\mathrm{s}$）	$2\dot{v}+v=u$	$\dfrac{1}{2s+1}$	6-4
熱電対（$\tau=30\,\mathrm{s}$）	$30\dot{y}+y=u$	$\dfrac{1}{30s+1}$	6-4
車のからだ	$1000\dot{v}+50v=f$	$\dfrac{1}{1000s+50}$	この章
ばね（6-13 の数）	$0.5\ddot{x}+0.4\dot{x}+8x=f$	$\dfrac{1}{0.5s^2+0.4s+8}$	6-13
モーター（電圧→回る速さ y）	$0.5\dot{y}+y=10u$	$\dfrac{10}{0.5s+1}$	この章

表 2　いろいろな箱の伝達関数。分母は、6-12 の特性方程式の左辺と同じ。

分母を 0 とおいた式は、6-12 の特性方程式そのものです。だから、伝達関数の分母が 0 になる s が、その機械の動き方（e^{st}）を決めます。9-9 では、この s を「極」とよびます。

モーターの行の y は、回る速さ〔rad/s〕です（⑧で角周波数に使う ω とまぎれないように、y と書きます）。1 V を入れ続けると、やがて 10 rad/s（1 分に約 95.5 回転）で回り、そこへ近づく時定数が 0.5 s のモーターです（たとえばの数）。$s=0$ を入れた $G(0)=10$ が、ゆっくり変えたときの倍率（1 V あたり 10 rad/s）です。これを**定常のゲイン**といいます。

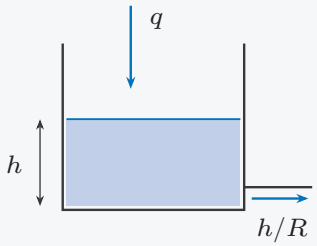
もっと知りたい ★★★★

水そうもヒーターも、同じ形の箱（6-15 の相似）

水そう（底面積 A〔cm²〕）に、ポンプで 1 秒に q〔cm³〕の水を入れます。底の管からは、水位 h〔cm〕に比例して h/R ずつ出ていくとします（R は管の水の通りにくさ）。たまる水の量の変わり方は $A\dot{h}=q-h/R$ なので、

$$AR\dot{h}+h=Rq$$

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{R}{ARs+1}$$



部屋のヒーター（電力 P〔W〕、熱容量 C〔J/K〕、熱の抵抗 R〔K/W〕、部屋と外の温度差 y〔K〕）も、$C\dot{y}=P-y/R$ から $G=R/(RCs+1)$ です。

どちらも RC 回路と同じ $K/(\tau s+1)$ の形（1 次おくれ）で、$K=R$、$\tau=AR$ または RC です。6-15 で、ばね・電気・熱の式が同じ形になること（相似）を学びました。伝達関数で書くと、分野がちがっても同じ箱

になることが、ひと目でわかります。（ここの $H(s)$ は水位 h の変換で、ステップ関数の $H(t)$ とは別のものです。）

4 インパルス応答とステップ応答

伝達関数がわかれば、何を入れたときでも、$Y = G \times U$ を 9-7 の方法でもどすだけです。よく使う入れ方は 2 つあります。

入れ方	たとえ	$U(s)$	出てくるもの
インパルス $\delta(t)$	ハンマーで 1 回たたく (9-6)	1	$\mathcal{L}^{-1}[G]$
ステップ $H(t)$	スイッチを入れて、入れ続ける	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G}{s}\right]$

表 3　インパルス応答とステップ応答。「応答」は、入れたものに対して出てくる動きのこと。

はてな？ の答え：アクセルを一定にふむ

エンジンの力 500 N を $t = 0$ から入れ続けると、$F = \dfrac{500}{s}$ です。

$$V = G\,F = \frac{1}{1000s + 50} \times \frac{500}{s} \qquad Y = GU$$

$$V = \frac{0.5}{s(s + 0.05)} \qquad \text{分母と分子を 1000 でわった}$$

$$V = \frac{10}{s} - \frac{10}{s + 0.05} \qquad \text{かくす方法（9-7）：} \frac{0.5}{0.05} = 10,\ \frac{0.5}{-0.05} = -10$$

$$v = 10 - 10e^{-0.05t} \qquad \text{表を逆に引いた}$$

やってみようの D 列の式です。速さは 10 m/s に近づき、時定数は $\frac{1}{0.05} = 20$ 秒です。20 秒で 63 %、60 秒（3τ）で 95 %、80〜100 秒（4τ〜5τ）で 98〜99 % です。工学では、ほとんど落ち着いたとみなせる時間を**整定時間**とよび、1 次おくれでは 4τ〜5τ がめやすです。**はてな？ の答え**：アクセルを一定にふむ

と、車は約 20 秒の時定数で速さを上げ、1 分半ほどで、ほぼ一定の速さ（ここでは 10 m/s）になります。

インパルス応答：後ろからドンとおす

止まった車を後ろから短い時間だけ強くおし、力×時間（力積）が 1000 N s だったとします。入れたものは $1000\,\delta(t)$ で、$F = 1000$ です。

$$V = \frac{1000}{1000s + 50} = \frac{1}{s + 0.05} \longrightarrow v = e^{-0.05t}$$

車は速さ 1 m/s で動き出し、抵抗で、時定数 20 秒でゆっくり止まります。インパルス応答は、伝達関数をそのままもどしたものなので、「その箱の動き方の見本」です。

5 箱をつなぐ：直列はかけ算、並列はたし算

直列：かけ算

はてな？ の「エンジン」の箱を入れます。アクセルをふむ量を p（0〜1。ふみこんだ割合）、エンジンの力を f とし、エンジンの伝達関数は、いっぱいにふむと 5000 N、時定数 0.5 s の 1 次おくれ（たとえばの数）として、次の G_1 とします。

$$G_1(s) = \frac{5000}{0.5s + 1}$$

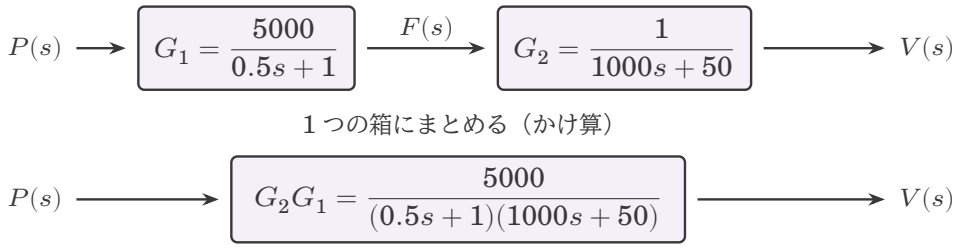


図 2 直列につないだ 2 つの箱は、伝達関数のかけ算の 1 つの箱になる。

$$F = G_1 P$$ エンジンの箱

$$V = G_2 F$$ 車のからだの箱

$$V = G_2 G_1 P$$ 1 行めを 2 行めに入れた

$$\frac{V}{P} = G_2 G_1$$ 全体の伝達関数は、かけ算

3-3 の合成関数（前の箱から出たものを、次の箱に入れる）と同じ考えです。伝達関数は数のようにかけ算するので、$G_2 G_1 = G_1 G_2$ と順番を入れかえてもかまいません。7-3 の行列のかけ算は順番を入れかえられませんでしたが、1 つ入れて 1 つ出てくる箱の伝達関数は、ただの分数の式だからです。

全体の定常のゲインは $G_2(0)G_1(0) = \frac{1}{50} \times 5000 = 100$ で、アクセルを 0.1 だけふむと、最後は $0.1 \times 100 = 10\,\mathrm{m/s}$ です。エンジンの時定数（0.5 秒）は車の時定数（20 秒）よりずっと短いので、ステップ応答は、エンジンの箱がないときとほとんど変わりません（20 秒で 6.23 m/s と 6.32 m/s）。おそいほうの箱が、全体の速さを決めます。

並列：たし算

同じものが 2 つの箱に入り、出てきたものをたすときは、

$$Y = G_1 U + G_2 U = (G_1 + G_2) U$$

なので、伝達関数は**たし算**です。たとえば、2 つのスピーカー（低い音用と高い音用）に同じ電気信号を分けて送る回路（例題 3）は、並列の箱です。

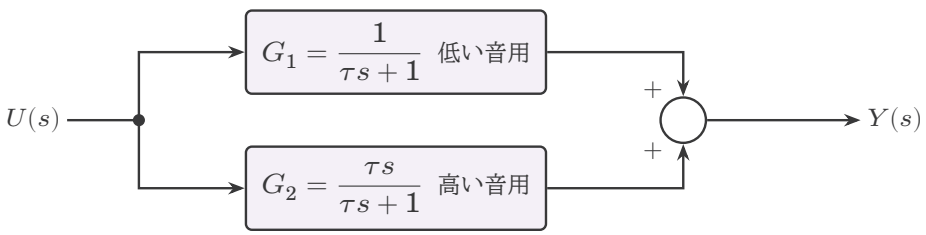


図 3　並列の箱。同じ U が 2 つの箱に入り、出たものを加え合わせ点（○）でたす。全体は $G_1 + G_2$。

ここまでで十分

微分方程式から伝達関数を作り、直列はかけ算・並列はたし算でまとめ、G や G/s を 9-7 の方法でもどして、インパルス応答・ステップ応答を出せれば十分です。この先は、フィードバック・状態方程式・周波数応答（dB）です。

式でわかる つなぎ方と、ほしいもので選ぶ ★★★★★

6 場合分けの表と流れ図

伝達関数の求め方は、「何があたえられているか」（微分方程式・データ・状態方程式）と、「箱がどうつながっているか」（直列・並列・フィードバック）と、「何がほしいか」（伝達関数そのもの・時間の動き・sin を入れたときの倍率）で決まります。場合分けの表 9-8 にまとめました（記号 A～H）。

A と E は②の**直す段**（表を引く・行列の計算）、F は 9-7 の部分分数と表、B・C・D・G・H は③の**楽をする段**（積分も変換もせず、かけ算・たし算・代入だけ）です。A・D・C・B のあとは、次の見開きの図 5 の流れ図の次の問いへ進み、さらにつなぎ方やほしいものを問います。

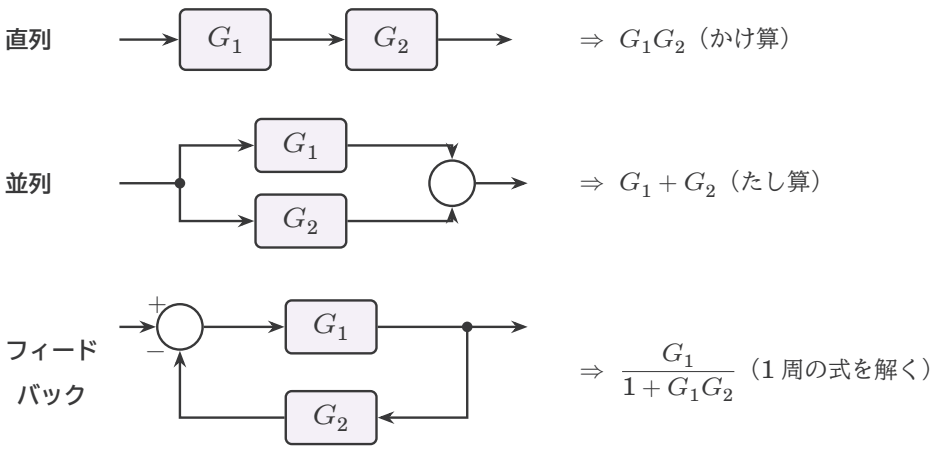


図 4　箱のつなぎ方の 3 つの形と、1 つの箱にまとめた伝達関数。○は加え合わせ点、黒い点は線が分かれる所。

場合分けの表 9-8　伝達関数：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
A	微分方程式があたえられている	表を引く　はじめの値を 0 にして $\dot{y} \to sY$、$\ddot{y} \to s^2Y$、$u \to U$。Y でくくって $\frac{Y}{U}$	1
B	箱が 1 列につながる（直列）	楽をする　かけ算 G_1G_2。順番を入れかえてよい	2・9
C	同じものが 2 つの箱に入り、出たものをたす（並列）	楽をする　たし算 $G_1 + G_2$	3
D	出たものをはかって、入れる側へもどす（フィードバック）	楽をする　1 周の式 $Y = G_1(R - G_2Y)$ を Y について解き、$\frac{G_1}{1 + G_1G_2}$	4・5
E	状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$、$y = C\vec{x}$ があたえられている	行列の計算　$G = C(sI - A)^{-1}B$（逆行列は 7-5）	6
F	インパルス応答・ステップ応答（時間の動き）がほしい	部分分数　$G \times 1$ か $G \times \frac{1}{s}$ を部分分数に分け 表を引く　表 9-7 でもどす	7
G	sin を入れたときの倍率とおくれ（周波数応答）がほしい	楽をする　$s = j\omega$ を入れる。倍率 $\lvert G(j\omega)\rvert$、おくれは角。dB は $20\log_{10}\lvert G\rvert$	8・9
H	実験のデータしかない（1 次おくれとわかっている）	楽をする　ステップ応答の最後の値÷入れた大きさ＝ K、63.2 % に着く時刻＝ τ で $\frac{K}{\tau s + 1}$	10

A・B・C・D のあと、ほしいもの（時間の動き・sin の倍率）がなければ、そこで作った G が答え（流れ図のいちばん下の四角）。

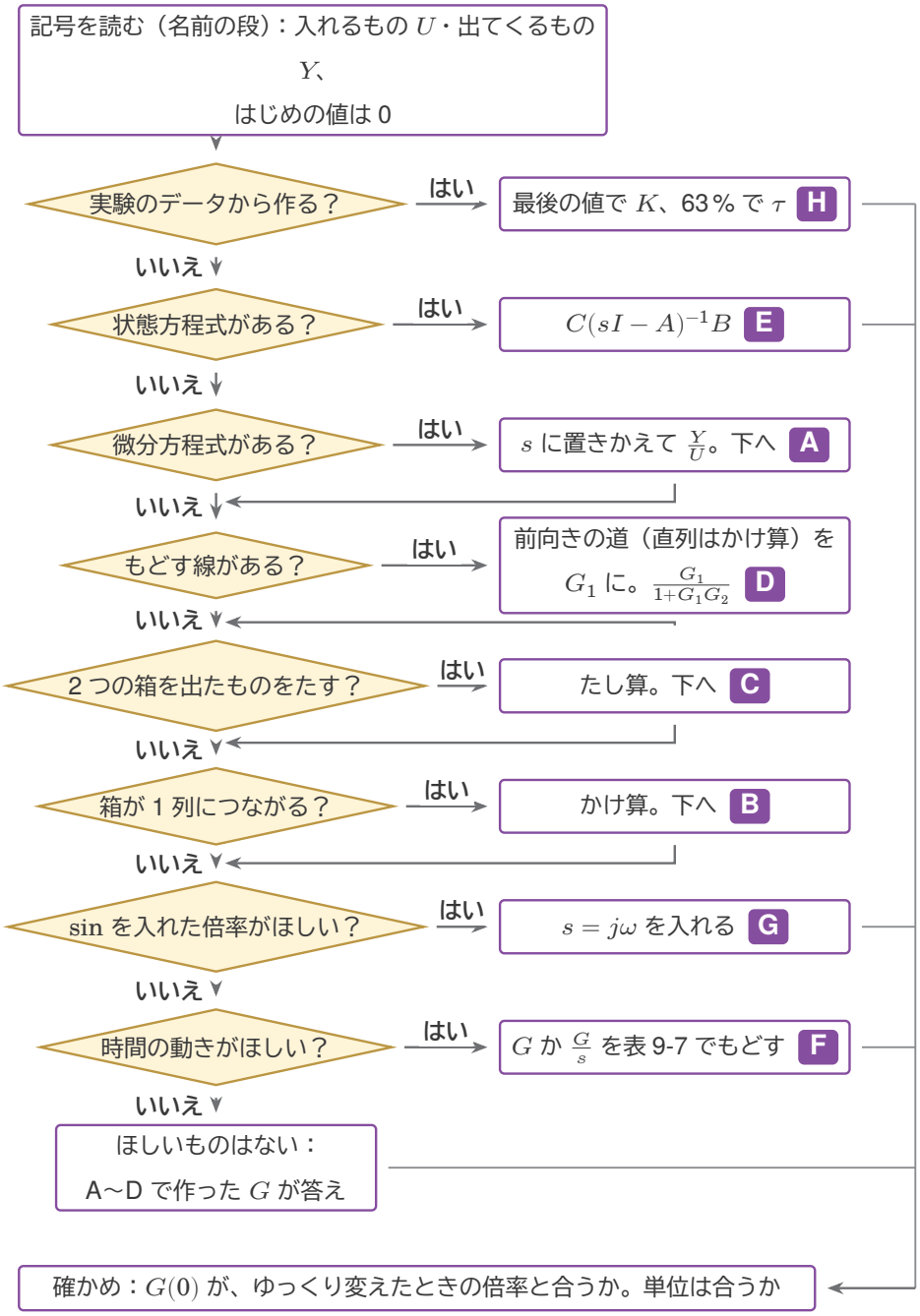


図 5 伝達関数の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。A・D・C・B のあとは左の列の次の問いへもどる。つなぎ方は外側（もどす線）から問う。D では、前向きの道の直列をかけ算でまとめてから G_1 にする。できた四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

流れ図の使い方：はてな？ の車

はてな？ の「アクセル→エンジン→車のからだ」で、全体のステップ応答をたどります。

1. 名前の段：入れるもの＝アクセルをふむ量 P、出てくるもの＝速さ V。はじめは止まっている。
2. データから？ いいえ。状態方程式？ いいえ。微分方程式？ はい（車のからだは $1000\dot{v} + 50v = f$）→ **A** で G_2 を作り、下の問いへ。
3. もどす線？ いいえ。たす？ いいえ。1 列？ はい → **B** で G_2G_1。下の問いへ。
4. sin の倍率？ いいえ。時間の動き？ はい → **F** で $\dfrac{G_2G_1}{s}$ をもどす。

1 つの問題で、いくつもの場合を通ることがあります。そのときは、通った順に記号を書きます（A → B → F）。1 回で全部を覚えなくても大丈夫です。

どの場合かな？

1. $3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$ の伝達関数
   答え：**A**。微分方程式がある。
2. 温度計の、スイッチを入れたあとの読みの表から伝達関数を作る
   答え：**H**。実験のデータ。
3. $G_1 = \frac{2}{s+1}$ の箱の出たものを $G_2 = \frac{3}{s+4}$ の箱に入れる
   答え：**B**。直列。
4. モーターの速さをはかって、目標とのずれで電圧を決める
   答え：**D**。もどす線がある。

7 フィードバック：はかって、もどす

3-1 で、「エアコンは部屋の温度をはかりつづけ、設定温度との差が大きいほど強く冷やします（このしくみは第 9 巻の制御で学びます）」と書きました。こ

のように、出てきたものをはかって、入れる側へもどすつなぎ方を**フィードバック**といいます。

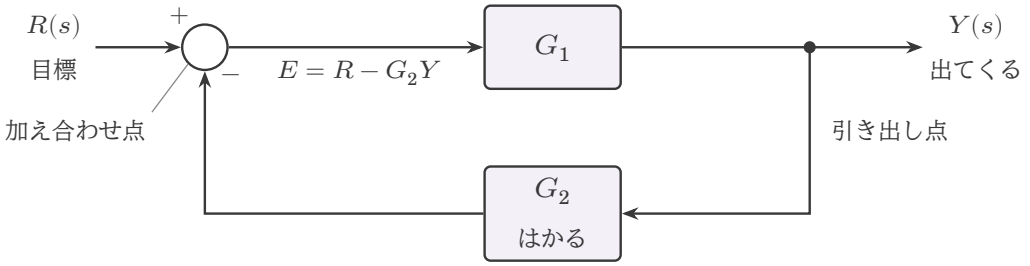


図 6 フィードバック。出てきた Y を G_2 ではかって、加え合わせ点（○）で目標 R から引く。G_1 に入るのは、そのずれ $E = R - G_2Y$。

③楽をする段　1 周の式を、Y について解く

図 6 の矢印を 1 周たどると、Y が両辺に出てくる式が 1 本できます。それを、ふつうの 1 次方程式として Y について解きます。

$Y = G_1E$	G_1 の箱
$E = R - G_2Y$	加え合わせ点（目標からはかった値を引く）
$Y = G_1(R - G_2Y)$	2 行めを 1 行めに入れた（1 周の式）
$Y + G_1G_2Y = G_1R$	展開して、Y の項を左へ
$(1 + G_1G_2)Y = G_1R$	Y でくくった
$\dfrac{Y}{R} = \dfrac{G_1}{1 + G_1G_2}$	わった

フィードバックの全体の伝達関数　$\dfrac{Y}{R} = \dfrac{G_1}{1 + G_1G_2}$

分母の「1 +」は、もどす量を**引く**から出てきました（加え合わせ点の符号が −）。もどす量をたすと $1 - G_1G_2$ になります。

モーターの速さの比例制御

表 2 のモーター $\dfrac{10}{0.5s+1}$ で、目標の速さとのずれに K_p〔V/(rad/s)〕をかけた電圧を加えます（**比例制御**）。速さはセンサーでそのままはかる（$G_2=1$）とします。前向きの道は「K_p 倍してからモーター」の直列なので、$G_1=\dfrac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1}$ です。

$$\frac{Y}{R}=\frac{\dfrac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1}}{1+\dfrac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1}}$$

フィードバックの式に入れた

$$\frac{Y}{R}=\frac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1+10K_\mathrm{p}}$$

分母と分子に $0.5s+1$ をかけた

$K_\mathrm{p}=1$ なら $\dfrac{10}{0.5s+11}=\dfrac{20}{s+22}$ です。分母が 0 になる s は、モーターだけのときの -2 から -22 に動き、時定数は 0.5 秒から $\frac{1}{22}\approx 0.045\,\mathrm{s}$ へ、約 11 分の 1 になります。フィードバックで、目標に速く追いつくようになりました。

ただし、定常のゲインは $\frac{10}{11}\approx 0.909$ です。目標 100 rad/s にすると 90.9 rad/s で落ち着き、9.1 % のずれが残ります。このずれと、K_p の選び方は 9-9 でくわしく調べます。

K_p	分母が 0 になる s	時定数（s）	残るずれ
0.1	-4	0.25	50 %
1	-22	0.045	9.1 %
10	-202	0.005	1.0 %

表 4　比例の強さ K_p を変えたモーター。強いほど速く、ずれも小さい（ずれは $\frac{1}{1+10K_\mathrm{p}}$）。

エアコン（3-1 の約束）

外が 35℃、設定が 26℃とします。部屋が外より何℃低いかを y〔℃〕とすると、目標は $r = 35 - 26 = 9$ です。エアコンが冷やす力（1 秒あたりに取りさる熱）を P〔W〕とすると、部屋の熱のつり合いは、6-4 の熱の抵抗 R〔K/W〕と熱容量 C〔J/K〕で

$$RC\dot{y} + y = RP \qquad （部屋の箱 \frac{R}{RCs+1}。RC = 60 分）$$

です（y がふえるほど外から入る熱がふえるので、$+y$ の項）。エアコンは、ずれに比例して $P = K_{\mathrm{p}}(r - y)$ で冷やします（K_{p}〔W/K〕）。

$$G_1 = K_{\mathrm{p}} \times \frac{R}{60s+1} = \frac{RK_{\mathrm{p}}}{60s+1}$$ 前向きの道（s は 1/分）、$G_2 = 1$

$$\frac{Y}{R_{目標}} = \frac{RK_{\mathrm{p}}}{60s+1+RK_{\mathrm{p}}}$$ フィードバックの式

（目標の R と熱の抵抗 R がまぎれないよう、目標は $R_{目標}$ と書きました。）$RK_{\mathrm{p}} = 9$ なら $\frac{9}{60s+10}$ です。定常のゲインは $\frac{9}{10} = 0.9$ なので、部屋は外より $9 \times 0.9 = 8.1$℃低い 26.9℃で落ち着き、0.9℃のずれが残ります。時定数は $\frac{60}{10} = 6$ 分です。

8 周波数応答：$s = j\omega$ を入れる

箱に sin や cos の形の入力を入れ続けると、はじめのまざりもの（自分の動き）が消えたあと、出てくるものも同じ速さ ω の sin になります（6-13 ④の「ゆすりに合うゆれ」）。変わるのは、大きさ（倍率）と、おくれ（角）だけです。

③楽をする段　変換しない：s に $j\omega$ を入れるだけ

6-13 では、ばね（$m = 0.5$、$k = 8$、$c = 0.4$）を $F_0 \cos \omega t$ でゆすったときの複素振幅を $X = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2 + jc\omega}$ と求めました。このばねの伝達関数 $G(s) = \dfrac{1}{0.5s^2 + 0.4s + 8}$ に $s = j\omega$ を入れると、$s^2 = -\omega^2$ なので

$$G(j\omega) = \frac{1}{8 - 0.5\omega^2 + 0.4j\omega}, \qquad X = F_0\, G(j\omega)$$

で、6-13 の複素振幅は $F_0 G(j\omega)$ そのものでした。$s = j\omega$ は、6-10 の e^{st} の s を $j\omega$（実部 $\sigma = 0$）にした、ちょうど「へりもふえもせず、回り続ける」所です。

倍率　$|G(j\omega)|$　　おくれ　$G(j\omega)$ の角の大きさ（− の角）

ω	$G(j\omega)$	$\lvert G(j\omega)\rvert$	ゆれ（$F_0 = 0.8$）	おくれ
2	$\dfrac{1}{6 + 0.8j}$	0.1652	0.132 m	7.6°
4	$\dfrac{1}{1.6j}$	0.625	0.5 m	90°
8	$\dfrac{1}{-24 + 3.2j}$	0.0413	0.033 m	172.4°

表 5　6-13 のばねの周波数応答。6-13 の表と同じ数が、$s = j\omega$ を入れるだけで出る。

6-13 の $G(\omega) = (k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2$ は、ここでの分母の大きさの 2 乗です。だから $|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{G_{\text{6-13}}(\omega)}}$ で、名前が同じ G でも、別のものです。

9 dB で表すと、直列はたし算（3-12 の約束）

3-12 で、ボード線図（横軸にゆれの速さを対数目もりで、たて軸に倍率を dB でとったグラフ）を紹介し、「装置をつないだときの倍率も、dB のたし算で求められます（9-8）」と書きました。ここで確かめます。

3-12 の図の回路は、抵抗とコンデンサーで作る、低い音だけを通す回路（ローパスフィルター）でした。その伝達関数は 6-4 の RC と同じ形 $\dfrac{1}{\tau s + 1}$ で、

100 Hz で折れるように $\tau = \dfrac{1}{2\pi \times 100} \approx 1.592\,\text{ms}$ です。ゆれの速さ（周波数）100 Hz は、角周波数 $\omega = 2\pi \times 100$〔rad/s〕です。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad s = j\omega \text{ を入れた}$$

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \qquad \text{分母の大きさ（6-9）}$$

$$20\log_{10}|G| = -10\log_{10}(1 + (\omega\tau)^2) \qquad \text{dB に直した（}\log\tfrac{1}{\sqrt{a}} = -\tfrac{1}{2}\log a\text{）}$$

$\omega\tau = \frac{f}{100}$（$f$ は周波数〔Hz〕）なので、3-12 の図の式 $-10\log_{10}(1+(f/100)^2)$ と同じです。

9-3 の⑧では、この RC に 50 Hz の方形波（高さ 1）を入れ、回る矢印 1 本ずつが $\frac{1}{1+jn\omega_0\tau}$ 倍になることを見ました。この「その周波数の倍率」が、伝達関数に $s = j\omega$ を入れた $G(j\omega)$ です。50・150・250・350 Hz の成分（大きさ 1.273・0.424・0.255・0.182）は、$|G| = 0.894 \cdot 0.555 \cdot 0.371 \cdot 0.275$ 倍になり、1.139・0.235・0.095・0.050 で出てきます。高い成分ほど小さくなるので、四角い波の角がまるくなります。

周波数	$\lvert G\rvert$	1 段（dB）	おくれ	2 段（dB）	2 段の倍率
10 Hz	0.995	−0.04	5.7°	−0.09	0.990
100 Hz	0.707	−3.01	45°	−6.02	0.5
300 Hz	0.316	−10.0	71.6°	−20.0	0.1
1 kHz	0.0995	−20.04	84.3°	−40.09	0.0099
10 kHz	0.0100	−40.00	89.4°	−80.00	0.0001

表 6　100 Hz のローパスフィルター 1 段と、同じものを 2 段つないだとき。2 段の dB は、1 段の dB の 2 倍（たし算）。

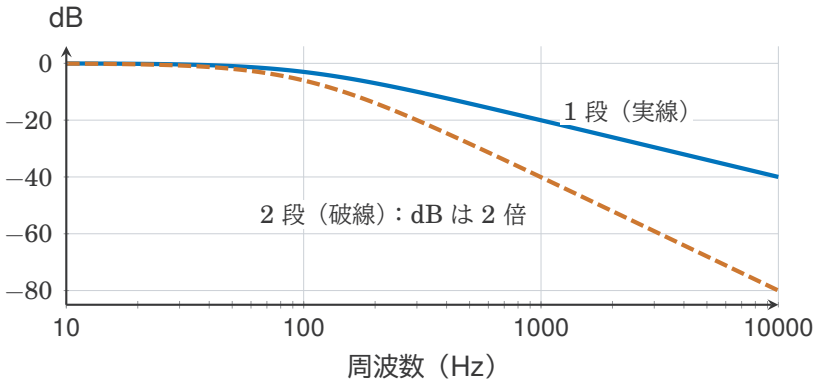


図 7　ボード線図（大きさ）。1 段は 100 Hz より高いと、周波数が 10 倍になるごとに −20 dB。2 段は −40 dB ずつ下がる。

2 段つなぐと、伝達関数は直列のかけ算 $G \times G$ です。倍率もかけ算 $|G| \times |G|$ になり、3-12 の対数のきまり $\log(ab) = \log a + \log b$ で、dB は**たし算**になります。

$$20 \log_{10}(|G_1|\,|G_2|) = 20 \log_{10} |G_1| + 20 \log_{10} |G_2|$$

グラフでは、2 つの箱の線を上下にたせば、つないだ全体の線になります。これが、ボード線図が便利なわけです。ただし、実際の回路で 2 つの RC を直接つなぐと、うしろの回路が前の回路の電流を少し取るので、ぴったり $G \times G$ にはなりません。間に、受け取った電圧をそのまま次へ送る回路（バッファー）を入れたときに、この計算が成り立ちます。ボード線図の線を直線で近づけてかく方法などは、物理シリーズ（波-2・波-4）で学びます。

⑩ 状態方程式から作る（行列の計算）

7-11 では、機械の状態をベクトル $\vec{x}$ にまとめ、外から加える量 u を入れた $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ の形を状態方程式とよびました（9-10 でくわしく学びます）。出てくるものが $y = C\vec{x}$ なら、伝達関数は行列の計算で作れます。

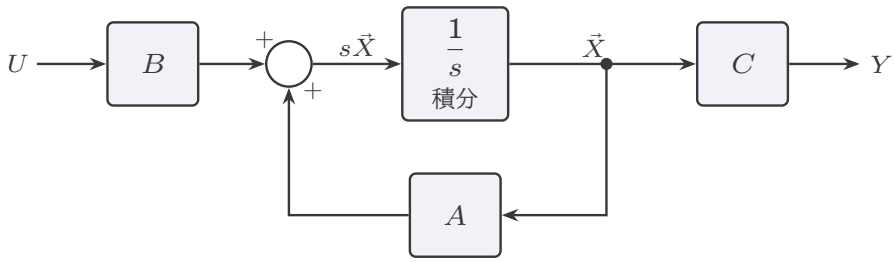


図 8 状態方程式のブロック線図。$\dot{\vec{x}}$ を積分（s の世界では $\frac{1}{s}$ をかける）すると $\vec{x}$。$\vec{x}$ に A をかけてもどし、Bu とたすと、また $\dot{\vec{x}}$。線の中を流れるのは、数ではなくベクトル。

②直す段　行列の計算に直す

はじめの値を 0 にして変換すると、$s\vec{X} = A\vec{X} + BU$ です。

$$s\vec{X} - A\vec{X} = BU \qquad A\vec{X} \text{ を左へ}$$

$$(sI - A)\vec{X} = BU \qquad s\vec{X} = sI\vec{X}\ (I \text{ は単位行列、7-5})$$

$$\vec{X} = (sI - A)^{-1}BU \qquad \text{左から逆行列をかけた（7-5）}$$

$$Y = C(sI - A)^{-1}B\,U \qquad Y = C\vec{X}$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B}$$

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{G(s)}} = \underset{\text{行列の計算}}{\boxed{C(sI - A)^{-1}B}}$$

車 A（$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$）を、状態 $\vec{x} = (x,\ \dot{x})$ で書くと、7-8 と同じく次のようになります。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}$$

s をななめに足し、A を引いた

$$\det(sI - A) = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2$$

行列式（7-4）

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$$

2×2 の逆行列（7-5）

$$(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

2 列めを取り出した

$$C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

1 行めを取り出した

微分方程式から作った（場合 A）のと同じ $\dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$ です。分母の $\det(sI - A)$ は、7-8 の固有値を求める式と同じなので、「伝達関数の分母が 0 になる s ＝ 状態の行列の固有値」がわかります（9-9・9-11）。

11 実験のデータから作る

機械の中の式がわからなくても、1 次おくれ $\dfrac{K}{\tau s + 1}$ になるとわかっていれば、ステップ応答のデータから K と τ が決まります。ステップ応答は $y = K \times (\text{入れた大きさ}) \times (1 - e^{-t/\tau})$ だからです（④の車と同じ形）。

1. 最後の値÷入れた大きさ ＝ K（定常のゲイン）。
2. 最後の値の 63.2％（$1 - e^{-1}$）に着く時刻 ＝ τ。

63.2％は、$t = \tau$ のとき $1 - e^{-1} = 0.632$ だからです（6-4）。工場では、機械に一定の入力を入れて記録をとり、この方法で伝達関数を決めることがよくあります。

もっと知りたい ★★★★★

車のサスペンション：路面から車体への伝達関数

道のでこぼこの高さ x_r が、ばね（k）とダンパー（c）を通って車体（質量 m、高さ x）に伝わる式は、$m\ddot{x} = -k(x - x_\mathrm{r}) - c(\dot{x} - \dot{x}_\mathrm{r})$ です。はじめの値を 0 にして変換すると、

$$(ms^2 + cs + k)X = (cs + k)X_\mathrm{r}$$ 変換し、X の項を左へ

$$\frac{X}{X_\mathrm{r}} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$ 路面から車体への伝達関数

分子にも s が入っているのは、ダンパーが路面の「上がる速さ」も車体に伝えるからです。1 輪分を $m = 250\,\mathrm{kg}$、$k = 16\,000\,\mathrm{N/m}$、$c = 2000\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$ とすると（たとえばの数）、高さ 5 cm の段差に乗り上げたとき、車体はいちばん高くて 6.49 cm（約 0.30 秒後）まで上がり、それから 5 cm に落ち着きます。分子が 0 になる s と、分母が 0 になる s の場所（9-9 で「零点」「極」と名前をつけます）でこの動きを読む方法は、9-9 で学びます。

専門書をのぞいてみよう ブロック線図と伝達関数の専門書ふうの書き方

初期値をすべて零とおいたとき，出力のラプラス変換と入力のラプラス変換の比 $G(s) = Y(s)/U(s)$ を伝達関数という．前向き要素 $G(s)$，フィードバック要素 $H(s)$ からなる負帰還系の閉ループ伝達関数は

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

である．$G(s)H(s)$ を一巡伝達関数という．

訳 「零」は 0。「要素」は箱、「負帰還」は引いてもどすフィードバック、「閉ループ」は 1 周してもどる全体。この本の G_1 を G、G_2 を H と書く本が多い（この本では、$H(t)$ をステップ関数に使っているので G_2 と書いた）。「一巡伝達関数」は、1 周の倍率 G_1G_2。ブロック線図の○（加え合わせ点）には、たすか引くかの符号 $+$・$-$ を書き、線が分かれる所（引き出し点）には黒い点を打つ。

たいせつ

伝達関数の 3 つの段

名前　記号を読む：入れるもの U・出てくるもの Y、はじめの値は 0

楽をする　データ？　つなぎ方（もどす・たす・1 列）？　sin の倍率？

直す　微分→ s のかけ算（表を引く）か、$C(sI-A)^{-1}B$（行列）

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+k} \qquad Y=GU$$

場合分けの表 9-8（まとめ）

記号	こんなとき	求め方
A	微分方程式	はじめの値 0、$\dot{y}\to sY$
B	直列	かけ算 G_1G_2
C	並列	たし算 G_1+G_2
D	フィードバック	$\frac{G_1}{1+G_1G_2}$（引いてもどすとき）
E	状態方程式	$C(sI-A)^{-1}B$
F	時間の動き	G・$\frac{G}{s}$ を表 9-7 でもどす
G	sin の倍率・おくれ	$s=j\omega$。dB は $20\log_{10}\lvert G\rvert$。直列は dB のたし算
H	データから	最後の値で K、63.2 % の時刻で τ

記号カード　初めて出た章 9-8

$G(s)$

読み方　ジー・エス
意味　伝達関数。はじめの値を 0 にした $Y\div U$。$s=j\omega$ で周波数応答
英語　transfer function

記号カード　初めて出た章 9-8

読み方　くわえあわせてん
意味　ブロック線図で、矢印をたし引きする所。符号を横に書く
英語　summing point

この章で出てきたことば

伝達関数　$G(s) = Y(s) \div U(s)$。はじめの値を 0 にしたときの、出てくるもの÷入れるもの。機械の性質を表す s の式。

ブロック線図　箱（伝達関数）を矢印でつないだ図。○は加え合わせ点。

フィードバック　出てきたものをはかって、入れる側にもどすつなぎ方。全体の伝達関数は、表 9-8 の D の式。

周波数応答　sin を入れたときの倍率とおくれ。$s = j\omega$ を入れた $G(j\omega)$ で求める。

定常のゲイン　$G(0)$。落ち着いたときの倍率。

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、場合分けの表 9-8 のどの場合かを書きました。**例題を流れ図でたどってみよう**：図 5 でたどると表 7 のようになり、どれも 1 行めの場合に着きます（書いていない問いは「いいえ」。じぶんでとこうも同じ道すじ）。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	微分方程式から	微分方程式がある？	A
2	エンジンと車	箱が 1 列につながる？	B
3	2 つのスピーカー	2 つの箱を出たものをたす？	C
4	モーターの比例制御	もどす線がある？	D
5	エアコン	もどす線がある？	D
6	状態方程式から	状態方程式がある？	E
7	ステップ応答など	時間の動きがほしい？	F
8	ばねの周波数応答	sin を入れた倍率がほしい？	G
9	2 段のフィルター	1 列につながる？ → sin を入れた倍率がほしい？	B G
10	データから作る	実験のデータから作る？	H

表 7　例題 1〜10 の流れ図の道すじ。例題 1・2 は、A・B のあとの問いがすべて「いいえ」で、「A〜D で作った G が答え」の四角で終わる。

例題 1　微分方程式から伝達関数を作る

次の箱の伝達関数を作りましょう。

(1) RC 回路 ($\tau = 2\,\mathrm{s}$)：入れる電圧 u、コンデンサーの電圧 v で $2\dot{v} + v = u$

(2) 6-13 のばね：入れる力 f、位置 x で $0.5\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 8x = f$

考え方　**場合**：微分方程式があたえられている（表 9-8 の A）

名前　$G = \dfrac{\text{出てくるもの}}{\text{入れるもの}}$。はじめの値は 0。

直す：表を引く　9-5 の微分の行で、$\dot{v} \to sV$、$\ddot{x} \to s^2X$。

式　(1) $2sV + V = U$　（はじめの値 0 で変換）

$$(2s+1)V = U,\quad G = \frac{V}{U} = \frac{1}{2s+1}$$

(2) $0.5s^2X + 0.4sX + 8X = F$

$$(0.5s^2 + 0.4s + 8)X = F,\quad G = \frac{X}{F} = \frac{1}{0.5s^2 + 0.4s + 8}$$

確かめ：(1) $G(0) = 1$（ゆっくりなら、入れた電圧がそのまま）。

(2) $G(0) = \frac{1}{8}$（ばねは 1 N で $\frac{1}{8}$ m のびる）

答え　(1) $\dfrac{1}{2s+1}$　(2) $\dfrac{1}{0.5s^2 + 0.4s + 8}$

じぶんでとこう 1

次の箱の伝達関数を作り、$G(0)$ を求めましょう。

(1) 2 倍にして表示する温度計：本当の温度 u、表示 y で $30\dot{y} + y = 2u$

(2) 車 A：入れる力 u、位置 x で $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$

例題 2　エンジンと車をつなぐ

エンジン $G_1 = \dfrac{5000}{0.5s+1}$（アクセルをふむ量 p → 力〔N〕）と、車のからだ $G_2 = \dfrac{1}{1000s+50}$（力 → 速さ〔m/s〕）を直列につなぎます。全体の伝達関数と、アクセルを 0.1 ふみ続けたときに落ち着く速さを求めましょう。

考え方　**場合**：箱が 1 列につながる（表 9-8 の B）

名前　全体の $G = \dfrac{V}{P}$。

楽をする　直列はかけ算。落ち着く速さは $G(0) \times 0.1$。

式　$G = G_2 G_1 = \dfrac{5000}{(0.5s+1)(1000s+50)}$

$G(0) = \dfrac{5000}{1 \times 50} = 100$　（$s = 0$ を入れた）

落ち着く速さ $100 \times 0.1 = 10$

答え　$G = \dfrac{5000}{(0.5s+1)(1000s+50)}$。10 m/s（36 km/h）

じぶんでとこう 2

ポンプ $G_1 = \dfrac{50}{0.1s+1}$（電圧〔V〕→ 流れこむ水〔cm³/s〕）と、水そう $G_2 = \dfrac{0.02}{50s+1}$（流れこむ水 → 水位〔cm〕）を直列につなぎます。全体の伝達関数と、2 V を加え続けたときに落ち着く水位を求めましょう。

例題 3　2 つのスピーカー（並列）

2 つのスピーカーに同じ電気信号 U を分けて送ります。低い音用と高い音用に、次の回路を通します（$\tau = 79.6\,\mu s$。$2\,kHz$ で分ける）。

$$\text{低い音用 } G_1 = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad \text{高い音用 } G_2 = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

2 つから出る音をたしたときの伝達関数を求めましょう。

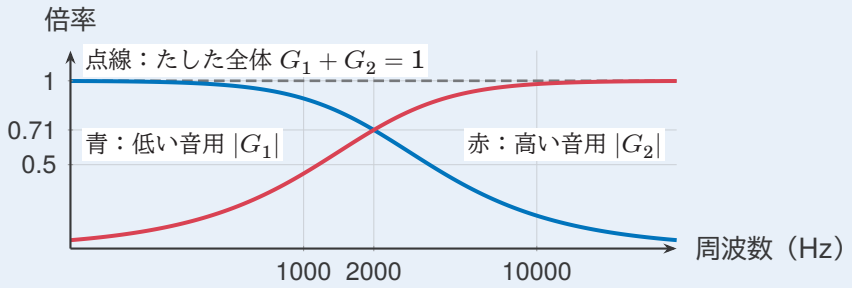
考え方　**場合：**2 つの箱を出たものをたす（表 9-8 の C）

名前　全体の $G = \dfrac{Y}{U}$、$Y = G_1 U + G_2 U$。

楽をする　並列はたし算。

式　$G = G_1 + G_2 = \dfrac{1}{\tau s + 1} + \dfrac{\tau s}{\tau s + 1}$

$= \dfrac{1 + \tau s}{\tau s + 1} = 1$　（分母が同じなので、分子をたした）



答え　$G = 1$（低い音と高い音に分けても、たすと、もとの信号にもどる）

じぶんでとこう 3

同じ入力が $G_1 = \dfrac{2}{s + 1}$ と $G_2 = \dfrac{3}{s + 2}$ の 2 つの箱に入り、出たものをたします。全体の伝達関数を 1 つの分数で表しましょう。

例題 4　モーターの比例制御

モーター $\dfrac{10}{0.5s+1}$（電圧 → 回る速さ）を、比例の強さ $K_\mathrm{p}=1$ で比例制御します（速さはそのままはかる。$G_2=1$）。全体の伝達関数、分母が 0 になる s、時定数、目標とのずれ（何 % 残るか）を求めましょう。

考え方　**場合：**もどす線がある（表 9-8 の **D**）

名前　目標 R から速さ Y への $\dfrac{Y}{R}$。

楽をする　1 周の式から $\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$。$G_1=K_\mathrm{p}\times\dfrac{10}{0.5s+1}$（直列）。

式　$G_1=\dfrac{10}{0.5s+1}$、$G_2=1$

$$\frac{Y}{R}=\frac{G_1}{1+G_1}=\frac{10}{0.5s+1+10}=\frac{10}{0.5s+11}$$

（分母と分子に $0.5s+1$ をかけた）

$0.5s+11=0$ から $s=-22$。時定数 $\frac{1}{22}\approx 0.045$

定常のゲイン $\frac{10}{11}=0.909$ → ずれ $1-0.909=0.091$

答え　$\dfrac{10}{0.5s+11}$。$s=-22$、時定数 約 0.045 s、ずれ約 9.1 %

じぶんでとこう 4

例題 4 のモーターを、比例の強さ $K_\mathrm{p}=0.1$ で比例制御します。全体の伝達関数、分母が 0 になる s、時定数、ずれを求めましょう。

例題 5　エアコン（比例制御）

⑦のエアコン（外 35 ℃、設定 26 ℃、部屋の箱 $\dfrac{R}{60s+1}$、s は 1/分）を、$RK_\mathrm{p}=9$ で比例制御します。部屋が落ち着く温度と、時定数を求めましょう。

考え方　**場合：**もどす線がある（表 9-8 の **D**）

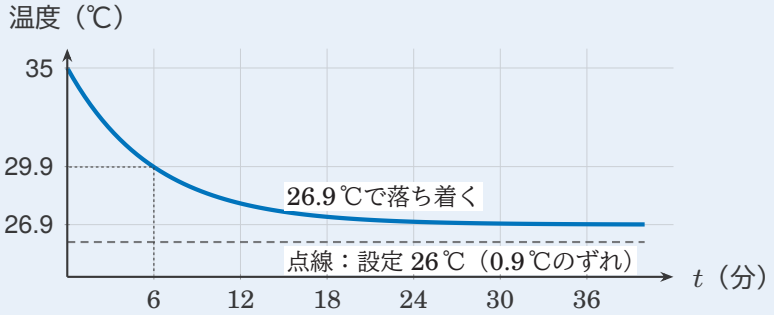
名前　目標（外より 9 ℃低く）から、外より何℃低いか y への伝達関数。

楽をする　$G_1=\dfrac{RK_\mathrm{p}}{60s+1}$、$G_2=1$ で $\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$。

式　$\dfrac{G_1}{1+G_1}=\dfrac{9}{60s+1+9}=\dfrac{9}{60s+10}$

定常のゲイン $\frac{9}{10}=0.9$。y は $9\times0.9=8.1$ ℃

温度 $35-8.1=26.9$。時定数 $60\div10=6$



答え　26.9 ℃で落ち着く（0.9 ℃のずれが残る）。時定数 6 分

じぶんでとこう 5

例題 5 のエアコンを、$RK_\mathrm{p}=4$ で比例制御します。落ち着く温度と時定数を求めましょう。

例題 6　状態方程式から作る

車 A の状態方程式（$\vec{x} = (x,\ \dot{x})$）の伝達関数 $G = C(sI - A)^{-1}B$ を求めましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

考え方　**場合**：状態方程式があたえられている（表 9-8 の E）

名前　$G = \dfrac{Y}{U}$。はじめの値は 0。

直す：行列の計算　$sI - A$ を作り、2×2 の逆行列（7-5）。

式　$sI - A$ は、1 行め $(s,\ -1)$、2 行め $(2,\ s+3)$

行列式 $s(s+3) - (-1) \times 2 = s^2 + 3s + 2$

逆行列は $\dfrac{1}{s^2+3s+2}$ ×（1 行め $(s+3,\ 1)$、2 行め $(-2,\ s)$）

B をかけると 2 列めが残る：$\dfrac{1}{s^2+3s+2} \times (1,\ s)$ のたて書き

C をかけると 1 つめの成分が残る：$\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

答え　$G = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$（微分方程式から作ったものと同じ）

じぶんでとこう 6

車 B（$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = u$）の状態方程式は、$A$ の 1 行めが $(0,\ 1)$、2 行めが $(-5,\ -2)$、B と C は例題 6 と同じです。$G = C(sI - A)^{-1}B$ を求めましょう。

例題 7　ステップ応答とインパルス応答

(1) 車のからだ $G = \dfrac{1}{1000s + 50}$ に、500 N の力を入れ続けたときの速さ v と、20 秒後の速さを求めましょう（$e^{-1} = 0.3679$）。

(2) RC 回路 $G = \dfrac{1}{2s + 1}$ のインパルス応答を求めましょう。

考え方　**場合：**時間の動きがほしい（表 9-8 の **F**）

名前　$Y = G \times U$ をもどす。ステップは $U = \frac{500}{s}$、インパルスは $U = 1$。

直す：部分分数　部分分数に分けて、表 9-7 でもどす。

式　(1) $V = \dfrac{500}{s(1000s + 50)} = \dfrac{0.5}{s(s + 0.05)} = \dfrac{10}{s} - \dfrac{10}{s + 0.05}$

$v = 10 - 10e^{-0.05t}$、$v(20) = 10 - 10e^{-1} = 6.32$

(2) $Y = \dfrac{1}{2s + 1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{s + 0.5}$

$y = \dfrac{1}{2}e^{-t/2}$

答え　(1) $v = 10 - 10e^{-0.05t}$、20 秒後 約 6.32 m/s　(2) $\dfrac{1}{2}e^{-t/2}$

じぶんでとこう 7

(1) 質量 1500 kg、抵抗 75 N / (m/s) の車 $G = \dfrac{1}{1500s + 75}$ に、600 N を入れ続けたときの速さと、20 秒後の速さを求めましょう（$e^{-1} = 0.3679$）。

(2) 熱電対 $G = \dfrac{1}{30s + 1}$ のインパルス応答を求めましょう。

例題 8　ばねの周波数応答

6-13 のばね $G = \dfrac{1}{0.5s^2 + 0.4s + 8}$ を、$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$ の力でゆすります。(1) $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$、(2) $\omega = 8\,\mathrm{rad/s}$ のとき、落ち着いたゆれの大きさと、おくれの角を求めましょう（$\sqrt{36.64} \approx 6.053$、$\sqrt{586.24} \approx 24.21$、$\tan^{-1}\frac{0.8}{6} \approx 7.6°$）。

考え方　**場合：**sin を入れたときの倍率とおくれがほしい（表 9-8 の G）

名前　倍率 $|G(j\omega)|$、おくれは $G(j\omega)$ の角。

楽をする　変換も逆変換もしない。$s = j\omega$ を入れる。

式　(1) $s = 2j$ を入れる。$s^2 = (2j)^2 = -4$。

分母 $= 0.5 \times (-4) + 0.4 \times 2j + 8 = 6 + 0.8j$

$|G| = 1 \div \sqrt{36.64} \approx 0.1652$。ゆれ $0.8 \times 0.1652 \approx 0.132$

分母の点は右上（実部が正）で、角 $\tan^{-1}\frac{0.8}{6} \approx 7.6°$。$G$ は逆数なので $-7.6°$

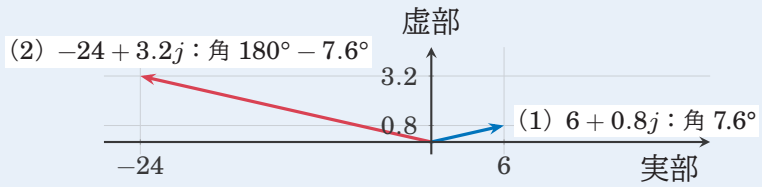
(2) $s = 8j$ を入れる。$s^2 = (8j)^2 = -64$。

分母 $= 0.5 \times (-64) + 0.4 \times 8j + 8 = -24 + 3.2j$

$|G| = 1 \div \sqrt{586.24} \approx 0.0413$。ゆれ $0.8 \times 0.0413 \approx 0.033$

分母の点は左上（実部が負）で、角は $180°$ から引いて

$180° - 7.6° = 172.4°$。G は $-172.4°$



答え　(1) 約 0.132 m、7.6° おくれる（6-13 と同じ）　(2) 約 0.033 m、172.4° おくれる

じぶんでとこう 8

例題 8 のばねを、$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$ でゆすります。(1) $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$、(2) $\omega = 5\,\mathrm{rad/s}$ のとき、ゆれの大きさと、おくれの角を求めましょう（$\sqrt{13.69} = 3.7$、$\sqrt{24.25} \approx 4.924$、$\tan^{-1}\frac{1.2}{3.5} \approx 18.9°$、$\tan^{-1}\frac{2}{4.5} \approx 24.0°$）。

例題 9　2 段のフィルターを dB で

⑨の 100 Hz のローパスフィルター $G = \dfrac{1}{\tau s + 1}$（$\omega\tau = \frac{f}{100}$）を、バッファーをはさんで 2 段つなぎます。300 Hz の信号の倍率を、1 段・2 段それぞれ dB と倍で求めましょう（$\log_{10} 10 = 1$）。

考え方　**場合：**箱が 1 列につながり、sin を入れたときの倍率がほしい（表 9-8 の B と G）

名前　2 段の伝達関数 $G \times G$ の $|G(j\omega)|$。

楽をする　直列はかけ算、dB はたし算。$s = j\omega$ を入れる。

式　$\omega\tau = \frac{300}{100} = 3$、$|G| = \dfrac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

1 段：$20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{10}} = -10\log_{10} 10 = -10\,\mathrm{dB}$

2 段：$-10 + (-10) = -20\,\mathrm{dB}$（たし算）。倍は $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \times \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{10}$

答え　1 段 $-10\,\mathrm{dB}$（約 0.316 倍）、2 段 $-20\,\mathrm{dB}$（0.1 倍）

じぶんでとこう 9

同じフィルターで、100 Hz の信号の倍率を、1 段・2 段それぞれ dB と倍で求めましょう（$\log_{10} 2 = 0.301$）。

例題 10　データから伝達関数を作る

モーターに $t=0$ から 1 V を加え続け、回る速さ（rad/s）をはかると、表のようになりました。1 次おくれ $\dfrac{K}{\tau s+1}$ として、K と τ を求めましょう。

t（s）	0	0.25	0.5	1	1.5	2	3
速さ	0	3.93	6.32	8.65	9.50	9.82	9.98

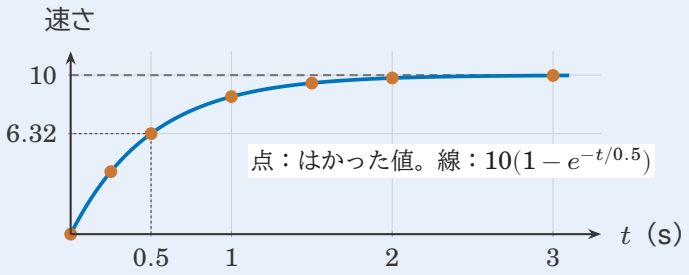
考え方　**場合：**実験のデータから作る（1 次おくれ）（表 9-8 の H）

名前　$G=\dfrac{K}{\tau s+1}$ の K と τ。

楽をする　最後の値 ÷ 1 V = K。最後の値の 63.2 % に着く時刻 = τ。

式　最後の値は約 10（3 秒で 9.98）なので $K=10\div 1=10$

$10\times 0.632=6.32$ に着くのは 0.5 秒なので $\tau=0.5$



答え　$K=10$、$\tau=0.5$ s。$G=\dfrac{10}{0.5s+1}$（表 2 のモーター）

じぶんでとこう 10

20 ℃の熱電対を、$t = 0$ に 80 ℃のお湯に入れると、読みは次のようになりました。本当の温度の上がり分（60 ℃）を入れたものとして、1 次おくれ $\dfrac{K}{\tau s + 1}$ の K と τ を求めましょう。

t（s）	0	10	20	30	60	90	150
読み（℃）	20	37.0	49.2	57.9	71.9	77.0	79.6

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 伝達関数に、はじめの値を入れる

× $1000\dot{v} + 50v = f$、$v(0) = 2$ から $G = \dfrac{V}{F} = \dfrac{F + 2000}{(1000s + 50)F}$

○ 伝達関数は、はじめの値を 0 にして作る。$G = \dfrac{1}{1000s + 50}$

$$\underset{\text{名前}}{G(s)} = \underset{\text{表を引く}}{\dfrac{1}{1000s + 50}}$$

はじめの値の分は、伝達関数とは別に、9-7 のように足します。伝達関数は「機械の性質」なので、F や $v(0)$ は入りません。

⚠ まちがえやすいところ

② フィードバックの符号

✕ 引いてもどすのに
$\dfrac{G_1}{1-G_1G_2}$

○ 引いてもどすなら
$\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$

1 周の式 $Y=G_1(R-G_2Y)$ を解くと、分母は $1+G_1G_2$ です。加え合わせ点の符号を見ます。

⚠ まちがえやすいところ

③ 振幅の dB で 10 log

✕ 倍率 $\frac{1}{10}$ を
$10\log_{10}\frac{1}{10}=-10\,\mathrm{dB}$

○ 振幅（電圧・ゆれ）の倍率は $20\log_{10}$ で $-20\,\mathrm{dB}$

10 log は電力の倍率のときです。電力は振幅の 2 乗なので、$10\log a^2=20\log a$（3-12）。

⚠ まちがえやすいところ

④ 6-13 の $G(\omega)$ と同じだと思う

✕ 6-13 の
$G(\omega)=(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2$
が伝達関数

○ 伝達関数は
$G(s)=\dfrac{1}{ms^2+cs+k}$。
6-13 の $G(\omega)$ は $\dfrac{1}{|G(j\omega)|^2}$

同じ文字でも、章ごとの名前のつけ方がちがいます。式で確かめます。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 行列の順番も入れかえる

✕ $C(sI-A)^{-1}B$ を
$BC(sI-A)^{-1}$ と入れかえる

○ 行列のかけ算の順番は変えない（7-3）

伝達関数どうしの $G_1G_2=G_2G_1$ は、ただの分数の式だから成り立ちます。行列では成り立ちません。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 名前の $G(s)$ に、時刻 t を入れる

✕ 車の $G(s) = \dfrac{1}{1000s + 50}$ に $s = 20$ を入れて、20 秒後の速さ

○ 時刻の動きは、$G \times U$ を表 9-7 でもどしてから、$t = 20$ を入れる

s は時刻ではありません（9-5）。$G(s)$ は s の世界の式で、時間の世界の値を知るには、もどす操作が必要です。s に入れてよい数は、$s = 0$（定常のゲイン）と $s = j\omega$（周波数応答）のように、意味のわかっているものだけです。

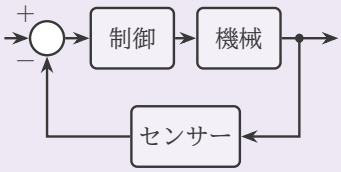
コラム　ワットの調速機から、スマートフォンまで

蒸気機関の回る速さを一定に保つ「調速機（ガバナー）」は、回る速さが上がると、おもりが遠心力で開いて、蒸気の弁をしぼるしくみです。速さをはかって、入れる側にもどすフィードバックそのものです。18 世紀の終わりにワットの蒸気機関に使われて広まったと伝えられています。その後、ゆれが止まらない調速機があることが問題になり、19 世紀にマクスウェルが、微分方程式でその安定を調べました。今では、スマートフォンの手ぶれ補正やカメラのピント合わせの中でも、フィードバック制御が働いています。

物理・工学ではこう使う

制御の設計図：ブロック線図

自動車のクルーズコントロール（速さを一定に保つしくみ）、エレベーター、ドローンの姿勢、工場の温度の制御など、機械を自動で動かすしくみは、まずブロック線図で設計します。「目標→制御する箱→機械→センサーでもどす」の形で、それぞれの箱を伝達関数で書けば、全体の伝達関数は⑦の式で 1 つにまとまります（物理 波-4、9-9・9-12）。



オーディオ：イコライザーとスピーカー

音楽の高い音や低い音を強めたり弱めたりするイコライザーは、周波数ごとの倍率（周波数応答）を dB で調整する装置です。スピーカー・アンプ・部屋の響きを直列の箱と考えると、全体の dB は、それぞれの dB のたし算で見積もれます（⑨。物理 波-11）。

防振：機械のゆれを伝えない

洗たく機や工場の機械の下に入れるゴム（防振ゴム）は、ばね・ダンパーの箱です。⑧のように $s = j\omega$ を入れると、ゆれの周波数が、その箱の固有角振動数よりずっと高ければ、床へ伝わるゆれの倍率は小さくなります。だから防振ゴムは、固有角振動数が、機械のゆれより十分低くなるように選びます（物理 波-2）。

章末問題

9-8 のまとめ

基本 ★★★★★

1 $4\dot{y}+y=2u$ の伝達関数と、$G(0)$ を求めましょう（例題 1）。

2 $G_1=\dfrac{4}{s+2}$ と $G_2=\dfrac{3}{s+6}$ を直列につないだ伝達関数と、定常のゲインを求めましょう（例題 2）。

3 同じ入力が $G_1=\dfrac{1}{s+1}$ と $G_2=\dfrac{2}{s+3}$ に入り、出たものをたします。全体の伝達関数を 1 つの分数で表しましょう（例題 3）。

4 例題 4 のモーターを $K_\mathrm{p}=10$ で比例制御します。全体の伝達関数、分母が 0 になる s、ずれを求めましょう（例題 4）。

5 車のからだ $G=\dfrac{1}{1000s+50}$ に 250 N を入れ続けたときの速さ v と、60 秒後の速さを求めましょう（$e^{-3}=0.0498$）（例題 7）。

6 例題 10 と同じ方法で、ステップ（2 V）を入れたときの最後の値が 30 rad/s、その 63.2 % に着くのが 0.2 s のモーターの伝達関数を求めましょう（例題 10）。

チャレンジ ★★★★★

7 例題 5 のエアコンを $RK_\mathrm{p}=19$ で比例制御します。落ち着く温度と時定数を求めましょう（例題 5）。

8 A の 1 行めが $(0,\ 1)$、2 行めが $(-6,\ -5)$、B と C が例題 6 と同じ状態方程式の伝達関数を求めましょう（例題 6）。

9 例題 8 のばねを $\omega = 6\,\mathrm{rad/s}$ でゆすります（$F_0 = 0.8\,\mathrm{N}$）。ゆれの大きさとおくれの角を求めましょう（電卓を使ってよい）（例題 8）。

10 例題 9 のフィルターを 3 段つなぐと、1 kHz の信号は何 dB になりますか。1 段は 1 kHz で $-20.04\,\mathrm{dB}$ です（例題 9）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐「入れると出てくる」箱を、伝達関数 $G(s) = Y(s) \div U(s)$ で表せることを、ブロック線図と表計算で説明できる。 → 349 ページ
- ☐ 微分方程式から伝達関数を作り、箱を直列・並列につないだ伝達関数と、ステップ応答・インパルス応答を求められる。 → 352 ページ
- ☐ 場合分けの表 9-8 を使って、フィードバック・状態方程式・周波数応答（dB）の場合も、伝達関数を求めて使える。 → 357 ページ

ミナ

伝達関数の分母が 0 になる s で、機械の動き方が決まっていたね。次の 9-9 では、その s を「極」とよんで、落ち着くかどうかを見分けるよ。

第 2 部　ラプラス変換

★★★★★

9-9 極と安定性：s の値でふるまいがわかる

道しるべ　この章の前に 3-1 3-10 6-4 6-8 6-12 7-8 9-6 9-7 9-8
この章の先に 9-10 9-11 9-12

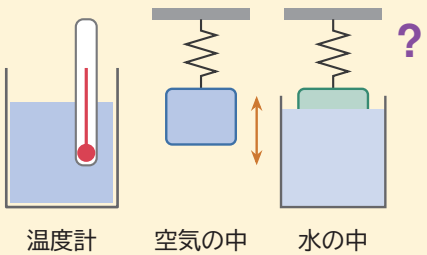
この章でできるようになること

- ★★★ 伝達関数の分母が 0 になる s（極）を s の平面に×で打ち、その場所から「ゆっくり追いつく・ゆれる・大きくなる」を当てられる。
- ★★★★ 1 次おくれ・2 次おくれの極から、時定数、行きすぎの大きさ、最初の山の時刻を求められる。
- ★★★★★ すべての極の実部が負かどうかで安定を判定し、フィードバックで極が動くようすと、3 次の式の安定の条件、残るずれを計算できる。

はてな？

お湯に入れた温度計の数字は、ゆっくり追いつきます。ばねにつけたおもりから手をはなすと、のびすぎて上下にゆれます。水の中なら、ゆれがすぐ小さくなり、空気の中ではなかなか止まりません。

こうした動き方を、グラフをかかずに、式の中の数を見るだけで当てられるでしょうか。



3 つとも「追いつき方」がちがう。

9-7 では、ラプラス変換と部分分数で、微分方程式の答えを式で求めました。9-8 では、「入れると出てくる」箱の中のきまりを、伝達関数 $G(s)$ という s の分数の式で書きました。

この章では、答えの式を全部求めなくても、伝達関数の**分母が 0 になる** s を見るだけで、機械や計器がどう動くかがわかることを学びます。6-12 で、特性方程式の解 s を複素平面に打つと「左半分なら落ち着き、右半分なら大きくなる」ことを見ました。6-12 は、そのとき「9-9 では、この点を『極』とよびます」と予告しました。この章で、その約束を果たします。

制御工学の目標は、機械が「ゆれずに・こわれずに落ち着く」ように作ることです。この章の考え方は、エアコン、モーター、ロボットの腕、車のサスペンション、工場の計器など、身のまわりの「自動で動く機械」の設計のいちばん土台になります。

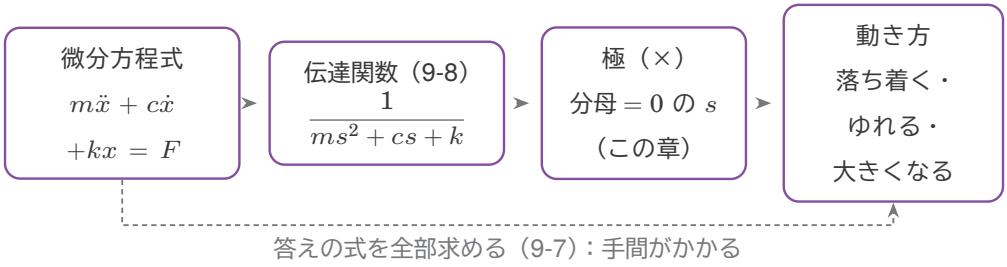


図 1　この章の道すじ。答えの式を全部求めなくても、伝達関数の分母から極を出せば、動き方がわかる。

★★★★★の章ですが、「目でわかる」と「手でわかる」の段は、グラフと 2 次方程式の解の公式（3-10）だけで読めるように書きました。「式でわかる」の段は、1 回でわからなくても大丈夫です。例題を 1 つずつ解いてから、もう一度読むと、すっと入ってきます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

6-4　$\dfrac{dT_m}{dt} = \dfrac{T_w - T_m}{\tau}$（$T_m$ は温度計の値）の答えは、差が $e^{-t/\tau}$ でへる形。時定数 τ〔s〕の時刻に、差は $e^{-1} \approx 0.368$ 倍。

6-12　$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に $x = e^{st}$ を入れると特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$。解 s を複素平面に打つと、左半分なら落ち着き、右半分なら大きくなる。

7-8　状態の行列 A の固有値 λ は、6-12 の特性方程式の解 s と同じもの。

9-7　$\dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \to e^{-t} - e^{-2t}$。部分分数の 1 つずつの項 $\dfrac{1}{s-p}$ が、e^{pt} にもどる。

9-8　伝達関数 $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$（はじめの値は 0）。フィードバックでつなぐと、全体は $\dfrac{G_1}{1 + G_1G_2}$。

9-6　最終値の定理：$f(t)$ が落ち着くなら、最後の値は $\lim_{s \to 0} sF(s)$。

やってみよう　温度計が追いつくようすを、表計算で見よう

20 ℃の部屋に置いてあった温度計を、80 ℃のお湯に入れます。この温度計の時定数（6-4）は $\tau = 30$ s です。6-4 で求めたとおり、温度計の値は $T = 80 - 60e^{-t/30}$ で追いつきます。

1. A 列に時刻 t（s）を入れる。A2 に `0`、A3 に `=A2+30` と入れ、A7（150）まで下へコピーする。
2. B2 に `=80-60*EXP(-A2/30)` と入れる（温度計の値）。
3. C2 に `=80-B2` と入れる（お湯の温度まで、あと何度か）。
4. D2 に `=C2/60` と入れる（はじめの差 60 ℃のうち、まだ残っている割合）。
5. E2 に `=1-D2` と入れる（もう追いついた割合）。2 行めの B〜E を下へコピーしよう。

②の 60 は、はじめの差 $80 - 20 = 60$（℃）です。$e^{-t/30}$ は、時間がたつと 0 に近づくので、T は 80 ℃に近づきます（6-4）。

	A	B	C	D	E
1	t（s）	温度計（℃）	残りの差（℃）	残りの割合	追いついた割合
2	0	20.00	60.00	1.000	0.000
3	30	57.93	22.07	0.368	0.632
4	60	71.88	8.12	0.135	0.865
5	90	77.01	2.99	0.050	0.950
6	120	78.90	1.10	0.018	0.982
7	150	79.60	0.40	0.007	0.993

表 1 表計算の結果。30 秒ごとに、残りの割合は 0.368 倍（e^{-1}）になる。

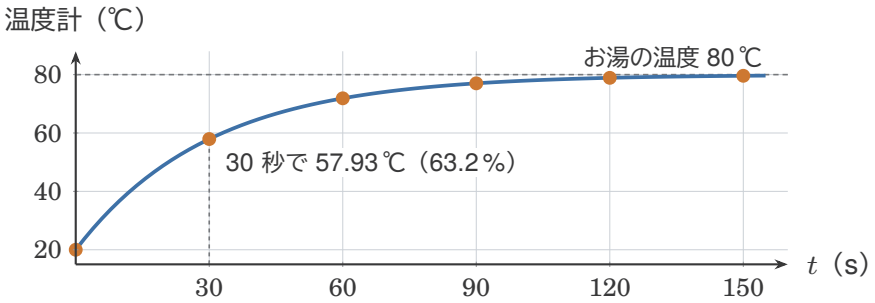


図 2 表 1 の値（オレンジの点）と、$T = 80 - 60e^{-t/30}$ のグラフ（青の線）。下から少しずつ 80 ℃に追いつき、行きすぎない。

表から、次のことがわかります。

1 30 秒（τ）で、63.2 % 追いつく。

残りの割合は 0.368 です。時定数の時刻 $t = 30$ では、次のようになるからです。

$$e^{-t/30} = e^{-30/30} = e^{-1} = 0.368$$

2 30 秒たつごとに、残りの差は 0.368 倍になる。

残りの割合は、0 秒で 1、30 秒で 0.368、60 秒で 0.135、90 秒で 0.050 です。$0.368 \times 0.368 = 0.135$、$0.135 \times 0.368 = 0.050$ です。

3 **90 秒（3τ）で 95 %、150 秒（5τ）で 99.3 %。**
行きすぎることは一度もなく、下から少しずつ追いつきます。

数学の道具

目でわかる 極の場所を見る ★★★

1 3 つの追いつき方と、分母が 0 になる s

はてな？ の 3 つの動きを、グラフにします。おもりは、6-13 のばね（$m = 0.5\,\mathrm{kg}$、$k = 8\,\mathrm{N/m}$）につけたものとします。$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{8 \div 0.5} = 4$（rad/s）です。「水の中」はダンパーの強さ $c = 1.2\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$（$\zeta = 0.3$）、「空気の中」はダンパーがほとんどない（$\zeta = 0$）と考えます。

それぞれの伝達関数（9-8）は、入れるもの（お湯の温度・つるした重さ）を 1 とすると、次のとおりです。

	伝達関数 $G(s)$	分母が 0 になる s
温度計	$\dfrac{1}{30s+1}$	$s = -\dfrac{1}{30}$
ばね（水の中）	$\dfrac{16}{s^2+2.4s+16}$	$s = -1.2 \pm 3.816j$
ばね（空気の中）	$\dfrac{16}{s^2+16}$	$s = \pm 4j$

表 2　3 つの伝達関数。ばねは $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = (\text{力})$ を m でわり、最後ののびを 1 にそろえた形（$\omega_\mathrm{n}^2 = 16$）。

分母が 0 になる s は、温度計なら $30s + 1 = 0$ を解いて $s = -\frac{1}{30}$。水の中のばねなら $s^2 + 2.4s + 16 = 0$ を解の公式（3-10）で解いて、

$$s = \frac{-2.4 \pm \sqrt{2.4^2 - 64}}{2} = \frac{-2.4 \pm \sqrt{-58.24}}{2} = -1.2 \pm 3.816j$$

です（$\sqrt{58.24} = 7.632$）。空気の中なら $s^2 = -16$ で、$s = \pm 4j$ です。

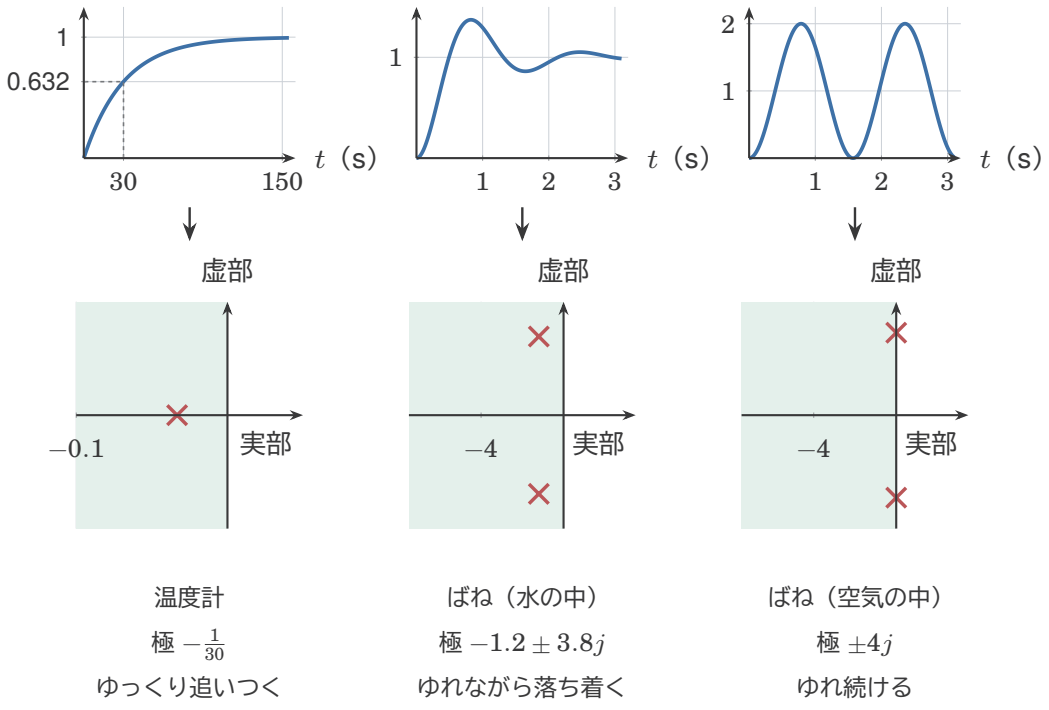


図 3　上は時間の世界（入れたものを 1 としたときの、温度計の値・おもりの位置）、下は s の世界（分母が 0 になる s を×で打った）。うすい緑は、実部が負の左半分。温度計の s の平面だけ、目もりを細かくした。

図 3 の上と下を見くらべます。

- ゆれない温度計は、×が横の軸（実数）の上にあります。
- ゆれるばねは、×が上と下に 1 つずつ、横の軸から同じだけはなれてあります。
- ゆれが消えていく（水の中）ときは、×が左半分にあります。ゆれが消えない（空気の中）ときは、×がたての軸の上にあります。

つまり、時間の世界のグラフをかかなくても、s の世界で×の場所を見るだけで、動き方の見当がつきます。これが、この章の考え方のすべてです。

② 名前をつける：極

伝達関数 $G(s)$ の分母が 0 になる s を、$G(s)$ の**極**（きょく）といいます。s の平面には×の印で打ちます。

6-12 で、特性方程式の解を複素平面に打ち、「解を左半分に置くことが、第 9 巻の制御工学の大きな目標です（9-9 では、この点を『極』とよびます）」と書きました。伝達関数の分母は、特性方程式の左辺と同じ式です（ばねなら $ms^2 + cs + k$）。だから、**6-12 の特性方程式の解 s が、そのまま伝達関数の極**です。9-0 の図 9 の車 A・車 B の×も、極です。

①名前の段　「極」は名前。値は、分母 $= 0$ を解いて出す

「極」は、「$G(s)$ がかぎりなく大きくなる s」につけた名前です。名前を聞いただけでは、まだ s の値はわかりません。実際の値は、分母を 0 と置いた方程式を解いて求めます。

$$\underbrace{G(s) \text{ の極}}_{\text{名前}} = \boxed{\text{分母} = 0 \text{ の解 } s}$$

なぜ「極」という名前なのか

分数は、分母が 0 に近づくと、かぎりなく大きくなります。9-7 の次の $G(s)$ で、s を横の軸の上（実数）で動かして、$|G(s)|$ の大きさをグラフにかいてみます。

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

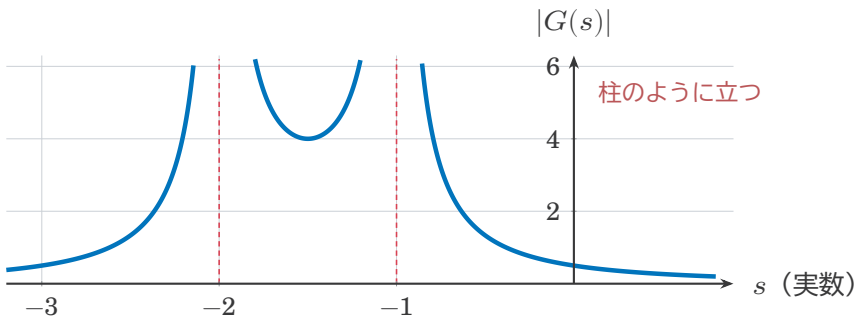


図 4　$|G(s)| = \left|\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\right|$ の大きさ。$s = -1$ と $s = -2$（赤い点線）で、分母が 0 になり、グラフがかぎりなく高くなる。

$s=-1$ と $s=-2$ の所で、グラフはテントの柱のように、まっすぐ上へのびていきます。s の平面全体で $|G(s)|$ を高さにして山の形をかくと、極の所に、かぎりなく高い柱が立ちます。英語では、この点を pole（柱・さお）といいます。日本語の「極」は、このことばを訳したものです。

なぜ極の場所で、動き方が決まるのか

9-7 で、この $G(s)$ を部分分数に分けて、表を逆に引きました。

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \quad \longrightarrow \quad e^{-t}-e^{-2t}$$

左の分数の分母 $s+1$ が 0 になるのは $s=-1$、$s+2$ が 0 になるのは $s=-2$ で、これが極です。そして、もどした答えの e^{-t} と e^{-2t} の肩の数（-1 と -2）は、ちょうど極の値です。表 9-6 の「$\frac{1}{s-p} \longleftrightarrow e^{pt}$」のとおり、**極 p は、答えの中の e^{pt} になる**のです。

> 極 p が 1 つあると、動きの中に e^{pt} が 1 つ入る

だから、極の場所を見れば、答えの中にどんな e^{pt} が入っているかがわかり、動き方の見当がつきます。極が複素数 $p=\sigma+j\omega$ のときは、6-10 のオイラーの公式から

$$e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

なので、実部 σ が「大きくなるか・小さくなるか」を、虚部 ω が「ゆれの角周波数」を決めます（6-12 で $-\alpha\pm j\omega_{\mathrm{d}}$ と書いたものと同じです。この巻では、実部を 6-10 と同じ σ で書きます）。

分子が 0 になる s：零点

分母ではなく、**分子**が 0 になる s もあります。これを**零点**（れいてん）といい、s の平面に○の印で打ちます。たとえば $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ は、$s=-3$ が零点で、極は -1 と -2 です。零点は、⑥で見るように、動きの形（行きすぎの大きさな

ど）を少し変えますが、**落ち着くかどうかは決めません**。落ち着くかどうかを決めるのは極だけです。

③ 極の地図

6-12 ⑩の図に、極の×と、それぞれの動きを書きこむと、次の「極の地図」ができます。

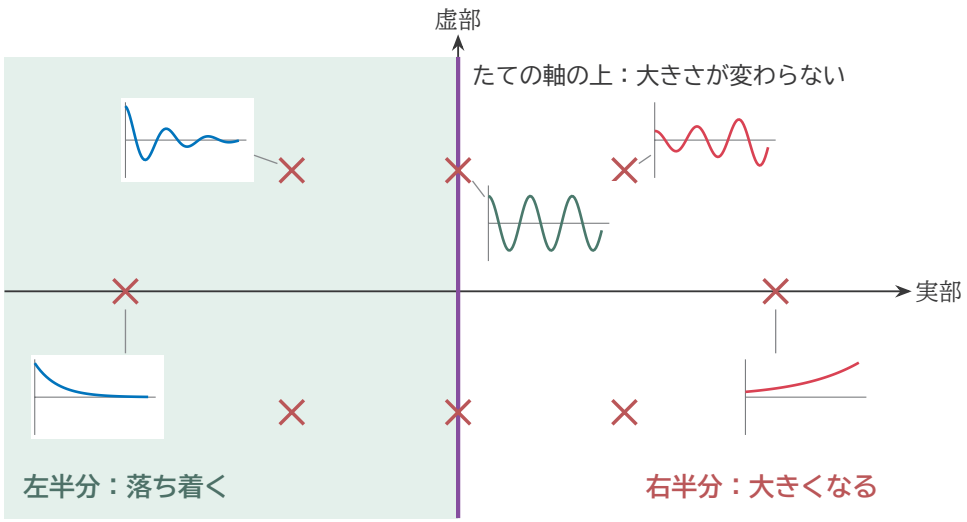


図 5　極の地図。×は極、小さなグラフは、細い線でつないだ×（上下の組のときは上の×）があるときの動き。うすい緑は、実部が負の左半分。横の軸の上の極はゆれず、横の軸からはなれた極（上と下の組）はゆれる。左半分は落ち着き、右半分は大きくなる。

地図の読み方は、2 つだけです。

① 左右（実部 σ）を見る。

左半分（$\sigma < 0$）なら $e^{\sigma t}$ が小さくなって落ち着きます。左へ遠いほど早く落ち着きます。右半分（$\sigma > 0$）なら $e^{\sigma t}$ が大きくなり、どこまでも大きくなります。たての軸の上（$\sigma = 0$）なら、大きさが変わりません（虚部があればゆれ続け、原点なら止まったまま）。

② 上下（虚部 ω）を見る。

横の軸の上（$\omega = 0$）なら、ゆれません。横の軸から上下にはなれているほど、速くゆれます（角周波数が ω）。複素数の極は、いつも上と下の 2 つが組になって出てきます（6-8 の共役な解）。

はてな？の答え

はい、当てられます。伝達関数の分母を 0 と置いて解き、極を s の平面に打てばよいのです。温度計の極 $-\frac{1}{30}$ は左の横の軸の上なので「ゆっくり追いつく」、水の中のばねの極 $-1.2 \pm 3.816j$ は左半分の上下なので「ゆれながら落ち着く」、空気の中のばねの極 $\pm 4j$ はたての軸の上なので「ゆれ続ける」と、グラフをかかずにわかります。

たいせつ

- **伝達関数の分母が 0 になる s が極（×）、分子が 0 になる s が零点（○）。**
- **極 p が 1 つあると、動きの中に e^{pt} が 1 つ入る。**
- **極の実部が負なら落ち着き、正なら大きくなり、0 なら大きさが変わらない（虚部があればゆれ続ける）。虚部があれば、ゆれる。**

手でわかる 1 次おくれと 2 次おくれ ★★★★

4 1 次おくれ：極が 1 つ、横の軸の上

6-4 のコラムで、工場の熱電対（温度をはかるセンサー）は「時定数 τ ほどおくれて追いつきます。このような反応を、制御工学では 1 次おくれといいます(9-9)」と書きました。やってみようの温度計も、1 次おくれです。式で書くと、出てくるもの y と入れるもの u が

$$\tau \dot{y} + y = Ku$$

の形で結ばれているものを、**1 次おくれ**（いちじおくれ）といいます。微分が 1 回（1 次）だけの式で、入れたものに「おくれて」追いつくので、この名前があります。温度計なら $K = 1$、$\tau = 30$ です（6-4 の $\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{T_\mathrm{w} - T_\mathrm{m}}{\tau}$ の両辺に τ をかけて、T_m を左へ移すと、この形になります）。

伝達関数と極

9-8 の作り方（表 9-8 の A）で、伝達関数を作ります。

$$\tau\dot{y} + y = Ku$$ 1 次おくれの式

$$\tau sY + Y = KU$$ はじめの値を 0 にして、$\dot{y} \to sY$（9-8）

$$(\tau s + 1)Y = KU$$ Yでくくった

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{K}{\tau s + 1}$$ 両辺を $(\tau s + 1)U$ でわった

分母 $\tau s + 1$ を 0 と置くと、$s = -\frac{1}{\tau}$。極は 1 つで、横の軸の上の、原点から $\frac{1}{\tau}$ だけ左の点です。

> 1 次おくれ $\dfrac{K}{\tau s + 1}$ の極は $-\dfrac{1}{\tau}$（時定数の逆数だけ左）

ステップの入力で、極を確かめる

入れるものを、$t = 0$ から 1 にした（ステップ。$U = \frac{1}{s}$）ときの答えを、9-7 と同じ部分分数で求めます。

$$Y = \frac{K}{s(\tau s + 1)} = \frac{K/\tau}{s\,(s + 1/\tau)}$$ $Y = GU$。分母・分子を τ でわった

$$= K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}\right)$$ 部分分数（9-7 の B）

$$y = K(1 - e^{-t/\tau})$$ 表を逆に引いた

答えの中の $e^{-t/\tau}$ の肩の数 $-\frac{1}{\tau}$ が、ちょうど極です（②）。$\frac{1}{s}$ のほうは入れたもの（ステップ）から来た項で、最後の値 K を決めます。時定数ごとに何 % 追いついたかは、やってみようの表と同じです。

時刻	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
追いついた割合（%）	63.2	86.5	95.0	98.2	99.3

表 3　1 次おくれのステップの答え。$1-e^{-1}=0.632$、$1-e^{-3}=0.950$ のように計算した。

$4\tau \sim 5\tau$ たつと、ほぼ落ち着いたと考えてよいので、工場では、この時間を「落ち着くまでの時間」（整定時間の目安）にします。

極が左にあるほど、速く追いつく

時定数 $\tau = 30\,\mathrm{s}$ の温度計と、細くて熱をためにくい $\tau = 10\,\mathrm{s}$ の温度計をくらべます。極は $-\frac{1}{30} \approx -0.033$ と $-\frac{1}{10} = -0.1$ です。

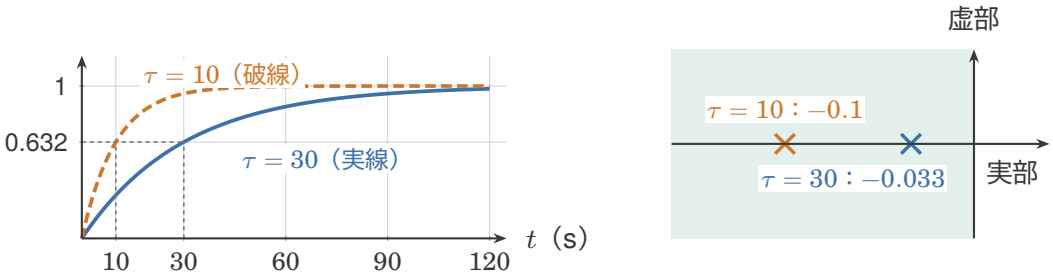


図 6　時定数のちがう 2 つの温度計。左は時間の世界、右は s の世界（うすい緑は左半分）。極が左にある（$-\frac{1}{10}$）ほうが、3 倍速く追いつく。

$\tau = 10$ の温度計は、10 秒で 63.2 % に着きます。$e^{-t/10}$ の小さくなり方は、$e^{-t/30}$ の 3 倍の速さです。**極が原点から左へ遠いほど、e^{pt} が速く小さくなり、速く落ち着きます。**

6-4 の熱電対：上がり続ける温度を追いかけると

6-4 のコラムの図は、タンクの温度が 1 秒に $r = \frac{1}{30}$ ℃（1 分に 2 ℃）ずつ上がり続けるとき、$\tau = 30\,\mathrm{s}$ の熱電対が、いつも $r\tau = 1$ ℃だけ低い値を指す、というものでした。9-7 で、このランプ（坂道）の入力 $U = \dfrac{r}{s^2}$ を部分分数で解くと、

$$Y = \frac{r}{s^2(\tau s+1)} = r\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s+1/\tau}\right) \longrightarrow y = r\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right)$$

でした。本当の温度 rt とのちがい（おくれ）は $rt - y = r\tau(1 - e^{-t/\tau})$ です。ここにも極 $-\frac{1}{\tau}$ の $e^{-t/\tau}$ が入っていて、30 秒で 0.632 ℃、60 秒で 0.865 ℃、150 秒で 0.993 ℃と、$r\tau = 1$ ℃に近づきます。速く変わる温度をはかるには、極が左にある（τ の小さい）計器を選びます。

5 2 次おくれ：極が 2 つ、上と下

ばね・質量・ダンパーの式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$ を m でわり、6-12 の $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$、$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ を使うと、$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m}$ になります。最後ののびを 1 にそろえた伝達関数は、次の形です。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

分母が 2 次式（微分が 2 回）なので、この形を **2 次おくれ**（にじおくれ）といいます。6-12 の物理・工学で「制御工学の『2 次遅れ』」と書いたものです。RLC 回路（$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V$）も、モーターで動かすロボットの腕も、この形になります。

極の場所と、ζ・ω_n

$\zeta < 1$ のとき、分母 $= 0$ を解の公式で解くと（6-12 ⑥と同じ計算）、

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d \qquad (\sigma = \zeta\omega_n、\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$$

です。この 2 つの極の場所を、図にかきます。

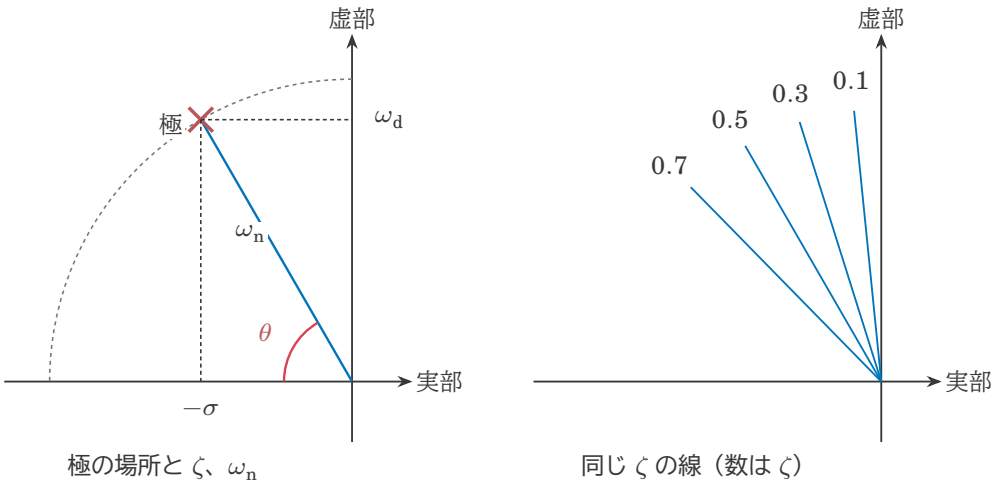


図 7　左：上の極（下の極は横の軸で折り返した所）。原点からの距離は ω_n、横の軸から測った角 θ は $\cos\theta = \zeta$。右：ζ が同じ極は、原点を通る同じ直線の上にある。

- **原点からの距離は** ω_n：三平方の定理（4-4）で、次のようになるからです。

$$\sigma^2 + \omega_d^2 = \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2) = \omega_n^2$$

- **角** θ **は** $\cos\theta = \zeta$：横の軸の向きの長さが $\sigma = \zeta\omega_n$、ななめの長さが ω_n なので、$\cos\theta = \dfrac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$ です（4-8）。$\zeta = 1$ なら $\theta = 0°$ で、極は横の軸の上（重解）。$\zeta = 0$ なら $\theta = 90°$ で、たての軸の上です。

行きすぎの大きさは、ζ（角）だけで決まる

$\omega_n = 4\,\mathrm{rad/s}$（6-13 のばね）で、$\zeta$ だけを変えたステップの答えをくらべます。

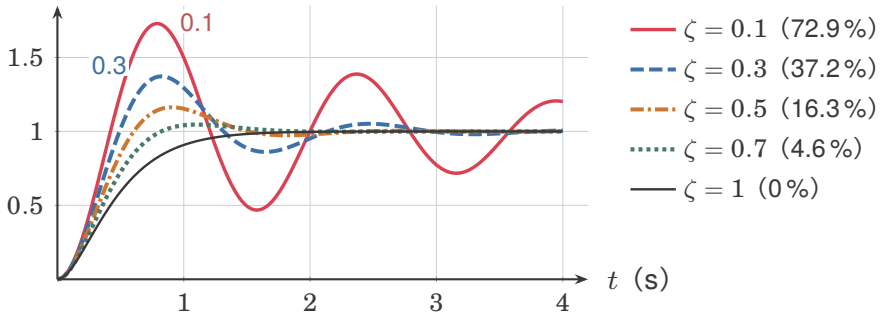


図 8　2 次おくれのステップの答え（$\omega_n = 4\,\mathrm{rad/s}$）。右の見本の線の形と色で区別する（かっこの中は行きすぎ）。ζ が小さいほど、大きく行きすぎて、長くゆれる。

最後の値（1）より上へ出た分を、**行きすぎ**（オーバーシュート）といい、最後の値の何 % かで表します。行きすぎは、次の式で計算でき、ζ だけで決まります（わけは、この節のせいかくに言うとで）。

$$\text{行きすぎ} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{最初の山の時刻} = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}}$$

ζ	0.1	0.3	0.5	0.7	1
極の角 θ	84.3°	72.5°	60°	45.6°	0°
行きすぎ（%）	72.9	37.2	16.3	4.6	0
最初の山（s）	0.789	0.823	0.907	1.100	なし

表 4　ζ と行きすぎ。最初の山の時刻は $\omega_\mathrm{n} = 4\,\mathrm{rad/s}$ のとき。$\zeta = 0.1$ は 6-13 のばね（$\omega_\mathrm{d} = 3.980\,\mathrm{rad/s}$）。

図 7 の右のように、同じ直線の上の極は、ω_n がちがっても、同じ ζ で、同じ行きすぎになります。ω_n（原点からの距離）は、速さだけを決めます。**極の「角」が行きすぎを、「距離」が速さを決める**のです。

設計する人は、ζ で極の角を選ぶ

6-12 の物理・工学で、「モーターでロボットの腕を動かすとき…行きすぎと速さのかね合いで ζ を選びます（9-9）」と書きました。物をつかむロボットの腕なら、行きすぎて物にぶつからないよう、$\zeta = 0.7$（行きすぎ 4.6 %）くらいの角に極を置くことがよくあります。どうやって極をその場所へ動かすかは、⑨で見ます。

車のサスペンションでは、3-10 で「実際の車は、ほんの少しだけゆれるように」と書きました。1 輪分を $m = 250\,\mathrm{kg}$、$k = 16\,000\,\mathrm{N/m}$、$c = 2000\,\mathrm{N{\cdot}s/m}$ とすると、次のようになります。

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{16\,000 \div 250} = 8\,\mathrm{rad/s}\ (8 \div 2\pi \approx 1.27\,\mathrm{Hz})$$

$$\zeta = \frac{2000}{2\sqrt{250 \times 16\,000}} = \frac{2000}{4000} = 0.5$$

極は $-4 \pm 6.93j$ で、$\theta = 60°$ の線の上にあります。車体を上から一定の力でおしたときの行きすぎは 16.3 % で、「ほんの少しだけゆれる」が、数で言えるようになりました。乗用車の ζ は、0.2〜0.5 くらいにすることが多いとされ、この章では 0.5 の例で計算します。

せいかくに言うと

行きすぎの式のわけ

$\frac{1}{s} \times G(s)$ を、9-7 の場合 D（平方完成）で分けます。$s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2 = (s+\sigma)^2 + \omega_d^2$ です（$\omega_n^2 - \sigma^2 = \omega_d^2$）。

$$Y = \frac{\omega_n^2}{s\{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2\}} \qquad \frac{1}{s} \times G(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \qquad \text{通分すると分子が } \omega_n^2 \text{ にもどる}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} - \frac{\sigma}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \qquad \text{分子を } (s+\sigma) \text{ と定数に分けた}$$

$$y = 1 - e^{-\sigma t}\left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t\right) \qquad \text{表を逆に引いた（9-7）}$$

$$\dot{y} = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin \omega_d t \qquad \text{微分して整理した}$$

$\dot{y} = 0$ になる最初の時刻（山）は $\sin \omega_d t = 0$ の $\omega_d t = \pi$ です。そのとき $\cos \pi = -1$、$\sin \pi = 0$ なので、$y = 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d}$。$\sigma/\omega_d = \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ なので、行きすぎは $e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ で、ω_n に関係しません。σ/ω_d は、図 7 の角 θ で決まる数（$1/\tan\theta$）です。

6 零点があると：段差をこえる車

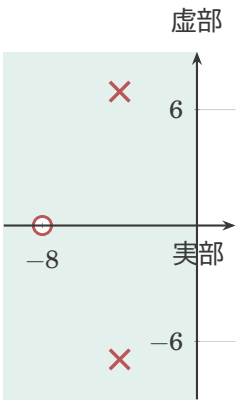
車が高さ x_r の段差をこえると、ばねとダンパーは、車体の位置 x と路面の高さ x_r の差でのび縮みします。

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{\mathrm{r}}) - c(\dot{x} - \dot{x}_{\mathrm{r}})$$　ばねとダンパーの力（差で決まる）

$$(ms^2 + cs + k)X = (cs + k)X_{\mathrm{r}}$$　はじめの値を 0 にして変換し、移項した

$$G(s) = \frac{X}{X_{\mathrm{r}}} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$　路面から車体への伝達関数

分子 $cs + k$ が 0 になる $s = -k/c = -16\,000 \div 2000 = -8$ が零点（○）です。極は⑤と同じ $-4 \pm 6.93j$（×）です。



c (N·s/m)	ζ	いちばん高い所	零点がないとき
1000	0.25	7.53 cm	7.22 cm
2000	0.5	6.49 cm	5.82 cm
4000	1	5.68 cm	5.00 cm ＊
8000	2	5.24 cm	5.00 cm ＊

図 9　左：$c = 2000$ のときの極（×、$-4 \pm 6.93j$）と零点（○、-8）。うすい緑は左半分。右：5 cm の段差をこえたときの車体のいちばん高い所（Python の数値）。「零点がないとき」は、分子を k だけにした伝達関数の答え。＊は、5 cm をこえず、下から近づく。

表から、次のことがわかります。

- 零点があると、同じ極でも、行きすぎが少し大きくなります。分子の cs は、路面が急に上がった瞬間の速さを、ダンパーがそのまま車体へ伝える分です。
- $\zeta = 1$（$c = 4000$）でも、零点のせいで、5 cm より上へ行きすぎます。「$\zeta = 1$ なら行きすぎない」は、分子が定数のときだけの話です。
- それでも、どの c でも車体はちゃんと落ち着きます。**零点は形を変えますが、落ち着くかどうかは極だけで決まります。**

ここまでで十分

伝達関数の分母を 0 と置いて極を求め、1 次おくれなら時定数、2 次おくれなら ζ と行きすぎを、極の場所から読めれば十分です。この先は、安定かどうかの判定と、フィードバックで極を動かす話です。

∂ 式でわかる 安定の判定と、極を動かす ★★★★★

7 安定：すべての極の実部が負

入れるものを 0 にしたあと（または一定にしたあと）、動きがやがて落ち着くことを、**安定**（あんてい）といいます。どこまでも大きくなる動きが入っていれば**不安定**です。②で見たとおり、極 p が 1 つあると動きの中に e^{pt} が 1 つ入るので、安定かどうかは、次のように極だけで決まります。

安定 $\iff$ すべての極の実部が負（すべての×が左半分）

なぜ「すべて」なのか

極が -1 と 2 の次の $G(s)$ を、9-7 の場合 B で分けます。

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$ 部分分数の形を置く（9-7）

$$A = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$ かくす方法（9-7）：そのかっこをかくして、極の値を代入

$$\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$ 表を逆に引いた

e^{-t} の項はすぐ消えますが、e^{2t} の項は、10 秒後には $\frac{1}{3}e^{20}$、約 1.6 億になります。極が 1 つでも右半分にあると、その項がどこまでも大きくなって、ほかの

項がいくら早く消えても、全体は大きくなります。だから、「すべての極」の実部が負でなければなりません。

極が重なって te^{pt} の形が出るとき（9-7 の場合 C）も、p の実部が負なら、5-18 で見たとおり t がかかっていても 0 に近づきます。だから、この判定はそのまま使えます。

実部が 0 の極は「安定」とはいわない

空気の中のばね（極 $\pm 4j$）は、こわれはしませんが、いつまでもゆれ続けて落ち着きません。このように、たての軸の上の極が 1 つずつ（重ならない）ときは、安定とはいわず、専門書では「安定の限界」「安定限界」とよびます。ところが、たての軸の上に同じ極が重なってあると、$t \sin 4t$ のように、ゆれがだんだん大きくなります（6-13 の共振）。これは不安定です。原点の極（$s = 0$）も同じで、1 つだけなら止まった所にそのまま残り、重なると t のように大きくなります。

極は、状態の行列の固有値

7-8 で、「第 9 巻の制御では、固有値が全部『左半分』（実部が負）にあるように機械を作る」と書きました。3-10 の車 A $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$ を、7-8 と同じ状態の行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

です。A の固有値を求める式を、$\det(sI - A) = 0$ の形で作ります。7-8 の $\det(A - \lambda I) = 0$ と同じ解になります。

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}$$ 対角成分は $s-0$ と $s-(-3)$

$$\det(sI-A) = s(s+3) - (-1)\times 2$$ $ad-bc$（7-4）

$$= s^2 + 3s + 2$$ 展開した

これは、車 A の伝達関数（s^2+3s+2 分の 1）の分母そのものです。だから、**極＝状態の行列の固有値**で、「固有値が全部左半分」と「すべての極の実部が負」は、同じことを言っています。くわしくは 9-10・9-11 で学びます。

2 次式なら、係数を見るだけでわかる

分母が $s^2 + a_1 s + a_0$ のとき、6-12 ③の解と係数の関係から、2 つの極 p_1、p_2 には $p_1 + p_2 = -a_1$、$p_1 p_2 = a_0$ が成り立ちます。

- 極が 2 つとも実数のとき：2 つとも負 $\iff$ 和が負で積が正 $\iff$ $a_1 > 0$ かつ $a_0 > 0$。
- 極が複素数の組 $-\sigma \pm j\omega_\mathrm{d}$ のとき：和は -2σ、積は $\sigma^2 + \omega_\mathrm{d}^2$（いつも正）。実部が負 $\iff$ $\sigma > 0 \iff a_1 > 0$。

> 2 次の判定：$s^2 + a_1 s + a_0$ は、$a_1 > 0$ かつ $a_0 > 0$ なら安定

（s^2 の係数が 1 でないときは、全体をその係数でわってから見ます。）解かずに判定できるので、③楽をする段の道具です。

8 場合分けの表と流れ図

極を求めたり、安定かどうかを判定したりするとき、どんな式なら、どうすればよいかを表にまとめます。

場合分けの表 9-9　極と安定：どんなときに、どうする？

記号	こんなとき	手順	例題
A	分母が 1 次式（$\tau s+1$ など）	直す　1 次方程式を解く。$\tau s+1$ なら極は $-\dfrac{1}{\tau}$。$\tau>0$ なら安定	2・6・7
B	分母（2 次以上）が、$(s-p)$ や $(s+\sigma)^2+\omega^2$ だけでできている（$p\cdot\sigma$ は 0 でもよい。s^2+4^2 もふくむ。かけ算してあってもよい）	楽をする　解かない。かっこごとに 0 と置いて、極を読む	1・4
C	分母が 2 次式（分かれていない）	直す　解の公式（3-10）。$\zeta\cdot\omega_n$ も読む。安定かだけなら 2 次の判定（係数がすべて正）	3・5・8
D	分母が 3 次式（分かれていない）	楽をする　安定かだけなら 3 次の判定：係数がすべて正で $a_2a_1>a_0$（⑩）。$(s+a)^3+K$ の形なら、極は 3 乗根で求まる	9
E	分母が 4 次以上（分かれていない）	楽をする　Python の `np.roots` で極を出し、実部の符号を見る	10
F	フィードバックでつないだ全体の極	直す　全体 $\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$ を通分して、分母の式を作る → 下の問いへ	6〜9
G	状態方程式 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+B\vec{u}$ で書いてある	行列の計算　$\det(sI-A)$ を作る（極＝固有値）→ 下の問いへ	5

F・G は、分母の式を作るまでの手順です。作った式が何次式かで、A〜E のどれかへ進みます。

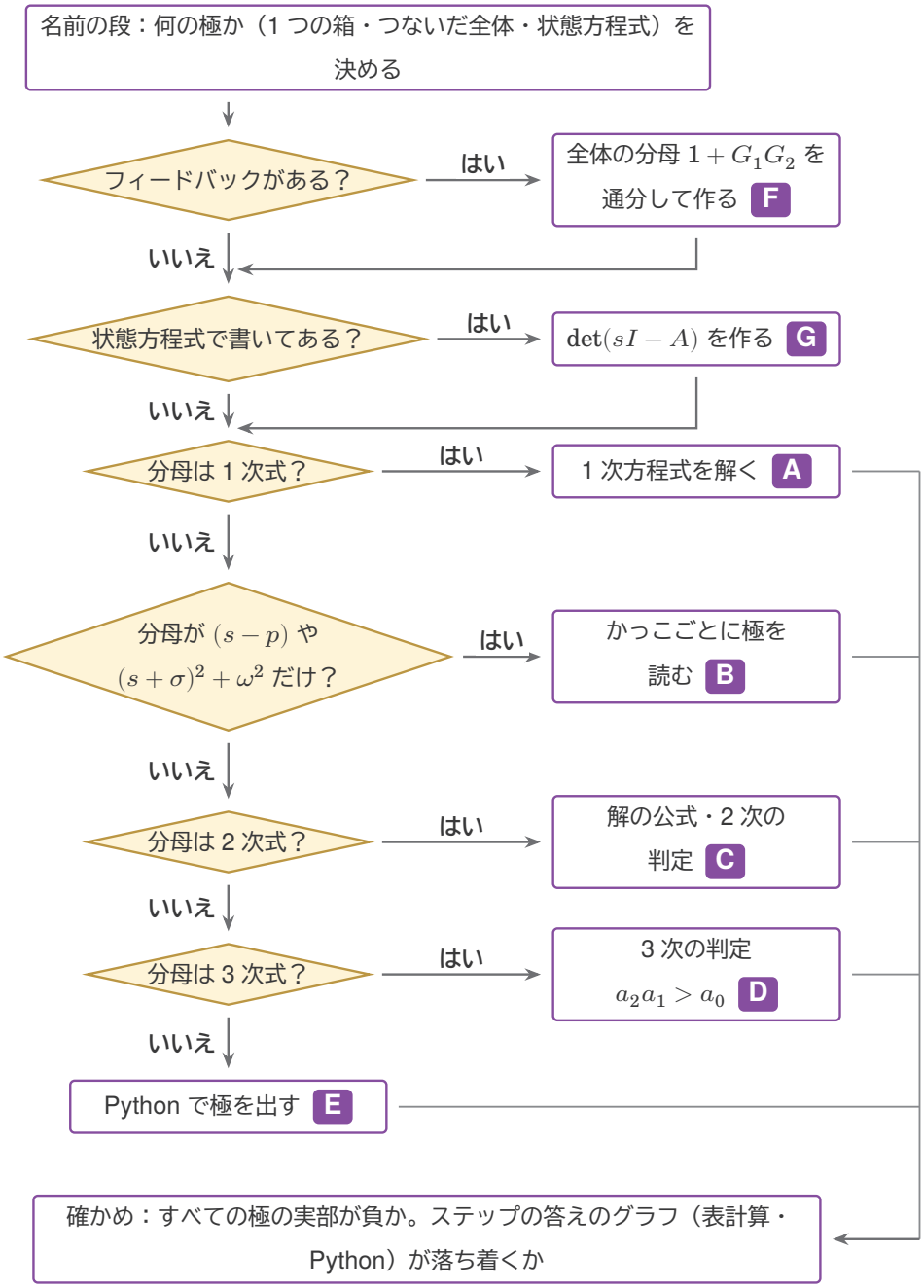


図 10 極と安定の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。F・G のあとは、左の列の次の問いへもどる。極を求めた四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。

①名前の段　何の極かを決める

「極」も「安定」も名前です。まず、何の極を調べるのか（1 つの箱の伝達関数か、フィードバックでつないだ全体か、状態方程式か）を決めます。

②直す段　分母 $= 0$ を解く

分母が 1 次式なら 1 次方程式、2 次式なら解の公式（3-10）で解きます。状態方程式なら、行列の計算で $\det(sI - A)$ を作ってから解きます。

③楽をする段　解かずに見る・数値にまかせる

分母が $(s - p)$ や $(s + \sigma)^2 + \omega^2$ だけでできていれば、解かずに読めます。安定かどうかだけなら、2 次・3 次の判定の式で、解かずにわかります。4 次以上は、Python に解かせます。

流れ図の使い方：水の中のばね

①の水の中のばねの伝達関数をたどります。

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 2.4s + 16}$$

1. 名前の段：1 つの箱（ばね）の伝達関数の極を調べる。
2. フィードバックがある？　いいえ。状態方程式で書いてある？　いいえ。
3. 分母は 1 次式？　いいえ。
   分母が $(s - p)$ や $(s + \sigma)^2 + \omega^2$ だけ？　いいえ（$s^2 + 2.4s + 16$ のまま）。
4. 分母は 2 次式？　はい。

こうして場合 C に決まり、①でしたとおり解の公式で $-1.2 \pm 3.816j$ が出ます。2 次の判定なら、$2.4 > 0$、$16 > 0$ を見るだけで安定とわかります。

例題を、流れ図でたどってみよう

この章の例題 1〜10 を、図 10 の流れ図の上から順にたどると、次のようになります（書いていない問いは「いいえ」）。どれも、考え方の 1 行めの場合に着きます。じぶんでとこうも同じ道すじです。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	極の場所から動きを当てる	分母が $(s-p)$ や $(s+\sigma)^2+\omega^2$ だけ	B
2	1 次おくれの温度センサー	分母は 1 次式	A
3	2 次おくれの極と行きすぎ	分母は 2 次式	C
4	零点と極	分母が $(s-p)$ だけ	B
5	状態方程式から極を求める	状態方程式 → 分母は 2 次式	G→C
6	モーターの比例制御	フィードバック → 分母は 1 次式	F→A
7	エアコンの比例制御	フィードバック → 分母は 1 次式	F→A
8	ロボットの腕の ζ を選ぶ	フィードバック → 分母は 2 次式	F→C
9	3 次の電気炉の安定	フィードバック → 分母は 3 次式	F→D
10	4 次の式を Python で	（すべて「いいえ」）	E

表 5　例題 1〜10 の流れ図の道すじ。

どの場合かな？

次の極は、場合分けの表 9-9 のどの場合で求めるでしょう。流れ図を上からたどって、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1. $\dfrac{3}{(s+2)(s+7)}$ の極
   答え：**B**。分母が $(s-p)$ だけでできている。
2. $\dfrac{5}{8s+1}$ の極
   答え：**A**。分母は 1 次式。
3. $\dfrac{1}{s^3+4s^2+5s+2}$ が安定かどうか
   答え：**D**。分母は 3 次式（分かれていない）。
4. 箱 $\dfrac{2}{s+3}$ の出口をはかって、ずれ（目標− 出口）を入口へもどしたときの全体の極
   答え：**F**→**A**。全体の分母 $s+3+2=s+5$ を作ると 1 次式。

9 フィードバックで極が動く

9-8 では、モーターの速さを、目標とのずれに比例した電圧で動かしました（比例制御）。そのとき、全体の極がどこへ動くかを調べます。

モーターの速度制御

モーターの伝達関数（電圧 → 回る速さ）は、9-8 の次の式です（1 V で 10 rad/s、時定数 0.5 s）。

$$\frac{10}{0.5s+1}$$

目標の速さとのずれに K_p をかけた電圧を加えます。全体の伝達関数は、9-8 のフィードバックの式で、G_1 を「K_p 倍してからモーター」、はかってもどす箱を $G_2=1$ として、

$$\frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{\dfrac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1}}{1+\dfrac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1}}$$ 9-8 のフィードバックの式

$$= \frac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1+10K_\mathrm{p}}$$ 分母・分子に $0.5s+1$ をかけた

$$0.5s+1+10K_\mathrm{p} = 0$$ 分母 $= 0$

$$s = -2(1+10K_\mathrm{p})$$ 両辺を 0.5 でわって移項した

です（場合 F → A）。制御しないときの極は -2（$0.5s+1=0$）でした。

K_p	全体の極	時定数（s）	目標に対する残りのずれ
0.1	-4	0.25	50％
1	-22	0.045	9.1％
10	-202	0.005	1.0％

表 6 比例の強さ K_p と、モーターの全体の極。ずれは⑪で求める。

比例を強くすると、極は横の軸の上を左へ動き、速く落ち着くようになります。

ロボットの腕の角度

ロボットの腕を、モーターの力で決まった角度へ動かします。腕の回りにくさ（慣性モーメント）を 1、軸のまさつを 2（どちらも、計算しやすいように単位をそろえた数）とすると、腕の角度 θ は $\ddot{\theta}+2\dot{\theta}=u$（$u$ はモーターの力）にしたがいます。伝達関数は次の式で、極は 0 と -2 です。

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)}$$

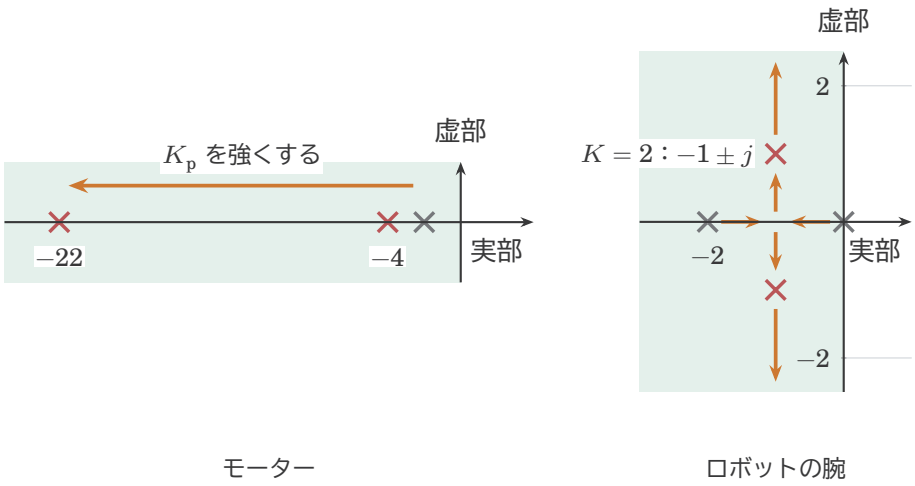
極 0 は、腕を一度おすと、止まった所にそのままいる（もどらない）ことを表します。

目標の角度とのずれに K をかけた力を加えると、全体の分母は s^2+2s+K になります（場合 F → C。モーターと同じ計算）。

$$s^2 + 2s + K = 0 \qquad s = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

K	全体の極	ζ	行きすぎ
0.5	-0.29、-1.71	1.41	0 %
1	-1（重解）	1	0 %
2	$-1 \pm j$	0.71	4.3 %
4	$-1 \pm 1.73j$	0.5	16.3 %
10	$-1 \pm 3j$	0.32	35.1 %

表 7　腕の比例の強さ K と極。$\omega_n = \sqrt{K}$、$2\zeta\omega_n = 2$ より $\zeta = \frac{1}{\sqrt{K}}$。



モーター　　ロボットの腕

図 11　比例の強さを 0 から大きくしていったときの、全体の極の動き（オレンジの矢印。灰色の×が制御しないときの極、赤の×は $K_p = 0.1 \cdot 1$ と $K = 2$ の極。うすい緑は左半分）。左右の図の目もりの大きさはちがう。モーターは左へ。腕は 0 と -2 から近づき、$K = 1$ で -1 に重なったあと、上下に分かれる。

腕の極は、K を大きくすると、実部 -1 のたての線の上を上下に分かれて動きます。速くゆれるようになりますが、落ち着く速さ（実部 -1）は変わらず、行きすぎだけが大きくなります。行きすぎ 4.3 % の $\zeta = 0.71$ にしたいなら $K = 2$ を選びます。これが、6-12 で約束した「ζ を選ぶ」の中身です。

このように、強さを変えたときに極が動く道すじを、**根軌跡**（こんきせき）といいます。極の場所を見ながら強さを選ぶ、制御の設計の基本の図です。

⑩ 3 次の特性方程式：強くしすぎると、こわれる

6-8 で、「第 9 巻の制御では、3 次の特性方程式の解をさがす場面が出てきます」と予告しました。ヒーターの熱が、炉のかべ・中の空気・温度センサーの 3 つを順に伝わる電気炉を考えます。3 つとも時定数 1 分の 1 次おくれ $\frac{1}{s+1}$ とし（時間の単位は分）、目標とのずれに K をかけた電力でヒーターを動かします。全体の分母は、

$1+\dfrac{K}{(s+1)^3}=0$	1 周の式（9-8）。$G_1=\dfrac{K}{(s+1)^3}$、$G_2=1$
$(s+1)^3+K=0$	両辺に $(s+1)^3$ をかけた
$s^3+3s^2+3s+(1+K)=0$	展開した（$(a+b)^3$ の公式）

です（場合 F → D）。モーターや腕の 2 次式とちがい、3 次式になりました。

6-9 の正三角形で、極を求める

この 3 次方程式は、うまく解けます。$w=s+1$ と置くと $w^3=-K$ です。6-9 で、$z^3=1$ の 3 つの解が、原点を中心とする正三角形の頂点に並ぶことを見ました。$w^3=-K$ の解も、原点を中心に $K^{1/3}$ の大きさの正三角形に並びます。

$$w=-K^{1/3},\qquad w=K^{1/3}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$$

（$\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^3=-1$ は、6-10 の $e^{\pm j60^\circ}$ を 3 乗すると $e^{\pm j180^\circ}=-1$ になることから確かめられます。）$s=w-1$ なので、極は -1 を中心とする正三角形の頂点です。

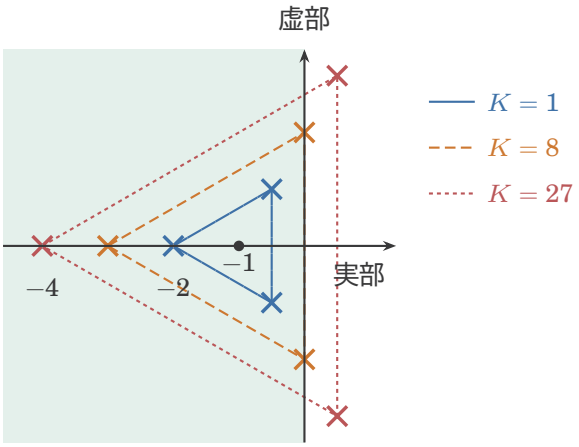


図 12　$(s+1)^3 + K = 0$ の極（$K = 1$ は青の実線、$K = 8$ はオレンジの破線、$K = 27$ は赤の点線の三角形。うすい緑は左半分）。K を大きくすると、-1 を中心とする正三角形が大きくなる。$K = 8$ で上下の 2 つがたての軸の $\pm 1.73j$ に着き、それより大きいと右半分に出る。

上下の 2 つの極の実部は $-1 + K^{1/3}/2$ です。これが 0 になるのは $K^{1/3} = 2$、つまり $K = 8$ のときです。

K	3 つの極	動き
1	-2、$-0.5 \pm 0.866j$	落ち着く
4	-2.587、$-0.206 \pm 1.375j$	ゆれながら、ゆっくり落ち着く
8	-3、$\pm 1.732j$	ゆれ続ける（安定の限界）
10	-3.154、$0.077 \pm 1.866j$	ゆれがふくらむ（不安定）

表 8　3 次の特性方程式の極。Python の `np.roots` でも同じ値になる。

Python

```
import numpy as np
print(np.roots([1, 3, 3, 1+8]))   # K=8 の分母の係数
```

実行結果

```
[-3.00000000e+00+0.j
 -8.32667268e-17+1.73205081j
 -8.32667268e-17-1.73205081j]
```

-8.32667268e-17 は -8.3×10^{-17} のことで、計算の丸めのごく小さな数です。実部は 0 と読みます。

モーターや腕では、比例を強くしても、極が右半分に出ることはありませんでした（モーターは速くなり、腕は行きすぎが大きくなるだけ）。ところが、おくれが 3 つ重なると、強くしすぎた（$K > 8$）とたん、ゆれがふくらんでこわれます。ずれを急いで取りもどそうとして、おくれのせいで、行きすぎをくり返すのです。「強くすれば、いつもよくなる」わけではありません。

せいかくに言うと

3 次の判定：$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ は、係数がすべて正で $a_2 a_1 > a_0$ なら安定

係数がすべて正であること

3 つの極がすべて左半分なら、分母は $(s+p)(s^2+qs+r)$（$p>0$、$q>0$、$r>0$：実数の極 $-p$ と、2 次の判定をみたす 2 次式）の形に分かれます。展開すると $s^3 + (p+q)s^2 + (pq+r)s + pr$ で、係数はすべて正です。だから、1 つでも負か 0 の係数があれば、安定ではありません。

$a_2 a_1 > a_0$ であること

係数を少しずつ変えると、極も少しずつ動きます。だから、極が左半分から右半分へ移るときは、かならずたての軸の上を通ります。たての軸の上の極 $s = j\omega$ を入れてみます。

$$(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0 = 0 \qquad j^2 = -1、j^3 = -j$$

$$(a_0 - a_2\omega^2) + j\omega(a_1 - \omega^2) = 0 \qquad \text{実部と虚部に分けた}$$

$$\omega^2 = a_1, \quad a_0 = a_2\omega^2 = a_2 a_1 \qquad \text{実部も虚部も } 0\ (a_0 > 0 \text{ なので } \omega \neq 0)$$

つまり、たての軸の上に極があるのは、$a_2 a_1 = a_0$ のときだけです。$a_2 a_1$ と a_0 の大小が入れかわる所が、安定と不安定の境めです。どちらの側が安定かは、1 つの例で決まります：$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ は極が -1 だけで安定で、$3 \times 3 = 9 > 1$ で

す。だから $a_2a_1 > a_0$ の側が安定です。電気炉なら $3\times3>1+K$、つまり $K<8$ で、表 8 と合います。

このような、係数だけで安定を判定する方法は、4 次以上にも広げられていて、**ラウス・フルビッツの判定**とよばれます（物理シリーズ）。4 次以上では、「係数がすべて正」だけでも、上の 3 次の式だけでも、判定できません（例題 10）。

11 残るずれ：最終値の定理

9-6 の最終値の定理を使うと、落ち着いたあとの値を、答えの式を全部求めずに出せます。ただし、**落ち着く（安定な）ときだけ**使える、という条件がありました。だから、まず極で安定を確かめてから使います。

モーター：比例だけでは、ずれが残る

目標の速さを 1（ステップ $\frac{1}{s}$）にしたとき、出てくる速さは次の Y です。

$$Y=\frac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1+10K_\mathrm{p}}\cdot\frac{1}{s}$$

極 $-2(1+10K_\mathrm{p})$ は左半分なので、最終値の定理が使えます。

$$\lim_{s\to0}sY=\lim_{s\to0}\frac{10K_\mathrm{p}}{0.5s+1+10K_\mathrm{p}}$$ s と $\frac{1}{s}$ が消える

$$=\frac{10K_\mathrm{p}}{1+10K_\mathrm{p}}$$ $s=0$ を入れた

$$1-\frac{10K_\mathrm{p}}{1+10K_\mathrm{p}}=\frac{1}{1+10K_\mathrm{p}}$$ 残るずれ

$K_\mathrm{p}=1$ なら $\frac{1}{11}=0.091$ で、9.1 % のずれが残ります（表 6）。ずれが 0 だと電圧も 0 になって、モーターが回り続けられないので、ずれが少し残ったところで落ち着くのです。

エアコン：設定温度に届かない

3-1 で、「エアコンは部屋の温度をはかりつづけ、設定温度との差が大きいほど強く冷やします（このしくみは第 9 巻の制御で学びます）」と書きました。これは比例制御です。9-8 と同じく、外が 35 ℃、設定 26 ℃、部屋の時定数 $RC = 60$ 分（熱の抵抗 R と熱容量 C の積）、比例の強さを RK_p で表すと、部屋の温度 T は

$$60\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (35 - T) - RK_\mathrm{p}(T - 26)$$

にしたがいます。右辺の 1 つめは外から入る熱、2 つめはエアコンが冷やす分です。T の係数をまとめると $60\dot{T} = -(1 + RK_\mathrm{p})T + \cdots$ なので、極は $s = -(1 + RK_\mathrm{p})/60$（1/分）で、いつも左半分です（場合 F → A）。落ち着いたときは $\dot{T} = 0$ なので、

$$T = \frac{35 + 26RK_\mathrm{p}}{1 + RK_\mathrm{p}}$$

$RK_\mathrm{p} = 9$ なら $\frac{35+234}{10} = 26.9$ ℃で、0.9 ℃のずれが残ります。時定数は $\frac{60}{10} = 6$ 分です。

もっと知りたい ★★★★★

ずれを積分して足すと、ずれが消える

比例の電圧に、「ずれを時間でたし合わせた量（ずれの積分）」に比例する電圧を足します。K_i をその強さとすると、加える電圧は $K_\mathrm{p} \times (\text{ずれ}) + K_\mathrm{i} \int (\text{ずれ})\,\mathrm{d}t$ です。積分は s の世界では $\frac{1}{s}$ のかけ算なので（9-6）、制御の箱は $K_\mathrm{p} + K_\mathrm{i}/s$ になります。

ずれが少しでも残っていると、その積分はどんどんふえて、電圧を強めつづけます。ずれがちょうど 0 になって、はじめて積分がふえなくなり、電圧が一定になります。だから、落ち着いた先では、ずれは 0 です。最終値の定理で見ると、$s \to 0$ で K_i/s がかぎりなく大きくなるので、ずれ「$1 \div (1 + 1$ 周の倍率$)$」が 0 になります。

たとえばモーターで $K_\mathrm{p}=1$、$K_\mathrm{i}=2$ にすると、全体の分母 $=0$ の式は次のようになり、極は -2 と -20（左半分）です。

$$0.5s^2+11s+20=0 \quad \text{つまり} \quad s^2+22s+40=0$$

極が 1 つふえますが、安定のまま、ずれだけが消えます。これに「ずれの変わる速さ（微分）」の項を足したものが、エアコンやロボットで広く使われている **PID 制御**です（9-12）。

⑫ 右半分の極：たおれる棒

5-18 で、手のひらに立てた棒の角度 θ が $\ddot{\theta}=4\theta$ にしたがい、少しかたむくと、たおれていくことを見ました。手の動きによる回す働き u を入れると $\ddot{\theta}=4\theta+u$ で、伝達関数は s^2-4 分の 1、極は ± 2 です。極 2 が右半分にあるので不安定で、0.01 rad のかたむきが、2 秒後には $0.01\times\cosh 4\approx 0.273$ rad になります（6-11 の cosh）。

角度だけを見て、かたむいた向きと反対に $u=-K\theta$ で動かすとどうでしょう。全体の分母は $s^2+(K-4)$ です。

- $K<4$ なら、極は $\pm\sqrt{4-K}$ で、まだ右半分に 1 つあり、たおれます。
- $K>4$ なら、極は $\pm j\sqrt{K-4}$ で、たての軸の上。たおれはしませんが、ゆれ続けます（$K=8$ なら $\pm 2j$）。

どの K でも、左半分には入りません。2 次の判定で見ると、s の係数が 0 だからです。棒を立て続けるには、角度だけでなく「たおれる速さ」$\dot{\theta}$ も見て、s の係数を正にする必要があります。それが 9-10 の状態フィードバックです。

たいせつ

極	**伝達関数の分母 $= 0$ の解（×）。零点は分子 $= 0$ の解（○）**
動き	**極 p ごとに e^{pt}。実部で大小、虚部でゆれ**
安定	**すべての極の実部が負（極＝状態の行列の固有値）**
1 次おくれ	$\dfrac{K}{\tau s+1}$ **：極** $-\dfrac{1}{\tau}$**。τ で 63.2 %**
2 次おくれ	**極** $-\zeta\omega_{\mathrm{n}} \pm j\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$**。行きすぎは ζ だけで決まる**
判定	**2 次：係数が正。3 次：係数が正で** $a_2a_1 > a_0$

$$\underbrace{G(s)\text{ の極}}_{\text{名前}} = \text{分母} = 0 \text{ の解}$$

記号	こんなとき	直し方
A	分母が 1 次式	1 次方程式を解く（$-\frac{1}{\tau}$）
B	分母が $(s-p)\cdot(s+\sigma)^2+\omega^2$ だけ	かっこごとに極を読む
C	分母が 2 次式	解の公式・2 次の判定
D	分母が 3 次式	3 次の判定 $a_2a_1 > a_0$
E	分母が 4 次以上	Python の `np.roots`
F	フィードバック	分母 $1+G_1G_2$ を作り、A〜E へ
G	状態方程式	$\det(sI-A)$ を作り、A〜E へ

表 9 場合のまとめ（場合分けの表 9-9）。

この章で出てきたことば

極　伝達関数の分母が 0 になる s。$G(s)$ がかぎりなく大きくなる点。s の平面に×で打つ。状態の行列の固有値と同じ。

零点　伝達関数の分子が 0 になる s。○で打つ。動きの形を変えるが、安定かどうかは決めない。

安定　入れるものを 0 や一定にしたあと、動きがやがて落ち着くこと。すべての極の実部が負。

1 次おくれ・2 次おくれ　伝達関数が $K \div (\tau s + 1)$ の形・$\omega_{\mathrm{n}}^2 \div (s^2 + 2\zeta\omega_{\mathrm{n}} s + \omega_{\mathrm{n}}^2)$ の形のもの。

行きすぎ　最後の値をこえた分の、最後の値に対する割合。オーバーシュートともいう。

根軌跡　比例の強さなどを変えたときに、極が s の平面の上を動く道すじ。

ラウス・フルビッツの判定　分母の係数だけから、安定かどうかを判定する方法。3 次の $a_2 a_1 > a_0$ はその一部。

記号カード　初めて出た章 9-9

×

読み方　ばつ（極）
意味　s の平面の上の極の印。伝達関数の分母が 0 になる s。かけ算の × とは別の使い方
英語　pole

記号カード　初めて出た章 9-9

○

読み方　まる（零点）
意味　s の平面の上の零点の印。伝達関数の分子が 0 になる s
英語　zero

専門書をのぞいてみよう 制御工学の教科書ふうの書き方

伝達関数 $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ において、$D(s)=0$ の根を極、$N(s)=0$ の根を零点という。線形時不変系が漸近安定であるための必要十分条件は、すべての極が複素平面の左半平面に存在すること、すなわち $\mathrm{Re}\,p_i<0$ である。特性多項式 $s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ については、フルビッツの安定判別法により、$a_i>0$ かつ $a_2a_1-a_0>0$ が安定の条件となる。

訳 $N(s)$ は分子、$D(s)$ は分母（Numerator・Denominator の頭文字）。「根」は解。「線形時不変系」は、たし算がそのまま成り立ち（線形）、係数が時間で変わらない（時不変）しくみ。「漸近安定」は、この章の「安定」（やがて 0 に近づく）。「必要十分条件」は「ちょうどそのとき」。Re は実部（Real part）。「左半平面」は、この章の「左半分」。

もっと知りたい ★★★★★

コンピュータで動かすときの安定（9-10 の予告）

コンピュータは、決まった時間 Δt ごとに計算をくり返します（6-2 のオイラー法）。1 次おくれ $\dot{y}=-y/\tau$ なら、1 回ごとに同じ数 $1-\Delta t/\tau$ をかけます。$\tau=30\,\mathrm{s}$ で $\Delta t=10\,\mathrm{s}$ なら 0.667 で落ち着きますが、$\Delta t=70\,\mathrm{s}$ なら -1.33 で、符号を変えながら大きくなります。くり返しの安定は、「**かける数の大きさが 1 より小さい**」で決まります（7-10・8-13 と同じ考え。9-10）。

例題でたしかめよう

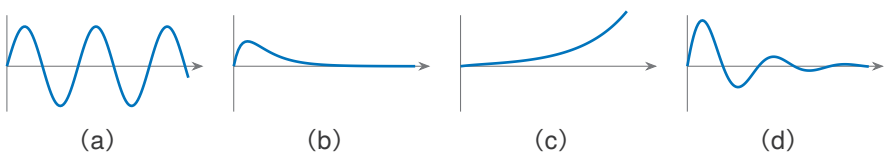


図 13 例題 1 のグラフ（a）～（d）：ポンとたたいたときの動き（横の軸は時間）。

例題 1　極の場所から動きを当てる

次の 4 つの伝達関数の極を求め、ポンとたたいたとき（インパルス応答、9-8）の動きが「ゆれずに落ち着く」「ゆれながら落ち着く」「ゆれ続ける」「どんどん大きくなる」のどれかを答え、図 13 のグラフ（a）～（d）から選びましょう。

（ア）$\dfrac{1}{(s+2)(s+5)}$　　（イ）$\dfrac{1}{(s+1)^2+4^2}$

（ウ）$\dfrac{1}{s^2+4^2}$　　（エ）$\dfrac{1}{(s-1)(s+3)}$

考え方　**場合：**分母が $(s-p)$ や $(s+\sigma)^2+\omega^2$ だけでできている（表 9-9 の B）

名前　極は「分母 $=0$ の s」。動きは、極の実部と虚部で決まる（③の地図）。

楽をする　解かずに、かっこごとに 0 と置いて読む（$(s+1)^2+4^2$ は $\sigma=1$、s^2+4^2 は $\sigma=0$ の形と見る）。

式　（ア）$s+2=0$、$s+5=0$ より極は -2、-5。実数で負

（イ）$(s+1)^2=-4^2$ より $s+1=\pm 4j$、極は $-1\pm 4j$。実部が負で、虚部あり

（ウ）$s^2=-4^2$ より極は $\pm 4j$。実部が 0

（エ）極は 1、-3。右半分に 1 がある

答え　（ア）ゆれずに落ち着く（b）

（イ）ゆれながら落ち着く（d）

（ウ）ゆれ続ける（a）

（エ）どんどん大きくなる（c）

じぶんでとこう 1

次の 4 つの伝達関数の極を求め、ポンとたたいたときの動きが「ゆれずに落ち着く」「ゆれながら落ち着く」「ゆれ続ける」「どんどん大きくなる」のどれかを答えましょう。

（ア）$\dfrac{1}{(s+2)^2+3^2}$　　（イ）$\dfrac{1}{(s-2)(s+1)}$

（ウ）$\dfrac{1}{(s+1)(s+6)}$　　（エ）$\dfrac{1}{s^2+5^2}$

例題 2　1 次おくれの温度センサー

ある温度センサーの伝達関数は、次の式です（s の単位は 1/秒）。

$$G(s)=\frac{2}{12s+1}$$

（1）極を求めましょう。

（2）時定数と、最後の変化の 63.2 %・95 % に着く時刻を求めましょう。

（3）入れたものを 1 上げたとき、最後に出てくるものはいくら変わる？

考え方　**場合：**分母が 1 次式（表 9-9 の A）

名前　極は「分母 $=0$ の s」。1 次おくれ $\dfrac{K}{\tau s+1}$ の形と見くらべる。

直す　1 次方程式 $12s+1=0$ を解く。

式　（1）$12s+1=0$ より $s=-\frac{1}{12}\approx -0.083$

（2）$\tau=12$（s）。63.2 % は τ、95 % は $3\tau=36$（s）

（3）$\dfrac{K}{\tau s+1}$ と見くらべて $K=2$。ステップの答え $K(1-e^{-t/\tau})$ の最後は K

答え　（1）$-\frac{1}{12}$（約 -0.083）

（2）12 s、12 s、36 s

（3）2

じぶんでとこう 2

伝達関数が $4s+1$ 分の 5（s の単位は 1/秒）の計器について、極、時定数、63.2 %・95 % に着く時刻と、入れたものを 1 だけ上げたときの最後の変化を求めましょう。

例題 3　2 次おくれの極と行きすぎ

伝達関数が次の式で表される装置があります（時間の単位は秒）。

$$G(s)=\frac{25}{s^2+6s+25}$$

(1) 極を求めましょう。

(2) ω_n と ζ を求めましょう。

(3) ステップの答えの行きすぎ（%）と、最初の山の時刻を求めましょう（$e^{-2.356}=0.0948$）。

考え方　**場合：**分母が 2 次式（表 9-9 の C）

名前　極は「分母 $=0$ の s」。2 次おくれの形（⑤）と見くらべる。

直す　解の公式（3-10）。行きすぎと山の時刻は⑤の式。

式　(1) $s=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-100}}{2}=\dfrac{-6\pm 8j}{2}=-3\pm 4j$

(2) $\omega_n^2=25$ より $\omega_n=5$。$2\zeta\omega_n=6$ より $\zeta=\frac{6}{10}=0.6$

(3) $\sqrt{1-0.36}=0.8$、$\dfrac{\pi\times 0.6}{0.8}=2.356$ なので、行きすぎは $e^{-2.356}=0.0948$

最初の山は $\omega_d=4$（極の虚部）より $\dfrac{\pi}{4}\approx 0.785$（s）

答え　(1) $-3\pm 4j$

(2) $\omega_n=5\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta=0.6$

(3) 約 9.5 %、約 0.785 s

じぶんでとこう 3

伝達関数が $s^2 + 4s + 16$ 分の 16 の装置の極、ω_n と ζ、ステップの答えの行きすぎと最初の山の時刻を求めましょう（$\sqrt{48} = 6.928$、$e^{-1.814} = 0.163$）。

例題 4　零点と極

次の伝達関数の極と零点を求めて s の平面に×と○で打ち、安定かどうかを答えましょう。

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s-2)(s+5)}$$

考え方　**場合：**分母が $(s-p)$ だけでできている（表 9-9 の B）

名前　極は「分母 $= 0$ の s」（×）、零点は「分子 $= 0$ の s」（○）。安定は「すべての極の実部が負」。

楽をする　分母は分かれているので、かっこごとに読む。

式　極：$s+1=0$、$s-2=0$、$s+5=0$ より -1、2、-5

零点：$s+4=0$ より -4

極 2 の実部が正（右半分）。零点は安定に関係しない

答え　極 -1、2、-5（×）、零点 -4（○）。極 2 が右半分にあるので不安定

じぶんでとこう 4

次の $G(s)$ の極と零点を求め、安定かどうかを答えましょう。

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s+6)}$$

例題 5　状態方程式から極を求める

3-10 の車 B を状態方程式で書くと、次のようになります。極を求め、安定かどうかと動き方を答えましょう。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

考え方　**場合：**状態方程式で、作った分母が 2 次式（表 9-9 の G と C）

名前　極は、状態の行列 A の固有値（⑦）。$\det(sI - A) = 0$ の解。

直す：行列の計算　$sI - A$ を作り、行列式 $ad - bc$（7-4）を計算する。

直す　できた 2 次方程式を、解の公式で解く。

式　$sI - A$ の 1 行めは $(s,\ -1)$、2 行めは $(5,\ s+2)$

$$\det(sI - A) = s(s+2) - (-1) \times 5 = s^2 + 2s + 5$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j$$

答え　極 $-1 \pm 2j$。実部が負なので安定で、ゆれながら落ち着く（6-12 の車 B と同じ）

じぶんでとこう 5

状態の行列が次の A のとき（入力の項は例題 5 と同じ形）、極を求め、安定かどうかと動き方を答えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{pmatrix}$$

例題 6　モーターの比例制御

⑨のモーターを、比例の強さ $K_p = 0.5$ で速度制御します（はかってもどす箱は $G_2 = 1$）。

$$\text{モーターの伝達関数}\quad \frac{10}{0.5s+1}$$

（1）全体の極と時定数を求めましょう。

（2）目標の速さに対して、何 % のずれが残りますか。

考え方　**場合：**フィードバックで、作った分母が 1 次式（表 9-9 の F と A）

名前　つないだ全体の極。全体は $\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$（9-8）。

直す　通分して分母の式を作り、1 次方程式を解く。ずれは最終値の定理（⑪）。

式　（1）$G_1 = \dfrac{10\times 0.5}{0.5s+1} = \dfrac{5}{0.5s+1}$

全体 $= \dfrac{5}{0.5s+1+5} = \dfrac{5}{0.5s+6}$

$0.5s+6=0$ より $s=-12$。時定数は $\frac{1}{12} \approx 0.083$（s）

（2）極が左半分なので、最終値の定理が使える

最後の速さは $\frac{5}{0+6} = \frac{5}{6}$

ずれは $1-\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6} \approx 0.167$

答え　（1）極 -12、時定数 約 0.083 s

（2）約 16.7 %

じぶんでとこう 6

同じモーターを、$K_p = 2$ で速度制御します。全体の極と時定数、残るずれ（%）を求めましょう。

例題 7　エアコンの比例制御

⑪のエアコン（外 35℃、設定 26℃、$RC = 60$ 分）を、比例の強さ $RK_\mathrm{p} = 4$ で動かします。

$$60\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (35 - T) - 4(T - 26)$$

(1) 極と時定数を求めましょう。

(2) 落ち着いたときの部屋の温度と、設定温度とのずれを求めましょう。

考え方　**場合：**フィードバックで、作った分母が 1 次式（表 9-9 の F と A）

名前　つないだ全体の極。T の式の T の係数をまとめると、分母の式になる。

直す　T をまとめて 1 次おくれの形にし、極を出す。落ち着いた値は $\dot{T} = 0$ から。

式　(1) 右辺 $= 35 + 104 - 5T = 139 - 5T$ なので、$60\dot{T} + 5T = 139$

分母は $60s + 5$（エアコンの箱と部屋の箱をフィードバックでつないだ全体の分母と同じ式）。$60s + 5 = 0$ より $s = -\dfrac{1}{12}$（1/分）、時定数 12 分

(2) 極が左半分なので落ち着く。$\dot{T} = 0$ より $5T = 139$、$T = 27.8$（℃）

ずれは $27.8 - 26 = 1.8$（℃）

答え　(1) 極 $-\frac{1}{12}$（1/分）、時定数 12 分

(2) 27.8℃、ずれ 1.8℃

じぶんでとこう 7

同じエアコンを $RK_p = 19$ で動かすとき、極と時定数、落ち着いたときの部屋の温度とずれを求めましょう。

例題 8　ロボットの腕の ζ を選ぶ

⑨のロボットの腕を、比例の強さ K で角度制御します（$G_2 = 1$）。

$$\text{腕の伝達関数}\quad \frac{1}{s(s+2)}$$

(1) $\zeta = 0.5$ にするには、K をいくらにすればよいでしょう。

(2) そのときの極と、行きすぎ（%）を求めましょう。

考え方　**場合：**フィードバックで、作った分母が 2 次式（表 9-9 の F と C）

名前　つないだ全体の極。全体の分母は $s(s+2)+K$。

直す　2 次おくれの形 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ と係数を見くらべてから、解の公式。

式　(1) $s^2 + 2s + K$ と見くらべて、$\omega_n^2 = K$、$2\zeta\omega_n = 2$

$\zeta = 0.5$ なら $\omega_n = \dfrac{2}{2 \times 0.5} = 2$、$K = \omega_n^2 = 4$

(2) $s^2 + 2s + 4 = 0$ より

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,j \approx -1 \pm 1.73j$$

表 4 より、$\zeta = 0.5$ の行きすぎは 16.3 %

答え　(1) $K = 4$

(2) $-1 \pm 1.73j$、約 16.3 %

じぶんでとこう 8

まさつの大きい腕を、比例の強さ K で角度制御します（$G_2 = 1$）。

$$\text{腕の伝達関数}\quad \frac{1}{s(s+4)}$$

$\zeta = 0.5$ にする K と、そのときの極、行きすぎを求めましょう。

例題 9　3 次の電気炉の安定

⑩の電気炉（全体の分母 $s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + K)$、時間の単位は分）について、

（1）$K = 4$ のとき、安定かどうかを、3 次の判定で答えましょう。

（2）安定になる K の範囲を求めましょう（$K > 0$ とします）。

（3）安定の限界の K での極と、ゆれの周期を求めましょう。

考え方　**場合：**フィードバックで、作った分母が 3 次式（表 9-9 の **F** と **D**）

名前　つないだ全体の極。分母は $(s+1)^3 + K$。

楽をする　安定かどうかは解かずに、3 次の判定（係数がすべて正で $a_2 a_1 > a_0$）。

直す　限界の極は、$(s+1)^3 = -K$ の 3 乗根（⑩）。

式　（1）$a_2 = 3$、$a_1 = 3$、$a_0 = 5$。すべて正で $3 \times 3 = 9 > 5$

（2）$3 \times 3 > 1 + K$ より $K < 8$

（3）$K = 8$：$(s+1)^3 = -8$ より $s + 1 = -2$、$1 \pm \sqrt{3}\,j$

極は -3、$\pm\sqrt{3}\,j \approx \pm 1.73j$。周期は $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.63$（分）

答え　（1）安定

（2）$0 < K < 8$

（3）-3、$\pm 1.73j$、周期 約 3.63 分

じぶんでとこう 9

時定数 0.5 分の 1 次おくれ（$0.5s+1$ 分の 1）を 3 つつないだ電気炉を、例題 9 と同じ比例の強さ K で動かします。$0.5s+1$ 分の 1 は $s+2$ 分の 2 なので、3 つで $(s+2)^3$ 分の 8 になり、全体の分母は次の式になります。

$$(s+2)^3+8K=s^3+6s^2+12s+(8+8K)$$

$K=4$ で安定かどうか、安定になる K の範囲、限界の K での極とゆれの周期を求めましょう。

例題 10　4 次の式を Python で

伝達関数の分母が $s^4+2.6s^3+4.8s^2+11.2s+8$ の装置があります。分母の係数はすべて正です。Python で極を求めたら、次のようになりました。安定かどうかを答えましょう。

Python

```
import numpy as np
print(np.roots([1, 2.6, 4.8, 11.2, 8]))
```

実行結果

```
[ 0.2+1.98997487j  0.2-1.98997487j
 -2. +0.j          -1. +0.j         ]
```

考え方　**場合：**分母が 4 次式（表 9-9 の **E**）

名前　安定は「すべての極の実部が負」。

楽をする　4 次は手で解かない。Python の答えの、それぞれの実部（j の前の数）を見る。

式　極は $0.2\pm1.99j$、-2、-1

$0.2\pm1.99j$ の実部 0.2 が正（右半分）

答え　不安定（係数がすべて正でも、ゆれがふくらむ）

じぶんでとこう 10

分母が $s^4 + 5s^3 + 11s^2 + 19s + 12$ の装置で、`np.roots([1, 5, 11, 19, 12])` を実行すると、次のように表示されました。安定かどうかを答えましょう。

実行結果

```
[-3. +0.j          -0.5+1.93649167j
 -0.5-1.93649167j -1. +0.j         ]
```

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

①「極」を $G(s)$ の値だと思う

✕ $G(s) = 2/(12s + 1)$ の極は、$s = 0$ を入れて $G(0) = 2$

○ 極は、分母 $12s + 1 = 0$ を解いた $s = -\frac{1}{12}$

$$\boxed{G(s) \text{ の極}} \neq G(0) \qquad \boxed{G(s) \text{ の極}} = \boxed{\text{分母} = 0 \text{ の解}}$$

「極」は名前です。G の値ではなく、「G がかぎりなく大きくなる s」のことで、分母 $= 0$ を解いて求めます。$G(0) = 2$ は、ゆっくり変えたときの倍率（最後の値）です。

⚠ まちがえやすいところ

② 極と零点を取りちがえる

✕ $G(s) = (s-3)/\{(s+1)(s+2)\}$ は、3 が右半分にあるので不安定

○ 3 は零点（分子 $= 0$）。極 -1、-2 はどちらも左半分なので安定

安定かどうかを決めるのは、分母の極だけです。分子の零点は、右半分にあっても、落ち着くかどうかには関係しません。

⚠ まちがえやすいところ

③ 虚部の大きさで決める

✕ 極 $-1 \pm 10j$ は虚部が大きいので、こわれる

○ 実部 -1 が負なので安定（速くゆれながら落ち着く）

虚部はゆれの速さです。大きくなるかどうかは、実部だけで決まります。

⚠ まちがえやすいところ

④ 実部が 0 の極を「安定」とする

✕ 極 $\pm 4j$ は大きくならないので安定

○ いつまでもゆれ続けて落ち着かないので、安定とはいわない

たての軸の上の極が重なると、ゆれが大きくなる（6-13 の共振）こともあります。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 左半分なら行きすぎない

✕ 極 $-1 \pm 3j$ は左半分なので、行きすぎない

○ $\zeta \approx 0.32$ で、約 35 % 行きすぎる

左半分は「落ち着く」ことだけを表します。行きすぎは極の角（ζ）で決まります。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 係数が全部正なら安定

✕ 例題 10 の 4 次の分母は、係数が全部正なので安定

○ 極に $0.2 \pm 1.99j$ があり不安定

「係数が全部正」で決まるのは 2 次まで。3 次は $a_2 a_1 > a_0$ も要り、4 次以上は Python で。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ 比例を強くすればよくなる

✕ 電気炉の K を 10 にすれば、8 より速くて正確

○ $K > 8$ では極が右半分に出て、ゆれがふくらむ

おくれが 3 つ以上重なると、強くしすぎたとたん不安定になります。

⚠ まちがえやすいところ

⑧ 先に最終値の定理を使う

✕ 電気炉で $K = 10$ なら、最後の値は $\frac{10}{1+10}$

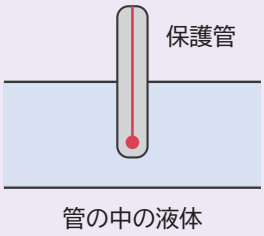
○ 先に極で安定を確かめる。$K = 10$ は不安定で、落ち着かない

最終値の定理は、落ち着くときだけ使えます（9-6）。

物理・工学ではこう使う

工場の計器と 1 次おくれ

工場のタンクや管の温度は、金属の保護管に入れた熱電対ではかります。保護管が太いほど丈夫ですが、熱をためやすく、時定数 τ が大きくなります（極が原点に近づく）。温度が急に変わる所では、細い保護管で τ の小さい計器を選び、極を左へ置きます。計器のおくれが大きいと、それを使って動かす制御全体の極まで右へ寄り、ゆれやすくなるからです。



ロボットの腕・エレベーター：極の角を選ぶ

ロボットの腕は、行きすぎて物にぶつからないよう、$\zeta = 0.7$ くらいの角に極を置いて設計することが多い、とされています。エレベーターでは、止まる位置で行きすぎると乗っている人が上下にゆすられるので、行きすぎがほとんどないように極を選びます。どちらも、モーターの比例の強さ（⑨の K）などで極を動かして、ちょうどよい場所に置きます。

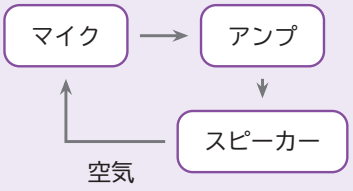
車のサスペンション：乗り心地とゆれ

車の上下のゆれは 2 次おくれで、乗用車ではふつう ω_n が 6〜9 rad/s（約 1〜1.5 Hz。6-12）です。⑥で見たように、ダンパーを強くして ζ を大きくしても、路面の段差は零点を通して車体に伝わります。そこで、乗り心地と、ゆれのおさまりの速さのかね合いで ζ を選びます。走る道や速さに合わせて、ダンパーの強さをコンピュータで変える車もあります。

物理・工学ではこう使う

ハウリング：右半分に出た極

マイクの音をアンプで大きくしてスピーカーから出すと、その音がまたマイクに入ります。これはフィードバックです。音量（1 周の倍率）を上げすぎると、ある高さの音で、全体の極が右半分に出て、「キーン」という音がどんどん大きくなります。これがハウリングです。音量を下げるか、マイクをスピーカーから遠ざける（1 周の倍率を小さくする）と、極が左半分にもどり、止まります。⑩の電気炉で K を大きくしすぎたのと同じしくみです。



原子炉の「臨界」

原子炉の中の中性子の数は、ふえも減りもしない状態にたもって運転します。これを臨界といいます。中性子の数の変化を表す式の極で言えば、極がちょうど 0 にある状態です。極が少しでも右へ出ると数がふえ続け、左へ入ると減っていくので、制御棒などで極の場所をたえず調整しています（物理 原-15）。

コラム　調速機と、安定の判定のはじまり

ワットが蒸気機関の回る速さを一定に保つために使った調速機（1788 年ころ）は、回る速さが上がると、遠心力で 2 つのおもりが開き、蒸気の弁をしぼるしくみでした（フィードバック）。ところが、機械を改良すると、速さがゆれ続けたり、ゆれがふくらんだりする「ハンチング」が起きることがありました。

マクスウェルは 1868 年の論文「調速機について」で、このしくみを微分方程式で書き、特性方程式の解の実部が負なら安定だと考えて、3 次までの式の安定の条件を示しました。そのあとラウスが、何次の式でも係数だけから判定する方法をまとめ（1877 年）、フルビッツも別の形で同じ判定を示しました（1895 年）。この章の 3 次の判定は、その出発点にあたります。

章末問題　9-9 のまとめ

基本 ★★★★★

1 次の伝達関数の極を求め、ポンとたたいたときの動きが「ゆれずに落ち着く」「ゆれながら落ち着く」「ゆれ続ける」「どんどん大きくなる」のどれかを答えましょう（例題 1）。

(1) $\dfrac{1}{(s+3)(s+5)}$　(2) $\dfrac{1}{(s+2)^2+5^2}$　(3) $\dfrac{1}{(s-3)(s+1)}$　(4) $\dfrac{1}{s^2+3^2}$

2 伝達関数が次の式（s の単位は 1/秒）の計器について、極、時定数、95 % に着く時刻、入れたものを 1 だけ上げたときの最後の変化を求めましょう（例題 2）。

$$G(s)=\frac{3}{8s+1}$$

3 次の $G(s)$ の極、ω_{n} と ζ、ステップの答えの行きすぎと最初の山の時刻を求めましょう（$\sqrt{108}=10.39$、$e^{-1.814}=0.163$）（例題 3）。

$$G(s)=\frac{36}{s^2+6s+36}$$

4 次の $G(s)$ の極と零点を求め、安定かどうかを答えましょう（例題 4）。

$$G(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s-1)(s+3)}$$

5 状態の行列が次の A のとき、極を求め、安定かどうかと動き方を答えましょう（例題 5）。

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -8 & -4\end{pmatrix}$$

6 ⑨のモーター（伝達関数は $0.5s+1$ 分の 10）を、$K_{\mathrm{p}}=0.4$ で速度制御します。全体の極と時定数、残るずれ（%）を求めましょう（例題 6）。

チャレンジ ★★★★★

7 ⑪のエアコンを $RK_{\mathrm{p}}=14$ で動かすとき、極と時定数、落ち着いたときの部屋の温度とずれを求めましょう（例題 7）。

8 伝達関数が $s(s+6)$ 分の 1 のロボットの腕を、比例の強さ K で角度制御します。$\zeta=0.5$ にする K と、そのときの極、行きすぎを求めましょう（例題 8）。

9 全体の分母が $(s+3)^3+K=s^3+9s^2+27s+(27+K)$ の電気炉（時間の単位は分）について、安定になる K の範囲（$K>0$）と、限界の K での極、ゆれの周期を求めましょう（例題 9）。

10 分母が $s^4 + 3.2s^3 + 11.6s^2 + 27.4s + 18$ の装置で `np.roots([1, 3.2, 11.6, 27.4, 18])` を実行すると、次のように表示されました。安定かどうかを答えましょう（例題 10）。

実行結果

```
[-0.1+2.99833287j -0.1-2.99833287j
 -2. +0.j         -1. +0.j        ]
```


ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 伝達関数の分母が 0 になる s（極）を×で打ち、その場所から動き方を当てられる。 → 394 ページ
- ☐ 1 次おくれ・2 次おくれの極から、時定数、行きすぎ、最初の山の時刻を求められる。 → 400 ページ
- ☐ すべての極の実部が負かどうかで安定を判定し、フィードバックで動く極、3 次の判定、残るずれを計算できる。 → 405 ページ

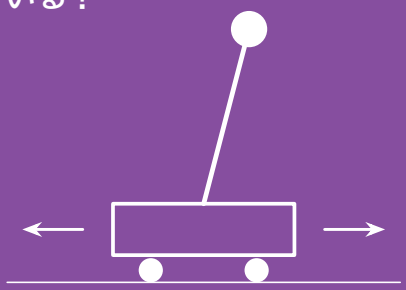
ミナ

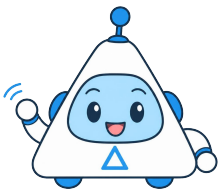
分母を 0 にした s を見るだけで、落ち着くか、ゆれるか、こわれるかがわかるんだね。次は、たくさんの式を行列でまとめる状態方程式。たおれる棒を立たせてみよう。

第９巻　第３部

3 行列と微分方程式

- たくさんの微分方程式を、１行で書ける？
- 行列の「指数関数」って、何？
- 音楽の圧縮やエアコンの制御に、どう使われている？





たくさんの量が同時に変わるしくみを、行列１つの式（状態方程式）で書くよ。行列の指数関数と固有値で、倒立振子が立っていられるかどうかまでわかるよ。

この部で学ぶこと

9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式 ★★★★★ P.444

たくさんの微分方程式を、1 行で書く

9-11 行列の指数関数と固有値 ★★★★★ P.492

固有値が、落ち着くかどうかを決める

9-12 フーリエとラプラスの使いみち［読みもの］ ★★★☆☆ P.538

音楽の圧縮、機械の診断、エアコンの制御

終章 工学の数学の地図 全路線 ★★★☆☆ P.556

7 本の路線は、どこで合流した？

この部を読むと…

連立微分方程式を状態方程式で書き、行列の指数関数と固有値で解いて、安定かどうかを判定できるようになります。フーリエとラプラスの使いみちを、本物の機械で見ます。

第 3 部　行列と微分方程式

★★★★★

9-10 連立微分方程式を行列で：状態方程式

道しるべ　この章の前に 3-6 5-17 5-18 6-14 6-15 7-5 7-8 7-9 7-10 7-11 9-8 9-9　この章の先に 9-11 9-12

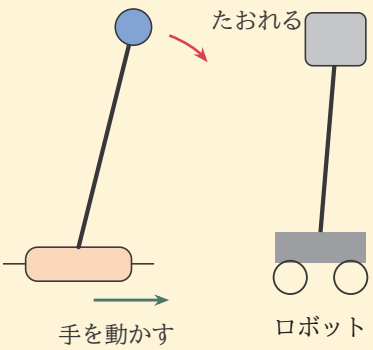
この章でできるようになること

- ★★★ 手のひらに立てた棒の「かたむき」と「たおれる速さ」を状態の点として、点の動きの図を読める。
- ★★★★ ばね・水そう・回路・倒立振子の式を、状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ に書き、A の固有値で落ち着くかを判定できる。
- ★★★★★ 状態フィードバック $u = -K\vec{x}$ で固有値を選び、コンピュータの中のくり返しで落ち着く条件も判定できる。

はてな？

長い棒を手のひらに立ててみましょう。棒は少しでもかたむくと、どんどんたおれていきます（5-18 の「たおれる動き」）。それでも、手を左右に動かせば、しばらく立て続けることができます。

人は、棒の何を見て、手をどう動かしているのでしょう。同じことを、ロボットにさせることはできるでしょうか。



第 6 巻では、2 つの水そうのように、2 つ以上の量がおたがいの変わり方を決めあう「連立微分方程式」を解きました（6-14）。第 7 巻では、その係数を行列 A

に並べて $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ と書き、固有値が動きを決めることを学びました（7-8）。7-11では、外から加える量 $\vec{u}$ を足した $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$ を状態方程式とよび、「固有値が、ゆれずに・こわれずに落ち着く場所にくるように、$\vec{u}$ の入れ方を決める」のが制御だ、と予告しました。

この章では、状態方程式をいろいろな機械や回路について立て、最後に、たおれる棒を立たせる「手の動かし方」を行列の計算で決めます。ドローンやロボットの制御で、本当に使われている方法です。

新しい記号が一度にたくさん出てきますが、1 回でわからなくても大丈夫です。行列のかけ算（7-1）と固有値（7-8）を思い出しながら、ゆっくり進みましょう。

やってみよう　棒を手のひらに立ててみよう

長さのちがう 2 本の棒（たとえば、長さ 1m くらいのほうきと、えんぴつ）を用意します。まわりに人や物がない所で行いましょう。

1. ほうきの柄の先を、手のひらに立てる。棒の上のはしを見ながら、たおれないように手を動かす。何秒立てていられたかを 3 回はかる。
2. えんぴつでも同じことをする。どちらが立てやすいかをくらべる。
3. ほうきで、こんどは「棒がどれだけかたむいているか」だけを考えて手を動かしてみる。次に、「どちらへ、どれだけの速さでたおれかけているか」も見て、早めに手を動かしてみる。
4. 気づいたことを、下の表に書く。

	ほうき（長い）	えんぴつ（短い）
立てていられた時間（秒）		
たおれ方（ゆっくり・速い）		

やってみると、長いほうきのほうがずっと立てやすいことがわかります。長い棒はゆっくりたおれるので、手を動かす時間があるからです（このわけは⑤で数で

確かめます）。また、かたむきだけを見ていると、手の動きがおくれて、棒は左右にゆれながら、やがてたおれてしまいます。上手な人は、かたむきと一緒に、**たおれる速さ**も見ています。このことも、⑦で式から確かめます。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

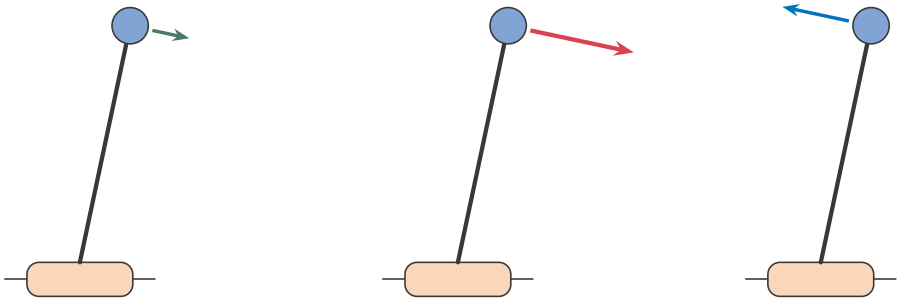
- 5-18　少しかたむいた棒は $\ddot{\theta} = 4\theta$ にしたがってたおれる。$\theta(0) = 0.01$、$\dot{\theta}(0) = 0$ なら、2 秒後に約 0.273 rad。e^{2t} の部分がどんどん大きくなる。
- 5-17　θ が小さいときは、$\sin\theta \approx \theta$（テイラー展開の 1 項め）、$\cos\theta \approx 1$。
- 6-14　おたがいに変わり方を決めあう式の組が、連立微分方程式。2 階の式は「位置と速度」の 1 階の式 2 つにできる。状態の点 $(x,\ v)$ の動きで見る。
- 7-8　$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ に $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ を入れると $A\vec{v} = s\vec{v}$。6-12 の s は、A の固有値。固有値が全部「左半分」（実部が負）なら落ち着く。
- 7-10　くり返し $\vec{x}_{n+1} = G\vec{x}_n$ は、G の固有値の大きさがすべて 1 より小さければ 0 に近づく（単位円の中）。オイラー法の 1 歩の行列は $I + A\,\Delta t$。
- 9-9　伝達関数の分母が 0 になる s が極。極がすべて左半分にあれば、落ち着く。

数学の道具

目でわかる「状態」で見る　★★★

1 今の様子を決める数の組：状態

ボールを投げ上げた 1 秒後に、ボールがどこにあるかを当てるには、何を知っていればよいでしょう。今の高さだけでは足りません。同じ高さでも、上へ向かって速く動いていれば、1 秒後はもっと高い所にあり、下へ向かって動いていれば、低い所にあります。**今の高さと、今の速さ**の 2 つがわかれば、その先の動きは決まります（6-6 で、ばねの動きが「はじめの位置とはじめの速度」で決まったのと同じです）。



かたむき 0.2 rad
ゆっくりたおれかけ

かたむき 0.2 rad
速くたおれかけ

かたむき 0.2 rad
起き上がりかけ

図 1 かたむきは 3 本とも同じ。でも、上のはしの動き（矢印）がちがうので、この先の動きはまったくちがう。かたむき θ と、たおれる速さ $\dot{\theta}$ の 2 つで、今の様子が決まる。

手のひらの棒も同じです。図 1 の 3 本の棒は、どれも同じだけかたむいています。でも、左は少しずつたおれかけ、まん中は速くたおれかけ、右は起き上がりかけています。この先の動きは、まったくちがいます。だから、棒の今の様子を決めるには、かたむき θ〔rad〕と、たおれる速さ（かたむきの変わる速さ）$\dot{\theta}$〔rad/s〕の 2 つの数が必要です。

このように、**その先の動きを決めるのに必要な、今の数の組**を、**状態**（じょうたい）といいます。数の組なので、ベクトルにして $\vec{x}$ と書きます（たて書き。第 7 巻）。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

？はてな？ の答えの半分は、ここにあります。上手な人は、棒の**状態**（かたむきと、たおれる速さ）の両方を見て、手を動かしています。

もの	状態（今の数の組）	数の数
冷めるお湯（6-4）	温度 T	1
ばねとおもり（6-6）	位置 x、速度 $\dot{x}$	2
つながった水そう（6-14）	左の水位 h_1、右の水位 h_2	2
RLC の回路（6-12）	コンデンサーの電圧 v_C、電流 i	2
手のひらの棒	かたむき θ、たおれる速さ $\dot{\theta}$	2
ドローンの姿勢	3 つの向きの角度と、その速さ	6

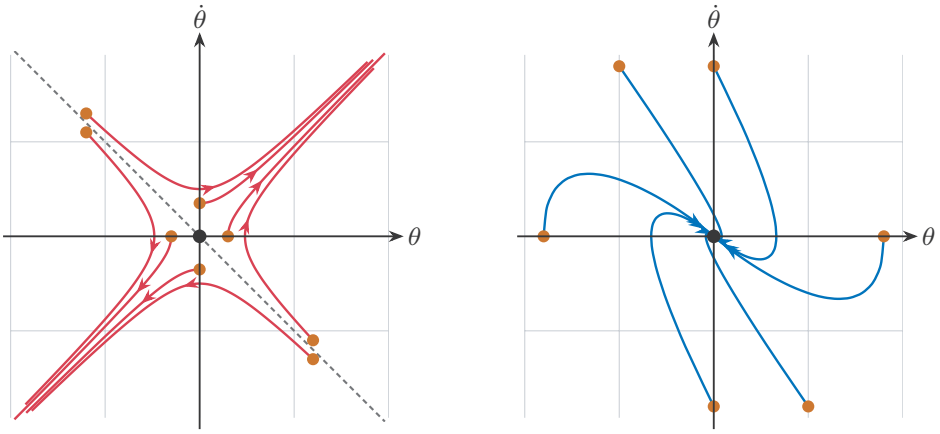
表 1　いろいろなものの状態。2 階の微分の式で動くもの（ばね・棒）は、位置と速度の 2 つが状態になる。

2 状態の点の動きを見る

状態 $(\theta,\ \dot{\theta})$ を、横軸にかたむき θ、たて軸にたおれる速さ $\dot{\theta}$ をとった平面の 1 つの点で表します。時間がたつと、状態が変わるので、点が動きます。6-14 で、ばねの $(x,\ v)$ の点がだ円を回ったり、うずをまいて原点に近づいたりした図と同じ考えです。原点 $(0,\ 0)$ は「まっすぐ立って、止まっている」状態です。

図 2 の左は、何もしないで手を止めているときです。たとえば、右に少しかたむいて止まっている点（横軸の上の右のオレンジの点）から出発すると、点は右上へ動きます。かたむきがふえ、たおれる速さもふえていく、つまり右へたおれていきます。どこから出発しても、点はやがて原点から遠ざかっていきます。

ただ 1 つの例外が、右下と左上を結ぶ灰色の点線の上です。「右にかたむいているが、ちょうどよい速さで起き上がりかけている」状態で、このときだけは、点が原点に近づきます。でも、ほんの少しでもずれると、やがて遠ざかります。いつもこの線の上に乗せておくのは無理なので、何もしなければ、棒は必ずたおれます。



制御なし（$\ddot{\theta} = 4\theta$）
点は原点から遠ざかる

制御あり（⑦で作る手の動かし方）
点は原点に吸いこまれる

図 2 状態の点の動き。オレンジの点がスタート。左：何もしないと、どこから出発しても（灰色の点線の上をのぞいて）原点から遠ざかる。右：かたむきと速さに合わせて手を動かすと、どこから出発しても原点（立って止まった状態）に近づく。

図の右は、⑦で作る「手の動かし方」を使ったときです。どこから出発しても、点は原点に近づきます。棒が立ち続けるとは、**状態の点を、原点に引き寄せ続けること**なのです。

気づくこと

- 状態の点の動きは、今いる場所だけで決まる。同じ場所から出発すれば、同じ道を通る。
- 制御をするとは、点の動き方（平面の上の流れ）を変えることである。

手でわかる 状態方程式を立てる ★★★★

③ 2 階の式を、行列の 1 行に：状態方程式

3-10・6-12・7-8 の車 A を使います。車のおもりの位置 x〔m〕が、外から加える力をおもりの質量でわった量 u〔m/s²〕を受けて、

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = u$$

にしたがって動くとします（$u = 0$ なら 3-10 の車 A そのものです）。2 階の微分の式なので、状態は位置 x と速度 $\dot{x}$ の 2 つです（表 1）。6-14 ④でしたように、2 つに名前をつけて、1 階の式 2 つに直します。

$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$	状態の 2 つの数に名前をつける
$\dot{x}_1 = x_2$	位置の変わる速さは、速度（x_1 を微分すると $\dot{x}$）
$\ddot{x} = -2x - 3\dot{x} + u$	もとの式を $\ddot{x}$ について解いた
$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$	$\ddot{x} = \dot{x}_2$、$x = x_1$、$\dot{x} = x_2$ を入れた

右辺を、x_1・x_2 の係数と、u の係数に分けて並べると（7-1 の行列とベクトルのかけ算の形）、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

1 行めを計算すると $0 \times x_1 + 1 \times x_2 + 0 \times u = x_2$、2 行めは $-2x_1 - 3x_2 + 1 \times u$ で、上の 2 つの式にもどります。この行列（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$）は、7-8 で車 A の「状態の行列」として出てきたものと同じです。

①名前の段　記号を読む：状態・入れるもの・はかるもの

状態のベクトルを $\vec{x}$、係数の行列を A、u の係数の列を B と書くと、2 本の式が 1 行になります。7-11 で予告した形です。

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu \qquad y = C\vec{x}$$

状態方程式（上の左）と、出力の式（上の右）

左の式を**状態方程式**（じょうたいほうていしき）といいます。右の式は、状態のうち、センサーではかる量（出てくるもの）y を表す式で、**出力の式**（出力方程式）といいます。車 A で位置だけをはかるなら、$y = x_1$ です。

1. $\vec{x}$（**状態**）：今の様子を決める数の組。ここでは $(x_1,\ x_2)$ =（位置、速度）。
2. A（**状態の行列**）：何も入れないとき、状態どうしがどう変わりあうか。$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は 7-8 の式。
3. B **と** u（**入れるもの**）：u は外から入れる量（力・電圧・手の動き）。入れるものが 1 つなら u は数で、B は「u がどの式に、何倍で入るか」を表す 1 列の行列。車 A では B は $(0,\ 1)$ をたてに並べた 1 列の行列で、u は 2 つめの式（速度の変わり方）にだけ入る。
4. C（**はかるもの**）：$y = C\vec{x}$ の C は 1 行の行列。位置だけをはかるなら、C は $(1,\ 0)$ を横に並べた 1 行の行列。速度だけをはかるなら $(0,\ 1)$。

7-11 では入れるものがいくつかある形 $B\vec{u}$ で書きました。この章の機械は入れるものが 1 つなので、u を数にして Bu と書きます（B は 1 列）。C はコンデンサーの C〔F〕と同じ字ですが、別のものです。

記号は、まとめた書き方の名前

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ は、何本もの微分方程式をまとめた**名前**（書き方）です。この 1 行を見ただけでは、まだ何も計算していません。実際に動きを調べるときは、行列のかけ算・固有値・逆行列などの**行列の計算**に直します。

$$\underbrace{\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu}_{\text{名前}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 + u \end{pmatrix}}_{\text{行列の計算}}$$

状態が 10 個ある機械でも、100 個ある機械でも、書き方は同じ 1 行です。コンピュータで計算するときも、A・B・C の数の表を入れるだけで済みます。これが、状態方程式で書くいちばんの「うれしいこと」です。

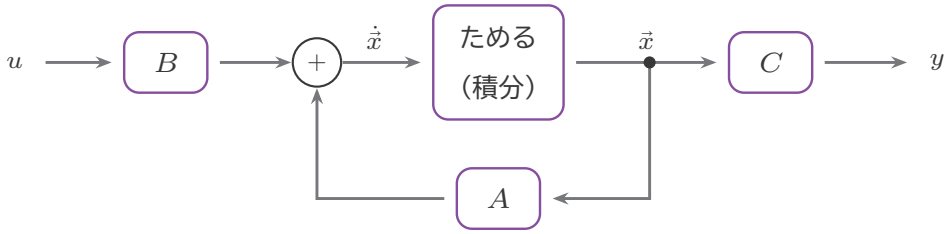


図 3　状態方程式のブロック線図（9-8）。変わる速さ $\dot{\vec{x}}$ をためていく（積分する）と状態 $\vec{x}$。その状態に A をかけたものと、入れるもの u に B をかけたものをたすと、また $\dot{\vec{x}}$。はかる量は $y = C\vec{x}$。

4 いろいろなものを状態方程式にする

2 階の式のほかにも、状態方程式の形にできるものはたくさんあります。立て方は、もとの式の形で決まります。

1 階の式がいくつか：つながった水そう

6-14 の水そう（同じ形の 2 つの水そうを細い管でつないだもの。時間は分、水位は cm）の式は、もともと 1 階の式が 2 つです。左の水そうに、上から 1 分に $q\,\mathrm{cm}^3$ の水を入れることにすると、左の水位は $q \div 100$ だけ速くふえます（底面積が $100\,\mathrm{cm}^2$ だから）。

$$\dot{h}_1 = -0.1(h_1 - h_2) + 0.01q$$

左：管で出ていく分と、上から入れる分

$$\dot{h}_2 = 0.1(h_1 - h_2)$$

右：管から入ってくる分

$$\dot{h}_1 = -0.1h_1 + 0.1h_2 + 0.01q$$

かっこをはずして、h_1・h_2・q の係数を並べる

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} q$$

状態は $\vec{x} = (h_1,\ h_2)$、入れるものは $u = q$ です。この A は、6-14・7-8・7-10 で H と書いた行列と同じものです。この章では、どの機械でも A と書きます（第 9 巻では $H(t)$ をステップ関数に使うからです）。

電気回路：コンデンサーの電圧とコイルの電流

6-12 の RLC の回路（コイル $L = 10\,\mathrm{mH}$、コンデンサー $C = 1\,\mu\mathrm{F}$、抵抗 $R = 20\,\Omega$ を直列にして、電圧 v〔V〕を加える）を考えます。回路の状態は、コンデンサーの電圧 v_C〔V〕と、コイルを流れる電流 i〔A〕の 2 つです。どちらも、急には変われない量だからです（コンデンサーには電気がたまっていて、コイルは電流の変化をいやがる）。

$$C\dot{v}_C = i$$

コンデンサーの電気 Cv_C がたまる速さは電流（6-4）

$$L\dot{i} = v - Ri - v_C$$

コイルの電圧は、加えた電圧から抵抗とコンデンサーの分をひいた残り（6-12）

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}\,i = 10^6\,i$$

$C = 10^{-6}$ でわった

$$\dot{i} = \frac{1}{L}(v - Ri - v_C)$$

L でわった

$$\dot{i} = -100v_C - 2000i + 100v$$

$\frac{1}{L} = 100$、$\frac{R}{L} = 2000$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10^6 \\ -100 & -2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} v$$

数が大きいのは、回路の動きが速い（1 秒に約 1600 回ゆれる）からです。

sin が入る式：手のひらの棒（倒立振子）

手のひらに立てた棒のように、下を支えられて上に立つ振り子を**倒立振子**（とうりつふりこ）といいます。ここでは、長さ ℓ〔m〕の軽い棒の先におもりがついているとします。

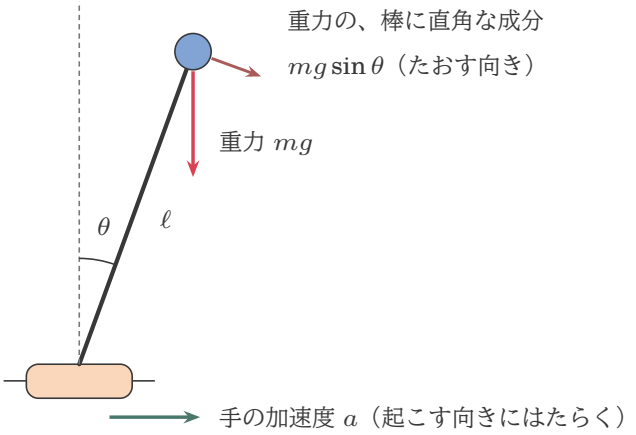


図 4　倒立振子。棒のかたむき θ は、まっすぐ上（点線）からはかり、右が正。手は右向きを正として、加速度 a〔m/s²〕で動かす。手をたおれる向きに動かすと、棒の下が先回りして、棒を起こす向きにはたらく。

おもりの動きを、棒に直角な向きで考えると、物理の本（力学）で学ぶ次の式になります。重力の直角な成分 $mg\sin\theta$ がたおす向き、手を加速度 a で動かしたときの見かけの力の直角な成分 $ma\cos\theta$ が起こす向きにはたらくからです。

$$m\ell\ddot{\theta} = mg\sin\theta - ma\cos\theta$$　　おもりの、棒に直角な向きの運動

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{a}{\ell}\cos\theta$$　　両辺を $m\ell$ でわった

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が入っているので、このままでは行列で書けません（行列で書けるのは、θ や $\dot{\theta}$ の 1 次の式だけ）。そこで、棒がほとんどまっすぐ立っている（θ が小さい）ときを考え、5-17 の近似 $\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$ を使います。

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\theta - \frac{a}{\ell}$$　　$\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$ とした

$$\ddot{\theta} = 4\theta + u$$

$\ell = 2.45\,\mathrm{m}$ なら $\frac{g}{\ell} = \frac{9.8}{2.45} = 4$。$u = -\frac{a}{\ell}$ と置いた

u〔rad/s²〕は「手を動かして、棒を起こす向きに加える角加速度」です（手を右へ動かすと $a > 0$ で $u < 0$、つまり右へのかたむきを減らす向き）。$u = 0$ なら 5-18 の $\ddot{\theta} = 4\theta$ そのもので、5-18 の 4 は、長さ約 2.45 m の棒の数です。このように、曲がった式を、ある状態のまわりで 1 次の式に直すことを、**線形化**（せんけいか）といいます（5-17 で名前を紹介しました）。9-0 の台車の上の棒でも、手のかわりに台車が動くだけで、同じ式になります。また、ここでは軽い棒の先におもりがあるとしましたが、棒全体に重さがある一様な棒なら、$\frac{g}{\ell}$ が $\frac{3g}{2\ell}$ に変わります（長さの $\frac{2}{3}$ の所におもりがあるのと同じ）。

車 A と同じように、$x_1 = \theta$、$x_2 = \dot{\theta}$ として、

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

です。この A と B を、この章の最後まで使います。

θ（rad）	0.05	0.1	0.3	0.5
（度にすると）	2.9°	5.7°	17.2°	28.6°
$\sin\theta$	0.04998	0.09983	0.29552	0.47943
θ と $\sin\theta$ のちがい	0.04 %	0.17 %	1.5 %	4.3 %

表 2 $\sin\theta \approx \theta$ の近さ。0.1 rad（約 6°）までなら、ちがいは 0.2 % より小さい。線形化した式は、棒がほとんど立っている間だけ使える。

5 固有値で、落ち着くかを見る

何も入れない（$u = 0$）とき、状態方程式は $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ です。7-8 で学んだとおり、$\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ を入れると $A\vec{v} = s\vec{v}$ となり、s は A の固有値です。だから、**A の固有値の実部がすべて負なら、何も入れなくても状態は原点に落ち着きます**。1 つでも実部が正のものがあれば、その向きにどんどん大きくなります。こ

れは、9-9 の「極がすべて左半分」と同じ条件です（A の固有値と極が同じものであることは、⑩で確かめます）。

棒の固有値

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$ 対角から λ をひく（7-8）

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4 = 0$$ $(-\lambda)(-\lambda) - 1 \times 4$

$$\lambda = 2,\ -2$$ $\lambda^2 = 4$

固有値の 1 つが $+2$（右半分）なので、何もしなければ棒はたおれます。固有値 2 の固有ベクトルは $(1,\ 2)$ で、「かたむきの 2 倍の速さでたおれかける」向きです。固有値 -2 の固有ベクトルは $(1,\ -2)$ で、図 2 の左の、灰色の点線の向き（ちょうどよい速さで起き上がりかけている向き）です。この線の上だけは e^{-2t} で原点に近づきますが、少しでも $(1,\ 2)$ の向きがまざると、e^{2t} がどんどん大きくなります。

はじめ $\theta = 0.01$、$\dot{\theta} = 0$ なら、5-18 で求めたとおり $\theta = 0.01 \times \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$ で、2 秒後に約 $0.273\,\mathrm{rad}$（約 16°）です。

長い棒ほど立てやすいわけ

棒の長さが ℓ なら、A の左下は $\frac{g}{\ell}$ で、固有値は $\pm\sqrt{g/\ell}$ です。$\ell = 2.45\,\mathrm{m}$ なら ± 2、$\ell = 0.245\,\mathrm{m}$（10 分の 1）なら $\frac{9.8}{0.245} = 40$ で $\pm\sqrt{40} = \pm 6.32$ です。かたむきが 10 倍になるまでの時間は、$e^{2t} = 10$ から $t = \frac{\ln 10}{2} = 1.15$ 秒と、$e^{6.32t} = 10$ から $t = \frac{\ln 10}{6.32} = 0.36$ 秒。短い棒は、3 倍以上速くたおれます。やってみようで、えんぴつがとても立てにくかったのは、このためです。

もの	A （上：1 行め、下：2 行め）	固有値	動き
車 A（7-8）	$(0,\ 1)$ $(-2,\ -3)$	-1、-2	ゆれずに落ち着く
6-13 のばね	$(0,\ 1)$ $(-16,\ -0.8)$	$-0.4 \pm 3.980j$	ゆれながら落ち着く
水そう（6-14）	$(-0.1,\ 0.1)$ $(0.1,\ -0.1)$	0、-0.2	差は消え、合計は残る
RLC（6-12）	$(0,\ 10^6)$ $(-100,\ -2000)$	$-1000 \pm 9950j$	速くゆれて落ち着く
手のひらの棒	$(0,\ 1)$ $(4,\ 0)$	2、-2	たおれる

表 3 いろいろなものの A と固有値（7-8 の表と同じ読み方）。水そうの固有値 0 の向き $(1,\ 1)$ は「水の合計」で、いつまでも変わらない。

ここまでで十分

状態（今の数の組）を状態の点で表し、2 階の式・水そう・回路・倒立振子を $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ の形に書いて、A の固有値で落ち着くかを判定できれば十分です。この先は、落ち着かないものを落ち着かせる「入れ方」を、行列の計算で決めます。

∂ 式でわかる 落ち着くように、入れ方を決める ★★★★★

6 立て方と使い方の表と流れ図

ここまでの「立て方」4 通りに、立てた式の「使い方」4 通りを加えて、表にしました（A〜D が立て方、E〜H が使い方）。E の「落ち着くか」は、9-11 の表 9-11 の I と同じものです。

③楽をする段　立てる前に線形化（D）

$\sin\theta$ のような曲がった式は、そのままでは行列で書けません。立てる前に、$\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$ と楽な形（1 次の式）に直すのが、表の D です。D の札が「楽をする」なのは、このためです。

どの順で問えばよいかを、図 5 の流れ図にしました。上の 4 つの問いで状態方程式を立て、下の 4 つの問いで使い方を選びます。A（状態方程式）がはじめから書いてある問題では、立てる問いをとばします。

流れ図の使い方：手のひらの棒

④の棒の式 $\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{a}{\ell}\cos\theta$ を、次の見開きの表 9-10 と流れ図でたどります。

1. 名前の段：状態は $(\theta,\ \dot{\theta})$、入れるものは手の動き、ほしいのは状態方程式。
2. A（状態方程式）がもう書いてある？ いいえ。sin・cos が入る？ はい。線形化して $\ddot{\theta} = 4\theta + u$ **D**。下の問いへ。
3. 電気回路の式？ いいえ。2 階の微分の式？ はい → 位置と速度を状態に **A**。
4. 右の線をたどって、立てるだけでよい？ はい → 状態方程式の形に書いて、確かめへ。

こうして「D と A」を通ります。同じ棒でも、ほしいものが「落ち着くか」なら最後の問いで E、「立たせる入れ方」なら F に着きます。1 回で全部の場合を

覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどって確かめましょう。

どの使い方でも、実際の計算は**行列の計算**（固有値・行列のかけ算・逆行列）です。$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ という名前を、行列の計算に直して答えを出します。この章で使う「実際の操作」は、この 1 種類だけです。

どの場合かな？

次の問題は、表 9-10 のどの場合でしょう。次の見開きの表と流れ図を見ながら、先に自分で考えてから答えを見ましょう。

1. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = u$ を、状態方程式の形に書きたい。
   答え：**A**。2 階の微分の式で、立てるだけ。
2. となり合う 2 つの部屋の温度の式 $\dot{T}_1 = -0.2(T_1 - T_2)$、$\dot{T}_2 = 0.1(T_1 - T_2)$ を、行列で書きたい。
   答え：**B**。1 階の式が 2 つ。
3. ぶら下がった振り子 $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$ を、状態方程式にしたい。
   答え：**D**→**A**。sin が入るので線形化してから、2 階の式として。
4. $A \cdot B \cdot K$ が書いてあり、$\Delta t = 0.05$ 秒ごとの計算で落ち着くかを知りたい。
   答え：**G**。くり返しの行列の固有値の大きさを見る。
5. $A \cdot B \cdot C$ が書いてあり、$G(s)$ がほしい。
   答え：**H**。$C(sI - A)^{-1}B$。

場合分けの表 9-10　状態方程式：どう立てて、どう使う？

記号	こんなとき	手順	例題
A	2 階の微分の式が 1 つ（ばね・車）	行列の計算　位置と速度を状態にする。$x_1 = x$、$x_2 = \dot{x}$。$\ddot{x}$ について解いて 2 行めに	1・4
B	1 階の式がいくつか（水そう・部屋の温度）	行列の計算　量をそのまま状態にし、右辺の係数を行列に並べる	2
C	電気回路（コイル・コンデンサー）	行列の計算　コンデンサーの電圧 v_C とコイルの電流 i を状態にする。$C\dot{v}_C = i$、$L\dot{i} =$（電圧の残り）	3
D	$\sin\theta$・$\cos\theta$ などが入る（倒立振子・振り子）	楽をする　立った（止まった）状態のまわりで $\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$（線形化）。そのあと A	4
E	何も入れないで落ち着くかを知りたい	行列の計算　$\det(A - \lambda I) = 0$ を解き、固有値の実部がすべて負か	5
F	落ち着くように、入れ方 u を決めたい	行列の計算　$u = -K\vec{x}$。$A - BK$ の特性方程式の係数を、選んだ固有値の式とくらべる	6
G	コンピュータで Δt ごとにくり返す	行列の計算　$I + (A - BK)\Delta t$ の固有値の大きさがすべて 1 より小さいか（7-10）	7
H	伝達関数 $G(s)$ がほしい	行列の計算　$C(sI - A)^{-1}B$（逆行列は 7-5）。表 9-8 の E と同じ	8

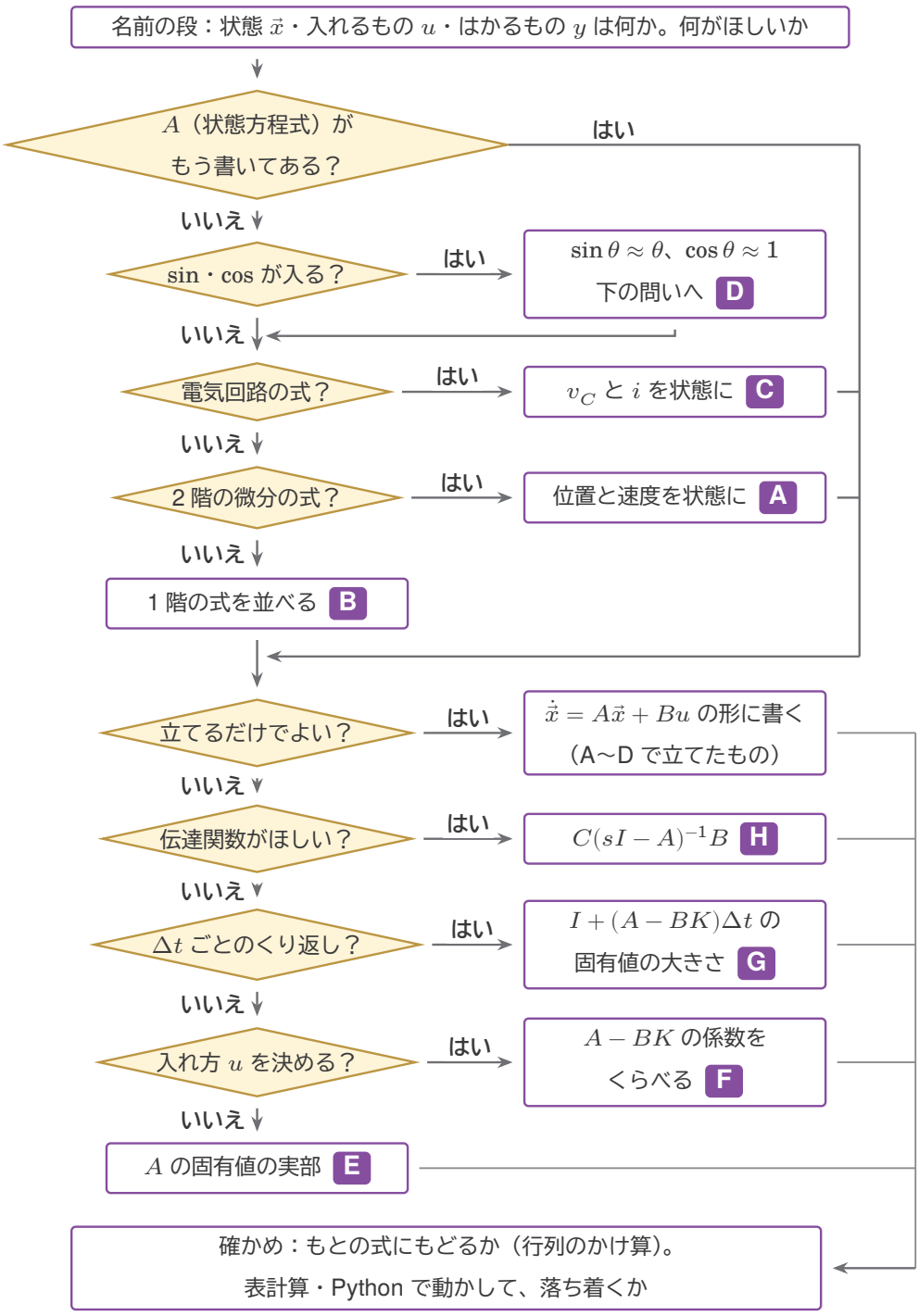


図 5 状態方程式の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 4 つの問いで立て（D のあとは次の問いへ）、立て終わったら右の黒い線をたどって「立てるだけでよい？」の問いへ。答えの出た四角からは、右はしの灰色の線をたどって最後の「確かめ」へ。

この章の例題を、流れ図でたどってみよう

このあとの例題 1〜8 を図 5 の流れ図でたどると、どれも考え方の 1 行めの場合に着きます（書いていない問いは「いいえ」。じぶんでとこうも同じ）。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	ばねを状態方程式に	2 階の微分の式？ → 立てるだけでよい？	A
2	水そうに水を入れる	（上の 4 つは「いいえ」）→ 立てるだけでよい？	B
3	RLC の回路	電気回路の式？ → 立てるだけでよい？	C
4	短い棒の線形化	sin・cos が入る？ → 2 階の式？ → 立てるだけ？	D A
5	落ち着くかの判定	A がもう書いてある？（あとは「いいえ」）	E
6	棒を立たせる K	A がもう書いてある？ → 入れ方 u を決める？	F
7	コンピュータのくり返し	A がもう書いてある？ → Δt ごとのくり返し？	G
8	状態方程式から $G(s)$	A がもう書いてある？ → 伝達関数がほしい？	H

表 4　例題 1〜8 の流れ図の道すじ。

7 状態を見て入れ方を決める：状態フィードバック

たおれる棒を立たせるには、棒の状態に合わせて手を動かします。もっとも簡単な決め方は、「かたむき θ の何倍かと、たおれる速さ $\dot{\theta}$ の何倍かをたしたもの」だけ、起こす向きに入れることです。

$$u = -(k_1\theta + k_2\dot{\theta})$$

k_1・k_2 は、これから決める数です。マイナスは「たおれる向きと反対（起こす向き）に入れる」という意味です。k_1・k_2 を横に並べた 1 行の行列を K と書くと、$u = -K\vec{x}$ です。このように、状態をはかって、その何倍かを入れる方法を**状態フィードバック**（じょうたいフィードバック）といいます。9-8 のフィードバックは出てくるもの y だけをもどしましたが、こんどは状態のすべてをもどします。

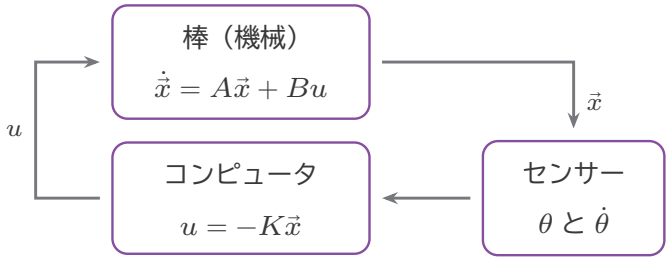


図 6 状態フィードバック。センサーで状態 $\vec{x}$ をはかり、コンピュータが $u = -K\vec{x}$ を計算して、モーター（人なら手）で入れる。7-11 の制御の図と同じ形。

②直す段 $A - BK$ の固有値を、選んだ値にする

$u = -K\vec{x}$ を状態方程式に入れると、

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B(-K\vec{x})$$ u に $-K\vec{x}$ を入れた

$$\dot{\vec{x}} = (A - BK)\vec{x}$$ $\vec{x}$ でくくった（7-3 の分配法則）

となり、入れるもののない形 $\dot{\vec{x}} = (A - BK)\vec{x}$ にもどります。だから、**$A - BK$ の固有値の実部がすべて負になるように K を選べば、棒は立ちます**（⑤）。行列の計算に直します。

$$BK = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$ 1 列× 1 行は 2 × 2（7-1）

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$ 2 行めだけが変わる

$$\det(A - BK - \lambda I) = -\lambda(-k_2 - \lambda) - (4 - k_1)$$ $ad - bc$（7-4）

$$\lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 4) = 0$$ 展開して整理した（特性方程式）

固有値を 2 つとも -2 にしたいなら、特性方程式が $(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ になればよいので、係数をくらべます（3-8 の係数比べ）。

$k_2 = 4$　　λ の係数をくらべた

$k_1 - 4 = 4, \quad k_1 = 8$　　定数の項をくらべた

$$u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$$

$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値は -2、-2

-2 を選んだのは、何もしないときの「たおれる速さ」の固有値 $+2$ と同じくらいの速さで起こすためです（もっと速くも、ゆっくりにもできます。⑧）。

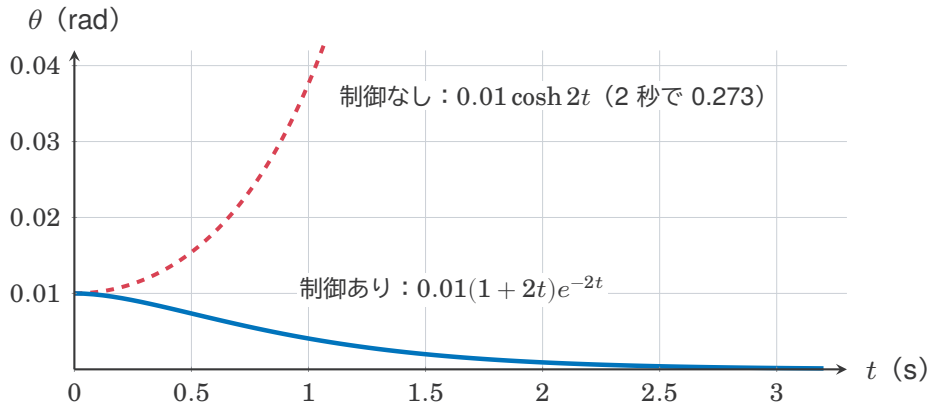


図 7　はじめ $\theta = 0.01$、$\dot{\theta} = 0$ の棒。赤の破線（制御なし）は 1 秒あまりでグラフの外へ出ていく。青（$u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$）は、ゆれずに 0 に近づく。

固有値が -2 の重解なので、答えは 6-12 の重解の形 $(c_1 + c_2 t)e^{-2t}$ です。はじめの値から $\theta = 0.01(1 + 2t)e^{-2t}$ となります（9-11 のじぶんでとこう 6 で、別の方法でも確かめます）。

t（s）	0	0.5	1	2	3
制御なし θ（rad）	0.01	0.0154	0.0376	0.273	（たおれた）
制御あり θ（rad）	0.01	0.00736	0.00406	0.00092	0.00017

表 5 制御なしと制御ありのかたむき。制御ありでは、1 秒ごとにおよそ 2 分の 1 から 5 分の 1 になる。

はじめに手を動かす量は $u = -8 \times 0.01 = -0.08\,\mathrm{rad/s^2}$ で、手の加速度にすると $a = -\ell u = 2.45 \times 0.08 = 0.196\,\mathrm{m/s^2}$ です。ほんの少し右へ手を動かし始めるだけで、棒は立ちます。

かたむきだけを見ると、どうなる？

やってみよう③の「かたむきだけを見て手を動かす」は、$k_2 = 0$ にすることです。特性方程式は $\lambda^2 + (k_1 - 4) = 0$ になります。$k_1 > 4$ でも、$\lambda = \pm j\sqrt{k_1 - 4}$ で実部が 0。棒は**ゆれ続け**、落ち着きません（6-6 の単振動と同じ形）。少しでも手がおくれると、ゆれが大きくなってたおれます。$k_1 < 4$ なら正の固有値が残り、$k_1 = 4$ でも 0 の重解でたおれます。

たおれる速さの項 $k_2\dot{\theta}$ は、6-7 のダンパーのように、ゆれのエネルギーをうばうはたらきをします。だから、**かたむきと、たおれる速さの両方を見る**ことが必要なのです。❓はてな？の答えは、「人は、かたむきとたおれる速さ（状態）を見て、その何倍かずつ手を動かしている。ロボットも、センサーで状態をはかり、$u = -K\vec{x}$ を計算すれば同じことができる」です。

8 どの固有値を選ぶか

固有値は、自分で選べます。同じ方法で、ほかの固有値にしたときの K をくらべます（$\lambda = -p$ の重解なら $(\lambda + p)^2 = \lambda^2 + 2p\lambda + p^2$ から $k_2 = 2p$、$k_1 = p^2 + 4$）。

選んだ固有値	k_1	k_2	はじめの手の加速度	0.001 rad になるまで
-1、-1	5	2	$0.123\,\mathrm{m/s^2}$	3.9 秒
-2、-2	8	4	$0.196\,\mathrm{m/s^2}$	1.9 秒
-4、-4	20	8	$0.490\,\mathrm{m/s^2}$	1.0 秒

表 6　固有値の選び方と、棒の起き上がり方（はじめ $\theta = 0.01$、$\dot{\theta} = 0$、$\ell = 2.45\,\mathrm{m}$）。

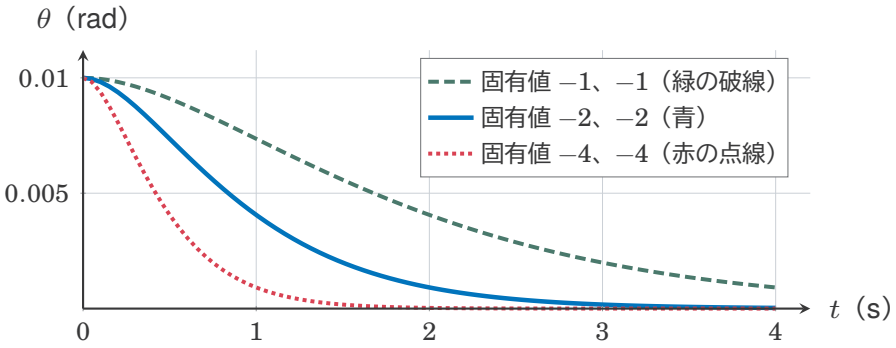


図 8　選んだ固有値と、棒のかたむき（はじめ 0.01 rad）。固有値を左へ置くほど速く 0 に近づくが、表 6 のように、手を大きく動かす必要がある。

固有値を左へ（実部をもっと負に）置くほど、速く立ちます（図 8）。でも、そのぶん手を大きく速く動かさなければなりません。本物のモーターには出せる力の上限があり、センサーの値には雑音がまざるので、むやみに左へ置くことはできません。速さと、入れる量の大きさのかね合いで固有値を選ぶのが、制御を設計する人の仕事です（9-9 で、比例を強くすればいつも良くなるわけではない、と学んだのと同じです）。このように、固有値（極）を選んだ場所に置くことを、**極配置**（きょくはいち）といいます。

せいかくに言うと

入れるもので、どの状態にも動かせるか：可制御性

⑦・⑧では、k_1・k_2 を選んで、固有値を好きな場所に置けました。いつでもそうできるとは限りません。たとえば、つながっていない 2 つの部屋の温度 x_1・x_2 で、ヒーター u が 1 つめの部屋にしかないとき（A は対角が -0.1・-0.2 でほかは 0、B は $(1,\ 0)$ のたて書き）、2 つめの部屋の温度は、u をどうしても動かせません。2 つめの部屋の式に、x_1 も u も入らないからです。

u で、どの状態にも動かせることを**可制御**（かせいぎょ）といいます。2×2 では、2 つの列 B と AB を並べた行列の行列式が 0 でないことが、その条件です。

$$\text{棒：}\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \text{2 つの部屋：}\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

棒の行列式は $0\times 0-1\times 1=-1$（0 でない）。だから、固有値を好きな場所に置けました。2 つの部屋の行列式は $1\times 0-(-0.1)\times 0=0$ です。

9 コンピュータの中のくり返し

本物のロボットでは、センサーを読んで u を計算し、モーターに命令することを、短い時間 Δt ごとにくり返します（1 秒に数百〜数千回）。7-10 で予告したとおり、これは「次の状態＝行列×今の状態＋命令」の漸化式です。6-2 のオイラー法と同じ考えで、1 歩の式を作ります。

$$\vec{x}_{k+1}=\vec{x}_k+\dot{\vec{x}}_k\,\Delta t$$

次の状態＝今の状態＋変わる速さ×時間（6-2）

$$\vec{x}_{k+1}=\vec{x}_k+(A\vec{x}_k+Bu_k)\Delta t$$

変わる速さに状態方程式を入れた

$$\vec{x}_{k+1}=(I+A\,\Delta t)\vec{x}_k+B\,\Delta t\,u_k$$

$\vec{x}_k$ でくくった（$\vec{x}_k=I\vec{x}_k$）

$$\vec{x}_{k+1}=(I+(A-BK)\Delta t)\vec{x}_k$$

命令 $u_k=-K\vec{x}_k$ を入れた

3 行めが「次の状態＝行列×今の状態＋命令」の形です。k は「何歩め（何回めの計算）か」の番号です。最後の行の行列を A_{d} と書くと、$\vec{x}_{k+1}=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$ で、

7-10 のくり返しそのものです。だから、A_{d} **の固有値の大きさがすべて 1 より小さければ、状態は 0 に近づきます**（7-10 の単位円の中）。

$\Delta t = 0.1$ 秒で、棒を立たせる

⑦の $u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$（$k_1 = 8$、$k_2 = 4$）で、$\Delta t = 0.1$ 秒とします。

$$(A - BK)\Delta t = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$$

⑦の $A - BK$ の各成分を 0.1 倍

$$A_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

単位行列 I をたした

$$\det(A_{\mathrm{d}} - \mu I) = (1 - \mu)(0.6 - \mu) + 0.04$$

$ad - bc$。$-bc = -0.1 \times (-0.4)$

$$\mu^2 - 1.6\mu + 0.64 = (\mu - 0.8)^2 = 0$$

展開した

A_{d} の固有値を、A の λ と区別して μ（ミュー）と書きました。$\mu = 0.8$（重解）で、大きさは 1 より小さいので、棒は立ちます。7-10 で学んだとおり、1 歩の行列 $I + M\Delta t$ の固有値は「M の固有値を λ として $1 + \lambda\Delta t$」なので、$1 + (-2) \times 0.1 = 0.8$ と、すぐに出すこともできます。

Δt を大きくすると

固有値は $\mu = 1 - 2\Delta t$ です。大きさが 1 より小さい条件は $-1 < 1 - 2\Delta t < 1$、つまり $0 < \Delta t < 1$ です。$\Delta t = 1.2$ 秒では $\mu = -1.4$ で、大きさが 1 をこえます。同じ K なのに、計算の間かくが長すぎると、棒は左右にゆれながら、どんどんたおれていきます（0.01、0.01、−0.048、0.114、−0.225、0.407、…。図 10）。

	A	B	C	D
1	k	t (s)	θ	$\dot{\theta}$
2	0	0	0.01	0
3	1	0.1	0.01	-0.004
4	2	0.2	0.0096	-0.0064
5	3	0.3	0.00896	-0.00768
6	⋮	⋮	⋮	⋮
12	10	1.0	0.00376	-0.00537
22	20	2.0	0.00069	-0.00115
32	30	3.0	0.00011	-0.00019

表 7 表計算で $\Delta t = 0.1$ のくり返し。C3 に `=C2+0.1*D2`、D3 に `=-0.4*C2+0.6*D2`（A_d の 1 行め・2 行め）と入れて下へコピーする。1 秒後の 0.00376 は、本当の値 0.00406 に近い。

連続の式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ では「固有値の実部が負」、くり返し $\vec{x}_{k+1} = A_\mathrm{d}\vec{x}_k$ では「固有値の大きさが 1 より小さい」が、落ち着く条件です。条件の形がちがうので、取りちがえないようにしましょう（まちがえやすいところ④）。

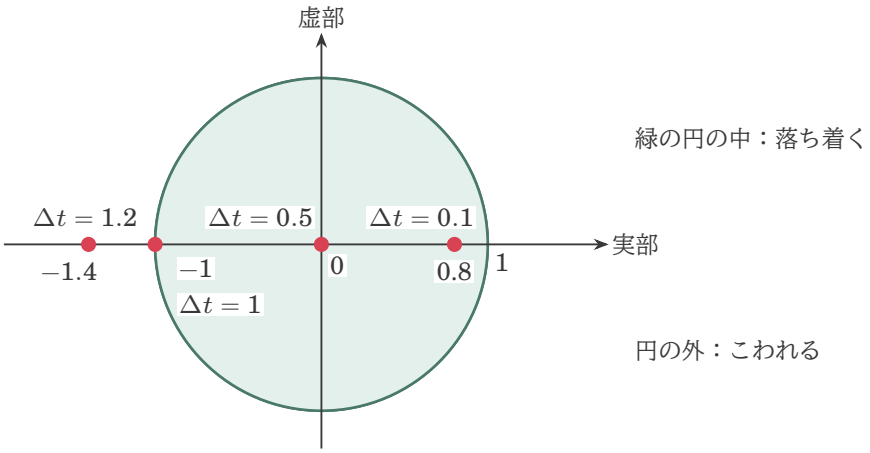


図 9 A_d の固有値 $\mu = 1 - 2\Delta t$ の場所（赤い点）。Δt をふやすと左へ動き、$\Delta t = 1$ で円のふち（-1）、それより大きいと円の外へ出る。

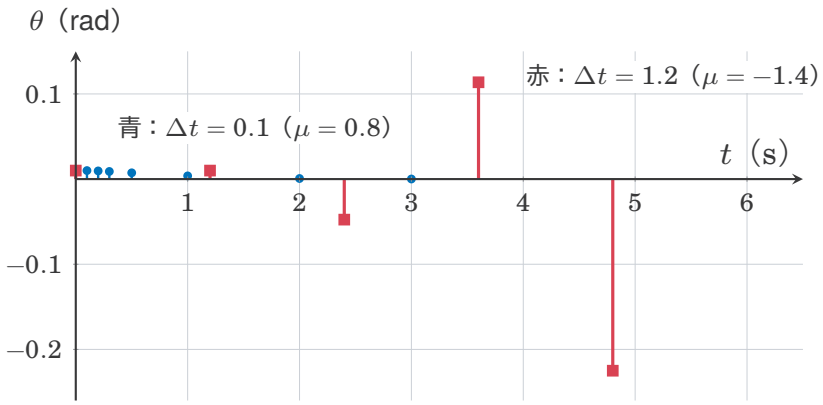


図 10　同じ $u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$ でも、計算の間かくで結果が変わる。$\Delta t = 0.1$（青）は 0 に近づき、$\Delta t = 1.2$（赤）は符号を変えながら大きくなる（-1.4 倍ずつ）。

Python では、次のように確かめます。

Python

```
import numpy as np
A = np.array([[0, 1], [4, 0]])
B = np.array([[0], [1]])
K = np.array([[8, 4]])
print(np.linalg.eigvals(A - B @ K))    # 連続の固有値
for dt in [0.1, 1.2]:
    Ad = np.eye(2) + (A - B @ K) * dt  # 1 歩の行列
    x = np.array([0.01, 0])
    for k in range(10):                # 10 歩くり返す
        x = Ad @ x
    print(dt, np.linalg.eigvals(Ad).real.round(3), x.round(5))
```

実行結果

```
[-2.+0.j -2.+0.j]
0.1 [0.8 0.8] [ 0.00376 -0.00537]
1.2 [-1.4 -1.4] [-4.6694  9.9173]
```

`B @ K` は 1 列× 1 行の行列のかけ算、`np.eye(2)` は 2×2 の単位行列です。$\Delta t = 1.2$ では、10 歩（12 秒）のうちに θ が -4.67 rad になりました（線形化した式の上の計算なので、本当は、ずっと前にたおれています）。

本物の制御では、$I + A\,\Delta t$ のかわりに、もっと正確な 1 歩の行列 $e^{A\Delta t}$ を使います。この行列は 9-11 で学びます。くり返しの式を、s のかわりの文字 z で変換する方法（z 変換）もあり、デジタル制御の専門書で使われます。

⑩ 伝達関数とのつながり

9-8 では、微分方程式から伝達関数 $G(s)$ を作りました。状態方程式からも作れます。はじめの値をすべて 0 にして、状態方程式をラプラス変換します（9-5：$\dot{\vec{x}} \to s\vec{X}$。成分ごとに変換する）。

$s\vec{X} = A\vec{X} + BU$　　変換した（はじめの値は 0）

$s\vec{X} - A\vec{X} = BU$　　$A\vec{X}$ を左へ移した

$(sI - A)\vec{X} = BU$　　$s\vec{X} = sI\vec{X}$ として、$\vec{X}$ でくくった

$\vec{X} = (sI - A)^{-1}BU$　　左から逆行列 $(sI - A)^{-1}$ をかけた（7-5）

$Y = C\vec{X} = C(sI - A)^{-1}BU$　　出力の式 $y = C\vec{x}$ も変換した

$G(s) = \dfrac{Y}{U}$ なので、

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

です。$s\vec{X}$ を $(sI - A)$ でくくるとき、s を sI と書くのは、行列 A からはひけない「数」の s を、行列の形にそろえるためです。

車 A で確かめる

$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}$　　対角に s、ほかは A の符号を変える

$\det(sI - A) = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2$　　$ad - bc$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}$$

2 × 2 の逆行列（7-5）：a と d を入れかえ、b・c の符号を変える

$$(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}1\\ s\end{pmatrix}$$

B（0 と 1 のたて書き）をかけると 2 列めが残る

$$C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

C（(1, 0) の 1 行）をかけると 1 行めだけが残る

9-8 で微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=u$ から作った伝達関数と同じです。分母の $\det(sI-A)$ は、A の特性方程式 $\det(A-\lambda I)$ と同じ式（λ を s に変えたもの）です。だから、**伝達関数の極（9-9）は、A の固有値と同じ**です。⑤で「同じ条件」と言ったのは、このためです。逆行列 $(sI-A)^{-1}$ は、9-11 で e^{At} を求める道具にもなります。

専門書をのぞいてみよう　制御工学の本ふうの書き方

線形時不変系を，次の状態方程式と出力方程式で表す．

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\qquad y(t)=\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}(t)$$

状態フィードバック $u=-\mathbf{f}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ を施すと閉ループ系は $\dot{\mathbf{x}}=(A-\mathbf{b}\mathbf{f}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$ となり，$(A,\mathbf{b})$ が可制御ならば，その固有値（極）を任意に配置できる．可制御性行列は $[\mathbf{b}\ \ A\mathbf{b}\ \cdots\ A^{n-1}\mathbf{b}]$ である．伝達関数は $G(s)=\mathbf{c}^{\mathsf{T}}(sI-A)^{-1}\mathbf{b}$.

訳「線形時不変系」は、A・B が時間で変わらない線形の式。太字の $\mathbf{x}$ はこの本の $\vec{x}$。入れるものが 1 つのとき、B を小文字の太字 $\mathbf{b}$、C を $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}$（たてのベクトルを横にしたもの）と書くことが多い。$\mathbf{f}^{\mathsf{T}}$ はこの本の K（F と書く本も多い）。「閉ループ系」はフィードバックをかけたあとの式。「任意に配置」は好きな場所に置けること（極配置）。n は状態の数で、2 × 2 なら $[\mathbf{b}\ \ A\mathbf{b}]$。

もっと知りたい ★★★★★

モーターの 2 つの状態：電気は速く、回転はゆっくり

小さな直流モーター（コイルの $L = 1\,\mathrm{mH}$、抵抗 $R = 1\,\Omega$、回る部分の慣性モーメント $J = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$、まさつ $b = 10^{-5}\,\mathrm{N{\cdot}m{\cdot}s}$、トルクと電圧の定数 0.05：説明のための数）は、回る速さ ω〔rad/s〕と電流 i〔A〕の 2 つが状態です。電流がトルクを生み（$J\dot{\omega} = 0.05i - b\omega$）、回ると逆向きの電圧が生まれます（$L\dot{i} = v - Ri - 0.05\omega$）。

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 500 \\ -50 & -1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} v$$

固有値は約 -974 と -25.8 です。-974 は電流の速い変化（時定数が約 0.001 秒）、-25.8 は回転のゆっくりした変化（時定数が約 0.04 秒）を表します。1 V を加えると、最後は約 19.9 rad/s（1 分に約 190 回転）で回ります。固有値が、速い動きとゆっくりした動きを分けて見せてくれます。

もっと知りたい ★★★★★

人の手には「おくれ」がある：長い棒が立てやすい、もう 1 つのわけ

人は、棒がかたむいたのを見てから手を動かすまでに、0.2 秒くらいかかります（反応のおくれ。人によってちがう）。その間、棒はたおれ続けます。固有値が λ なら、0.2 秒でかたむきは約 $e^{0.2\lambda}$ 倍です。2.45 m の棒（$\lambda = 2$）なら $e^{0.4} = 1.49$ 倍ですが、0.245 m の棒（$\lambda = 6.32$）なら $e^{1.26} = 3.5$ 倍。短い棒は、手が動き出す前に大きくかたむいてしまいます。コンピュータの制御でも、命令までのおくれ（⑨の Δt など）が長いほど、立たせるのはむずかしくなります。

たいせつ

状態方程式の 3 つの段

名前　**名前を読む：状態 $\vec{x}$・入れるもの u・はかるもの y は何か。何がほしいか**

楽をする　**立てる前に：sin・cos が入っていれば線形化（$\sin\theta \approx \theta$）**

直す　**行列の計算に直す：係数を並べる・固有値・$A - BK$・$C(sI - A)^{-1}B$**

$$\underbrace{\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu}_{\text{名前}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u}_{\text{行列の計算}}$$

立て方と使い方の表 9-10（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	2 階の式	位置と速度を状態に
B	1 階の式がいくつか	係数を並べる
C	電気回路	v_C と i を状態に
D	sin・cos が入る	$\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$
E	落ち着くか	A の固有値の実部がすべて負か
F	入れ方を決める	$A - BK$ の特性方程式の係数をくらべる
G	Δt ごとのくり返し	$I + (A - BK)\Delta t$ の固有値の大きさが 1 より小さいか
H	伝達関数	$C(sI - A)^{-1}B$

この章で出てきたことば

状態 その先の動きを決めるのに必要な、今の数の組。ばねなら位置と速度。

状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$。たくさんの 1 階の微分方程式を、行列で 1 行にまとめた書き方。

倒立振子 下を支えられて、上に立つ振り子。手のひらの棒や、2 輪で立つ乗り物。何もしなければたおれる。

線形化 立った状態などのまわりで、$\sin\theta \approx \theta$ などを使って、式を 1 次の式に直すこと。

出力の式 $y = C\vec{x}$。状態のうち、センサーではかる量（出てくるもの）を表す式。

状態フィードバック 状態をはかって、$u = -K\vec{x}$ のように何倍かずつ入れること。$A - BK$ の固有値が動きを決める。

極配置 $A - BK$ の固有値（極）が選んだ場所にくるように、K を決めること。

可制御 入れるもの u で、どの状態にも動かせること。2×2 では B と AB を並べた行列の行列式が 0 でない。

記号カード　初めて出た章 9-10

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$

読み方 じょうたいほうていしき
意味 状態の変わる速さを、今の状態 $\vec{x}$ と入れるもの u で表す式
英語 state equation

記号カード　初めて出た章 9-10

K

読み方 ケー
意味 $u = -K\vec{x}$ の、状態の何倍を入れるかを並べた 1 行の行列
英語 feedback gain

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、表 9-10 のどの場合かを書きました。

例題 1　ばねを状態方程式に

6-13 のばねに、外から力 F〔N〕を加えます。おもりは 0.5 kg、ばね定数は 8 N/m、ダンパーは 0.4 N s/m です。おもりの位置を x〔m〕とすると、$0.5\ddot{x}+0.4\dot{x}+8x=F$ です。状態を $\vec{x}=(x,\ \dot{x})$、入れるものを $u=F$ として、状態方程式の A と B を求めましょう。

考え方　**場合**：2 階の微分の式が 1 つ（表 9-10 の A）

名前　$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$：2 本の 1 階の式をまとめた名前。$A$・$B$ の数を決める。

直す：行列の計算　$x_1=x$、$x_2=\dot{x}$ として、$\ddot{x}$ について解き、係数を並べる。

式　$\dot{x}_1=x_2$　（位置の変わる速さは速度）

$0.5\ddot{x}=-8x-0.4\dot{x}+F$　（$\ddot{x}$ の項だけを左に残す）

$\ddot{x}=-16x-0.8\dot{x}+2F$　（両辺を 0.5 でわる）

$\dot{x}_2=-16x_1-0.8x_2+2u$

答え　A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-16,\ -0.8)$。B は $(0,\ 2)$ のたて書き（B の 2 は、質量 0.5 kg でわったから）

じぶんでとこう 1

3-10 の車 B $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=u$ を、状態 $\vec{x}=(x,\ \dot{x})$ の状態方程式に書き、A と B を求めましょう。

例題 2　水そうに水を入れる

6-14 の同じ形の 2 つの水そう（底面積 $100\,\mathrm{cm}^2$、$\dot{h}_1 = -0.1(h_1 - h_2)$、$\dot{h}_2 = 0.1(h_1 - h_2)$、cm と分）の、**右**の水そうに、上から 1 分に $q\,\mathrm{cm}^3$ の水を入れます。状態を $\vec{x} = (h_1,\ h_2)$、入れるものを $u = q$ として、A と B を求めましょう。

考え方　**場合**：1 階の式が 2 つ（表 9-10 の B）

名前　$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ の A・B を決める。

直す：行列の計算　右の水位の式に、入れる分 $q \div 100$ を足し、係数を並べる。

式　$\dot{h}_1 = -0.1h_1 + 0.1h_2$　（入れる分はない）

$\dot{h}_2 = 0.1h_1 - 0.1h_2 + 0.01q$　（$q\,\mathrm{cm}^3$ を底面積 $100\,\mathrm{cm}^2$ でわると、水位が $0.01q\,\mathrm{cm}$ ふえる）

答え　A は 1 行め $(-0.1,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ -0.1)$（6-14 の H と同じ）。B は $(0,\ 0.01)$ のたて書き

確かめ（例題 2）：表計算で動かす

はじめ空にして、右に 1 分に $100\,\mathrm{cm}^3$ 入れ続けると（$q = 100$）、オイラー法（6-2）の表計算でも式でも、水位の平均は 1 分に 0.5 cm ずつ上がり、差 $h_2 - h_1 = 5(1 - e^{-0.2t})$ は 5 cm に落ち着きます。$\dot{h}_1 = 0.1 \times 5 = 0.5$ が、平均の上がる速さと同じになる差です。なお、左と右の両方に同じ q を入れるなら、どちらの式にも $0.01q$ が入るので、B は $(0.01,\ 0.01)$ のたて書きになります。

じぶんでとこう 2

6-14 の底面積 $100\,\mathrm{cm}^2$（左）と $300\,\mathrm{cm}^2$（右）の水そうを、1 分に $10(h_1 - h_2)\,\mathrm{cm}^3$ 流れる管でつなぎ、**左**の水そうに 1 分に $q\,\mathrm{cm}^3$ の水を入れます。状態 $\vec{x} = (h_1,\ h_2)$、$u = q$ として、A と B を求めましょう（分数のままでよい）。

例題 3　RLC の回路

コイル $L = 0.1\,\mathrm{H}$、コンデンサー $C = 100\,\mu\mathrm{F}$、抵抗 $R = 20\,\Omega$ を直列にして、電圧 v〔V〕を加えます。状態を $\vec{x} = (v_C,\ i)$、入れるものを $u = v$ として、A と B を求めましょう。

考え方　**場合：**電気回路の式（表 9-10 の C）

名前　$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$ の A・B を決める。

直す：行列の計算　$C\dot{v}_C = i$、$L\dot{i} = v - Ri - v_C$ を、$\dot{v}_C$・$\dot{i}$ について解いて並べる。

式　$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}\,i = \frac{1}{10^{-4}}\,i = 10^4\,i$$

$$\dot{i} = \frac{1}{L}(v - Ri - v_C) = 10(v - 20i - v_C) \quad \left(\tfrac{1}{0.1} = 10\right)$$

$$\dot{i} = -10v_C - 200i + 10v$$

答え　A は 1 行め $(0,\ 10^4)$、2 行め $(-10,\ -200)$。B は $(0,\ 10)$ のたて書き

確かめ（例題 3）：電圧を入れて動かす

例題 3 の回路に $t=0$ で 10 V を加えると（はじめは $v_C=0$、$i=0$）、A の固有値は $\lambda^2+200\lambda+100\,000=0$ から $-100\pm300j$ なので、コンデンサーの電圧は 1 秒に約 48 回（$300\div2\pi$）ゆれながら、10 V に落ち着きます。いちばん高くなるのは約 0.0105 秒後の約 13.5 V です（9-7・9-9 の RLC と同じ読み方）。

じぶんでとこう 3

コイル $L=0.5\,\mathrm{H}$、コンデンサー $C=200\,\mu\mathrm{F}$、抵抗 $R=100\,\Omega$ を直列にして、電圧 v〔V〕を加えます。状態 $\vec{x}=(v_C,\ i)$、$u=v$ として、A と B を求めましょう。

例題 4　短い棒の線形化

長さ $\ell=0.98\,\mathrm{m}$ の軽い棒の先におもりをつけ、手のひらに立てます。④の棒の式 $\ddot{\theta}=\frac{g}{\ell}\sin\theta-\frac{a}{\ell}\cos\theta$（$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$）を、$\theta$ が小さいとして線形化し、$u=-\frac{a}{\ell}$ として状態方程式の A と B を求めましょう。

考え方　**場合：**sin・cos が入る 2 階の式（表 9-10 の D と A）

名前　$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$ の A・B を決める（状態は $(\theta,\ \dot{\theta})$）。

楽をする　立った状態のまわりで $\sin\theta\approx\theta$、$\cos\theta\approx1$。

直す：行列の計算　1 次の式にしてから、位置と速度を状態に（A）。

式
$$\frac{g}{\ell}=\frac{9.8}{0.98}=10$$
$$\ddot{\theta}=10\theta-\frac{a}{\ell}=10\theta+u$$
$$\dot{x}_1=x_2、\ \dot{x}_2=10x_1+u$$

答え　A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(10,\ 0)$。B は $(0,\ 1)$ のたて書き

確かめ（例題 4）：短い棒は速くたおれる

例題 4 の A の固有値は $\pm\sqrt{10} = \pm 3.16$ です（例題 5 で求めます）。はじめ $\theta = 0.01$、$\dot{\theta} = 0$ なら $\theta = 0.01\cosh(3.16t)$ で、0.1 rad になるのは約 0.95 秒後。2.45 m の棒（$0.01\cosh 2t$）の約 1.50 秒より速くたおれます。

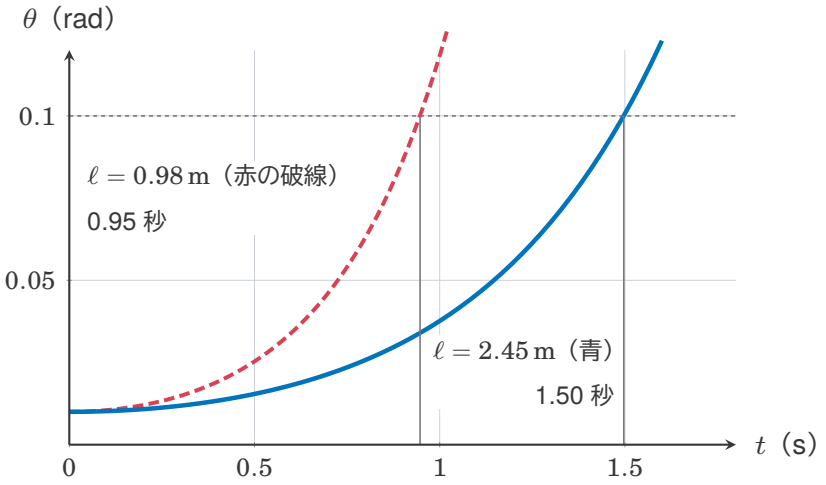


図 11　はじめ 0.01 rad の棒が、0.1 rad（点線）までたおれる時間。短い棒ほど速い。

じぶんでとこう 4

長さ $\ell = 4.9\,\mathrm{m}$ の軽い棒の先におもりをつけ、手のひらに立てます。例題 4 と同じように線形化し、A と B を求めましょう（$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）。

例題 5　落ち着くかの判定

次の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。固有値を求めて答えましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$（例題 4 の棒）

考え方　**場合**：何も入れないで落ち着くか（表 9-10 の E）

名前「落ち着くか」は、固有値の実部がすべて負か、という問い。

直す：行列の計算　$\det(A - \lambda I) = 0$ を解く。

式　(1) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-2-\lambda) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j$　（解の公式）

(2) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 10 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10 = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{10} = \pm 3.16$

答え　(1) $-1 \pm 2j$。実部が負で、ゆれながら落ち着く

(2) 3.16 と −3.16。正の固有値があり、たおれる

確かめ（例題 5）

(1) は車 B と同じ A で、固有値も同じ $-1 \pm 2j$ です（9-7・9-9）。(2) の $+3.16$ は例題 4 の確かめと同じです。

じぶんでとこう 5

次の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。固有値を求めて答えましょう。

(1) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-4,\ -4)$。(2) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(3,\ -2)$。

例題 6　棒を立たせる K

例題 4 の棒に、$u = -(k_1\theta + k_2\dot{\theta})$ を入れます。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A - BK$ の固有値を 2 つとも -4 にする $k_1 \cdot k_2$ を求めましょう。

考え方　**場合：**落ち着くように入れ方を決める（表 9-10 の F）

名前　$u = -K\vec{x}$ を入れると $\dot{\vec{x}} = (A - BK)\vec{x}$。その固有値を選ぶ。

直す：行列の計算　$A - BK$ の特性方程式を作り、$(\lambda + 4)^2$ と係数をくらべる。

式　$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$　（2 行めから $k_1 \cdot k_2$ をひく）

$$\det(A - BK - \lambda I) = \lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 10)$$

$$(\lambda + 4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

$k_2 = 8$、$k_1 - 10 = 16$ より $k_1 = 26$

答え　$k_1 = 26$、$k_2 = 8$（$u = -(26\theta + 8\dot{\theta})$）

確かめ（例題 6）：立つか

はじめ $\theta = 0.01$、$\dot{\theta} = 0$ なら、⑦と同じ形で $\theta = 0.01(1 + 4t)e^{-4t}$ となり、約 1 秒で 0.001 rad より小さくなります（はじめの手の加速度は約 0.25 m/s^2）。

じぶんでとこう 6

2.45 m の棒（A は 1 行め (0, 1)、2 行め (4, 0)。B は (0, 1) のたて書き）で、$A - BK$ の固有値を 2 つとも -3 にする $k_1 \cdot k_2$ を求めましょう。

例題 7　コンピュータのくり返し

2.45 m の棒を、⑦の $u=-(8\theta+4\dot{\theta})$ で立たせる計算を、コンピュータで $\Delta t=0.2$ 秒ごとに行います。

(1) 1 歩の行列 $A_{\mathrm{d}}=I+(A-BK)\Delta t$ とその固有値を求め、落ち着くかを答えましょう。

(2) はじめ $\vec{x}_0=(0.01,\ 0)$ から 2 歩の状態を求めましょう。

(3) この K のまま Δt を変えるとき、落ち着くのは Δt が何秒より小さいときでしょう。

考え方　**場合：Δt ごとのくり返し**（表 9-10 の G）

名前　$\vec{x}_{k+1}=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$。$A_{\mathrm{d}}$ の固有値の大きさがすべて 1 より小さいか。

直す：行列の計算　$A-BK$（⑦）を 0.2 倍して I をたし、固有値を求める。

式　(1) $A_{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ -0.8 & 0.2\end{pmatrix}$

$$\det(A_{\mathrm{d}}-\mu I)=(1-\mu)(0.2-\mu)+0.16$$

$$=\mu^2-1.2\mu+0.36=(\mu-0.6)^2$$

$\mu=0.6$（重解。$1+(-2)\times 0.2=0.6$ とも合う）

(2) $\vec{x}_1=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_0=(0.01,\ -0.8\times 0.01)=(0.01,\ -0.008)$

$\vec{x}_2=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_1=(0.0084,\ -0.0096)$

(3) $\mu=1+(-2)\Delta t=1-2\Delta t$（$A-BK$ の固有値は -2）

$-1<1-2\Delta t<1$ より $0<\Delta t<1$

答え　(1) 固有値 0.6。大きさが 1 より小さいので落ち着く

(2) $\vec{x}_2=(0.0084,\ -0.0096)$

(3) Δt が 1 秒より小さいとき（⑨と同じ）

じぶんでとこう 7

2.45 m の棒を $u = -(13\theta + 6\dot{\theta})$（$A - BK$ の固有値 -3、-3）で立たせる計算を、$\Delta t = 0.1$ 秒ごとに行います。

（1）A_{d} とその固有値を求め、落ち着くかを答えましょう。

（2）はじめ $(0.01,\ 0)$ から 2 歩の状態を求めましょう。

（3）落ち着くのは Δt が何秒より小さいときでしょう。

例題 8　状態方程式から $G(s)$

例題 1 のばねで、位置 x をはかるときの伝達関数 $G(s)$ を求めましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

考え方　**場合：**伝達関数がほしい（表 9-10 の H）

名前　$G(s)$：はじめの値 0 のときの $Y \div U$。状態方程式からは $C(sI - A)^{-1}B$。

直す：行列の計算　$sI - A$ の逆行列（7-5）を作り、B、C の順にかける。

式　$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 16 & s + 0.8 \end{pmatrix}$、$\det = s^2 + 0.8s + 16$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 16}\begin{pmatrix} s + 0.8 & 1 \\ -16 & s \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 16}\begin{pmatrix} 2 \\ 2s \end{pmatrix}\quad（2 列めの 2 倍）$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{2}{s^2 + 0.8s + 16}\quad（1 行め）$$

答え　$G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 0.8s + 16}$

確かめ（例題 8）：ゆっくり押したときの倍率

分母分子を 2 でわると $1 \div (0.5s^2 + 0.4s + 8)$ で、9-8 の $1 \div (ms^2 + cs + k)$ と同じ形です。$s = 0$ を入れた $G(0) = \frac{2}{16} = 0.125$ は、「とてもゆっくり変わる力を加えたとき、1 N あたり何 m 動くか」です（9-8 の確かめ）。ばねだけなら $\frac{1}{k} = \frac{1}{8} = 0.125\,\mathrm{m/N}$ で、ぴったり合います。分母 $s^2 + 0.8s + 16$ が 0 になる s（極）は $-0.4 \pm 3.980j$ で、例題 1 の A の固有値と同じです（⑩）。

じぶんでとこう 8

車 B（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-5,\ -2)$。B は $(0,\ 1)$ のたて書き）の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ を求めましょう。

（1）位置をはかるとき（C は $(1,\ 0)$ を横に並べた 1 行の行列）

（2）速度をはかるとき（C は $(0,\ 1)$ を横に並べた 1 行の行列）

まちがえやすいところをチェック

まちがえやすいところ

① 状態の並べ方を変えたら、動きも変わると思う

✕ 車 B を $(\dot{x},\ x)$ の順に並べたら A がちがう行列になったので、落ち着き方もちがう

○ 並べ方で A の形は変わるが、固有値は同じ（-1、-2）。動きは変わらない

$(\dot{x},\ x)$ の順なら、$\dot{x}$ の式が 1 行めになり、A は 1 行め $(-3,\ -2)$、2 行め $(1,\ 0)$ です。特性方程式は $(-3 - \lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ で、$(x,\ \dot{x})$ の順と同じです。同じものを別の物差しで見ているだけだからです（7-9）。ただし、$B \cdot C \cdot K$ も同じ順に並べかえます。

⚠ まちがえやすいところ

② B を、ただの数と思う

✕　$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=u$ で、
$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+u$（2 つの式の両方に u）

○　$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$、
B は $(0,\ 1)$ のたて書き
u が入るのは、$\ddot{x}$ の式（2 行め）だけです。B は「どの式に何倍で入るか」を表す 1 列の行列です。

⚠ まちがえやすいところ

③ $A-BK$ を $A+BK$ にする

✕　$u=-K\vec{x}$ を入れて
$\dot{\vec{x}}=(A+BK)\vec{x}$

○　$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+B(-K\vec{x})$
$=(A-BK)\vec{x}$
$A+BK$ で計算すると、
$k_1=8$、$k_2=4$ でも固有値は $2\pm\sqrt{16}$ の形になり、棒は立ちません。符号は、u の式から 1 行ずつ入れて確かめます。

⚠ まちがえやすいところ

④ 連続の条件と、くり返しの条件を取りちがえる

✕　A_{d} の固有値 0.8 は正（右半分）なので、くり返しの計算はこわれる

○　くり返し $\vec{x}_{k+1}=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$ では、固有値の**大きさ**が 1 より小さいか（0.8 は円の中で、落ち着く）

反対に、連続の $\dot{\vec{x}}=(A-BK)\vec{x}$ の固有値 -2 を「大きさが 2 で 1 より大きいからこわれる」とするのもまちがいです。連続の式では**実部が負か**、くり返しでは**大きさが 1 より小さいか**で見ます（7-10）。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 線形化した式を、大きなかたむきに使う

✕ $\ddot{\theta} = 4\theta$ で、$\theta = 1\,\mathrm{rad}$（57°）のときのたおれ方を計算する

○ 線形化した式は、θ が小さいとき（0.1 rad ほどまで）だけ使う

1 rad では $\sin 1 = 0.84$ で、θ と 19 % ちがいます（表 2）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ かたむきだけを見ればよいと思う

✕ $u = -k_1\theta$（$k_2 = 0$）で、k_1 を大きくすれば立つ

○ $k_2 = 0$ では固有値の実部が 0 で、ゆれ続ける。たおれる速さ $\dot{\theta}$ も見る

$\lambda^2 + (k_1 - 4) = 0$ の解は $\pm j\sqrt{k_1 - 4}$ です（⑦）。

⚠ まちがえやすいところ

⑦ A の成分の符号だけで、落ち着くかを決める

✕ A（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(3,\ -2)$）は、ななめの -2 が負なので落ち着く

○ 固有値を求める：$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ で $\lambda = 1$、-3。正の 1 があるので落ち着かない

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は落ち着くか → $\det(A - \lambda I) = 0$ の解の実部

「落ち着くか」は名前の段の問いで、A を見ただけでは答えは出ません。行列の計算（固有値）に直して答えます。

物理・工学ではこう使う

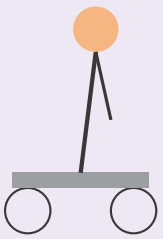
ドローンの姿勢を保つ

ドローンは、前後・左右・向き（回る角度）の 3 つの角度と、その変わる速さの 6 つの数を状態として、センサー（回る速さをはかるジャイロセンサーと、加速度センサー）ではかります。コンピュータは、状態の何倍かずつを 4 つのモーターの回る速さに加え、かたむいたら起こし、ゆれたらおさえます。この計算を 1 秒に数百～数千回くり返します。風で押されても、状態の点を原点（決めた姿勢）に引き寄せ続けるのは、手のひらの棒と同じ考えです。

ドローン

2 輪で立つ乗り物とロボット

車輪が 2 つだけの立ち乗りの乗り物や、2 輪で立って走るロボットは、倒立振子そのものです。人やロボットの体が前にかたむくと、車輪を前へ回して、棒の下の手を動かすのと同じように起こします。かたむきとその速さに加えて、車輪の位置と速さも状態に入れた、4 つの数の状態方程式で設計します。



立ったまま着陸するロケット

くり返し使うロケットの中には、使い終わった 1 段めが、エンジンをふかしながら、立ったまま地上や海の上の船に着陸するものがあります。細長いロケットは、下からエンジンで支えられた倒立振子です。エンジンの向きを少しずつ変えて、かたむきとその速さを 0 に保ちます。

コラム　カルマンと「現代制御」

状態方程式で制御を考える方法は、1960 年ごろから、ルドルフ・カルマンらによって形が整えられました。カルマンは、可制御性と、はかる量から状態をすべて知ることができるかを表す**可観測性**の考えを示し、1960 年と 1961 年には、雑音のあるセンサーの値から状態を推し量る方法（カルマンフィルター）を発表しました。この方法は、アポロ計画などの宇宙船の位置の計算に使われたと伝えられています。それまでの、伝達関数（9-8）で 1 つの入力と 1 つの出力を調べる方法を**古典制御**、状態方程式で多くの量をまとめて調べる方法を**現代制御**とよぶことがあります。どちらも今も使われていて、この巻の 9-8～9-11 で、両方の入口に立ったことになります。

コラム　2 本の足で歩くロボットも、倒立振子

人やロボットが 2 本の足で歩くとき、地面についた足を支点にして、体（重心）が上で前へたおれかかっています。これは、手のひらの棒と同じ倒立振子です。2 足歩行のロボットの多くは、体を「足の上に立つ倒立振子」とみなして線形化した状態方程式を使い、次の足をどこにつけば体がたおれずに進めるかを計算しています。歩くことは、たおれかけては足で支え直すことのくり返しなのです。

章末問題

9-10 のまとめ

基本 ★★★★★

1 $2\ddot{x}+6\dot{x}+4x=F$ で動くおもりがあります。状態を $\vec{x}=(x,\ \dot{x})$、入れるものを $u=F$ として、状態方程式の A と B を求めましょう（例題 1）。

2 6-14 の同じ形の 2 つの水そうで、左の水そうに 1 分に $q\,\mathrm{cm}^3$、右の水そうにも 1 分に $q\,\mathrm{cm}^3$ の水を入れます。状態 $\vec{x}=(h_1,\ h_2)$、$u=q$ として、A と B を求めましょう（例題 2）。

3 長さ $\ell=1.96\,\mathrm{m}$ の軽い棒の先におもりをつけて手のひらに立てます。例題 4 と同じように線形化し、状態方程式の A と B を求め、何も入れないときの固有値を求めましょう（$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$）（例題 4・例題 5）。

4 A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-10,\ -2)$ の $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。固有値を求めて答えましょう（例題 5）。

5 $2.45\,\mathrm{m}$ の棒（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(4,\ 0)$、$B=(0,\ 1)$ のたて書き）で、$A-BK$ の固有値を 2 つとも -1 にする $k_1\cdot k_2$ を求めましょう（例題 6）。

6 A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-6,\ -5)$ の $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。固有値を求めて答えましょう（例題 5）。

チャレンジ ★★★★★

7 コイル $L=0.2\,\mathrm{H}$、コンデンサー $C=50\,\mu\mathrm{F}$、抵抗 $R=40\,\Omega$ を直列にした回路で、状態 $\vec{x}=(v_C,\ i)$、$u=v$ として A と B を求めましょう。また、何も入れないときの固有値を求めましょう（例題 3・例題 5）。

8 例題 4 の棒（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(10,\ 0)$）を、例題 6 の $u = -(26\theta + 8\dot{\theta})$ で立たせる計算を、$\Delta t = 0.1$ 秒ごとに行います。A_{d} とその固有値を求め、落ち着くかを答えましょう。また、落ち着くのは Δt が何秒より小さいときでしょう（例題 7）。

9 車 A（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$、$B = (0,\ 1)$ のたて書き）で、**速度** $\dot{x}$ をはかるとき（C は $(0,\ 1)$ を横に並べた 1 行の行列）の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ を求めましょう（例題 8）。

10 例題 2 の水そう（右から水を入れる。A は 1 行め $(-0.1,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ -0.1)$、$B = (0,\ 0.01)$ のたて書き）で、**左**の水位をはかるとき（C は $(1,\ 0)$ を横に並べた 1 行の行列）の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ を求めましょう（例題 8）。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 手のひらに立てた棒の「かたむき」と「たおれる速さ」を状態として、状態の点の動きの図を読める。 → 446 ページ
- ☐ ばね・水そう・回路・倒立振子の式を状態方程式に書き、A の固有値で落ち着くかを判定できる。 → 449 ページ
- ☐ 状態フィードバックで固有値を選び、コンピュータの中のくり返しで落ち着く条件も判定できる。 → 462 ページ

ソラ

たおれる棒も、かたむきとたおれる速さを見て行列で計算すれば立てられるんだね。次は、状態方程式の答えそのものを、行列の指数関数 e^{At} で書いてみよう。

第 3 部　行列と微分方程式

★★★★★

9-11 行列の指数関数と固有値

道しるべ　この章の前に 5-14 5-17 6-4 6-11 6-14 7-6 7-8 7-9 7-10 7-11 8-13 9-7 9-10　この章の先に 9-12 9-13

この章でできるようになること

- ★★★ オイラー法のくり返し $(I + A\frac{t}{n})^n$ を表計算で計算し、行列の指数関数 e^{At} に近づくのを確かめられる。
- ★★★★ 対角の行列と対角化で e^{At} を計算し、状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ を解ける。
- ★★★★★ 場合分けの表で e^{At} の求め方を選び（回転・cosh と sinh・$(sI - A)^{-1}$・数値）、固有値で落ち着くかを判定できる。

はてな？

冷めるお湯のように、式が 1 つの $\dot{x} = ax$ の答えは $x = e^{at}x_0$ でした (6-4)。9-10 では、たくさんの式を $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ と 1 行で書きました。

その答えも、e の形で書けるでしょうか。e の右上に「行列」をのせるとは、どういうことでしょう。

$\dot{x} = ax \quad \rightarrow \quad x = e^{at}x_0$

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = e^{?}\vec{x}_0$

1 つの式（上）と、たくさんの式（下）

第 7 巻（7-10）では、オイラー法の 1 歩の行列 $I + A\Delta t$ をくり返しかけて、状態方程式を近い値で解きました。そこで、「1 歩を細かくしていった先の行列を

e^{At} と書き、第 9 巻（9-11）で、制御の式を解く主役にする」と予告しました。この章は、その約束を果たす章です。

e^{At} は「行列の指数関数」とよばれ、制御・回路・構造の振動・熱の計算など、たくさんの式をまとめて解くときの土台です。7-11 の送電線の cosh・sinh の行列も、9-1 で解いた棒の熱も、ここで 1 つにつながります。

名前は新しくても、使う道具は、行列のかけ算（7-1）、対角化（7-9）、部分分数と変換表（9-7）など、もう知っているものばかりです。1 回でわからなくても大丈夫です。ここまで来たみなさんなら、1 つずつ確かめながら進めば、必ずたどり着けます。

やってみよう　ばねを、オイラー法で 1 周させよう

7-10 のばね（$\omega = 1$）$\dot{x} = v$、$\dot{v} = -x$ を、表計算のオイラー法で 1 周（$t = 2\pi$）させます。はじめは $x = 1$、$v = 0$ です。

1. F1 に 1 歩の時間 $\Delta t = \frac{2\pi}{63}$ を入れる（`=2*PI()/63`。約 0.0997 秒）。
2. A 列に歩の番号 0〜63、B 列に時刻 `=A2*$F$1` を入れる。
3. C2 に 1、D2 に 0（はじめの x と v）。
4. C3 に `=C2+$F$1*D2`、D3 に `=D2-$F$1*C2` と入れて、65 行めまでコピーする。
5. 63 歩め（$t = 2\pi$）の x を見る。本当は 1 周してもとの 1 にもどるはず。F1 を $\frac{2\pi}{630}$ にして 630 歩でもためす。

④の式は、6-2 のオイラー法「次の値＝今の値＋変わる速さ× Δt」です。x の変わる速さは v、v の変わる速さは $-x$ なので、こうなります。

	A	B	C	D
1	歩	t (s)	x	v
2	0	0	1	0
3	1	0.0997	1	-0.0997
4	2	0.1995	0.9901	-0.1995
5	3	0.2992	0.9702	-0.2982
6	⋮	⋮	⋮	⋮
18	16	1.5957	-0.0213	-1.0822
34	32	3.1915	-1.1707	0.0461
50	48	4.7872	0.0748	1.2659
65	63	6.2832	1.3656	0.0283

表 1　オイラー法で 1 周させた表（$\Delta t = \frac{2\pi}{63}$）。1 周したのに、$x$ は 1 ではなく約 1.37 になった。

思い出そう　この章で使う、前に学んだこと

5-14　$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は n を大きくすると $e = 2.718\cdots$ に近づく。e^{at} を微分すると ae^{at}。

5-17　$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$（テイラー展開）。

6-4　$\dot{x} = ax$ の答えは $x = x_0 e^{at}$（冷めるお湯は $a = -0.05$）。

7-9　固有ベクトルを並べた P、固有値を並べた D で $A = PDP^{-1}$。$A^n = PD^nP^{-1}$。

7-10　オイラー法の 1 歩の行列は $I + A\,\Delta t$。n 歩で $\left(I + A\frac{t}{n}\right)^n$。ばねで 1 周すると、$n = 63$ で成分が 1.37 ほど。

9-7　部分分数に分けて、変換表を逆に引く：$\frac{1}{s+a} \to e^{-at}$、$\frac{1}{(s+a)^2} \to te^{-at}$。

9-10　状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$。$A$ の固有値の実部がすべて負なら落ち着く。

数学の道具

目でわかる くり返しの先にある行列 ★★★

1 1歩を細かくした先：e^{At}

やってみようの表では、1周したのに、x は1ではなく1.37になりました。オイラー法の1歩は、まっすぐな線で進むので、円の外側へ少しずつずれていくからです（図1）。1歩を細かくすると、どうなるでしょう。

状態を $\vec{x} = (x,\ v)$ とすると、ばねの式は $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ で、1歩の行列は $I + A\Delta t$ です（7-10）。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I + A\,\Delta t = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

時刻 t までを n 歩で進めると $\Delta t = \frac{t}{n}$ なので、t 秒後の状態は $\left(I + A\frac{t}{n}\right)^n \vec{x}_0$ です。$t = 2\pi$（1周）で、この行列の成分をPythonで計算すると、次のようになりました。

歩の数 n	左上・右下	右上	1周でのずれ
63	1.3656	−0.0283	37％大きい
630	1.0318	−0.0002	3％大きい
6283	1.0031	0.0000	0.3％大きい
限りなく多く	1	0	ずれなし

表2 $\left(I + A\frac{t}{n}\right)^n$（$t = 2\pi$）の成分。7-10で予告した1.37・1.03・1.003は、単位行列 I に近づいていく。

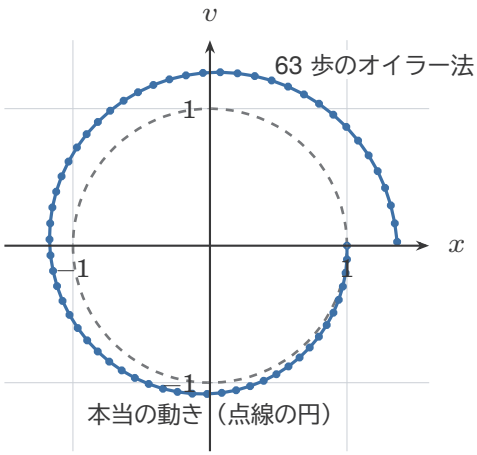


図 1　ばねの状態の点 $(x,\ v)$。本当は円を時計回りに 1 周してもとの点 $(1,\ 0)$ にもどる（6-14）。63 歩のオイラー法（点）は、1 歩ごとに少し外へずれ、うずをまいて $(1.37,\ 0.03)$ に着く。

n をふやすと、1 周後の行列は単位行列 I に近づきます。1 周するともとの状態にもどる、という本当の動きです。式が 1 つのとき、冷めるお湯（$a=-0.05$、$t=10$ 分）の $\left(1-\frac{0.5}{n}\right)^n$ が、$n=10$ で 0.5987、$n=1000$ で 0.60645 と、$e^{-0.5}=0.60653$ に近づいたのと同じです（5-14・7-10）。

①名前の段　記号を読む：くり返しの先にある行列

n を限りなく大きくしたときに $\left(I+A\frac{t}{n}\right)^n$ が近づく行列を、e^{At} と書き、**行列の指数関数**（ぎょうれつのしすうかんすう）といいます。

$$e^{At}=\lim_{n\to\infty}\left(I+A\frac{t}{n}\right)^n$$

「1 歩の行列 $I+A\frac{t}{n}$ を n 回かけて、n を限りなく大きくした先」

1. **何を**：状態の行列 A と、時間 t。At は A の成分をすべて t 倍した行列。
2. **何をする**：細かい 1 歩のくり返しの先（または、②の無限に続くたし算）。
3. **何が出る**：A と同じ大きさの行列。はじめの状態 $\vec{x}_0$ にかけると、t 秒後の状態 $\vec{x}(t)=e^{At}\vec{x}_0$ が出る。

はてな？の後半（e の右上に行列をのせるとは）の答えは、次のとおりです。e^{At} は、「e という数を At 回かける」という意味ではありません。行列の回数だけかけることはできないからです。e^{At} は、くり返しの先の行列に付けた**名前**です。

前半（e の形で書けるか）の答えは「書ける」です。たくさんの式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の答えも、$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$ と、1 つの式のときと同じ形で書けます。ただし、e^{At} は名前なので、実際の値を出すには、行列の計算に直します（②〜⑤と、式でわかるの段）。

$$\underset{\text{名前}}{e^{At}} = \underset{\text{行列の計算}}{Pe^{Dt}P^{-1}\ (\text{対角化など})}$$

手でわかる たし算で書き、対角化で計算する ★★★★

② 無限に続くたし算で書く

5-17 で、e^x は次のように、無限に続くたし算で書けることを学びました。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

この x に行列 At を入れ、1 を単位行列 I にかえたものが、e^{At} のもう 1 つの書き方です。

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \cdots$$

行列の 2 乗・3 乗はかけ算（7-1）で、行列どうしのたし算は成分ごとにたすので、この式は計算できます。①の「くり返しの先」と、このたし算は、同じ行列になります（せいかくに言うと②）。

ばねで、たしていく

ばねの A（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ 0)$）で、$t = \frac{\pi}{2}$（4 分の 1 周）として、1 つずつ項をたしていくと、次のようになります。

どの項までたしたか	左上（＝右下）	右上（＝左下の -1 倍）
$I + At$	1	1.5708
$(At)^2 \div 2!$ まで	-0.2337	1.5708
$(At)^3 \div 3!$ まで	-0.2337	0.9248
$(At)^4 \div 4!$ まで	0.0200	0.9248
$(At)^5 \div 5!$ まで	0.0200	1.0045
$(At)^6 \div 6!$ まで	-0.0009	1.0045
$(At)^7 \div 7!$ まで	-0.0009	0.99984
$(At)^8 \div 8!$ まで	0.00002	0.99984
限りなく	0	1

表 3　e^{At} を、たし算で求める（ばね、$t = \frac{\pi}{2}$）。項をふやすと、1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ 0)$ の行列に近づく。

近づく先の行列は、はじめの状態 $(1,\ 0)$ を $(0,\ -1)$ に移します。円を時計回りに 4 分の 1 周した所で、本当の動き（位置 $\cos t$、速度 $-\sin t$）と合います。左上と右上の数が、項を 1 つたすごとに交代で変わるのは、偶数番めの項と奇数番めの項がちがう成分に入るからです（⑧でわけを見ます）。

③ $\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0$ が答えになっていること

たし算の形を使うと、$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$ が $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の答えになっていることを確かめられます。項ごとに t で微分します（5-17 で、e^x のたし算を項ごとに微分したのと同じ）。A は数の表なので、t で微分すると t^k の部分だけが変わります。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(I\Big) = O$$

単位行列は t によらないので、微分すると 0 の行列

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(At\Big) = A$$

t を微分すると 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{A^2t^2}{2!}\Big) = \frac{A^2\cdot 2t}{2!} = A\cdot At$$

t^2 の微分は $2t$。$2! = 2$ で約分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{A^3t^3}{3!}\Big) = \frac{A^3\cdot 3t^2}{3!} = A\cdot\frac{(At)^2}{2!}$$

$3! = 3\times 2!$ で約分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At} = A\Big(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots\Big) = Ae^{At}$$

微分した項を並べると、$A\times$（もとのたし算）

だから、$\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0$ を微分すると $\dot{\vec{x}} = Ae^{At}\vec{x}_0 = A\vec{x}$ で、状態方程式をみたします。また $t=0$ では、At 以下の項がすべて 0 の行列になるので $e^{A0} = I$、つまり $\vec{x}(0) = I\vec{x}_0 = \vec{x}_0$ で、はじめの状態とも合います。1 つの式の $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = ae^{at}$（5-14）と、まったく同じ形です。

4 対角の行列は、成分ごとに e

つながっていない 2 つの式、たとえば温度の差が $\dot{x}_1 = -x_1$、$\dot{x}_2 = -2x_2$ のように別々に冷めていく 2 つのカップは、A が対角の行列です。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

対角の行列は、何乗しても対角のままで、ななめの数がそれぞれ何乗かになるだけです（7-9）。だから、たし算の左上には $1 + (-t) + \frac{(-t)^2}{2!} + \cdots = e^{-t}$、右下には e^{-2t} が並びます。

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$　対角のときだけ、成分ごとに e

2 つのカップは、それぞれ 6-4 の形で冷めます。式がつながっていないので、答えも別々です。

5 対角化で計算する

ふつうの行列は対角ではありません。でも、7-9 で学んだ対角化 $A = PDP^{-1}$（P は固有ベクトルを並べた行列、D は固有値を並べた対角の行列）を使うと、対角の場合にもちこめます。

② 直す段　$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

$(At)^2 = PDP^{-1}\,PDP^{-1}\,t^2$　　$A = PDP^{-1}$ を 2 回かけた

$(At)^2 = P(Dt)^2P^{-1}$　　まん中の $P^{-1}P = I$ が消える（7-9 の $A^n = PD^nP^{-1}$）

$e^{At} = P\left(I + Dt + \dfrac{(Dt)^2}{2!} + \cdots\right)P^{-1}$　　どの項も $P(\cdots)P^{-1}$ の形なので、P と P^{-1} を外へ出した

$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$　　かっこの中は、対角の行列 D の e^{Dt}（④）

「ななめの物差し（固有ベクトル）で見ると、別々に $e^{\lambda t}$ で変わる。それをふつうの座標にもどす」という意味です（7-9 のななめの方眼）。

車 A で計算する

車 A（$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$）の A は、1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$ です。固有値は -1（固有ベクトル $(1,\ -1)$）と -2（固有ベクトル $(1,\ -2)$）でした（7-8）。

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\quad \det P=-2+1=-1$$

固有ベクトルを列に並べた

$$P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

2×2 の逆行列（7-5）

$$Pe^{Dt}=\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-2t}\\ -e^{-t} & -2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

P の 1 列めに e^{-t}、2 列めに e^{-2t} をかけた

$$Pe^{Dt}P^{-1}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

右から P^{-1}

たとえば 1 行め 1 列めは、Pe^{Dt} の 1 行め $(e^{-t},\ e^{-2t})$ と、P^{-1} の 1 列め $(2,\ -1)$ をかけてたしたものです。$t=0$ を入れると、1 行め $(1,\ 0)$、2 行め $(0,\ 1)$ の単位行列になり、③と合います。はじめ $x=1$、$\dot{x}=0$（$\vec{x}_0=(1,\ 0)$）なら、$e^{At}\vec{x}_0$ は 1 列めなので、

$$x=2e^{-t}-e^{-2t}$$

で、3-10・6-12・9-7 で求めた車 A の答えと同じです。$t=1$ では、1 行め $(0.6004,\ 0.2325)$、2 行め $(-0.4651,\ -0.0972)$ です。

Python で確かめる

Python

```
import numpy as np
from scipy.linalg import expm
A = np.array([[0, 1],
              [-2, -3]])          # 車 A の状態の行列（7-8）
print(np.linalg.eigvals(A))       # 固有値
np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)  # 小数第 4 位まで
print(expm(A*1.0))                # t = 1 の行列の指数関数
```

実行結果

```
[-1.+0.j -2.+0.j]
[[ 0.6004  0.2325]
 [-0.4651 -0.0972]]
```

expm は、行列の指数関数を数値で計算する命令です（matrix exponential の略）。手で計算した値と合いました。

せいかくに言うと

① e^{A+B} と e^Ae^B は、ふつうはちがう

数なら $e^{a+b}=e^ae^b$ です。行列では、$AB=BA$（かける順番を入れかえてよい）なら $e^{A+B}=e^Ae^B$ がなり立ちます。$AB\neq BA$ だと、ふつうはなり立ちません。たとえば、A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(0,\ 0)$、B が 1 行め $(0,\ 0)$、2 行め $(1,\ 0)$ なら（計算は⑨の台車・送電線と同じ）

$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\qquad e^{A+B}=\begin{pmatrix}1.543&1.175\\1.175&1.543\end{pmatrix}$$

です（$A+B$ は送電線の M と同じ形）。$AB\neq BA$ だからです（7-3 の「順番」）。あとの⑧で $e^{At}=e^{\sigma t}e^{Nt}$ と分けてよいのは、σI がどんな行列とも順番を入れかえられるからです。

② くり返しの先と、たし算が同じになるわけ

$\left(I+\frac{At}{n}\right)^n$ は、n 個のかっこのかけ算です。かっこをはずすと、$(At)^k$ の項は「n 個のかっこから $\frac{At}{n}$ を k 個選ぶ」選び方の数だけ出てくるので、係数は $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\times\frac{1}{n^k}$ です。n を大きくすると、$\frac{n-1}{n}$、$\frac{n-2}{n}$、…はどれも 1 に近づくので、係数は $\frac{1}{k!}$ に近づきます。だから、①の極限と②のたし算は同じ行列です（5-14 の $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と同じ理由）。

ここまでで十分

行列の指数関数 e^{At} が、オイラー法のくり返しの先（または無限に続くたし算）の名前で、対角の行列なら成分ごとに e、対角化できれば $Pe^{Dt}P^{-1}$ で計算できれば十分です。この先は、固有値が複素数・重なるとき、入れるものがあるときなど、場合ごとの求め方です。

式でわかる 場合ごとに、e^{At} の求め方を選ぶ ★★★★★

6 場合分けの表と流れ図

e^{At} は名前です。実際の値は、**行列の計算**（対角化・逆行列）か、**部分分数**（$(sI-A)^{-1}$ を 9-7 の表で逆に引く）に直して求めます。どう直すと楽かは、A の形と、何がほしいかで決まります。「こんなときは、こうする」を表にしました（記号 A〜I）。A・B は④・⑤で見た場合です。

③楽をする段　作らずに済ませる（I）・数値（H）・たし算が切れる（D）

落ち着くかだけなら e^{At} を作らない（I）、コンピュータの数値でよいなら expm（H）、A^2 が O や I の何倍かなら、たし算が途中で切れる（D）。表の中で「楽をする」の札が付いた 3 つです。行列の計算や部分分数を始める前に、まずこの 3 つに当てはまらないかを確かめましょう。

場合分けの表 9-11　e^{At}：どんなときに、どう求める？

記号	こんなとき	手順	例題
A	A が対角（式どうしがつながっていない）	行列の計算　成分ごとに $e^{\lambda t}$（④）	1
B	固有値がちがう実数	行列の計算　対角化 $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$（⑤）	2・7
C	固有値が複素数 $\sigma \pm j\omega$（ゆれる）	行列の計算　$N = A - \sigma I$ とすると $N^2 = -\omega^2 I$。$e^{At} = e^{\sigma t}(\cos\omega t\, I + \frac{\sin\omega t}{\omega} N)$（⑧）	3
D	A^2 が O、または単位行列の何倍か	楽をする　たし算が切れる・2 つに分かれる。$A^2 = O$ なら $I + At$、$M^2 = \gamma^2 I$ なら $\cosh\gamma t\, I + \frac{\sinh\gamma t}{\gamma} M$（⑨）	4・5
E	固有値が重なる（重解）	部分分数　$(sI - A)^{-1}$ の成分を部分分数に。$\frac{1}{(s+a)^2} \to te^{-at}$（表 9-7 の C。⑩）	6
F	どの形でも（2×2 なら楽）。確かめに	部分分数　$(sI - A)^{-1}$ を逆行列（7-5）で作り、成分ごとに部分分数で表を逆に引く（⑩）	7
G	入れるもの u がある	部分分数　$(sI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + BU)$ を表 9-7 でもどす（⑪）	8
H	コンピュータの数値でよい（3×3 以上など）	楽をする　expm、または $(I + A\frac{t}{n})^n$（⑫）	9
I	落ち着くかどうかだけ	楽をする　e^{At} を作らない。固有値の実部がすべて負か（⑦）	10

どの順で問えばよいかを、図 2 の流れ図にしました。楽をする問い（落ち着くかだけ・コンピュータの数値でよい）と、入れるものがあるかの問いを上に、A の形の問いを下に置きました。

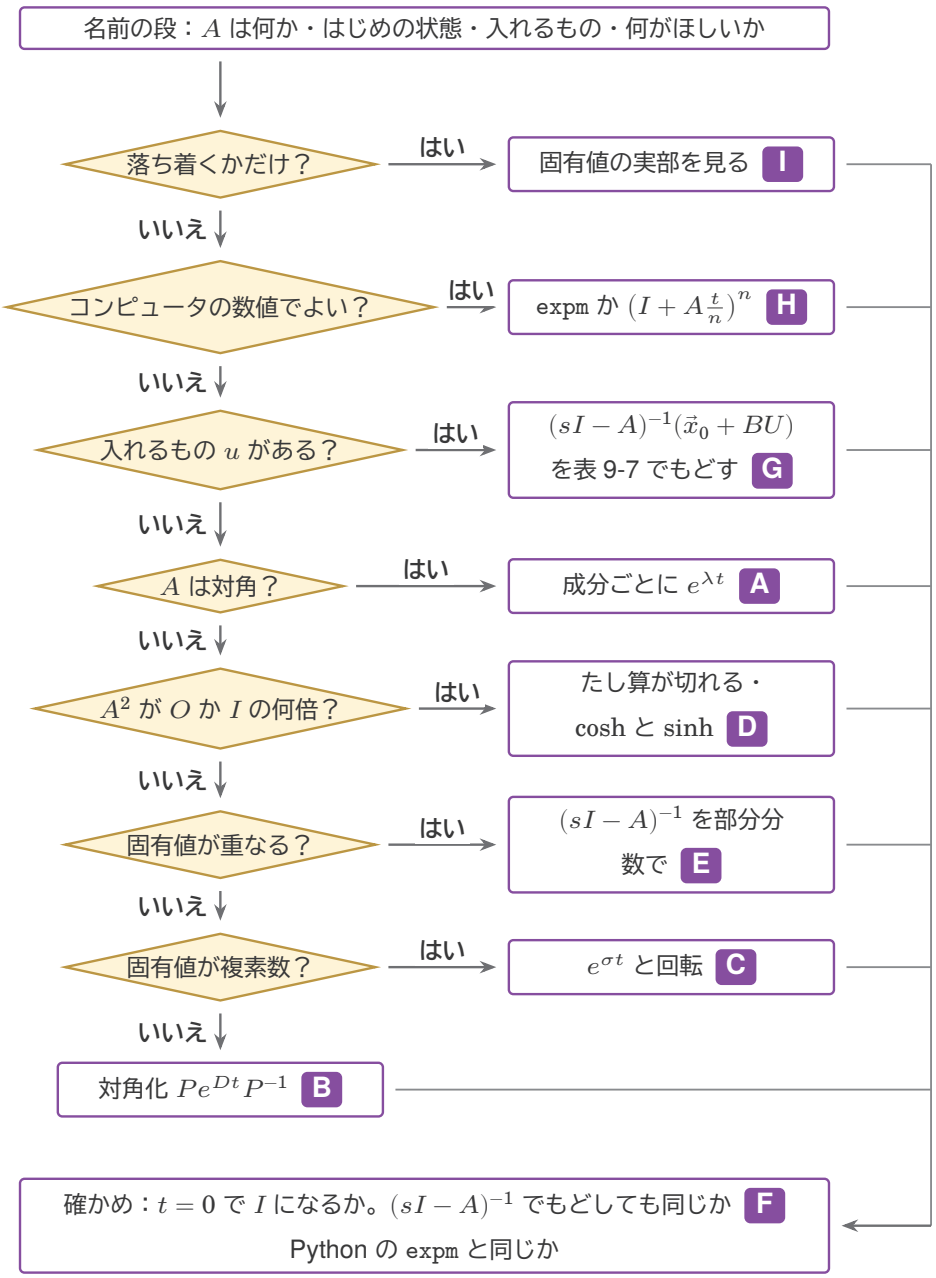


図 2 e^{At} の流れ図。ひし形は問い、四角はすること。上の 2 つ（I・H）と D が楽をする段、G は入れるものがあるときの直し方、そのほかは A の形で選ぶ直す段。答えの出た四角からは、右の線をたどって最後の「確かめ」へ。F は確かめ（と E の中）で使う。

流れ図の使い方：車 A

⑤の車 A（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$）で、e^{At} を求めたいときを、表 9-11 と図 2 の流れ図でたどります。

1. 名前の段：A は車 A の状態の行列、入れるものはない、ほしいのは e^{At} そのもの。
2. 落ち着くかだけ？ いいえ。コンピュータの数値でよい？ いいえ（2×2 で、式がほしい）。入れるもの u がある？ いいえ。
3. A は対角？ いいえ。A^2 が O か I の何倍？ A^2 は 1 行め $(-2,\ -3)$、2 行め $(6,\ 7)$ で、いいえ。
4. 固有値が重なる？ いいえ（-1 と -2）。固有値が複素数？ いいえ。→ 対角化 **B**。

⑤でしたとおりです。最後の確かめで、⑩の $(sI - A)^{-1}$ を使っても同じ答えになることを確かめます（F）。1 回で全部の場合を覚えなくても大丈夫です。問題を解くたびに、表と流れ図にもどって確かめましょう。

どの場合かな？

次の行列の e^{At}（またはほしいもの）は、表 9-11 のどの場合でしょう。先に自分で考えてから、答えを見ましょう。

1. A が 1 行め $(-3,\ 0)$、2 行め $(0,\ -5)$ の e^{At}
   答え：**A**。対角なので、e^{-3t} と e^{-5t} を並べるだけ。
2. 倒立振子に $u = -K\vec{x}$ を入れた $A - BK$ が、落ち着くかだけ知りたい
   答え：**I**。固有値の実部を見る。
3. 9 つの点の熱の行列（9×9）で、10 秒後の温度を数で知りたい
   答え：**H**。`expm` で。
4. A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ 0)$（ばね）の e^{At}
   答え：**D**。$A^2 = -I$（I の -1 倍）。固有値は $\pm j$ なので C でも求められる（⑧）。

❼ 固有値で、落ち着くかがわかる：場合 I

対角化できるとき、$\vec{x}(t) = Pe^{Dt}P^{-1}\vec{x}_0$ です。$P^{-1}\vec{x}_0$ を $(c_1,\ c_2)$ と書くと、

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2e^{\lambda_2 t}$$

となります（$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ は固有ベクトル）。7-8 で $\vec{x} = \vec{v}e^{st}$ を入れて見つけた形を、たし合わせたものです。1 つ 1 つの項の大きさは、$e^{\lambda t}$ の大きさで決まります。$\lambda = \sigma + j\omega$ なら $|e^{\lambda t}| = e^{\sigma t}$（6-10：$e^{j\omega t}$ の大きさは 1）なので、

- 固有値の実部 σ がすべて負なら、どの項も 0 に近づき、状態は落ち着く。
- 実部が 0 の固有値なら、その項の大きさは変わらない（虚部があればゆれ続け、0 ならそのまま残る）。たての軸の上に固有値が重なると、大きくなる（台車の t のように）。どちらも、落ち着くとはいわない。
- 実部が正の固有値が 1 つでもあれば、その項がどんどん大きくなる。

「落ち着くか」だけが知りたいときは、e^{At} を作らずに、固有値だけを求めればよいのです（場合 I）。これが、7-8 の「固有値が全部『左半分』」、9-9 の「極がすべて左半分」、9-10 の判定の、もとになる理由です。

コンピュータの中のくり返しとのつながり

9-10 ⑨では、オイラー法の 1 歩の行列 $I + (A - BK)\Delta t$ で計算しました。本当の 1 歩の行列は、Δt 秒だけ進める $e^{(A-BK)\Delta t}$ です。

$$\vec{x}(t + \Delta t) = e^{(A-BK)\Delta t}\,\vec{x}(t)$$

その固有値は、$A - BK$ の固有値 λ を使って $e^{\lambda\Delta t}$ になります（対角化すると $e^{D\Delta t}$ のななめの数だから）。$\lambda = \sigma + j\omega$ なら大きさは $e^{\sigma\Delta t}$ で、

$$|e^{\lambda\Delta t}| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma < 0$$

です。9-10 の 2 つの条件「連続では実部が負」「くり返しでは大きさが 1 より小さい」は、$e^{\lambda\Delta t}$ でつながっていたのです。棒を立たせる $u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$、$\Delta t = 0.1$ なら、本当の 1 歩の固有値は $e^{-0.2} = 0.8187$ で、オイラー法の 0.8 と近い値です。

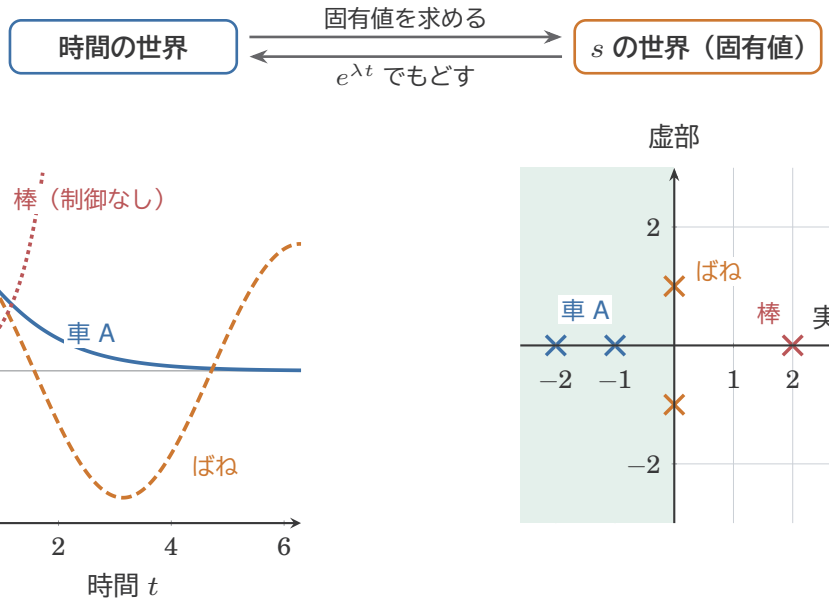


図 3　左：車 A（実線、はじめ 1）、ばね（破線、はじめ 1）、手のひらの棒（点線、はじめ 0.1）の動き。右：それぞれの A の固有値（×）。うすい緑は実部が負の左半分。車 A の ×は 2 つとも左半分で落ち着き、ばねはたての軸（虚軸）の上でゆれ続け、棒は $+2$ が右半分にあってたおれる（棒のもう 1 つの固有値 -2 は、車 A の -2 と同じ場所）。

8 固有値が複素数：回転と $e^{\sigma t}$（場合 C）

ばね（$\omega = 1$）の A（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ 0)$）の固有値は $\pm j$ です。この A は、2 乗すると、とても簡単になります。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \qquad \text{行×列でかけた} \quad (7\text{-}1)$$

$$A^3 = A^2A = -A, \quad A^4 = A^2A^2 = I \qquad A^2 = -I \text{ を使った}$$

A の累乗は I、A、$-I$、$-A$、I、…とくり返します。だから、たし算を「偶数番めの項（I が出る）」と「奇数番めの項（A が出る）」に分けると、

$$e^{At} = I\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)$$

偶数番めと奇数番めに分けた

$$e^{At} = \cos t\ I + \sin t\ A$$

5-17 の $\cos t$・$\sin t$ のたし算の形

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

成分を書いた

これは、7-6 の回転行列 $R(\theta)$ の θ を $-t$ にしたもの、つまり時計回りに角 t だけ回す行列です。6-14 の図で、ばねの状態の点が時計回りにだ円（$\omega = 1$ では円）を回ったのと同じです。②の表の行き先（4 分の 1 周で 1 行め $(0,\ 1)$）もこの形です。そして $t = 2\pi$ では $\cos 2\pi = 1$、$\sin 2\pi = 0$ で、

$$e^{A \cdot 2\pi} = I$$

です。7-10 で予告した 1.37・1.03・1.003 が近づいていく先は、この単位行列でした（表 2）。

ばねの A は $A^2 = -I$（I の -1 倍）なので、流れ図では D に着きます。固有値が $\pm j$ の複素数なので、C の形でも求められます。2 つの場合は、同じ考え（2 乗が単位行列の何倍か）の、ちがう見方です。

ゆれながら小さくなるとき：車 B

車 B（$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$）の A は、1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-5,\ -2)$ で、特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ から、固有値は $-1 \pm 2j$ です。実部を $\sigma = -1$、虚部を $\omega = 2$ と書きます。A から σI をひいた行列 N を作ると、

$$N = A - \sigma I = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

対角に 1 をたした

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1-5 & 1-1 \\ -5+5 & -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$$

行×列。
$-4 = -\omega^2$

と、ばねと同じ形 $N^2 = -\omega^2 I$ になります（2×2 で固有値が $\sigma \pm j\omega$ なら、いつもこうなります）。$A = \sigma I + N$ で、σI はどんな行列とかけても順番を入れかえてよいので、$e^{At} = e^{\sigma t} e^{Nt}$ と分けられます（せいかくに言うと①）。e^{Nt} は、ばねと同じ計算で $\cos\omega t\, I + \frac{\sin\omega t}{\omega} N$ です。

$$e^{At} = e^{\sigma t}\left(\cos\omega t\ I + \frac{\sin\omega t}{\omega}\, N\right) \qquad N = A - \sigma I$$

車 B では $\sigma = -1$、$\omega = 2$ なので、

$$e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \\ -\frac{5}{2}\sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}$$

です。はじめ $\vec{x}_0 = (1,\ 0)$ なら 1 列めで、$x = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$。6-12・9-7 で求めた車 B の答えと同じです（$t = 1$ で 0.01416、$t = 2$ で -0.1397）。e^{-t} が小さくする速さ（実部）、$\cos 2t$・$\sin 2t$ が回る速さ（虚部）を表しています。

9 たし算が切れる・2 つに分かれる：場合 D

A^2 が 0 の行列 O になるときや、単位行列の何倍かになるときは、たし算そのものが簡単になります。

押したあとの台車：$A^2 = O$

まさつのない床の上で、押されたあと力を受けずに進む台車の、位置 x と速度 v は $\dot{x} = v$、$\dot{v} = 0$ です。A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(0,\ 0)$ で、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

行×列

$$e^{At} = I + At + O + O + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 項めから先は 0

たし算が 2 項で切れました。$\vec{x}_0 = (x_0,\ v_0)$ にかけると、$x = x_0 + v_0 t$、$v = v_0$。一定の速さで進む等速の動きで、答えと合います。この A は固有値が 0 の重解で、対角化できない行列ですが (7-9)、たし算なら、すぐに求められます。

送電線：$M^2 = \gamma^2 I$

7-11 のせいかくに言うとで、長さ ℓ の送電線の行列は $e^{M\ell}$（M は 1 行め $(0,\ z)$、2 行め $(y,\ 0)$）で、「9-11 でくわしく学ぶ」と約束しました。M を 2 乗します。

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zy & 0 \\ 0 & zy \end{pmatrix} = \gamma^2 I$$

$\gamma = \sqrt{zy}$（伝搬定数、7-11）

$$M^3 = \gamma^2 M, \quad M^4 = \gamma^4 I, \ \cdots$$

$M^2 = \gamma^2 I$ を使った

ばねのときとちがい、符号が $-$ になりません。偶数番めと奇数番めに分けると、

$$e^{M\ell} = I\left(1 + \frac{(\gamma\ell)^2}{2!} + \frac{(\gamma\ell)^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{M}{\gamma}\left(\gamma\ell + \frac{(\gamma\ell)^3}{3!} + \cdots\right)$$

偶数番め・奇数番め

$$e^{M\ell} = \cosh\gamma\ell\ I + \frac{\sinh\gamma\ell}{\gamma}\,M$$

6-11 の cosh・sinh のたし算の形

成分を書き、$\frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{z}{y}} = Z_0$（特性インピーダンス）、$\frac{y}{\gamma} = \frac{1}{Z_0}$ を使うと、

$$e^{M\ell} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma\ell & Z_0 \sinh\gamma\ell \\ \dfrac{1}{Z_0}\sinh\gamma\ell & \cosh\gamma\ell \end{pmatrix} \qquad \text{四端子定数}$$

7-11 で「専門書の式」として見せた行列が、ここで導けました。これが、長い電線の**四端子定数**（$A = D = \cosh\gamma\ell$、$B = Z_0 \sinh\gamma\ell$、$C = \frac{1}{Z_0}\sinh\gamma\ell$）です（ここの $A \cdot B \cdot C$ は電気の本の四端子定数の名前で、状態方程式の $A \cdot B \cdot C$ とは別のもの）。7-11 の数（$z = y = 1$、$\ell = 1$）では $\gamma = 1$、$Z_0 = 1$ で、$\cosh 1 = 1.543$、$\sinh 1 = 1.175$。7-11 の表で、箱を限りなく細かくした先の値です。$AD - BC = \cosh^2\gamma\ell - \sinh^2\gamma\ell = 1$ も、7-11 のとおりです。

⑩ ラプラス変換で求める：場合 F と E

どんな形の 2 × 2 の行列でも使える方法があります。ラプラス変換（9-5）です。$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ を成分ごとに変換します。

$$s\vec{X} - \vec{x}_0 = A\vec{X} \qquad \mathcal{L}[\dot{x}] = sX - x(0)\ \text{（9-5）を成分ごとに}$$

$$(sI - A)\vec{X} = \vec{x}_0 \qquad A\vec{X}\ \text{を左へ移し、}\ s\vec{X} = sI\vec{X}\ \text{でくくった}$$

$$\vec{X} = (sI - A)^{-1}\vec{x}_0 \qquad \text{左から逆行列をかけた（7-5）}$$

いっぽう、答えは $\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0$ でした。2 つをくらべると、e^{At} をラプラス変換したもの（成分ごとに）が $(sI - A)^{-1}$ です。式が 1 つなら $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$（表 9-6）で、それの行列の形です。

$$\underbrace{e^{At}}_{\text{名前}} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]\ \text{（成分ごとに部分分数）}}_{\text{部分分数}}$$

車 A で確かめる（場合 F）

9-10 ⑩で、車 A の $(sI-A)^{-1}$ を作りました。

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}$$

4 つの成分を、それぞれ部分分数に分けて（9-7 の表 9-7 の B：かくす方法）、表を逆に引きます。

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\to 2e^{-t}-e^{-2t}$$

$s=-1$ で $\frac{2}{1}$、$s=-2$ で $\frac{1}{-1}$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\to e^{-t}-e^{-2t}$$

3-8 の約束の式（9-7）

$$\frac{-2}{(s+1)(s+2)}=\frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}\to -2e^{-t}+2e^{-2t}$$

上の式の -2 倍

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\to -e^{-t}+2e^{-2t}$$

$s=-1$ で $\frac{-1}{1}$、$s=-2$ で $\frac{-2}{-1}$

⑤の対角化と、まったく同じ e^{At} になりました。2 つの方法で同じ答えが出れば、計算のまちがいはまずありません。流れ図の最後の「確かめ」で F を使うのは、このためです。

固有値が重なるとき（場合 E）

$\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$（6-12 のちょうどゆれない「臨界」の動き）の A は、1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ -2)$ で、固有値は -1 の重解です。固有ベクトルが 1 本しかなく、対角化できません（7-9）。そこで $(sI-A)^{-1}$ を使います。$\det(sI-A)=s(s+2)+1=(s+1)^2$ です。

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{pmatrix}$$

det は $(s+1)^2$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \to e^{-t} + te^{-t}$$

$s+2 = (s+1)+1$（表 9-7 の C）

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \to e^{-t} - te^{-t}$$

$s = (s+1)-1$ と分けた

$\frac{1}{(s+1)^2} \to te^{-t}$、$\frac{-1}{(s+1)^2} \to -te^{-t}$ も合わせて、

$$e^{At} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

重解のときは、$e^{\lambda t}$ だけでなく $te^{\lambda t}$ の形が出てきます。6-12 の重解の答え $(c_1 + c_2 t)e^{st}$ と同じ形です。

11 入れるものがあるとき：場合 G

状態方程式に入れるもの u があるとき（$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$）も、ラプラス変換で同じように解けます。

$$s\vec{X} - \vec{x}_0 = A\vec{X} + BU$$

変換した

$$\vec{X} = (sI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + BU)$$

⑩と同じように $\vec{X}$ について解いた

はじめの状態の分 $(sI - A)^{-1}\vec{x}_0$ と、入れたものの分 $(sI - A)^{-1}BU$ の和です（線形なので、分けてたしてよい：5-18）。

車 A に、一定の力を入れる

はじめ止まっている車 A に、$t=0$ から $u=1$（ステップ）を入れ続けます（$U=\frac{1}{s}$、9-6）。$\vec{x}_0=\vec{0}$、$B=(0,\ 1)$ のたて書きなので、

$$(sI-A)^{-1}BU=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}1\\ s\end{pmatrix}\frac{1}{s}$$

9-10 ⑩の $(sI-A)^{-1}B$ に U をかけた

$$X=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

1 行め（位置）。$s=0$、-1、-2 を代入して係数

$$x=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

表を逆に引いた

$t=1$ で 0.1998、最後は $\frac{1}{2}$ に落ち着きます。9-6・9-7 の最終値の定理で求めた $\frac{1}{2}$ と同じです（ばねの力 $2x$ が、入れた 1 とつり合う位置）。

時間の世界で書くと：たたみこみ

同じ答えを、時間の世界で書くと次のようになります（9-6 のたたみこみ。積分の中の文字は t_1）。

$$\vec{x}(t)=e^{At}\vec{x}_0+\int_0^t e^{A(t-t_1)}B\,u(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

「時刻 t_1 に入れた分 $Bu(t_1)\,\mathrm{d}t_1$ が、残りの時間 $t-t_1$ だけ $e^{A(t-t_1)}$ で変わって、今に残っている。それを全部たした」という意味です。式の名前は積分ですが、実際の計算は、上のようにラプラス変換と部分分数で行うのがふつうです。

⑫ 大きな行列：熱の 1 歩の行列（場合 H）

8-13 では、長さ 0.1 m の棒を 0.01 m ずつに区切り、中の 9 つの点の温度を表計算で 1 歩ずつ進めました。8-13 の予告カードで「熱の 1 歩の行列の固有値」を、9-2 のもっと知りたいで「熱の行列の固有ベクトルは sin の形」を、9-11 で確かめると約束しました。ここで果たします。

熱の状態方程式

点 m の温度を T_m とすると、8-13 の差分の式の、時間の部分を微分のまま残した形は

$$\dot{T}_m = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1})$$

です（両はしの T_0、T_{10} は 0 ℃）。$\alpha = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$、$\Delta x = 0.01\,\mathrm{m}$ なので $\frac{\alpha}{\Delta x^2} = 1\ (1/\mathrm{s})$。9 つの温度を並べた $\vec{T}$ で書くと $\dot{\vec{T}} = A\vec{T}$、A は 9×9 で、ななめに -2、そのすぐ上と下に 1 が並ぶ行列です（8-13 の行列と同じ形）。9×9 の e^{At} を手で計算するのは大変なので、Python に任せます（場合 H）。

Python

```
import numpy as np
from scipy.linalg import expm
A = -2*np.eye(9) + np.eye(9, k=1) + np.eye(9, k=-1)
lam, V = np.linalg.eigh(A)      # 固有値と固有ベクトル
print(lam[:5].round(4))         # 小さいほうの 5 つ
print(lam[5:].round(4))         # 残りの 4 つ
v = V[:, -1]                    # いちばん遅い固有ベクトル
print((v / v[4]).round(3))      # まん中を 1 にした
T0 = 100 * np.ones(9)           # はじめどこも 100 度
for t in [5, 10]:
    T = expm(A*t) @ T0          # t 秒後の温度
    print(t, T[4].round(2))     # まん中の点
```

実行結果

```
[-3.9021 -3.618  -3.1756 -2.618  -2.    ]
[-1.382  -0.8244 -0.382  -0.0979]
[0.309 0.588 0.809 0.951 1.    0.951 0.809 0.588 0.309]
5 76.77
10 47.44
```

`np.linalg.eigh` は、対称な行列の固有値と固有ベクトルを出す命令です（8-13 の `eigvalsh` のなかま）。

わかること

1. **固有値はすべて負**（-0.0979〜-3.9021）。どんな温度から始めても、熱は落ち着く（0℃に近づく）。式で書くと $-4\sin^2\frac{m\pi}{20}$（$m=1$〜9）。
2. **いちばん遅い固有ベクトルは sin の形**。0.309、0.588、0.809、0.951、1、…は、$\sin\frac{\pi}{10}$、$\sin\frac{2\pi}{10}$、…、$\sin\frac{5\pi}{10}$ そのもの（図 4）。9-1 で熱方程式をフーリエ級数で解いたときの、いちばん長い成分 $\sin\frac{\pi x}{L}$ です。その固有値 -0.0979 は、9-1 の消える速さ $\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2=0.0987$（1/s）とほぼ同じです。
3. **まん中の温度**は 5 秒で 76.77℃、10 秒で 47.44℃。9-1 のフーリエ級数の答え（77.23℃、47.45℃）に近く、50℃になるのは約 9.46 秒（9-1 は 9.47 秒）です。少しちがうのは、棒を 9 つの点に分けた近似だからです。

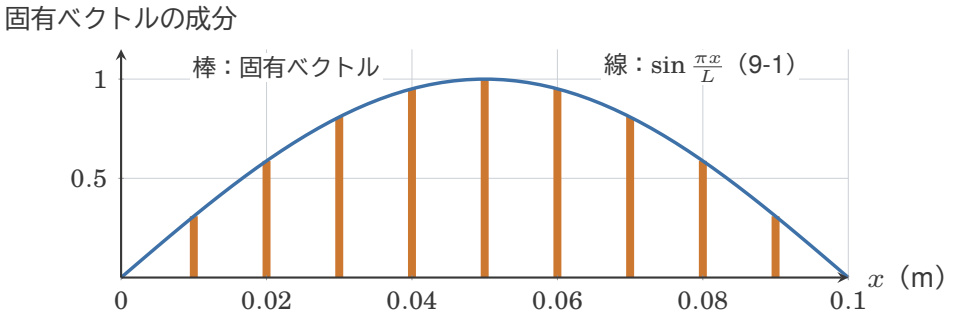


図 4　熱の行列のいちばん遅い固有ベクトル（棒）と、9-1 のフーリエ級数の第 1 の成分 $\sin\frac{\pi x}{L}$（線）。9 つの点の上で、ぴったり重なる。

第 1 部で学んだフーリエの成分（sin の形）と、第 3 部の行列の固有ベクトルは、同じものだったのです。フーリエ級数で熱を解くことは、熱の行列を対角化して、固有ベクトルごとに $e^{\lambda t}$ で小さくすることと同じです。

山の数がふえた sin の形も、固有ベクトルになっています（2 番め・3 番めに遅いもの。9-1 の第 2・第 3 の成分）。山が多い細かい形ほど固有値が負に大きく、速く消えます。だから、しばらくたつと、いちばん遅い $\sin\frac{\pi x}{L}$ の形だけが残ります（9-1 で、時間がたつと第 1 の成分だけが残ったのと同じ）。

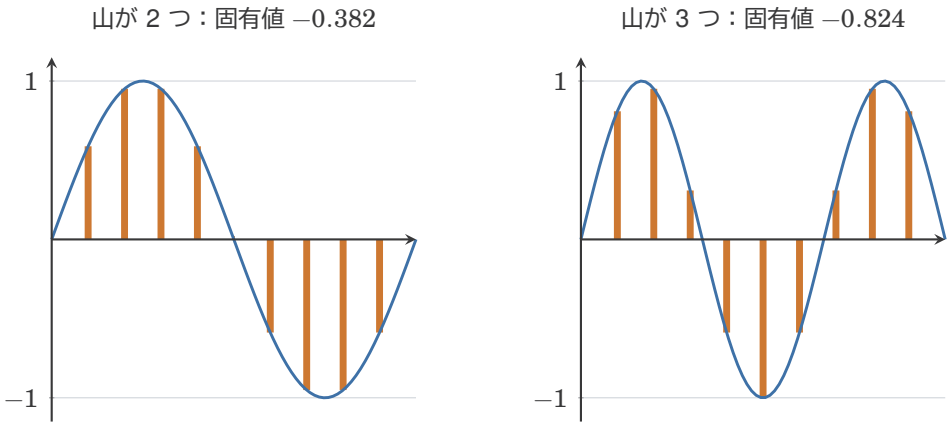


図 5　2 番め・3 番めに遅い固有ベクトル（棒）と、$\sin\frac{2\pi x}{L}$・$\sin\frac{3\pi x}{L}$（線）。$e^{-0.382t}$ は約 2.6 秒、$e^{-0.824t}$ は約 1.2 秒で e^{-1} 倍になり、いちばん遅い形（約 10.2 秒）より速く消える。

こわれない条件 $r \leqq \frac{1}{2}$ をもう一度

8-13 の表計算は、オイラー法の 1 歩 $I + rA$（$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$）のくり返しです。その固有値は $1 + r\lambda = 1 - 4r\sin^2\frac{m\pi}{20}$（7-10 の $1 + \lambda\Delta t$）で、いちばん小さいのは $m = 9$ の $1 - 4r \times 0.9755$ です。これが -1 以上であることが、こわれない条件で、$r \leqq \frac{1}{2\times 0.9755} = 0.513$。「ほぼ $r \leqq \frac{1}{2}$」です（8-13）。$r = 0.25$ なら固有値は $0.0245 \sim 0.9755$ で、どれも大きさが 1 より小さく、$r = 0.6$ ならいちばん小さいものが -1.341 で、こわれます。r を小さくするほど安全ですが、そのぶん 1 歩の時間 Δt が短くなり、計算の回数がふえます。予告カード 9-11 の「熱の 1 歩の行列の固有値と、こわれない条件」は、このことでした。

もっと知りたい ★★★★★

e^{At} の行列式は $e^{(a+d)t}$

2×2 の A（1 行め $(a,\ b)$、2 行め $(c,\ d)$）なら、次の式がなり立ちます（$a+d$ は対角の和）。

$$\det e^{At} = e^{(a+d)t}$$

対角化すると、次のようになります。

$$\det e^{At} = \det e^{Dt} = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

特性方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ の 2 つの解の和は $a+d$ なので、$\lambda_1 + \lambda_2 = a+d$ です。行列式は「面積が何倍になるか」でした（7-4）。

- ばね（$a+d=0$）：$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$。回転は面積を変えない。
- 送電線（$a+d=0$）：$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$。7-11 の「四端子定数の $AD-BC=1$」のわけ。
- 水そう（$a+d=-0.2$）：$e^{-0.2t}$。水の合計は変わらないが、差が消えていくので、広がりは小さくなる。
- 車 A（$a+d=-3$）：$t=1$ で、次のとおり。状態の広がりが小さくなる（落ち着く）。

$$0.6004 \times (-0.0972) - 0.2325 \times (-0.4651) = 0.0498 = e^{-3}$$

専門書をのぞいてみよう　線形代数・制御工学の本ふうの書き方

正方行列 A に対し，$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ を行列指数関数という．$\Phi(t) = e^{At}$ は状態遷移行列とよばれ，$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ の解は $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)\,d\tau$ で与えられる．また $\mathcal{L}[\Phi(t)] = (sI - A)^{-1}$ である．A の全固有値の実部が負であるとき，系は漸近安定である．

訳　$\exp(At)$ は e^{At} の別の書き方（e の右上が長いときに使う）。$\sum_{k=0}^{\infty}$ は $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ の項をすべてたすこと（$A^0 = I$、$0! = 1$）。Φ（ファイ）は t 秒進める行列なので「状態遷移行列」。τ（タウ）はこの本の t_1（この本では τ を時定数に使っている）。「漸近安定」は、時間がたつと原点に近づいていくこと（落ち着く）。

この章で出てきたことば

行列の指数関数　$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$。1 歩 $I + A\frac{t}{n}$ のくり返しの先。$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の答えは $e^{At}\vec{x}_0$。

状態遷移行列　はじめの状態を t 秒後の状態に移す行列 e^{At} の、制御の本での名前。

四端子定数　長い電線では $\cosh\gamma\ell$、$Z_0\sinh\gamma\ell$、$\frac{1}{Z_0}\sinh\gamma\ell$、$\cosh\gamma\ell$ で、$e^{M\ell}$ の成分。

漸近安定　時間がたつと原点に近づくこと。A の固有値の実部がすべて負のとき。

記号カード　初めて出た章 9-11

e^{At}

読み方　イー・エーティー（行列の指数関数）
意味　$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$ の名前。はじめの状態にかけると t 秒後の状態が出る。成分ごとの e ではない
英語　matrix exponential

記号カード　初めて出た章 9-11

$(sI - A)^{-1}$

読み方　エスアイ・マイナス・エーの逆行列
意味　e^{At} をラプラス変換したもの。成分ごとに部分分数に分けて表を逆に引くと e^{At} になる
英語　resolvent

たいせつ

行列の指数関数の 3 つの段

名前 **名前を読む：e^{At} は「1 歩 $I + A\frac{t}{n}$ のくり返しの先」「$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$」。$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$**

楽をする **直す前に：落ち着くかだけ？（固有値） コンピュータの数値でよい？（expm） A^2 が簡単？**

直す **直す：行列の計算（対角化 $Pe^{Dt}P^{-1}$）か、部分分数（$(sI-A)^{-1}$ を表 9-7 で）**

$$\underset{\text{名前}}{\boxed{e^{At}}} = \underset{\text{行列の計算}}{\boxed{Pe^{Dt}P^{-1}}}$$

場合分けの表 9-11（まとめ）

記号	こんなとき	直し方
A	対角	成分ごとに $e^{\lambda t}$
B	固有値がちがう実数	$Pe^{Dt}P^{-1}$
C	固有値が $\sigma \pm j\omega$	$e^{\sigma t}(\cos\omega t\, I + \frac{\sin\omega t}{\omega} N)$
D	$A^2 = O$・I の何倍か	$I + At$、cosh と sinh
E	固有値が重なる	$(sI-A)^{-1}$ を部分分数（$te^{\lambda t}$）
F	どの形でも・確かめ	$\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$
G	入れるものがある	$(sI-A)^{-1}(\vec{x}_0 + BU)$ をもどす
H	大きい・数値	expm、$(I + A\frac{t}{n})^n$
I	落ち着くかだけ	固有値の実部がすべて負か

例題でたしかめよう

例題の「考え方」の 1 行めには、表 9-11 のどの場合かを書きました。例題 1〜10 を図 2 の流れ図でたどると、どれも 1 行めの場合に着きます（書いていない問いは「いいえ」）。

例題	題	「はい」と答えた問い	着いた所
1	対角の行列	A は対角？	A
2	水そうを対角化で	（どれも「いいえ」）	B
3	車 B（ゆれる）	固有値が複素数？	C
4	押したあとの台車	A^2 が O か I の何倍？	D
5	送電線	A^2 が O か I の何倍？	D
6	ちょうどゆれない動き	固有値が重なる？	E
7	$(sI-A)^{-1}$ で	（どれも「いいえ」）→ 確かめの F で求める	B F
8	一定の力を入れる	入れるもの u がある？	G
9	3 つの点の熱	コンピュータの数値でよい？	H
10	落ち着くかの判定	落ち着くかだけ？	I

表 4　例題 1〜10 の流れ図の道すじ。

例題の読み方

どの例題も、次の順に書いてあります。

1. 名前　e^{At} が何の名前かを読む（$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$）。
2. 楽をする　楽な道があれば先に使う（A^2 が簡単・コンピュータの数値でよい・固有値だけでよい）。
3. 直す：行列の計算　か　直す：部分分数　行列の計算か部分分数に直して計算する。
4. 答えが出たら、$t = 0$ で単位行列 I になるかを確かめる（どの e^{At} もそうなる）。

例題 1　対角の行列

$\dot{x}_1 = -x_1$、$\dot{x}_2 = -2x_2$（つながっていない 2 つの式）で、はじめ $\vec{x}_0 = (3,\ 4)$ です。e^{At} と、$t = 1$ の状態を求めましょう。

考え方　**場合：**A が対角（表 9-11 の A）

名前　e^{At}：$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$ の名前。$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$。

直す：行列の計算　A のななめは -1 と -2。対角なので、成分ごとに $e^{\lambda t}$。

式　$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\vec{x}(t) = (3e^{-t},\ 4e^{-2t})$、$t = 1$ で $(3 \times 0.3679,\ 4 \times 0.1353)$

答え　対角が e^{-t}・e^{-2t} の行列。$t = 1$ で $(1.104,\ 0.541)$

確かめ（例題 1）

$t = 0$ を入れると、対角が $e^0 = 1$ の単位行列になり、$\vec{x}(0) = (3,\ 4)$ とはじめの状態に合います。2 つの数は、それぞれ 6-4 の冷め方と同じで、1 つめは 1 秒ごとに $e^{-1} = 0.368$ 倍、2 つめは $e^{-2} = 0.135$ 倍になります。

じぶんでとこう 1

$\dot{x}_1 = -0.5x_1$、$\dot{x}_2 = -3x_2$ で、はじめ $\vec{x}_0 = (2,\ 1)$ です。e^{At} と、$t = 2$ の状態を求めましょう。

例題 2　水そうを対角化で

6-14 の水そう（A は 1 行め $(-0.1,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ -0.1)$、時間は分）で、e^{At} を対角化で求め、はじめ $\vec{x}_0 = (20,\ 0)$ の 10 分後の水位を求めましょう。固有値は 0（固有ベクトル $(1,\ 1)$）と -0.2（$(1,\ -1)$）です（7-8）。

考え方　**場合：**固有値がちがう実数（表 9-11 の B）

名前　e^{At} を、行列の計算 $Pe^{Dt}P^{-1}$ に直す。

直す：行列の計算　P と P^{-1} を作り、e^{Dt} をはさんでかける。

式　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$、$\det P = -2$、$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-0.2t} \\ 1 & -e^{-0.2t} \end{pmatrix} \quad (e^{0t} = 1)$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-0.2t} & 1-e^{-0.2t} \\ 1-e^{-0.2t} & 1+e^{-0.2t} \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0 = (10 + 10e^{-0.2t},\ 10 - 10e^{-0.2t})$　（1 列めの 20 倍）

$t = 10$：$e^{-2} = 0.1353$ で $(11.35,\ 8.65)$

答え　$h_1 = 10 + 10e^{-0.2t}$、$h_2 = 10 - 10e^{-0.2t}$。10 分後に 11.35 cm と 8.65 cm（6-14・7-8 と同じ）

じぶんでとこう 2

となり合う 2 つの部屋の温度の差（外との差）が、A が 1 行め $(-0.3,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ -0.3)$ の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ にしたがいます（分）。固有値は -0.2（$(1,\ 1)$）と -0.4（$(1,\ -1)$）です。e^{At} を対角化で求め、はじめ $(20,\ 0)$ の 5 分後を求めましょう。

例題 3　車 B（ゆれる）

車 B（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-5,\ -2)$）の e^{At} を求め、はじめ $\vec{x}_0 = (1,\ 0)$ のときの $x(t)$ と $x(1)$ を求めましょう。

考え方　**場合：**固有値が複素数（表 9-11 の C）

名前　e^{At} を、$e^{\sigma t}\left(\cos \omega t\, I + \frac{\sin \omega t}{\omega} N\right)$ の行列の計算に直す。

直す：行列の計算　固有値から σ・ω を読み、$N = A - \sigma I$ を作る。

式　$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = -1 \pm 2j$。$\sigma = -1$、$\omega = 2$

$$N = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},\quad N^2 = -4I$$

$$e^{At} = e^{-t}\left(\cos 2t\, I + \frac{\sin 2t}{2} N\right)$$

$x(t)$ は 1 行め 1 列め：$e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

$$x(1) = 0.3679 \times (-0.4161 + 0.4546) = 0.0142$$

答え　$e^{At} = e^{-t}$ に、1 行め $\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$、2 行め $\left(-\frac{5}{2}\sin 2t,\ \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$ をかけたもの。$x(1) = 0.0142$

じぶんでとこう 3

A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-10,\ -2)$ のとき、e^{At} を求め、はじめ $(1,\ 0)$ の $x(t)$ と $x(1)$ を求めましょう。

例題 4　押したあとの台車

まさつのない床の台車で、$\dot{x} = v$、$\dot{v} = 0$ です。e^{At} を求め、はじめ $x = 0$、$v = 2\,\mathrm{m/s}$ のときの 3 秒後の状態を求めましょう。

考え方　**場合：**A^2 が O（表 9-11 の D）

名前　$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$ の名前。

楽をする　$A^2 = O$ なので、たし算は 2 項で切れる。

式　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = (0 + 2t,\ 2)$、$t = 3$ で $(6,\ 2)$

答え　e^{At} は 1 行め $(1,\ t)$、2 行め $(0,\ 1)$。3 秒後に $x = 6\,\mathrm{m}$、$v = 2\,\mathrm{m/s}$

じぶんでとこう 4

$\dot{x} = 3y$、$\dot{y} = 0$ の e^{At} を求め、はじめ $(1,\ 2)$ の $t = 2$ の状態を求めましょう。

例題 5 送電線

1 km あたりの直列の部分が $z = 4\,\Omega/\mathrm{km}$、並列の部分が $y = 1\,\mathrm{S/km}$ の線（7-11 と同じ、数を簡単にした線）で、長さ $\ell = 0.5\,\mathrm{km}$ の行列 $e^{M\ell}$（M は 1 行め $(0,\ z)$、2 行め $(y,\ 0)$）を求めましょう（$\cosh 1 = 1.543$、$\sinh 1 = 1.175$）。

考え方 **場合：** M^2 が単位行列の何倍か（表 9-11 の D）

名前 $e^{M\ell}$：長さ ℓ の線の行列（小さな箱を限りなくつないだ先）。

楽をする $M^2 = zyI = \gamma^2 I$ なので、cosh と sinh に分かれる。

式 $\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{4 \times 1} = 2$（1/km）、$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{4} = 2$（Ω）

$$\gamma\ell = 2 \times 0.5 = 1$$

$$e^{M\ell} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & Z_0 \sinh 1 \\ \frac{1}{Z_0}\sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.543 & 2 \times 1.175 \\ \frac{1.175}{2} & 1.543 \end{pmatrix}$$

答え 1 行め $(1.543,\ 2.350)$、2 行め $(0.588,\ 1.543)$。行列式は $1.543^2 - 2.350 \times 0.588 = 0.999$（丸めのため。本当は 1）

じぶんでとこう 5

$z = 1\,\Omega/\mathrm{km}$、$y = 4\,\mathrm{S/km}$、$\ell = 0.5\,\mathrm{km}$ の線で、$e^{M\ell}$ を求めましょう（$\cosh 1 = 1.543$、$\sinh 1 = 1.175$）。

例題 6　ちょうどゆれない動き

$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$（$A$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ -2)$）の e^{At} を、$(sI - A)^{-1}$ を逆変換して求め、はじめ $(1,\ 0)$ の $x(t)$ と $x(1)$ を求めましょう。

考え方　**場合：**固有値が重なる（表 9-11 の **E**）

名前　$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$（成分ごと）。

直す：部分分数　4 つの成分を部分分数に分け、$\frac{1}{(s+1)^2} \to te^{-t}$（表 9-7 の C）。

式　$\det(sI - A) = s(s+2) + 1 = (s+1)^2$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \to (1+t)e^{-t}$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \to (1-t)e^{-t}$$

$x(t)$ は 1 行め 1 列め：$(1+t)e^{-t}$、$x(1) = 2e^{-1} = 0.736$

答え　$e^{At} = e^{-t}$ に、1 行め $(1+t,\ t)$、2 行め $(-t,\ 1-t)$ をかけたもの。$x(1) = 0.736$

じぶんでとこう 6

9-10 で棒を立たせた $A - BK$（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-4,\ -4)$）の e^{At} を、$(sI - A)^{-1}$ を逆変換して求め、はじめ $(0.01,\ 0)$ の $\theta(t)$ と $\theta(1)$ を求めましょう。

例題 7 $(sI-A)^{-1}$ で

$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0$（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-6,\ -5)$、固有値 -2・-3）の e^{At} を、$(sI-A)^{-1}$ を逆変換して求めましょう。また $t=1$ の値を求めましょう。

考え方 **場合：**固有値がちがう実数。$(sI-A)^{-1}$ で求める（表 9-11 の **B** と **F**）

名前 $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$。

直す：部分分数 成分ごとに部分分数（表 9-7 の B：かくす方法）。

式 $(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix}$

$$\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+3}\quad\left(s=-2\text{ で }\tfrac{3}{1},\ s=-3\text{ で }\tfrac{2}{-1}\right)$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3},\quad \frac{s}{(s+2)(s+3)}=\frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} 3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

答え 上の行列。$t=1$ で 1 行め $(0.3064,\ 0.0855)$、2 行め $(-0.5133,\ -0.1213)$（$t=0$ で I になる）

じぶんでとこう 7

A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-3,\ -4)$（固有値 -1・-3）の e^{At} を、$(sI-A)^{-1}$ を逆変換して求めましょう。

例題 8　一定の力を入れる

はじめ止まっている車 A（A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$、$B=(0,\ 1)$ のたて書き）に、$t=0$ から $u=1$ を入れ続けます。位置 $x(t)$ と、$t=1$ の値、最後に落ち着く値を求めましょう。

考え方　**場合：**入れるもの u がある（表 9-11 の G）

名前　$\vec{x}$ は「$e^{At}\vec{x}_0$ ＋ 入れた分」。ラプラス変換では、次の形。

$$\vec{X}=(sI-A)^{-1}(\vec{x}_0+BU)$$

直す：部分分数　$\vec{x}_0=\vec{0}$、$U=\frac{1}{s}$。1 行めを部分分数に分け、表 9-7 で逆に引く。

式
$$X=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}\quad(s=0、-1、-2\text{ を代入})$$
$$x=\tfrac{1}{2}-e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}、\ x(1)=0.5-0.3679+0.0677=0.1998$$

答え　$x=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$。$x(1)=0.200$、最後は $\frac{1}{2}$

じぶんでとこう 8

はじめ止まっている A（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-6,\ -5)$）、$B=(0,\ 1)$ のたて書きの式に、$u=1$ を入れ続けます。$x(t)$、$x(1)$、最後の値を求めましょう。

例題 9　3 つの点の熱

長さ 0.04 m の棒を 0.01 m ずつに区切った中の 3 つの点の温度は、$\dot{\vec{T}} = A\vec{T}$（A は 1 行め $(-2,\ 1,\ 0)$、2 行め $(1,\ -2,\ 1)$、3 行め $(0,\ 1,\ -2)$、1/s）にしたがいます（⑫と同じ $\frac{\alpha}{\Delta x^2} = 1$）。はじめどこも 100 ℃のとき、1 秒後の温度と、固有値を Python で求めましょう。

考え方　**場合**：3 × 3 で、コンピュータの数値でよい（表 9-11 の **H**）

名前　$\vec{T}(t) = e^{At}\vec{T}_0$。

楽をする　3 × 3 なので、expm と eigvalsh で数値を出す。

式　次のプログラムで計算する。

Python

```
import numpy as np
from scipy.linalg import expm
A = np.array([[-2, 1, 0],
              [1, -2, 1],
              [0, 1, -2]])                  # 3 つの点の熱の行列
print(np.linalg.eigvalsh(A).round(3))  # 固有値
print((expm(A*1.0) @ [100, 100, 100]).round(2))  # 1 秒後
```

実行結果

```
[-3.414 -2.    -0.586]
[48.   66.51 48.  ]
```

答え　1 秒後に 48.00 ℃、66.51 ℃、48.00 ℃。固有値は −3.414、−2、−0.586（すべて負なので落ち着く。いちばん遅い −0.586 の固有ベクトルは $(1,\ 1.414,\ 1)$ で sin の形）

じぶんでとこう 9

例題 9 の 3 つの点で、はじめ $(0,\ 100,\ 0)$ ℃（まん中だけ熱い）のとき、例題 9 のプログラムの [100, 100, 100] を書きかえて、1 秒後の温度を求めましょう。

例題 10　落ち着くかの判定

次の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。

(1) 手のひらの棒（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(4,\ 0)$）

(2) 棒を立たせた $A - BK$（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-4,\ -4)$）

(3) ばね（1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-1,\ 0)$）

考え方　**場合**：落ち着くかどうかだけ（表 9-11 の I）

名前　「落ち着くか」は、e^{At} が 0 の行列に近づくか。

楽をする　e^{At} は作らず、固有値の実部だけを見る。

式　(1) $\lambda^2 - 4 = 0$、$\lambda = \pm 2$

(2) $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$、$\lambda = -2$（重解）

(3) $\lambda^2 + 1 = 0$、$\lambda = \pm j$（実部 0）

答え　(1) $+2$ があるので落ち着かない（たおれる）

(2) 実部がすべて負なので落ち着く

(3) 実部が 0 で虚部があるので、ゆれ続ける（落ち着かない）

じぶんでとこう 10

次の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は、落ち着くでしょうか。(1) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-5,\ -2)$。(2) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(2,\ -1)$。(3) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-6,\ -5)$。

⚠ まちがえやすいところをチェック

⚠ まちがえやすいところ

① e^{At} を、成分ごとに e にする

✕ 車 A の e^{At} は、1 行め $(e^0,\ e^t)$、2 行め $(e^{-2t},\ e^{-3t})$

○ e^{At} は名前。行列の計算に直す（車 A は対角化して $Pe^{Dt}P^{-1}$）

$$\boxed{e^{At}} \neq (\text{成分ごとの } e), \qquad \boxed{e^{At}} = \boxed{Pe^{Dt}P^{-1}}$$

成分ごとに e にしてよいのは、A が対角のとき（場合 A）だけです。$t=0$ を入れてみると、まちがいに気づけます。上の × の行列は、$t=0$ で単位行列 I になりません（右上が $e^0=1$）。

⚠ まちがえやすいところ

② P と P^{-1} の順番を逆にする

✕ $e^{At}=P^{-1}e^{Dt}P$

○ $e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}$

右から読みます。P^{-1} で「ななめの物差し」に直し、e^{Dt} で変化させ、P でふつうの座標にもどします（7-9）。

⚠ まちがえやすいところ

③ $e^{A+B}=e^Ae^B$ と思う

✕ どんな A・B でも
$e^{A+B}=e^Ae^B$

○ $AB=BA$ ならよい。
$AB\neq BA$ だと、ふつうはなり立たない

せいかくに言うと①の例では、
e^Ae^B の 1 行めは $(2,\ 1)$、
e^{A+B} の 1 行めは
$(1.543,\ 1.175)$ です。

⚠ まちがえやすいところ

④ 実部が 0 でも「落ち着く」と思う

✕ ばね（$\pm j$）は、正の実部がないので落ち着く

○ 実部 0 は大きさが変わらない（虚部があればゆれ続ける）。落ち着くのは、実部が**すべて負**のとき

ばねの e^{At} は回転で、大きさが小さくなりません（⑧）。

⚠ まちがえやすいところ

⑤ 重解で $te^{\lambda t}$ を忘れる

✕ 固有値 -1 の重解なので、e^{At} は e^{-t} の何倍か

○ $\frac{1}{(s+1)^2}$ の項から te^{-t} が出る

例題 6 の e^{At} には、e^{-t} のほかに te^{-t} が入っています（6-12 の重解と同じ）。

⚠ まちがえやすいところ

⑥ 連続の条件と、1 歩の行列の条件を取りちがえる

✕ $A-BK$ の固有値 -2 は大きさが 2 で 1 より大きいので、棒はたおれる

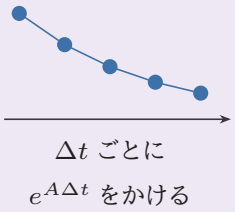
○ $\dot{\vec{x}}=(A-BK)\vec{x}$ では実部（$-2<0$）を見る。1 歩の行列 $e^{(A-BK)\Delta t}$ の固有値 $e^{-2\Delta t}$ なら大きさ（1 より小さい）を見る

2 つの条件は $|e^{\lambda\Delta t}|=e^{\sigma\Delta t}$ でつながっています（⑦）。どちらの式の固有値なのかを、いつも確かめましょう。

物理・工学ではこう使う

コンピュータの中の 1 歩：$e^{A\Delta t}$

ドローンや工場の機械をコンピュータで制御するときや、車・ロボットの動きをコンピュータで試すとき（シミュレーション）には、Δt ごとの 1 歩の行列が必要です。オイラー法の $I + A\Delta t$ より正確な $e^{A\Delta t}$ を、はじめに 1 回だけ計算しておけば、あとはかけ算をくり返すだけで、正しい動きを追えます。固有値が単位円の中にあるかどうかで、計算が落ち着くかもわかります（⑦）。



ビルや橋のゆれ：固有ベクトルごとのゆれ（モード）

ビルの各階の位置と速度を並べた大きな状態方程式でも、e^{At} は固有ベクトルごとに $e^{\lambda t}$ で変わる動きの和です。固有ベクトルの形を「ゆれのモード」とよび、地震のときにどの形のゆれが強く出るか、どれだけ速く小さくなるか（固有値の実部）を調べて、建物を設計します（7-9 のモード解析、物理 波-3）。

送電線・アンテナ線

送電線や、テレビのアンテナにつなぐ同軸ケーブルは、⑨の四端子定数 $e^{M\ell}$ で、入口と出口の電圧・電流の関係を表します。本物の線では $z \cdot y$ に $j\omega L \cdot j\omega C$ が入り、γ が複素数になるので、cosh・sinh が「回る」形になって、電圧の波が線を伝わるようすが表れます（物理 電-13）。

コラム　行列の指数関数の「19 のあやしい計算方法」

e^{At} を数値で計算するのは、意外にむずかしい問題です。たし算の形をそのまま使うと、t が大きいとき、大きな数どうしの打ち消しあいで、計算の誤差がふくらむことがあります。1978 年、数値計算の研究者クリーブ・モラーとチャールズ・ヴァン・ローンは、『行列の指数関数を計算する 19 のあやしい方法』という題の論文で、いろいろな方法の長所と弱点をくらべました。25 年後には、その続きの論文も書かれています。いまの expm のような命令は、こうした研究をもとに、t をいったん小さく分けてから計算し、あとで何回も 2 乗してもとにもどす、という工夫で、正確な値を出しています。

章末問題

9-11 のまとめ

基本 ★★★★★

1　$\dot{x}_1 = -4x_1$、$\dot{x}_2 = -0.1x_2$ で、はじめ $(5,\ 10)$ です。e^{At} と、$t = 1$ の状態を求めましょう（例題 1）。

2　6-14 の水そう（例題 2 と同じ A）で、はじめ $(20,\ 0)$ のときの 5 分後の水位を求めましょう（例題 2）（$e^{-1} = 0.3679$）。

3　$\dot{x} = v$、$\dot{v} = 0$ の台車で、はじめ $x = 1\,\mathrm{m}$、$v = -0.5\,\mathrm{m/s}$ です。e^{At} を使って、4 秒後の状態を求めましょう（例題 4）。

4　$z = 1\,\Omega/\mathrm{km}$、$y = 1\,\mathrm{S/km}$ の線（7-11 と同じ数）で、長さ $\ell = 2\,\mathrm{km}$ の $e^{M\ell}$ を求めましょう（$\cosh 2 = 3.762$、$\sinh 2 = 3.627$）（例題 5）。

5 次の $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ は落ち着くでしょうか。(1) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -2)$。(2) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-4,\ 0)$。(3) A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(1,\ 0)$ (例題 10)。

チャレンジ ★★★★★

6 A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -2)$ の e^{At} を求め、はじめ $(1,\ 0)$ の $x(t)$ と $x(1)$ を求めましょう(例題 3)。

7 A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-9,\ -6)$(固有値 -3 の重解)の e^{At} を、$(sI-A)^{-1}$ で求め、はじめ $(1,\ 0)$ の $x(t)$ と $x(1)$ を求めましょう(例題 6)。

8 A が 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-8,\ -6)$(固有値 $-2\cdot-4$)の e^{At} を、$(sI-A)^{-1}$ で求めましょう(例題 7)。

9 はじめ止まっている車 A に、$t=0$ から $u=2$ を入れ続けます。位置 $x(t)$ と $x(1)$、最後の値を求めましょう(例題 8)。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ オイラー法のくり返しを表計算で計算し、行列の指数関数 e^{At} に近づくのを確かめられる。 → 495 ページ
- ☐ 対角の行列と対角化で e^{At} を計算し、状態方程式を解ける。 → 500 ページ
- ☐ 場合分けの表で e^{At} の求め方を選び、固有値で落ち着くかを判定できる。 → 503 ページ

ミナ

熱の行列の固有ベクトルがフーリエの sin だったなんて、びっくり。
次は、フーリエとラプラスの使いみちを見に行こう。

第 3 部　行列と微分方程式

★★★～★★★★★

9-12 フーリエとラプラスの使いみち

道しるべ　この章の前に 6-13 7-11 9-2 9-4 9-8 9-9 9-10 9-11　この章の先に 9-13

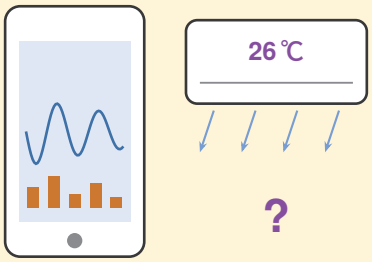
この章でできるようになること

- ★★★ 音楽・写真の圧縮、通信、医療、機械の診断、エアコンの制御で、この巻のどの道具が働いているかを言える。
- ★★★★ 圧縮が「周波数の成分に分けて、小さな成分をけずる」しくみであることを、8 つの数の例で説明できる。
- ★★★★★ PID 制御の 3 つの項の役割を、極と最終値の定理のことばで説明できる。

? はてな？

スマホに入れた 1 曲は、CD の同じ曲とくらべて、データの大きさが約 11 分の 1 しかありません。それなのに、ほとんど同じ音に聞こえます。エアコンは、外が暑くても、部屋を設定温度にぴったり合わせます。

データの 9 割以上を捨てても、なぜ音は変わらないのでしょう。エアコンは、どうやって設定温度に「ぴったり」合わせているのでしょう。



思い出そう この章で使う、前に学んだこと

- 9-2 直交する sin・cos にかけてたすと、ほしい成分だけが残る。電力は成分ごとの和（パーセバルの等式）。N 項でやめたフーリエ級数は、いちばん近い近似。
- 9-4 データの周波数の成分は FFT で求める。サンプリング周波数の半分より高い音は記録できない（サンプリング定理）。CD は 1 秒に 44 100 回。
- 9-8 伝達関数は「出てくるもの÷入れるもの」。フィードバックでつなぐと全体は $G_1/(1+G_1G_2)$。倍率は dB で表すと、直列でたし算。
- 9-9 すべての極の実部が負なら安定。比例制御だけでは、ずれが残る（エアコン：設定 26℃に対して 26.9℃）。ずれの積分を足すと、ずれが消える。
- 9-10 状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$。$\vec{u} = -K\vec{x}$ で固有値（極）を選んだ場所に置く（極配置）。

場面	働いている名前	計算のしかた（章と表）
音楽の圧縮（①）	$F(\omega)$	FFT（表 9-4 の G）
写真の圧縮（②）	cos の係数	行列のかけ算（7-11・9-2）
雑音を消す（③）	たし合わせ、e^{-sL}	9-1（たし合わせ）、9-6（むだ時間）
機械の診断（④）	$F(\omega)$	FFT（表 9-4 の G）
スマホ・Wi-Fi（⑤）	c_n、直交性	逆向きの FFT と FFT（9-3・9-4）
MRI（⑥）	2 次元の F	FFT（表 9-4 の G）
エアコン・PID（⑦⑧）	$G(s)$、極	表 9-8 の D、表 9-7 の H
ドローン（⑨）	$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$	固有値（表 9-11 の I）
電力の品質（⑩）	$a_n \cdot b_n$	定積分（表 9-2）、パーセバル（9-2）

表 1 この章の場面と、働いている「名前」、それを計算するしかた（章と表の場合）。

この章は**読みもの**です。例題や問題はありません。第 9 巻で学んだフーリエ解析とラプラス変換が、身のまわりのどこで働いているかを、実際の機械で見ていき

ます。主な場面で、まず「名前の段」で記号を読み、「その名前を実際に計算するには、どの章の表のどの場合を使うか」（計算のしかた）を、章番号と表の記号で示します（表 1）。計算のくわしい手順は、そこへもどれば確かめられます。

ここまで、波を分ける話と、変化を予想する話を、たくさん学んできました。この章は、そのごほうびのような章です。式を全部追いかけなくても大丈夫です。「あ、これはあの章の道具だ」と気づけたら、それで十分です。

音と写真を小さくする：圧縮

1 音楽の圧縮：聞こえない成分をけずる

音楽の CD は、9-4 で見たとおり、1 秒に 44 100 回、音の大きさをはかって記録しています。1 回の値は 16 ビット（$2^{16} = 65\,536$ 段階）の数で、左右 2 つのマイクの分があります。だから、1 秒あたりのデータの量は

$$44\,100 \text{ 回/s} \times 16 \text{ ビット/回} \times 2 = 1\,411\,200 \text{ ビット/s}\ (1411.2 \text{ kbit/s})$$

です。4 分（240 秒）の曲なら、$1\,411\,200 \times 240 \div 8 \approx 42\,300\,000$ バイト、約 42 MB（メガバイト）になります（8 ビットが 1 バイト）。

スマホで音楽を聞くときによく使われる **MP3** という形式では、ふつう 1 秒に 128 kbit で記録します。$1411.2 \div 128 \approx 11$ で、データは約 11 分の 1、4 分の曲で約 3.8 MB です。MP3 は、1993 年に国際規格（MPEG-1 の音声の第 3 層）として決められました。このように、データを小さくすることを**圧縮**（あっしゅく）といいます。

どこをけずるのか

MP3 は、音を約 26 ms の短い区間（1152 個の値）に区切り、区間ごとに周波数の成分に分けます（9-4 のスペクトル）。そして、人の耳に聞こえにくい成分を、あらく記録したり、捨てたりします。聞こえにくい成分には、次のようなものがあります。

- 人が聞こえる上限（若い人で約 20 000 Hz）より高い成分（9-4）。
- 大きな音のすぐ近くの周波数にある、小さな音。大きな音にかくされて、聞こえにくくなります。これを**マスキング**といいます。
- 人の耳がにぶい、とても低い音やとても高い音のうち、小さな成分。

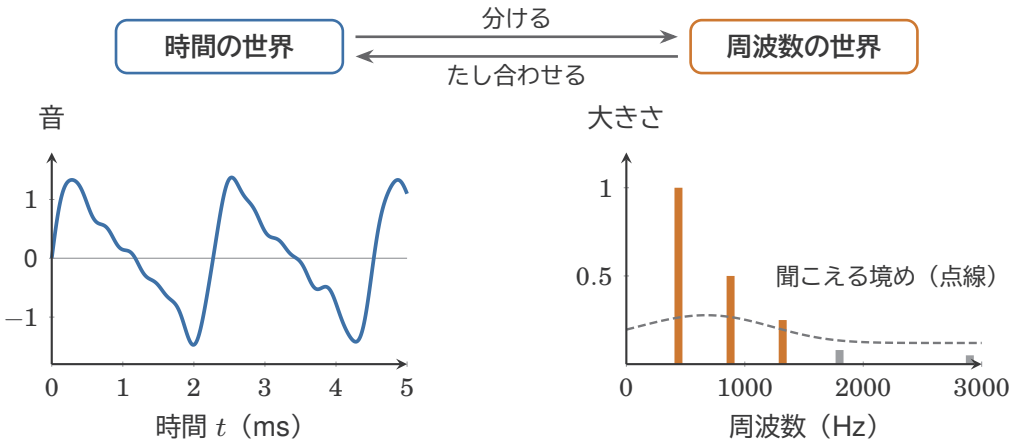


図 1 MP3 の考え方（形を見るための作った例）。左は短い区間の音の波形、右はそのスペクトル。点線より下の成分（灰色の棒）は、大きな音にかくされて聞こえにくいので、けずってもほとんど気づかない。

名前

$F(\omega)$

短い区間の音 $f(t)$ に $e^{-j\omega t}$ をかけてたす（9-4）。区間ごとのスペクトル。

計算のしかた：データなので積分しない。FFT で和を計算する（表 9-4 の G）。

MP3 の中では、音をいくつかの周波数の帯に分けたあと、cos だけを使う「変形離散コサイン変換」（MDCT）という、フーリエ変換の親せきが使われています。名前は長いですが、していることは 9-2 と同じ「波にかけてたして、成分を取り出す」です（物理シリーズ 波-11）。

② 写真の圧縮：8 × 8 のブロックを cos に分ける

スマホやデジタルカメラの写真の多くは、**JPEG**（ジェイペグ）という形式で記録されています（1992 年に規格が公開）。7-11 で、「JPEG は画像を 8 × 8 画素の小さなブロックに分け…この表し直しは、8 × 8 の行列のかけ算です（9-12

で読むフーリエの考えの親せき)」と予告しました。ここで、そのしくみを読みます。

8 つの明るさを、8 つの cos の形に分ける

話を簡単にするため、写真の中の横 1 列の 8 個の画素だけを考えます。それぞれの明るさ（0〜255）が、次の 8 つの数だったとします。

$$52,\quad 55,\quad 61,\quad 66,\quad 70,\quad 61,\quad 64,\quad 73$$

JPEG は、この 8 つの数を、次の図の 8 つの「cos の形」のたし算に直します。0 番めは平らな形（平均の明るさ)、1 番めはゆっくり変わる形、7 番めはいちばん細かく変わる形です。

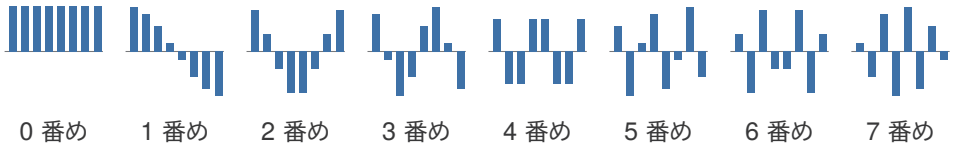


図 2　8 個の画素のための、8 つの cos の形（k 番めの形の m 番めの値は $\cos\frac{(2m+1)k\pi}{16}$)。$k$ が大きいほど細かい。

この 8 つの形は、9-2 で学んだように**直交**しています（ちがう 2 つの形の、同じ番めの値どうしをかけてたすと 0)。だから、9-2 と同じく「その形をかけてたす」だけで、それぞれの形がどれだけ入っているか（係数）がわかります。この変換を**離散コサイン変換**（DCT）といいます。cos だけですむのは、8 つの数を鏡に映したように左右へ折り返してつなぐと、偶関数（9-2）になるからです。

名前

DCT の係数 X_k

8 つの明るさ x_m に、k 番めの cos の形をかけてたす（大きさをそろえる数をかける)。

計算のしかた：8 つの係数をまとめて、8×8 の行列 C をかける：$\vec{X}=C\vec{x}$（行列の計算。7-2・7-11)。

上の 8 つの数で計算すると（Python)、係数は次のようになります。

k	0	1	2	3	4	5	6	7
係数 X_k	177.5	−14.4	−5.7	−6.7	7.1	−3.1	−0.7	2.4

表 2 8 つの明るさの DCT の係数（大きさは、行列 C の行の長さを 1 にそろえた形で計算した）。

0 番め（平均の明るさ）がとびぬけて大きく、細かい形ほど小さくなっています。パーセバルの等式（9-2）で見ると、0 番めだけで全体の「明るさの 2 乗の和」の 98.9 % をもっています。写真のふつうの部分は、となりどうしの明るさがあまり変わらない、なめらかな形だからです。

小さな係数をけずって、もどす

そこで、細かい形の係数を 0 にして（けずって）、残りだけで 8 つの明るさにもどしてみます。もどすには、行列 C の転置 C^{T} をかけます（C は直交行列なので、逆行列は転置：7-5・7-6）。

	8 つの明るさ								最大のずれ
もとの値	52	55	61	66	70	61	64	73	—
0 番めだけ	62.8	62.8	62.8	62.8	62.8	62.8	62.8	62.8	10.8
0〜1 番め	55.7	56.8	58.7	61.3	64.2	66.8	68.7	69.8	5.8
0〜3 番め	50.3	56.3	63.1	65.8	64.9	64.5	67.0	70.0	5.1

表 3 残す係数をへらしてもどした値（Python で計算）。半分（0〜3 番め）だけでも、0〜255 の明るさのうち、ずれは最大 5 ほど。

9-2 のもっと知りたいで、「N 項でやめたフーリエ級数は、いちばん近い近似」と学びました。ここでも同じで、係数を残す数を決めたとき、もどした値は、もとの明るさに（2 乗の平均の意味で）いちばん近い形になっています。

本物の JPEG は、横と縦の両方の向きで同じことをします。8×8 のブロックの明るさを行列 X とすると、64 個の係数は CXC^{T} という行列のかけ算で求まります。細かい形の係数ほどあらく丸めて（小さいものは 0 にして）記録

し、データをふつう 10 分の 1 ほどにします。JPEG の写真を強く圧縮すると、8×8 のます目のようなもようが見えることがあるのは、ブロックごとに係数をけずっているからです。

❸ 雑音を消す：ノイズキャンセリング

9-4 の物理・工学ではこう使うで、録音した音を FFT して、雑音の周波数の成分だけを小さくしてもどす方法を読みました。ここでは、ちがうやり方で雑音を消すヘッドホンを読みます。

ノイズキャンセリングのヘッドホンは、外側の小さなマイクでまわりの雑音を拾い、それと大きさが同じで、向き（符号）が反対の音をスピーカーから出します。9-1 で学んだように、波はたし合わせられるので、$\sin \omega t$ と $-\sin \omega t$ をたすと 0 になり、耳に届く雑音が小さくなります。

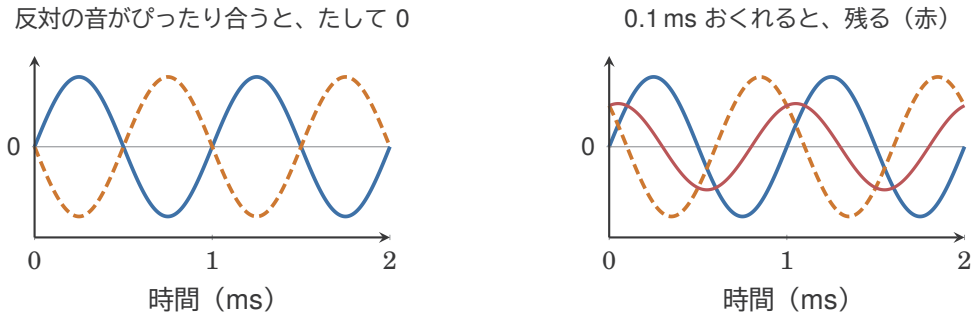


図 3　1000 Hz の雑音（青の実線）と、反対の音（オレンジの破線）。右は、反対の音が 0.1 ms おくれた場合で、たした音（赤）が残る。

ところが、反対の音を作るには、マイクで拾ってから計算して出すまでに、わずかな時間がかかります。この「おくれ」は、9-6 のむだ時間 e^{-sL} と同じものです。おくれが 0.1 ms あると、残る音の大きさ（もとの雑音を 1 として）は、6-10 の回る矢印で考えて $|1 - e^{-j\theta}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$（$\theta$ はおくれの角）になります。

雑音の周波数	おくれの角 θ	残る大きさ	dB
100 Hz	3.6°	0.063	−24
500 Hz	18°	0.31	−10
1000 Hz	36°	0.62	−4

表 4 おくれ 0.1 ms のときに残る雑音（$\theta = 360° \times$ 周波数 $\times$ おくれ）。dB は 3-12・9-8 の $20\log_{10}$。

同じおくれでも、周波数が高いほど角 θ が大きくなり、消し残りがふえます。だから、ノイズキャンセリングは、電車や飛行機の「ゴー」という低い音を消すのが得意で、人の話し声のような高い音は、イヤーパッドなどでさえぎるしかけと組み合わせて小さくしています。

見えない所を、周波数で見る

4 機械の診断：回転数の何倍か

9-4 で、機械の振動を FFT で調べると、故障を見つける手がかりになることを読みました。工場のポンプやモーターは、1 分に 1800 回転なら、1 秒に 30 回転（30 Hz）です。振動のスペクトルを見て、30 Hz（回転数の 1 倍）の成分が大きければ「回る部分の重さのかたより」、60 Hz（2 倍）が大きければ「軸の中心のずれ」をうたがう、というように、回転数の何倍の成分が大きいかで、悪い所の見当をつける方法が使われています（目安とされる例。くわしくは物理シリーズ 波-10）。

名前

振動のスペクトル $F(\omega)$

はかった振動のデータに $e^{-j\omega t}$ をかけてたす。

計算のしかた：データなので FFT（表 9-4 の G）。サンプリング定理を守る（9-4）。

人が機械の音を聞いて「いつもと音がちがう」と気づくのも、耳と脳が音を周波数に分けて聞いているからです。FFT は、それを数でできるようにした道具です。

⑤ スマホ・Wi-Fi・地デジ：たくさんの周波数で送る

スマホの通信（4G・5G）、Wi-Fi、テレビの地上デジタル放送では、**OFDM**（直交周波数分割多重）という方式が使われています。名前のとおり、「直交」する（9-2）たくさんの周波数の波に、データを少しずつのせて、いっしょに送る方法です。

たとえば、Wi-Fi の規格の 1 つ（IEEE 802.11a、1999 年）では、20 MHz のはばの中に、間かく 312.5 kHz の 52 本の波を並べ、そのうち 48 本でデータを送ります。312.5 kHz は 20 000 000 ÷ 64 で、64 点の FFT にちょうど合うように決めた数です（くわしくは物理シリーズ 波-14）。

- **送る側**：それぞれの周波数にのせる数（係数）を決め、それを「たし合わせて」1 つの波にします。これは、9-3 の複素フーリエ級数 $\sum c_n e^{jn\omega_0 t}$ を作ることで、計算は逆向きの FFT です。
- **受ける側**：受けた波を FFT して、それぞれの周波数の係数を取り出します。9-2 の直交性があるので、となりの周波数の波がまざっていても、ほしい係数だけが取り出せます。

となりどうしの周波数の差（312.5 kHz）から、$1 \div 312.5\,\text{kHz} = 3.2\,\mu\text{s}$ の間に、どの波もちょうど整数回ゆれます（だから直交する：9-2）。データは、この長さに反射に備えたすき間 0.8 µs を足した 4 µs ごとに送られます。1 本 1 本はゆっくり変わる波なので、建物で反射しておくれて届く電波があっても、データが乱れにくいのです。

⑥ MRI：体の中の写真を、フーリエ変換で作る

病院の **MRI**（磁気共鳴画像）は、強い磁石の中で、体の中の水素の原子核から出る弱い電波をはかって、体の中の断面の写真を作る装置です。体に、場所によって強さが少しずつちがう磁場をかけると、出てくる電波の周波数が場所によってちがってきます。だから、はかった信号の周波数の成分を調べれば、どこにどれだけ水素があるかがわかります。

MRI がはかるデータは、写真を横と縦の 2 つの向きにフーリエ変換したもの（9-4 の物理・工学ではこう使うで読んだ、2 次元の変換）になっていることが知られています。だから、データを 2 次元の FFT でもどすと、写真ができます。②の JPEG は「写真→周波数」、MRI は「周波数（はかったデータ）→写真」と、向きが反対の使い方です。MRI の写真を初めて作ったのはローターバーで、1973 年に科学雑誌『ネイチャー』に発表しました。

名前	
2 次元のフーリエ変換	写真の明るさに、横と縦の 2 つの向きの $e^{-j\omega t}$ の形をかけてたす。 **計算のしかた：**データなので、2 次元の FFT（表 9-4 の G を 2 つの向きに）。

機械を思いどおりに動かす：制御

⑦ エアコンの温度制御：PID 制御

3-1 で、「エアコンは部屋の温度をはかりつづけ、設定温度との差が大きいほど強く冷やします（このしくみは第 9 巻の制御で学びます）」と書きました。9-8・9-9 で、これが比例制御で、外が 35 ℃・設定 26 ℃・部屋の時定数 60 分のとき、比例の強さ $RK_{\mathrm{p}} = 9$ では、26.9 ℃で落ち着いて 0.9 ℃のずれが残ることを計算しました。

9-9 のもっと知りたいで、「ずれの積分」を足すと、ずれが消えることを見ました。ずれが少しでも残っていると、その積分がどんどんふえて冷やす力を

強めつづけ、ずれがちょうど 0 になったときに、はじめて力が一定になるからです。同じ部屋で、比例の強さはそのまま（$RK_{\mathrm{p}} = 9$）、ずれの積分の強さを $RK_{\mathrm{i}} = 0.15$（1/分）にして計算すると、次のようになります。

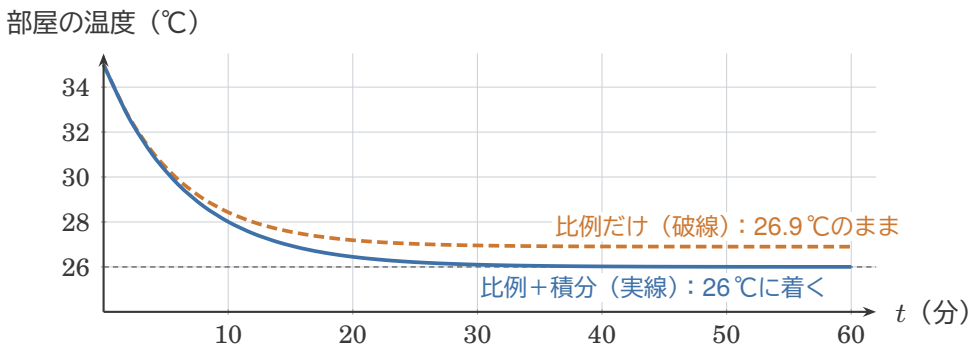


図 4　外 35 ℃の部屋（はじめ 35 ℃）を、設定 26 ℃で冷やすときの温度（Python で計算）。比例だけでは 0.9 ℃のずれが残り、ずれの積分を足すと、ずれが消える。

比例＋積分の全体の分母は $60s^2 + 10s + 0.15$ で、極は -0.15 と $-\frac{1}{60}$（1/分）です。どちらも左半分なので安定で（9-9）、最終値の定理（9-6）が使え、最後のずれは 0 になります。

3 つの項：P・I・D

これに、「ずれの変わる速さ」（ずれの微分）の項を足したものを、**PID 制御**といいます。ずれを ε（イプシロン）と書くと（ネイピア数の e とまぎれないように）、加える量 u は次の式で決めます。

$$u = K_{\mathrm{p}}\varepsilon + K_{\mathrm{i}}\int \varepsilon \,\mathrm{d}t + K_{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$$

s の世界では、制御の箱は　$K_{\mathrm{p}} + \dfrac{K_{\mathrm{i}}}{s} + K_{\mathrm{d}}s$

項	見ている量	役割（この巻の章）
P（比例）	今のずれ	ずれが大きいほど強く。強くすると極が左へ動いて速くなるが、ずれは残る（9-9 ⑨⑪）
I（積分）	これまでのずれのたまり	残ったずれを 0 にする（9-9 のもっと知りたい：最終値の定理）
D（微分）	ずれの変わる速さ	ずれが急に変わるのを見て先回りし、行きすぎやゆれをおさえる（9-10 の倒立振子で「たおれる速さ」を見たのと同じ考え）

表 5 PID 制御の 3 つの項。Proportional（比例）・Integral（積分）・Derivative（微分）の頭文字。

3 つの強さ K_p・K_i・K_d を決めることは、全体の極をどこに置くかを決めることと同じです（9-9 の根軌跡、9-10 の極配置）。工場の温度・圧力・流れの量の制御、ドローンの姿勢、車の速さを一定に保つしくみなど、今も多くの機械で PID 制御が使われています。

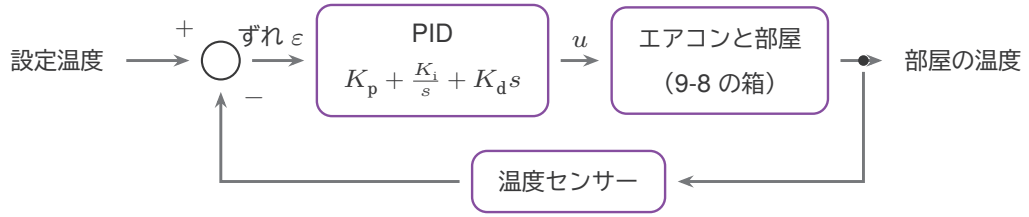


図 5 エアコンの PID 制御のブロック線図（9-8）。○は加え合わせ点で、設定温度からはかった温度を引いて、ずれを作る。

名前

$G(s)$ と極

はじめの値を 0 にして、出てくるもの÷入れるもの。分母 $= 0$ の解が極。

計算のしかた：フィードバックは表 9-8 の D、最後の値は表 9-7 の H、極は表 9-9。

インバーター：力の大きさを変えられるエアコン

むかしのエアコンは、コンプレッサー（冷やすためのポンプ）を「全力で動かす・止める」のくり返しで温度を調節していました。今の多くのエアコンは、**インバーター**という回路でモーターの回る速さを変え、冷やす力を少しずつ変えられます。PID 制御のように「ずれに応じて力を変える」ことができるのは、このためです。

8 むだ時間と、周波数で見る設計

9-6 で、シャワーの温度調節がむずかしいのは、むだ時間 e^{-sL} があるからだと読みました。工場の長い配管やベルトコンベアでも、調節した効き目が L 秒おくれて出ます。9-9 の 3 次の電気炉で、おくれが重なると、強くしすぎたとたんにゆれがふくらむことを見ました。むだ時間は、そのおくれがもっと大きい場合で、PID の強さを大きくしすぎると不安定になりやすいのです。

むだ時間のある機械や、ゆれやすい機械（6-13 の共振）の設計では、$s = j\omega$ を入れた周波数応答 $G(j\omega)$（9-8）を、横軸に周波数を対数目もりで、たて軸に倍率を dB でとったグラフ、**ボード線図**（3-12・9-8）で調べます。「1 周してもどってくる倍率が 1（0 dB）になる周波数で、おくれが 180° にどれだけ足りないか」（位相余裕）などを見て、安定に余裕があるかを判断します。くわしい読み方は、物理シリーズ（波-2・波-4）で学びます。

9 ドローン・自動運転：状態方程式とカルマンフィルター

ドローンの姿勢（前後・左右のかたむきと向き）は、角度と、角度の変わる速さを全部まとめた状態 $\vec{x}$ で表され、9-10 の状態方程式 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$ で動きます。4 つのプロペラの回る速さ（$\vec{u}$）を、$\vec{u} = -K\vec{x}$ のように状態から決め、固有値（極）を左半分のよい場所に置きます（9-10 の極配置、9-11 の「固有値で落ち着くかがわかる」）。

ところが、センサーではかった値には、いつも雑音がまざっています。また、速さのように、直接ははかりにくい状態もあります。9-10 のコラムで紹介した

ように、カルマンは 1960 年ごろ、雑音のあるセンサーの値と状態方程式を組み合わせて、状態をいちばんよく推し量る方法を示しました。これが**カルマンフィルター**です。スマホの位置の計算（GPS と加速度センサーを合わせる）、ドローン、自動運転の車などで、名前を聞くことがあるでしょう。

名前

e^{At} と固有値

状態方程式の答え $\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0$。固有値の実部が負なら落ち着く。

計算のしかた：落ち着くかだけなら固有値を見る（表 9-11 の I）。

⑩ 電力の品質：高調波

スマホの充電器、パソコン、インバーターのついたエアコンや冷蔵庫は、電気をいったん直流に直して使うので、コンセントから流れる電流が、きれいな sin の形からくずれます。くずれた波は、9-1・9-2 で学んだように、50 Hz（または 60 Hz）の基本波と、その整数倍の**高調波**の和です。9-2 で、方形波のひずみ率が 48.3 % になることを計算しました。高調波の電流が多いと、電線や変圧器がよけいに熱くなったり、ほかの機械に雑音が入ったりするので、電気製品には、高調波をどれだけ出してよいかの決まりがあります。ここでも、電流をフーリエ級数に分けて考えることが出発点です。

コラム　PID 制御のはじまり：船のかじ取り

ずれの比例・積分・微分で船のかじを動かす考えを、数式で調べた最初の論文の 1 つが、1922 年に、アメリカでミノルスキーが発表した「自動でかじを取る物体の方向の安定性」です。ミノルスキーは、船員がかじを取るようすを観察して、「今のずれ」だけでなく、「ずれの変わる速さ」や「これまでのずれ」も見てかじを動かしていることに気づき、それを式にしたといわれています。9-9 のコラムのワットの調速機（1788 年ころ）とマクスウェルの論文（1868 年）から始まった「フィードバックの数学」は、こうして船や工場へ広がっていきました。

この巻の道具と、働く場面

この章の場面で、第 9 巻の 3 つの部の道具が、どこで働いていたかを表にまとめます。

場面	フーリエ解析（9-1〜9-4）	ラプラス変換・極（9-5〜9-9）	行列と状態（9-10・9-11）
音楽・写真の圧縮（①②）	●		
ノイズキャンセリング（③）	●	●	
機械の診断（④）	●		
スマホ・Wi-Fi（⑤）	●		
MRI（⑥）	●		
エアコン・PID（⑦⑧）		●	
ドローン・自動運転（⑨）		●	●
電力の品質（⑩）	●		

表 6　●は、その場面で使っている道具（主なもの）。

専門書をのぞいてみよう

11 信号処理・制御の本の書き方

信号処理や制御工学の本では、この巻と同じものを、少しちがう記号で書いていることがあります。下の囲みは、制御工学の教科書ふうの書き方の例です。この巻と専門書の記号の対応は、表 7 にまとめました。

専門書をのぞいてみよう 制御工学の教科書ふうの書き方

PID 制御則は $u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_D \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ で与えられる。ここで $e(t) = r(t) - y(t)$ は偏差である。補償器の伝達関数（初期値を 0 として $U(s)/E(s)$）は $C(s) = K_P + K_I/s + K_D s$ となる。積分動作により，ステップ状の目標値に対する定常偏差は 0 となる（閉ループ系が安定であることが前提）。

訳 $e(t)$ はこの章のずれ ε（ネイピア数の e ではない）。$r(t)$ は目標の値、$y(t)$ は出てくる量。「制御則」は u の決め方、「偏差」はずれ。積分の中の τ は、9-6 のたたみこみの t_1 と同じ「前の時刻」の文字（この本の τ は時定数）。$U(s)$・$E(s)$ は $u(t)$・$e(t)$ のラプラス変換で、「補償器」は制御の箱。$C(s)$ はその伝達関数。「定常偏差」は落ち着いたあとのずれ。「閉ループ系が安定」は、フィードバックでつないだ全体の極がすべて左半分（9-9）。

もの	この本	専門書でよく見る書き方
フーリエ変換	$F(\omega)$	$X(\omega)$、$X(f)$、$X(j\omega)$
伝達関数	$G(s)$	$G(s)$、$H(s)$、$P(s)$
フィードバックの箱	G_2	$H(s)$（$\frac{G}{1+GH}$）
ステップ関数	$H(t)$	$u(t)$、$1(t)$
ずれ（偏差）	ε	$e(t)$
z 変換（名前だけ）	—	$X(z)$、$H(z)$

表 7 この巻の記号と、信号処理・制御の本でよく見る記号。$e(t)$ のように、ネイピア数と同じ文字を使う本もあるので、前後から読み分ける。z 変換は、とびとびのデータのための、ラプラス変換の親せき（デジタルの制御・信号処理で使う）。

たいせつ

名前を読めば、どの章の道具かがわかる

・音・写真・電波・MRI・機械の振動：データを周波数の成分に分ける（$F(\omega)$・c_n・DCT）。計算は FFT や行列のかけ算（9-2〜9-4、7-11）。

・圧縮：小さな成分をけずっても、いちばん近い近似が残る（9-2）。

・制御：伝達関数と極で、落ち着くか・ずれが残るかがわかる（9-8・9-9）。PID の I はずれを消し、D は先回りしてゆれをおさえる。状態方程式では固有値を選ぶ（9-10・9-11）。

この章で出てきたことば

圧縮　データの大きさを小さくすること。聞こえない・見えない成分をけずる。

マスキング　大きな音の近くの周波数の小さな音が、聞こえにくくなること。

離散コサイン変換（DCT）　とびとびの値を、cos の形だけの成分に分ける変換。JPEG・MP3 の中で使う。

ノイズキャンセリング　雑音と反対の音を出して、たし合わせて雑音を小さくするしくみ。

OFDM　直交するたくさんの周波数にデータをのせて送る方式。FFT で作り、FFT で取り出す。

PID 制御　ずれの比例・積分・微分で、加える量を決める制御。

カルマンフィルター　雑音のあるはかった値と状態方程式から、状態を推し量る方法。

ボード線図　周波数応答の倍率（dB）とおくれを、周波数の対数目もりでかいたグラフ。

コラム　人の耳も、周波数に分けて聞いている

耳のおくには、カタツムリのからのようにまいた「うずまき管」があり、その中に細長い膜が張られています。音が入ると、この膜は、入口に近い所ほど高い音で、おくの所ほど低い音で、大きくゆれることが知られています。ゆれた場所の神経が、脳に信号を送ります。つまり耳は、音を時間の波形のまま聞くのではなく、場所ごとに周波数の成分に分けて聞いているのです。MP3 が「聞こえにくい成分」をけずれるのも、ノイズキャンセリングが低い音を得意とするのも、この耳のしくみと、9-4 のスペクトルの考えを組み合わせているからです。

ふりかえり　できるようになったかな？

- [ ] 音楽・写真の圧縮で、周波数の成分に分けて小さな成分をけずっていることを説明できる。 → 540 ページ
- [ ] 通信・MRI・機械の診断で、FFT と直交性が働いていることを言える。 → 546 ページ
- [ ] PID 制御の 3 つの項の役割を、極と最終値の定理のことばで説明できる。 → 547 ページ

ソラ

スマホの中にも、エアコンの中にも、この巻の sin と cos、極と固有値が入っていたね。最後の 9-13 では、全 9 巻の路線がどこで合流したかを、地図にしてふりかえろう。

終章　工学の数学の地図

★★★〜★★★★★

9-13 工学の数学の地図

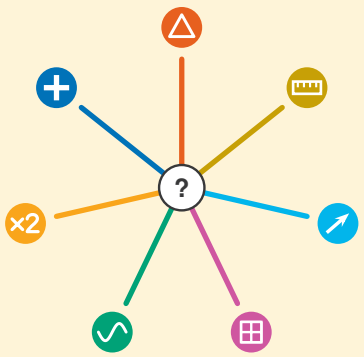
この章でできるようになること

- ★★★ 全 9 巻の 7 本の路線が、どの駅を通って、どこを終点にしたかを、地図でたどれる。
- ★★★★ 路線が合流した 5 つの所で、どの巻の道具とどの巻の道具が出会ったかを、式と例で説明できる。
- ★★★★★ 専門書の式を、名前の段で読み、記号を訳し、4 つの道具のどれで計算するかを決められる。

? はてな？

このシリーズの章は、どれも 7 本の路線のどれかの駅でした。7 本の路線は、第 1 巻・第 2 巻の別々の駅から出発しました。

その 7 本は、第 9 巻までの間に、どこかで出会ったのでしょうか。どこで、どの路線とどの路線が合流したのかな？



小学 1 年の「リンゴは何個？」から始まったこのシリーズも、この章が最後です。全 9 巻、152 の章を読んできました。数を数えることから始めて、かけ算、グラフ、三角関数、微分と積分、微分方程式、行列、ベクトル場、そして第 9 巻のフーリエ解析とラプラス変換まで、一段ずつ積み上げてきました。ここまで来たあなたは、大学の工学部で使う数学の、大事な道具をひととおり手に入れています。本当によくがんばりました。

この章では、問題は解きません。これまでに乗ってきた路線を、地図にしてふり返ります。

この章は、どこから読んでもかまいません。前の巻の章の番号がたくさん出てきます。なつかしい章があれば、ぜひ開いてみてください。1 回目に読んだときより、ずっとよくわかるはずです。

思い出そう この章で使う、前に学んだこと

9-0 第 9 巻は、3 つの部と終章。路線④・⑦・③・⑤の 4 本が、この巻に終点をもつ。

9-0 記号は、まだ計算していない「名前」。実際の値は、4 つの道具（ふつうの定積分・表を引く・部分分数・行列の計算）のどれかに直して出す。

8-0 第 8 巻では、路線①・②・⑥の 3 本が終点に着いた（8-4・8-11・8-5）。

6-0 第 6 巻の微分方程式は、路線①〜④が乗りかえる駅（全 9 巻の路線図の点線の囲み）。

7 本の路線をふり返る

1 7 本の路線と、その終点

このシリーズの章は、どれも 7 本の路線のどれかに乗っています。路線は「1 つの考え方の道」です。同じ路線の駅は、小学校の算数から大学の数学まで、1 つの考え方でつながっています。どの路線も、最後は工学で使う分野（終点）に着きます。

	路線	大きな駅のつながり	終点
△	変化	ひき算（1-5）→ 四則（2-3）→ グラフの傾き（3-5）→ 瞬間の速さ（5-1）→ 微分方程式（6-1）→ **勾配 grad**（8-4）	流体・熱
＋	たし合わせ	面積（1-21）→ 四則（2-3）→ 細かく分けてたす（4-5）→ 細い長方形（5-10）→ 積分で解く（6-3）→ **ガウスの定理**（8-11）	電磁気
×2	倍々	累乗と指数（2-7）→ 指数関数（3-11）→ e（5-14）→ 冷めるお湯（6-4）→ **ラプラス変換**（9-5）	制御
∿	回転と波	角の大きさ（1-20）→ 三角関数（4-8）→ sin の微分（5-15）→ オイラーの公式（6-10）→ **フーリエ級数**（9-1）	音・交流
⊞	表	九九の表（1-13）→ 表計算（2-18）→ 連立方程式（3-6）→ 行列（7-1）→ **状態方程式**（9-10）	回路網・制御
↗	矢印	数直線（2-2）→ 座標（3-2）→ ベクトル（4-10）→ 3 次元の回転（7-7）→ **ベクトル場**（8-5）	ロボット・電磁気
📏	はかる	目もり（1-11）→ ずれ（2-6）→ 標準偏差（3-14）→ **フーリエ変換**（9-4）	計測・診断

表 1　7 本の路線の大きな駅と終点（太字が終点の駅）。2-3「＋－×÷は、何を表しているの？」は、①と②の両方の駅。

7 本の路線の名前は、それぞれの考え方の道を表しています。

△ **変化**：ひき算→傾き→微分

＋ **たし合わせ**：かけ算→面積→積分

×2 **倍々**：累乗→指数→ e

∿ **回転と波**：角→ sin →複素数

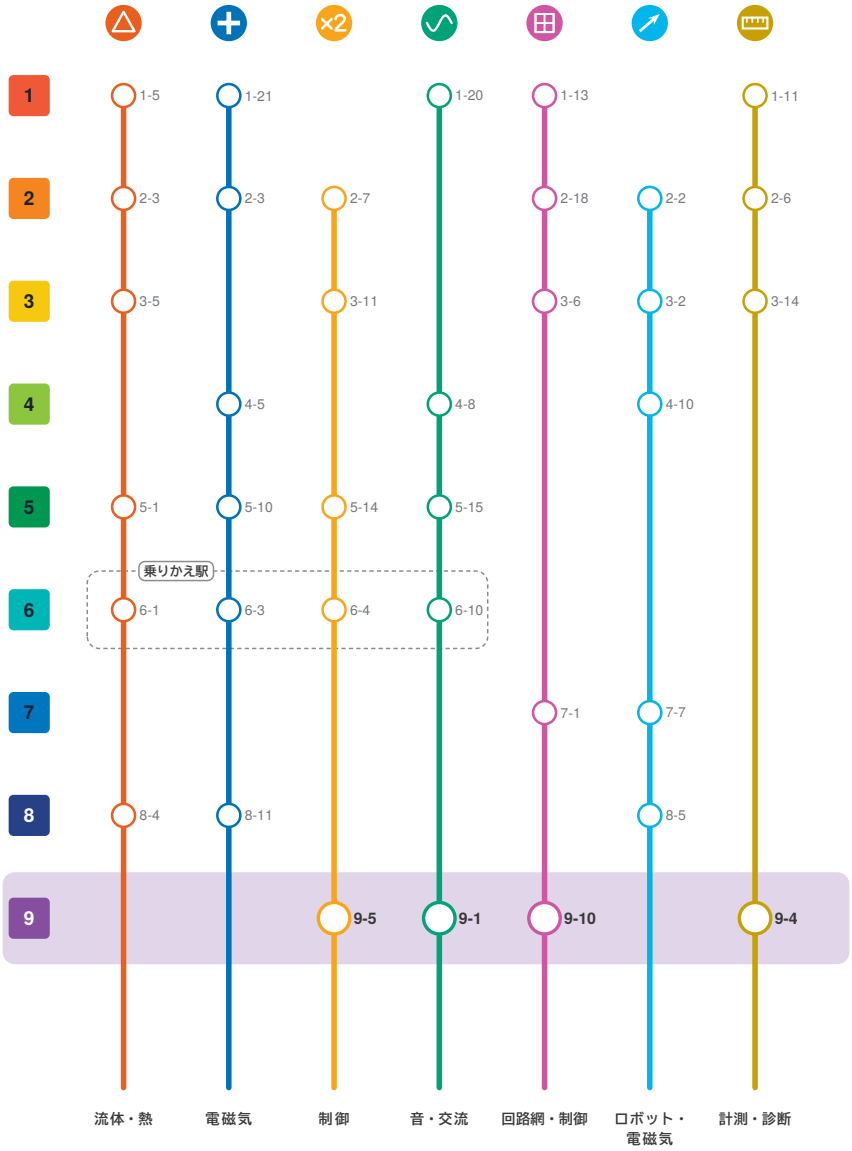
⊞ **表**：九九の表→行列

↗ **矢印**：向き→ベクトル→場

📏 **はかる**：目もり→誤差→統計

② 全 9 巻の路線図

どの巻の初めにもあった「全 9 巻の路線図」を、もう一度見てみましょう。下へ行くほど先の巻です。いまは、いちばん下の第 9 巻にいます。



終点は、大学の工学で使われている分野です。点線の囲みは乗りかえ駅（第 6 巻の微分方程式）。

図 1　全 9 巻の路線図（どの巻の初めにもある図と同じ）。たての線が 7 本の路線、横の行が巻、丸が主な駅。いちばん下が終点。第 9 巻の行（色の帯）では、③・④・⑤・⑦の 4 本の路線が終点に着く。

路線図のたての線をたどると、どの路線も第 1 巻か第 2 巻（小学 1 年～中学 1 年）から出発して、第 8 巻か第 9 巻で終点に着いています。第 6 巻の点線の囲みは「乗りかえ駅」でした。①～④の 4 本の路線が、第 6 巻の微分方程式でいっせいに出会ったのです（6-0）。

❸ 全部の駅

路線図にかいた駅は、主な駅だけです。全部の駅（章）を並べると、次のようになります。数字は章の番号で、左から順に、前の巻から先の巻へ並んでいます（終章の 9-13 は 7 本すべての駅なので、この表には入れていません。2-3 は①と②の両方に入っています）。

	路線	駅（章の番号）	駅の数
	変化	1-5・1-10・1-14・1-18・2-0・2-3・2-4・2-15・2-16・2-19・3-5・3-7・3-8・3-9・3-10・5-0・5-1・5-2・5-3・5-4・5-5・5-6・5-7・5-8・5-17・5-18・6-0・6-1・6-2・6-5・6-15・8-1・8-2・8-3・8-4・8-12・8-13	37
	たし合わせ	1-1・1-4・1-7・1-12・1-21・2-3・4-5・5-9・5-10・5-11・5-12・5-13・5-16・6-3・8-6・8-7・8-8・8-11	18
	倍々	1-2・2-7・2-8・2-17・3-11・3-12・5-14・6-4・6-11・9-5・9-6・9-7・9-8・9-9	14
	回転と波	1-15・1-19・1-20・4-0・4-2・4-6・4-7・4-8・4-9・5-15・6-6・6-7・6-8・6-9・6-10・6-12・6-13・7-6・9-0・9-1・9-2・9-3	22
	表	1-13・1-17・2-11・2-12・2-13・2-14・2-18・3-3・3-6・6-14・7-0・7-1・7-2・7-3・7-4・7-5・7-8・7-9・7-10・7-11・9-10・9-11	22
	矢印	1-3・1-6・2-2・2-9・3-2・4-1・4-3・4-4・4-10・4-11・4-12・4-13・4-14・4-15・7-7・8-0・8-5・8-9・8-10・8-14	20
	はかる	1-0・1-8・1-9・1-11・1-16・2-1・2-5・2-6・2-10・3-0・3-1・3-4・3-13・3-14・3-15・3-16・3-17・9-4・9-12	19

表 2　7 本の路線の全部の駅。いちばん駅が多いのは①変化（37 駅）。微分は、算数から大学まで、いちばん長く育ってきた考え方。

いちばん長い路線は①変化です。「きのうより、どれだけのびた？」（1-5 のひき算）が、「グラフの傾き」（3-5）になり、「瞬間の速さ」（5-1）になり、「いちばん急な向き」（8-4）になりました。1 つの考え方が、学年が上がるたびに、より広い場面で使えるように育っていったのです。

巻	題名	副題	章の数
第 1 巻	かぞえる・はかる		22
第 2 巻	数と量のことば		20
第 3 巻	関数とデータ	きまりを見つける	18
第 4 巻	形と向き	図形・三角関数・ベクトル	16
第 5 巻	変化をつかむ	微分と積分	19
第 6 巻	未来を計算する	微分方程式と複素数	16
第 7 巻	まとめて計算する	行列	12
第 8 巻	空間に広がる量	ベクトル解析	15
第 9 巻	波と変化を読みとく	フーリエ解析とラプラス変換	14

表 3　全 9 巻の題名と章の数（序章・終章をふくむ）。あわせて 152 章。

路線が合流した所

4 合流とは

全 9 巻の路線図では、7 本の路線は、たてにまっすぐ並んでいました。けれども、本当は、路線どうしは何回も出会っています。ある路線で作った道具と、別の路線で作った道具が、1 つの式の中で組み合わさる所があるのです。この本では、それを路線の**合流**（ごうりゅう）とよびます。

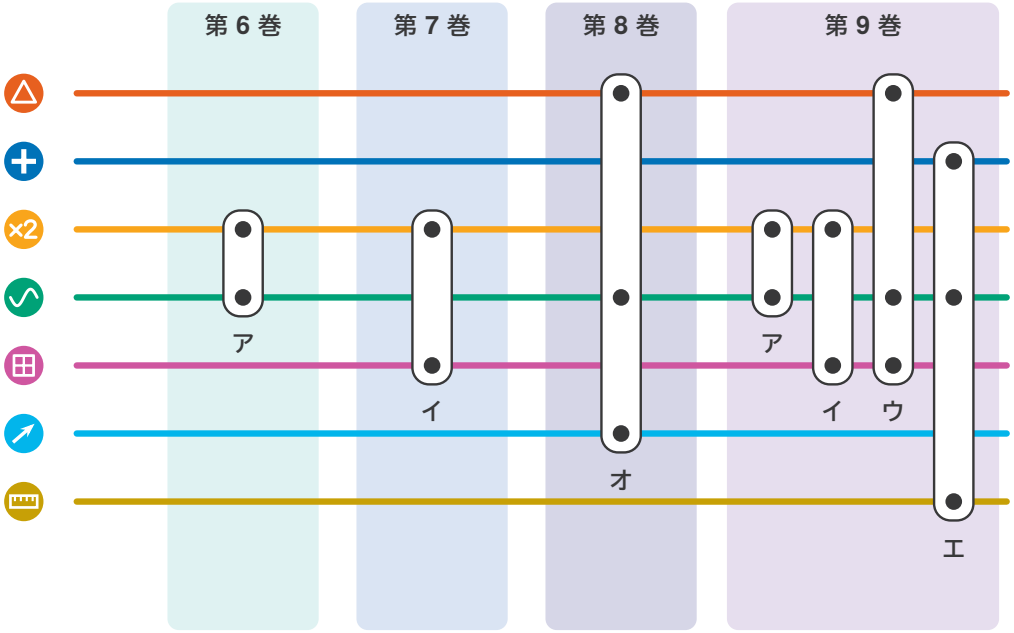
？はてな？の答え

大きな合流は、次の 5 つです。どれも、第 6 巻から第 9 巻の間で起きました。

	合流した所	出会った路線	合流した駅
（ア）	$s = \sigma + j\omega$	③倍々と④回転と波	6-12・9-5・9-9
（イ）	行列の指数関数 e^{At}	③倍々と⑤表	7-10・9-11
（ウ）	熱の行列の固有ベクトルは sin の形	①変化と④回転と波と⑤表	9-11
（エ）	ガウスの形	②たし合わせと④回転と波と⑦はかる	9-4
（オ）	波動方程式と、音・光	①変化と⑥矢印と④回転と波	9-0・9-1

表 4　路線が合流した 5 つの所（くわしくは⑤〜⑨）

表 4 の合流を、路線の地図にかき入れると、図 2 のようになります。どの合流も、第 6 巻から先の巻で起きています。



（ア）は 6-12 と 9-5・9-9、（イ）は 7-10 と 9-11、（オ）は 8-13・8-14 から 9-0 へ

図 2　第 6〜9 巻での合流の地図。横の線が路線、たての白い帯が合流した所（記号は表 4）。帯の中の黒い点が、その合流に入った路線（点のない線は、帯の下を通りぬけている）。

5（ア）$s=\sigma+j\omega$：倍々と回転が 1 つの数に

路線③（倍々）では、e^{at} が「a が正なら倍々にふえ、負なら倍々にへる」ことを学びました（3-11・5-14・6-4）。路線④（回転と波）では、$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$ が「1 秒に ω ずつ回る矢印」であることを学びました（6-10）。

この 2 つは、肩の数を複素数 $s=\sigma+j\omega$ にすると、1 つの式になります（6-10⑪・9-5）。

$$e^{st}=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}\,e^{j\omega t}=e^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

指数法則（2-7）で 2 つに分けると、実部 σ が「倍々」、虚部 ω が「回転」を受けもつことがわかります。

- ×2 **5-14** e^{at}：倍々にふえる・へる
- ×2 **6-4** 冷めるお湯 $20+60e^{-0.05t}$
- **6-10** $e^{j\omega t}$：回る矢印
- **6-12** e^{st} を入れて特性方程式

→ 合流した駅：9-5・9-9

$e^{st}=e^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

σ：倍々、ω：回転

図 3　合流（ア）。s の平面の 1 つの点（極）が、「どれだけ速く小さくなるか」と「どれだけ速くゆれるか」を同時に教える。

6-12 で「同じ s」とよんだ特性方程式の解は、9-5 のラプラス変換の s と同じものでした。9-9 では、この点を**極**とよび、極が s の平面の左半分（$\sigma<0$）にあれば、動きは落ち着くことを学びました。車 A の極 -1, -2 と、車 B の極 $-1\pm2j$ は、9-0 の図 9 で見たとおりです。路線③の終点「制御」は、路線④と合流してはじめて、ゆれる機械にも使える道具になったのです。

6（イ）e^{At}：倍々と表が 1 つの式に

路線③では、$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が、n を大きくすると e に近づくことを見ました（5-14）。路線⑤（表）では、行列をくり返しかけて、少し先の状態を次々に出しました（7-10）。

- ×2 **5-14** $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$
- △ **5-17** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$（5-17 は①の駅）
- 田 **7-10** $(I + A\frac{t}{n})^n$：行列のくり返し
- 田 **7-8** 固有値と固有ベクトル

→ 合流した駅：9-11

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$$
$$= \lim \left(I + A\frac{t}{n}\right)^n$$

図 4 合流（イ）。数の e^x の作り方（5-14・5-17）の x に、行列 At を入れたものが e^{At}。

冷めるお湯では、7-10 で $\left(1 - \dfrac{0.5}{n}\right)^n$ が、$n = 10$ で 0.5987、$n = 1000$ で 0.60645 と、$e^{-0.5} = 0.60653$ に近づきました。数 1 つの $e^{-0.5}$ を、行列に広げたものが e^{At} です（9-11）。数 1 つなら「a が負なら落ち着く」、行列なら「固有値の実部がすべて負なら落ち着く」。倍々の考え（③）が、表の考え（⑤）の中で、もう一度働いています。9-10 の倒立振子で、状態を見て台車を動かすと立ち直るのも、$A - BK$ の固有値を左半分に選んだからでした。

7（ウ）熱の行列の固有ベクトルは、sin の形

8-13 では、長さ 0.1 m の金属の棒を 9 つの点に区切り、熱が広がるようすを、表計算で 1 歩ずつ計算しました（路線①）。9-1 では、同じ棒の熱を、sin の波のたし合わせ（フーリエ級数）で解きました（路線④）。そして 9-11 では、8-13 の式を、時間の部分を微分のまま残して $\dot{\vec{T}} = A\vec{T}$ と書き、9×9 の行列 A の固有ベクトルを調べました（路線⑤）。

- △ **8-13** 熱方程式を表計算で 1 歩ずつ
- 〜 **9-1** $\sin \frac{n\pi x}{L}$ のたし合わせで解く
- 田 **9-11** 9×9 の行列 A の固有ベクトル

→ 合流した駅：9-11

いちばん遅い固有ベクトル

$0.309,\ 0.588,\ 0.809,\ \ldots$

$$= \sin \frac{m\pi}{10} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

図 5 合流（ウ）。表計算の行列（⑤）の固有ベクトルが、フーリエ級数の sin（④）そのものになる。

9-11 で求めた固有ベクトルは、$\sin \dfrac{\pi}{10}$, $\sin \dfrac{2\pi}{10}$, ... と同じ数でした。固有値 −0.0979 も、9-1 の 1 つめの成分が消える速さ 0.0987〔1/s〕とほとんど同じ

です。棒のまん中の温度も、10 秒後に、9-1 のフーリエ級数で 47.45℃、9-11 の行列で 47.44℃と、ほとんど同じ数が出ました。「表で 1 歩ずつ計算する」ことと「sin に分けて解く」ことは、同じものを別の方向から見ていたのです。

8（エ）ガウスの形：たし合わせ・はかる・波

つりがねの形 e^{-x^2} は、3 つの路線に出てきました。路線⑦（はかる）では、たくさんはかった値のばらつきの形（正規分布：3-17）として。路線②（たし合わせ）では、面積が $\sqrt{\pi}$ になるガウス積分として（8-6）。そして第 9 巻では、フーリエ変換しても同じつりがねの形にもどる、いちばん大事な形として（9-4。同じ形にもどる関数は、ほかにもあります）。

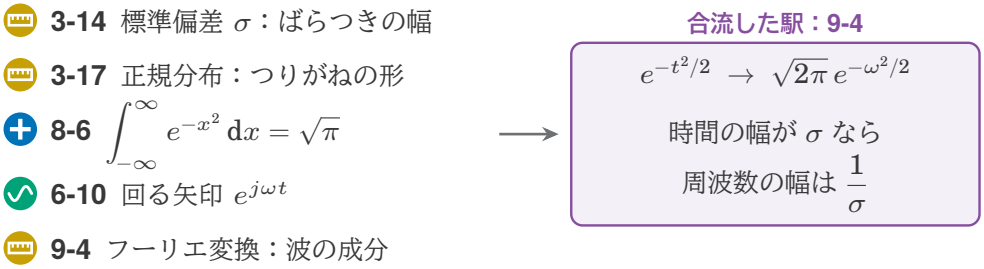


図 6　合流（エ）。短いパルスほど、周波数は広く広がる。時間の幅と周波数の幅のかけ算は、ほぼ一定。

路線⑦の終点は「計測・診断」でした。はかった信号のスペクトルを見て、機械のどこが悪いかを見当づけるとき、「短い時間だけ見ると、周波数ははっきりしない」というこのきまりが、いつもついてまわります。物理シリーズでは、これが電子の位置と運動量（速さ×質量）の「不確定性」（原-3）として、もう一度出てきます。

9（オ）波動方程式と、音・光

8-13 では、弦を伝わる波の式（波動方程式）を、場所と時間の偏微分で書きました（路線①）。8-14 では、電気と磁気の 4 つの式を「わき出し」と「うず」で読み、そこから光が電磁波として速さ $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で伝わることを見ました

（路線⑥）。そして 9-0 で、マイクの所で見た音の波形を、sin の成分に分けました（路線④）。

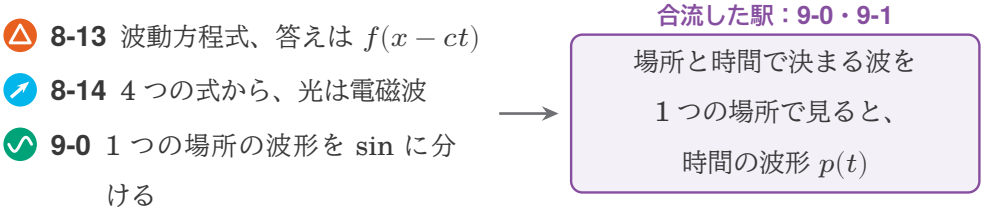


図 7　合流（オ）。空間に広がる波（第 8 巻）を、1 つの場所で時間の波形として見ると、第 9 巻の「分ける」道具が使える。

9-1 では、ギターの弦の波動方程式を、sin の形に分けて解き、倍音が 110 Hz の 1 倍・2 倍・3 倍…に並ぶわけを見ました。高校の物理で習う弦の固有振動数の式は、波動方程式を分けて解いた答えだったのです。

1 つの現象を、全巻の道具で

10 冷めるお湯の長い旅

80 ℃のお湯が、20 ℃の部屋で冷めていく。この 1 つの場面を、このシリーズでは何回も計算しました。巻が進むたびに、同じお湯を、新しい道具で見直してきたのです。

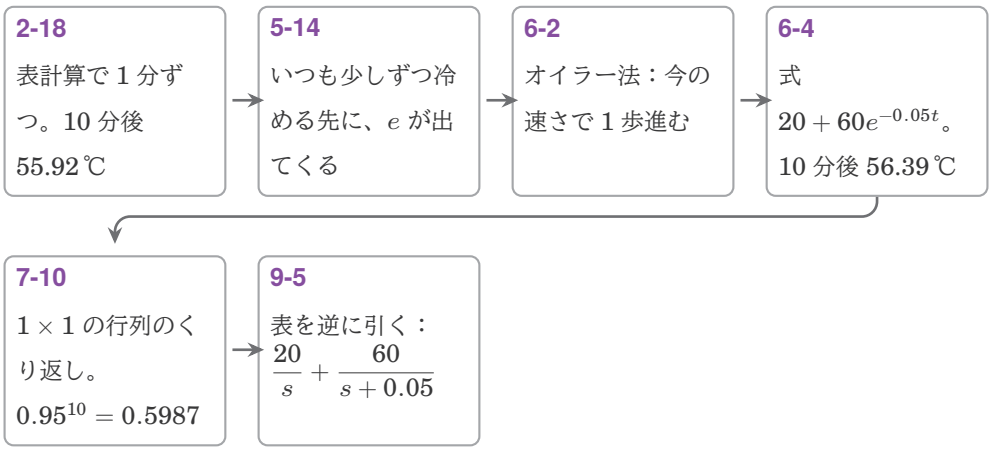


図 8　冷めるお湯の旅。路線は ⑤（2-18）→ ③（5-14）→ ①（6-2）→ ③（6-4）→ ⑤（7-10）→ ③（9-5）と、何回も乗りかえている。

2-18 の表の 55.92℃と、6-4 の式の 56.39℃の差は、「1 分の間ずっと、はじめの速さで冷める」としたオイラー法のずれでした。7-10 では、そのずれが $\left(1-\dfrac{0.5}{n}\right)^n$ の $n=10$ と $n\to\infty$ のちがいだとわかり、9-5 では、表を引くだけで、ずれのない答えにたどり着きました。同じお湯でも、道具が変わると、見えるものが変わります。

11 車のばねの長い旅

車のばね（サスペンション）の 2 つの例、車 A（$s^2+3s+2=0$）と車 B（$s^2+2s+5=0$）も、長い旅をしました。

どの巻で計算しても、$t=1$ の位置は $2e^{-1}-e^{-2}=0.600$ です。中学の 2 次方程式の解 -1 と -2 が、特性方程式の解になり、行列の固有値になり、伝達関数の極になりました。名前は変わっても、同じ 2 つの数が、車のゆれ方を決めていたのです。

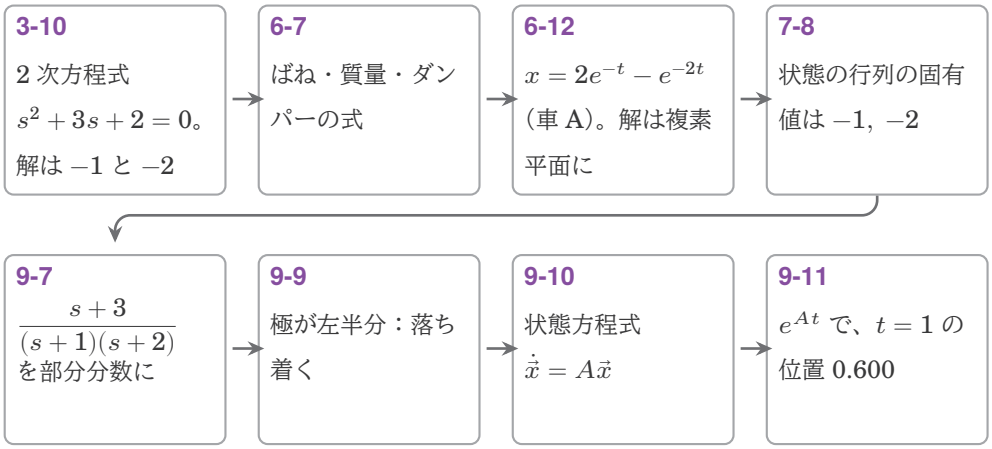


図 9　車のばねの旅。3-10 で「第 6 巻では…」と予告した 2 次方程式が、第 9 巻の極と状態方程式までつながった。

⑫ 金属の棒の熱と、ロボットの腕

金属の棒の熱と、ロボットの腕も、何巻にもまたがって出てきました。

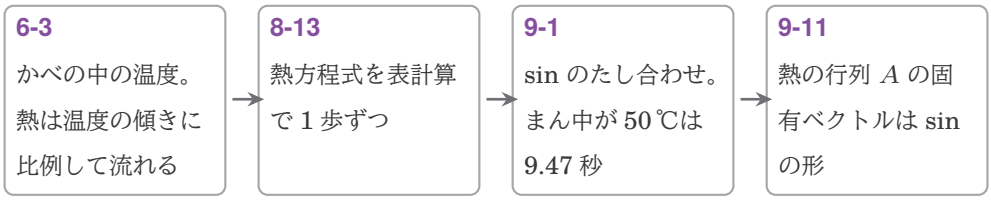


図 10　金属の棒の熱の旅。6-3 のコラムで紹介したフーリエの考え（1822 年）が、9-1 で、フーリエのもとの方法として解けた。

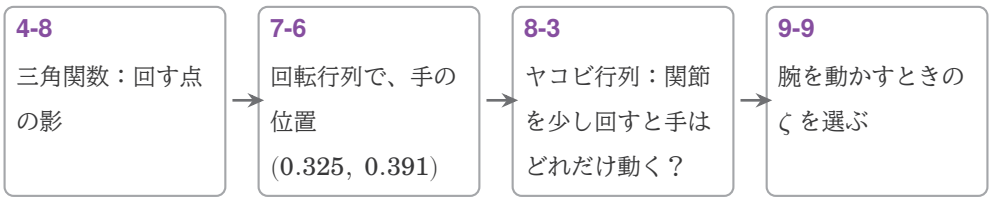


図 11　ロボットの腕の旅。腕の長さは 0.30 m と 0.25 m、関節の角は 30° と 45°（7-6・8-3 と同じ）。

1 つの現象を、1 つの巻だけで説明しきることは、ほとんどありません。本物の機械や自然は、いくつもの路線の道具を組み合わせて、はじめて読めるのです。

第 9 巻をふり返る

⑬ 3 つの部で、できるようになったこと

9-0 では、第 9 巻を「音を分ける」と「変化を予想する」の 2 つの柱で始めました。その 2 つの問いには、もう答えが出ています。「声を成分に分けると、何が見える？」には、9-1〜9-4 で「どの周波数の成分がどれだけあるか（スペクトル）が見え、それが音色の正体」と答えました。「表計算をしないで、10 分後や 1 時間後の温度を予想できないか」には、9-5 で「表を引くだけでできる」と答えました。9-12 では、これらの道具が、音楽や写真の圧縮、ノイズキャンセリング、機械の診断、スマホの通信、MRI、エアコンの PID 制御、ドローンの

姿勢の制御、電力の品質（高調波）で働いているようすを読みました（9-12 の「この巻の道具と、働く場面」の表）。

3 つの部で、何ができるようになったかをまとめます。

部	できるようになったこと	章
第 1 部 フーリエ解析	くり返す波を sin・cos に分け（フーリエ級数）、かけて積分して成分を取り出す。くり返さない音も周波数に分け（フーリエ変換）、データは FFT で計算する	9-1〜9-4
第 2 部 ラプラス変換	微分を s のかけ算に翻訳し、表と部分分数で微分方程式を解く。箱のつながりを伝達関数で書き、極の場所で、落ち着くかどうかを見分ける	9-5〜9-9
第 3 部 行列と微分方程式	たくさんの微分方程式を状態方程式にまとめ、e^{At} と固有値で動きを読む。状態を見て入れ方を決める。圧縮・診断・制御での使いみちを読む（9-12）	9-10〜 9-12

表 5　第 9 巻の 3 つの部（9-0 の図 11 と同じ並び）

14 くり返し出てきた場面の、最後の答え

9-0 で「この巻でくり返し出てくる場面」として紹介した主役たちは、それぞれの章で、次のような答えにたどり着きました。

場面	たどり着いた答え	章
四角い波	4-9 の「約 0.785」の正体は $\frac{\pi}{4}$。角のそばには約 9 % の山が残る（ギブズ現象）	9-1
ラの音	FFT で、440 Hz・880 Hz・1320 Hz に 1・0.5・0.25 を見つけた	9-0・9-4
金属の棒の熱	まん中が 50 ℃になるのは 9.47 秒。行列の固有ベクトルは sin の形	9-1・9-11
ギターの弦	A 弦の倍音は 110 Hz の 1 倍・2 倍・3 倍…	9-1

表 6　第 1 部の場面の、最後の答え（9-0 の表 8）

第 2 部・第 3 部の場面は、次のとおりです。

場面	たどり着いた答え	章
冷めるお湯	表を引くだけで $20 + 60e^{-0.05t}$。10 分後 56.39 ℃	9-5
RC 回路	10 V で充電すると、2 秒で 6.321 V（$10 - 10e^{-1}$）	9-7
車 A・車 B	極は -1, -2 と $-1 \pm 2j$。どちらも左半分で落ち着く	9-7・9-9
モーター・エアコン	はかってもどす（フィードバック）と速く追いつくが、比例だけではずれが残る	9-8・9-9
倒立振子	動かさないと 2 秒で約 0.273 rad、状態を見て動かすと 0.00092 rad	9-10
水そう・送電線	水そうは $10 \pm 10e^{-0.2t}$、送電線の行列から四端子定数	9-11

表 7　第 2 部・第 3 部の場面の、最後の答え（9-0 の表 9）

名前と、実際の操作の総まとめ

15 全巻の「名前」と「実際の操作」

この本を作るときにいちばん大切にしたことの 1 つは、「記号の名前と、実際にする計算のちがいを、ていねいに見せる」ことでした。第 5 巻・第 8 巻・第 9 巻の記号を、1 つの表にまとめます。

巻	名前（記号）	名前の意味	実際の操作	章
第 5 巻	$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	x の変わる幅を小さくしていった先の、変わる速さ（傾き）	導関数の表と、積・合成関数のきまり	5-4・5-6
第 5 巻	$\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}x$	細い長方形に分けてたした先	原始関数の差	5-10・5-11

表 8　第 5 巻の「名前」と「実際の操作」

第 8 巻では、面や道でたし合わせる積分の名前が出てきました。

巻	名前（記号）	名前の意味	実際の操作	章
第 8 巻	$\iint_D f\,\mathrm{d}A$	面をタイルに分けてたした先	ふつうの定積分（2 回）	8-6
第 8 巻	$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	道を小さな 1 歩に分けてたした先	ふつうの定積分	8-7
第 8 巻	$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$	向きのついたタイルでたした先	ふつうの定積分（2 回）	8-8

表 9　第 8 巻の「名前」と「実際の操作」

第 5 巻では、微分と定積分を、表と原始関数で計算しました。第 8 巻では、面や道でたし合わせる積分を、すべてふつうの定積分に直しました。第 9 巻の記号と実際の操作は、9-0 の表 6 と、巻末の「変換の地図」に、絵つきでまとめてあります。ここでは、記号と道具だけを並べます。

名前（記号）	実際の操作	章
$a_n \cdot b_n \cdot c_n$	ふつうの定積分	9-1〜9-3
$F(\omega)$	ふつうの定積分　表を引く	9-4
$\mathcal{L}[f(t)]$	表を引く	9-5・9-6
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	部分分数　表を引く	9-7
$G(s)$	表を引く　行列の計算	9-8
e^{At}	行列の計算　部分分数	9-10・9-11

表 10　第 9 巻の名前と、実際の操作（くわしくは 9-0 の表 6・巻末の「変換の地図」）。$G(s)$ の「行列の計算」は、状態方程式から $C(sI-A)^{-1}B$ で作るとき（表 9-8 の E）。

2 つの表をくらべると、1 つのことに気づきます。多くの記号は「細かく分けて、かけて、たした先」か「無限に続くたし算」の名前で、どれも実際は 4 つの道具のどれかに直して計算しました。第 5 巻の定積分も、第 8 巻の面積分も、第 9 巻のラプラス変換も、名前の意味は「**細かく分けて、かけて、たした先**」です。

そして実際の計算は、どれも「**表を引く**」か「**ふつうの定積分に直す**」に行き着きました。第 5 巻で作った原始関数の表と、第 9 巻で作ったラプラス変換の表は、同じ役目の道具です。

$$\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-0.05t} e^{-st}\,\mathrm{d}t}_{\text{名前}} = \underbrace{\frac{1}{s+0.05}}_{\text{表を引く}}$$

⑯ 専門書の式を読む 4 つの手順

この先、大学の専門書を開くと、見たことのない記号や、見たことのある記号の別の書き方に、たくさん出会います。そのときは、次の 4 つの手順で読みます。

1. **名前の段で読む**
   記号の意味を、ことばで言う。「何に・何をかけて・どこからどこまでたすか」「何を何でわるか」。
2. **記号を訳す**
   本ごとの書き方のちがいを、この本の書き方に直す（次の⑰の表）。
3. **実際の操作に直す**
   その章の場合分けの表と流れ図で、4 つの道具のどれを使うかを決めて計算する。
4. **数で確かめる**
   表計算や Python で、$t = 0$ の値や最後の値、いくつかの点の値を計算して、式の答えと同じかを見る。

専門書の読み方ガイド

⑰ 記号の訳

このシリーズの記号と、専門書でよく見る書き方を、まとめて並べます。同じものが、本によって別の文字や形で書かれていることがあります。逆に、同じ文字が、本によって別のものを表すこともあります。

この本	専門書の書き方	気をつけること	章
虚数単位 j	i	数学・物理の本は i。電気の本は、電流 i とまぎれないように j	6-8
$\vec{F}$	太字の $\mathbf{F}$	手で書くときは、矢印か、線を 1 本足した文字	4-10・8-14
$\dot{x}$、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	x'、$\dot{x}$	x' は、場所で微分した意味のこともある	5-1・6-1

表 11　記号の訳（その 1：数を表す記号）

微分・積分とベクトル場の記号は、次のとおりです。

この本	専門書の書き方	気をつけること	章
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	f_x、$\partial_x f$	下つきの x が「x 成分」の意味の本もある	8-2
$\mathrm{grad}\, f$、$\mathrm{div}\, \vec{F}$、$\mathrm{rot}\, \vec{F}$	∇f、$\nabla \cdot \vec{F}$、$\nabla \times \vec{F}$、$\mathrm{curl}\, \vec{F}$	どれも同じもの。rot と curl も同じ	8-4・8-9・8-10
$\nabla^2 f$	Δf	差の Δ（Δx）とは別のもの	8-12
$\oint_C$、$\oiint_S$	$\oint_{\partial S}$、$\iint_{\partial V}$	∂S は「面 S のふち」、∂V は「立体 V の表面」	8-7・8-8・8-11
固有値 λ、極 s	λ、p、s	伝達関数の極は、状態の行列の固有値（打ち消し合う因数がなければ全部）	7-8・9-9・9-10

表 12　記号の訳（その 2：微分・積分・ベクトル場の記号）

この本	専門書の書き方	気をつけること	章
$\frac{a_0}{2}$（平均）	a_0	a_0 を平均そのものとする本もある。係数の式の前の数（$\frac{1}{T}$ か $\frac{2}{T}$）を確かめる	9-1・9-2
もどす式に $\frac{1}{2\pi}$	両方の式に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	2π の置き場所が本でちがう。周波数（Hz）で書いて 2π を肩に入れる本もある	9-4
$\mathcal{L}[f(t)]$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	かっこの形がちがうだけ	9-5
$\mathcal{L}^{-1}$	複素数の積分の式	名前の上の式。実際は部分分数と表	9-7
たたみこみの t_1	τ	この本の τ は時定数	9-6
時定数 τ	T	T は周期・温度にも使う文字	6-4・9-8
e^{At}	$\exp(At)$、$\Phi(t)$	同じもの。$\Phi(t)$ は「状態遷移行列」とよぶ本も	9-11
電場の流束 Φ_E	電束 Ψ（別の量）	真空中では $\Psi = \varepsilon_0 \Phi_E$。電気工学の「電束」は $\vec{D}$ の流束（単位 C）	8-8・8-14
$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²	2019 年の SI の改定からは、測って決める値で、ほぼこの値	8-10・8-14
$\delta(t)$	$\delta(t)$	6-7 の対数減衰率 δ とは別のもの	9-6

表 13　記号の訳（その 3：フーリエ・ラプラス・電磁気の記号）。信号処理・制御の本の記号（$X(\omega)$、$H(s)$、$u(t)$、ずれの $e(t)$ など）は、9-12 の「専門書をのぞいてみよう」の表を見る。

18 専門書の式を 1 つ読んでみよう

電気回路の本には、たとえば次のような式がのっています。抵抗 R とコンデンサー C を直列につなぎ、スイッチを入れて電圧 E をかけたときの式です。

$$\frac{E}{s} = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s)$$

これを、⑯の 4 つの手順で読んでみます。数は 6-4・9-7 と同じ $E = 10\,\mathrm{V}$、$R = 20\,\mathrm{k\Omega}$、$C = 100\,\mu\mathrm{F}$ にします。

1 名前の段

大文字の $I(s)$ は、電流 $i(t)$ のラプラス変換（名前）。$\dfrac{E}{s}$ は、スイッチを入れてからずっと E の電圧（階段の形）の変換。$\dfrac{1}{sC}I(s)$ は、コンデンサーの電圧 $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i\,\mathrm{d}t_1$ の変換（積分は s でわる：9-6）。

2 記号を訳す

この本と同じ書き方。はじめにコンデンサーに電気がない（はじめの値が 0）ことが、式に入っている。

3 実際の操作

かけ算・わり算で $I(s)$ を求め、表を引く。

$$I(s) = \frac{E}{s} \div \left(R + \frac{1}{sC}\right)$$ 両辺を $R + \frac{1}{sC}$ でわる

$$= \frac{E}{sR + \frac{1}{C}}$$ $\frac{E}{s}$ と $R + \frac{1}{sC}$ の両方に s をかける

$$= \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$ 分母を R でくくる

$$i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-t/(RC)}$$ 表の $\frac{1}{s+a} \to e^{-at}$（9-5）

4 数で確かめる

電流のはじめの値と、時定数は

$$\frac{E}{R} = \frac{10\,\mathrm{V}}{20\,000\,\Omega} = 0.5\,\mathrm{mA}, \qquad RC = 20\,000\,\Omega \times 0.0001\,\mathrm{F} = 2\,\mathrm{s}$$

です。$t = 0$ で 0.5 mA、2 秒後は $0.5 \times e^{-1} = 0.184\,\mathrm{mA}$ です。抵抗の電圧は $Ri = 10e^{-t/2}$ なので、コンデンサーの電圧は $10 - 10e^{-t/2}$ です。2 秒で 6.321 V となり、9-7 の答えと同じです。

専門書の式も、1 行ずつ「名前」と「実際の操作」に分けて読めば、この本で学んだ道具だけで読めます。

⑲ 大学の科目と、この本の巻

大学の工学部では、数学や、数学を使う専門の科目を、たくさん学びます。科目の名前と、このシリーズのどの巻・章がその土台になっているかを並べます。専門書を開いて手が止まったら、右の列の章にもどってみましょう。

大学の科目	中心になる考え	この本の巻・章
微分積分学	微分・積分・偏微分・重積分	第 5 巻、8-1〜8-6
線形代数	行列・固有値・対角化	第 7 巻
微分方程式	特性方程式、連立の式	第 6 巻
ベクトル解析	勾配・発散・回転、2 つの定理	第 8 巻
応用数学	フーリエ変換・ラプラス変換	第 9 巻
確率・統計	ばらつき、最小二乗法、正規分布	3-13〜3-17
数値計算	差分、オイラー法	2-18・6-2・7-10・8-13
電気回路	$e^{-t/\tau}$、交流の複素数、伝達関数	6-4・6-10・9-7・9-8
制御工学	伝達関数・極・状態方程式	9-5〜9-11
信号処理	スペクトル・FFT・サンプリング	9-1〜9-4・9-12
機械力学・振動工学	ばねとダンパー、共振	6-6・6-7・6-12・6-13
流体力学・伝熱工学	流束・発散、熱方程式	8-8・8-9・8-12・8-13
電磁気学	2 つの定理、4 つの式	8-9〜8-11・8-14

表 14 大学の科目と、その土台になる巻・章（科目の名前や中身は、大学によって少しずつちがう）

どの科目も、1 つの巻だけでなく、いくつもの路線の道具を組み合わせて使います。目次や索引で見知らぬことばに出会ったら、まずこのシリーズのさくいんで、同じことばをさがしてみてください。

物理シリーズへの橋

20 数学の道具を、物理で使う

このシリーズの数学は、「物理や工学を説明するための数学」でした。この先は、姉妹編の物理シリーズ（全 5 巻）で、手に入れた道具を使って、機械・熱・波・電気・原子を読んでいきます。物理の本の章には、その章で使う数学の章の番号が書いてあります。

巻	題名	副題	とくによく使う数学
第 1 巻	力学	動く・回る・ゆがむ・流れる	第 8 巻（ベクトル解析）、第 7 巻（行列）
第 2 巻	熱学	エネルギーを使いこなす	第 8 巻、第 3 巻・第 5 巻
第 3 巻	波動	ゆれと波を読む	**第 9 巻**、第 6 巻（微分方程式）
第 4 巻	電磁気学	場から回路・機械・電波へ	第 8 巻、第 6 巻
第 5 巻	原子	量子から半導体・原子力へ	第 6 巻、第 4 巻ほか

表 15　物理シリーズ全 5 巻と、とくによく使う数学の巻（それぞれの章の「前に学ぶ数学の章」を数えたもの）

第 9 巻の道具は、とくに物理シリーズ第 3 巻（波動）で、たくさん使います。

物理の章	題名	使う第 9 巻の章
波-2	ゆすり方で変わるゆれ：強制振動と共振	9-8（周波数応答・dB）
波-4	ねらいどおりに動かす：フィードバック制御	9-6・9-8・9-9・9-10
波-6	はね返って重なる：反射・定在波・固有振動	9-1・9-2・9-3（変数分離）
波-10	見えない中を調べる：超音波と振動の計測	9-4（スペクトル）
波-11	音を数字にする：信号とスペクトル	9-4（FFT・サンプリング）
波-13	光の波：干渉・回折・偏光・散乱	9-4
波-14	波で情報を送る	9-12
熱-11	壁を通りぬける熱：熱伝導と熱抵抗	9-1（変数分離）
電-9	スイッチを入れた瞬間：過渡現象	9-7
原-3	電子は波でもある：ド・ブロイ波と不確定性	9-4（ガウスの形）
原-5	波で書く電子：シュレディンガー方程式	9-1・9-3
原-15	原子炉の中の中性子：核分裂と原子炉	9-9（極と安定）

表 16 物理シリーズで、第 9 巻の道具を使う章

物理シリーズでは、「こまったことがあれば、この数学の章にもどろう」と、章の番号で数学の本を指しています。物理の本を読みながら、この 9 冊を、いつでも開ける道具箱として使ってください。

ふりかえり　できるようになったかな？

- ☐ 7 本の路線の名前と終点を言い、全 9 巻の路線図でたどれる。 → 557 ページ
- ☐ 路線が合流した 5 つの所を、式と例で説明できる。 → 562 ページ
- ☐ 専門書の式を、名前の段で読み、記号を訳し、4 つの道具で計算できる。 → 573 ページ

コラム　数学は、何のために学ぶのか

このシリーズの 1 巻めのはじめに、「かずを つかうと、なにが いいの？」（1-0）と問いかけました。「たくさん」より「12 こ」のほうが、よく伝わる。数を使うと、ものごとを、だれにでも同じように伝えられる。それが、最初の答えでした。

9 冊を読んだいま、もう少しくわしく答えられます。数学は、自然や機械のふるまいを、短いことばで書き、まだ起きていないことを予想するための道具です。音を成分に分けて、どこが悪いかを見つける。お湯や車や電気回路が、この先どう動くかを、表を引いて予想する。ロボットやドローンが、たおれずに落ち着くように、固有値を選ぶ。どれも、小学 1 年の「数える」から一歩ずつ積み上げた道具で、できるようになったことです。

ソラ：9 冊、全部読み終わったね。最初は、リンゴを数えるところからだったのに。

ミナ：同じ冷めるお湯を、表計算でも、e でも、行列でも、ラプラス変換でも計算したね。道具がふえるたびに、見えるものがふえていったよ。

デルタ：ここまで、本当によくがんばったね。全部を一度で覚えていなくても大丈夫。困ったときは、章の番号をたよりに、いつでももどってこられるよ。この道具箱を持って、物理と工学の世界へ出かけよう。

これで、『物理を理解するための数学』全 9 巻はおしまいです。ここまで読み通したあなたは、もう、工学の専門書を自分の力で読み進められます。わからない所に出会ったら、この地図を開いて、どの路線の、どの駅の道具かを確かめてください。

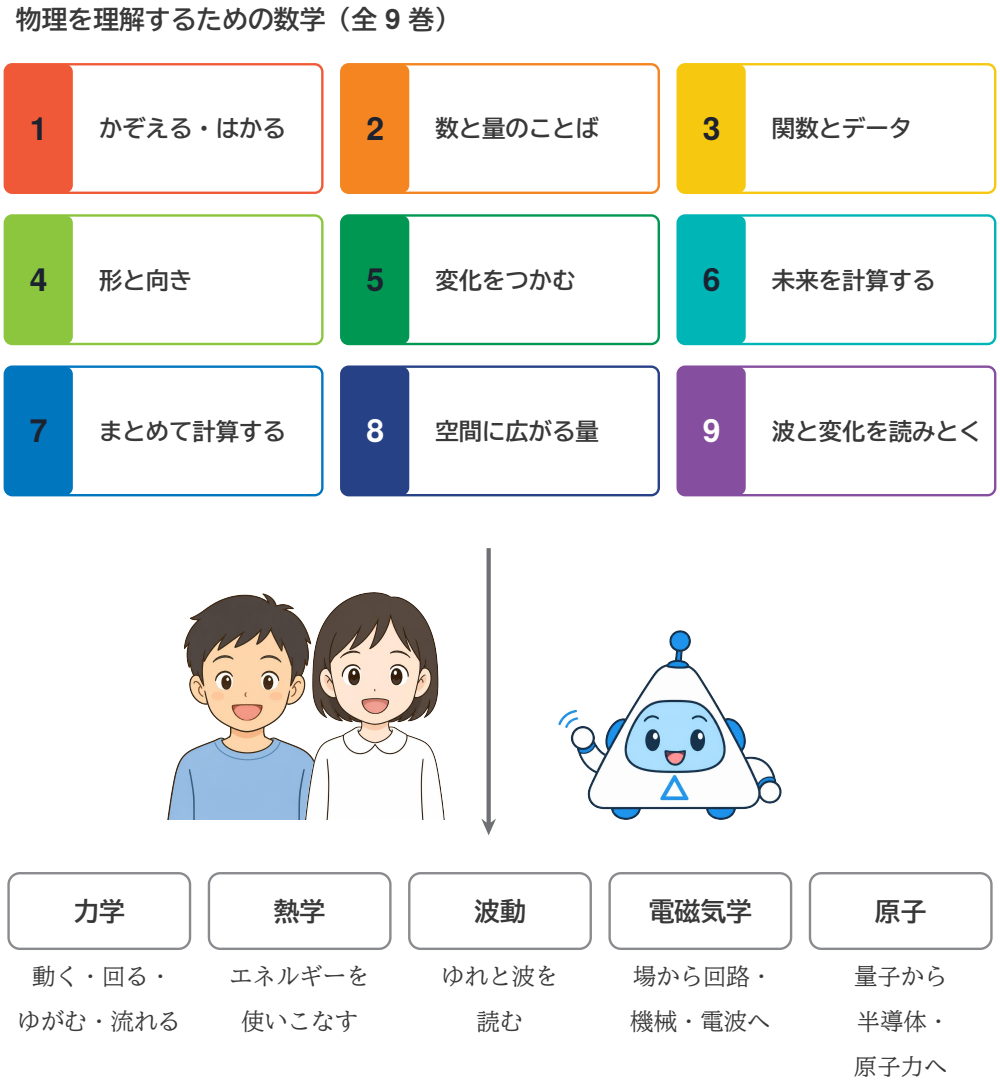


図 12　数学の 9 冊から、物理の 5 冊へ。ソラ・ミナ・デルタといっしょに、次の本へ。

こたえ

「じぶんでとこう」は じ 1、章末問題は 1 のように番号をつけています。とき方は、同じ形の例題にもどって確かめよう。

9-1

じ 1　$t=\frac{\pi}{4}$：かっこの中
$0.7071+\frac{0.7071}{3}-\frac{0.7071}{5}=0.8014$、
$1.2732\times0.8014\approx1.020$。$t=\frac{\pi}{3}$：
$0.8660+0-\frac{0.8660}{5}=0.6928$、
$1.2732\times0.6928\approx0.882$。

じ 2　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}5\,dt=5$、$\frac{a_0}{2}=2.5$。
$a_n=\frac{5}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}=0$。$b_n=\frac{5(1-\cos n\pi)}{n\pi}$
で、奇数なら $\frac{10}{n\pi}$、偶数なら 0。
$f=2.5+\frac{10}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots)$。

じ 3　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}2t\,dt=4\pi$、$\frac{a_0}{2}=2\pi$。
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t\cos nt\,dt=0$。
$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\times(-\frac{2\pi}{n})$
$=-\frac{4}{n}$。

じ 4　$\theta=\omega_0 t$ とおくと、$0<\theta<\pi$ で 3.3、
$\pi<\theta<2\pi$ で 0。平均 $\frac{a_0}{2}=1.65\,\mathrm{V}$。
$b_n=\frac{3.3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$ で、奇数なら $\frac{6.6}{n\pi}$。
2 kHz：約 2.10 V、6 kHz：約 0.70 V、
10 kHz：約 0.42 V。

じ 5　前半の 6 つの和
$0.7071\times(1+1-1-1+1+1)$
$=1.4142$。後半は $f=-1$ で、値の和
-1.4142 に -1 をかけて 1.4142。平均
$\frac{2.8284}{12}=0.2357$、2 倍して $b_3\approx0.471$
（本当の値 $\frac{4}{3\pi}\approx0.424$）。

じ 6　$n=1$：$127.32\times0.1389\approx17.69$。
$n=3$：
$-42.44\times1.9\times10^{-8}\approx-0.0000008$。
合計 約 17.69 ℃。

じ 7　$127.32\,e^{-0.0987t}=25$、
$e^{-0.0987t}=0.1963$、
$-0.0987t=-1.628$、
$t=\frac{1.628}{0.0987}\approx16.5$。約 16.5 秒後。

じ 8　（1）$c=2\times0.65\times82\approx107\,\mathrm{m/s}$。
（2）$3\times82=246\,\mathrm{Hz}$。（3）
$\frac{106.6}{2\times0.325}=164\,\mathrm{Hz}$（2 倍）。

じ 9　$1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots)$。両辺から
$\frac{1}{2}$ をひいて $\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}(\cdots)$。両辺に $\frac{\pi}{2}$ をかけて、$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$。

1　かっこの中 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=0.7238$。
$\frac{4}{\pi}\times0.7238\approx0.922$。

2　$\frac{a_0}{2}=1$、$a_n=0$、$b_n=\frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$ で、
奇数なら $\frac{4}{n\pi}$、偶数なら 0。
$f=1+\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots)$。

3　$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\,dt=\pi$ で $\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$。
$a_n=0$。$b_n=\frac{1}{2\pi}\times(-\frac{2\pi}{n})=-\frac{1}{n}$。

4　$\theta=\omega_0 t$ とおくと、0 から π で 10、π から 2π で 0。平均 5 V。$b_n=\frac{20}{n\pi}$（奇数）。50 Hz：約 6.37 V、150 Hz：約 2.12 V、250 Hz：約 1.27 V。

5　$n=1$：$127.32\times0.2275\approx28.97$。
$n=3$：
$-42.44\times1.6\times10^{-6}\approx-0.00007$。
合計 約 28.97 ℃。

6　（1）$f_4=\frac{4\times143}{2\times0.65}=440\,\mathrm{Hz}$。（2）
$\frac{143}{2\times0.5}=143\,\mathrm{Hz}$。

7 $e^{-0.0987t} = \frac{30}{127.32}$、
$-0.0987t = -1.446$、
$t = \frac{1.446}{0.0987} \approx 14.6$。約 14.6 秒後。

8 前半 6 つの「値× $\sin t$」の和
$(0.2588 + 0.7071 + 0.9659) \times 2$
$= 3.8637$、後半は 0。平均
$\frac{3.8637}{12} = 0.3220$、2 倍して $b_1 \approx 0.644$
（本当の値 $\frac{2}{\pi} \approx 0.637$）。

9 $100 = \frac{400}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots)$。両辺に
$\frac{\pi}{400}$ をかけて、$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$。

9-2

じ 1 $\cos^3 t = \cos t \times \frac{1+\cos 2t}{2}$
$= \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos t \cos 2t$。
$\cos t \cos 2t = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$ なので、$\cos^3 t = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$。
$a_1 = \frac{3}{4}$、$a_3 = \frac{1}{4}$、ほかは 0。

じ 2 偶関数なので $b_n = 0$。
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dt = 1$ で $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$。
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nt\,dt = \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$：
$a_1 = \frac{2}{\pi}$、$a_2 = 0$、$a_3 = -\frac{2}{3\pi}$、
$a_5 = \frac{2}{5\pi}$。

じ 3 偶関数なので $b_n = 0$。面積
$2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 2\pi = 2\pi^2$、平均 $\frac{a_0}{2} = \pi$。
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\cos nt\,dt = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$
で、奇数なら $-\frac{8}{\pi n^2}$、偶数なら 0。

じ 4 $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 50\frac{x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$
$= \frac{100}{L^2} \times \frac{L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{100(-1)^{n+1}}{n\pi}$。
$b_1 \approx 31.83$、$b_2 \approx -15.92$、
$b_3 \approx 10.61$。

じ 5 例題 5 と同じ計算で
$b_n = \frac{800}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$。$b_1 \approx 81.06$、
$b_2 = 0$、$b_3 \approx -9.006$。

じ 6 奇関数なので $a_n = 0$。b_n
$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} 5\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{10\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$
で、奇数なら $\frac{20}{n\pi}$。60 Hz：約 6.37 V、
180 Hz：約 2.12 V、300 Hz：約
1.27 V。

じ 7 山 1 つの面積は 2、周期は π なので、
平均 $\frac{2}{\pi} \approx 0.637$。$141 \times \frac{2}{\pi} \approx 89.8$ V。

じ 8 $\sin t \cos 4t = \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin 3t)$。
$\int_0^{\pi} \sin 5t\,dt = \frac{2}{5}$、$\int_0^{\pi} \sin 3t\,dt = \frac{2}{3}$。
$a_4 = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2}(\frac{2}{5} - \frac{2}{3})$
$= -\frac{2}{15\pi} \approx -0.0424$。

じ 9 積 $f_k \cos 2t_k$：1.0、1.0、−1.05、
−2.0、−1.05、1.0、1.0、−0.5、1.55、
4.0、1.55、−0.5。合計 6.0。
$a_2 \approx \frac{2}{12} \times 6.0 = 1.00$（mm）。

じ 10 基本波の電力 $\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^2 \approx 0.8106$。高調波の電力 $0.8225 - 0.8106 = 0.0119$。
$\sqrt{\frac{0.0119}{0.8106}} = \sqrt{0.0147} \approx 0.121$。約 12.1%。

1 $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ から
$f = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin t \cos 2t$。
$\sin t \cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)$ なので、
$f = \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin 3t$。$b_1 = \frac{1}{4}$、
$b_3 = \frac{1}{4}$、ほかは 0。

2 偶関数なので $b_n = 0$。$\frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$。
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 3\cos nt\,dt = \frac{6\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$：
$a_1 = \frac{6}{\pi}$、$a_2 = 0$、$a_3 = -\frac{2}{\pi}$。

3 偶関数で $b_n = 0$。平均（面積）は 0 で
$\frac{a_0}{2} = 0$。$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - t)\cos nt\,dt$
$= \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2}$ で、奇数なら $\frac{4}{\pi n^2}$、偶数なら 0。

4 $b_n = \frac{40(-1)^{n+1}}{n\pi}$。$b_1 \approx 12.73$、
$b_2 \approx -6.37$。

5 奇関数で $a_n = 0$。b_n
$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} 2\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$、

奇数なら $\frac{8}{n\pi}$。1 kHz：約 2.55 V、
3 kHz：約 0.85 V、5 kHz：約 0.51 V。

6 平均は最大値の $\frac{1}{\pi}$ 倍。
$283 \times \frac{1}{\pi} \approx 90.1$ V。

7 $\sin t \cos 6t = \frac{1}{2}(\sin 7t - \sin 5t)$。
$\int_0^{\pi} \sin 7t\, dt = \frac{2}{7}$、$\int_0^{\pi} \sin 5t\, dt = \frac{2}{5}$。
$a_6 = \frac{1}{2\pi}(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}) = -\frac{2}{35\pi} \approx -0.0182$。

8 積 $f_k \sin 2t_k$：0、1.732、1.819、0、
−1.819、−1.732、0、−0.866、
−2.685、0、2.685、0.866。合計 0。
$b_2 = 0$。

9 基本波の電力 $\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi})^2 = \frac{2}{\pi^2} \approx 0.2026$。
高調波の電力
$0.25 - 0.2026 = 0.0474$。
$\sqrt{\frac{0.0474}{0.2026}} \approx \sqrt{0.234} \approx 0.483$。約
48.3%（方形波と同じ）。

9-3

じ 1 （1）$a_2 = 10$、$b_2 = 0$ で $10 \cos 2t$。
（2）$a_1 = 6$、$b_1 = j((3+j) - (3-j))$
$= j \times 2j = -2$ で $6 \cos t - 2 \sin t$。

じ 2 $c_0 = 3$、$c_{\pm 2} = 2$、$c_3 = \frac{0 - j(-6)}{2} = 3j$、
$c_{-3} = -3j$。

じ 3 $\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$ を 3 乗：
$\frac{e^{j3t} + 3e^{jt} + 3e^{-jt} + e^{-j3t}}{8}$。$c_{\pm 1} = \frac{3}{8}$、
$c_{\pm 3} = \frac{1}{8}$。$a_1 = \frac{3}{4}$、$a_3 = \frac{1}{4}$ で
$\cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$。

じ 4 山 2 つで面積 $2 + 2 = 4$。
$c_0 = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$。

じ 5 $c_0 = \frac{3\pi}{2\pi} = 1.5$。$n \neq 0$ では
$c_n = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{jn}$ で、奇数なら $\frac{3}{jn\pi}$、
偶数なら 0。

じ 6 例題 6 の 3 倍。$c_n = \frac{3j(-1)^n}{n}$
（$c_1 = -3j$、$c_2 = 1.5j$）。

じ 7 $n\omega_0\tau = 0.25n$。25 Hz：
$\frac{1}{\sqrt{1 + 0.0625}} = 0.970$ で、
$1.273 \times 0.970 = 1.235$。75 Hz：
$\frac{1}{\sqrt{1 + 0.5625}} = 0.8$ で、
$0.424 \times 0.8 = 0.340$。

じ 8 （1）$50 + 63.66e^{-0.04t} = 70$、
$e^{-0.04t} = \frac{20}{63.66} = 0.3142$、
$t = \frac{\ln 3.183}{0.04} = \frac{1.158}{0.04} \approx 29$ 秒後。（2）
$n = \pm 3$ の項は $e^{-0.04 \times 3^2 t} = e^{-0.36t}$ で
へるので、$t = \frac{\ln 2}{0.36} \approx 1.93$ 秒。

じ 9 $0.8106 + 0.0901 = 0.9007$ で、約
90 %。

1 $a_2 = 4$、$b_2 = j((2-j) - (2+j))$
$= j \times (-2j) = 2$。$4 \cos 2t + 2 \sin 2t$。

2 $c_0 = 2$、$c_{\pm 1} = -3$、$c_3 = \frac{0 - 8j}{2} = -4j$、
$c_{-3} = 4j$。

3 $\frac{(e^{jt} + e^{-jt})^2}{4} = \frac{e^{j2t} + 2 + e^{-j2t}}{4}$。$c_0 = \frac{1}{2}$、
$c_{\pm 2} = \frac{1}{4}$。$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$。

4 $c_0 = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$。$c_n = \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{jn}$ で、
奇数なら $\frac{4}{jn\pi}$、偶数なら 0。

5 $\frac{\alpha}{R^2} = \frac{1 \times 10^{-4}}{0.01} = 0.01$/s。半分になるの
は $\frac{\ln 2}{0.01} \approx 69.3$ 秒。
$50 + 63.66e^{-0.01t} = 60$ から
$t = \frac{1.851}{0.01} \approx 185$ 秒後。半径が 2 倍で、
4 倍おそい。

6 例題 6 の 2 倍で $c_n = \frac{2j(-1)^n}{n}$。
$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n}$。

7 $n\omega_0\tau = n$。100 Hz：$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ で
$1.273 \times 0.707 = 0.900$。300 Hz：
$\frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316$ で
$0.424 \times 0.316 = 0.134$。500 Hz：
$\frac{1}{\sqrt{26}} = 0.196$ で
$0.255 \times 0.196 = 0.050$。

8 $2\times\frac{4}{\pi^2}=0.811$ で約 81 %。残りの約 19 % は、$n=\pm3$、±5、…の高調波にある。

9-4

じ 1 $F(\omega)=\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{j\omega}=\frac{2\sin2\omega}{\omega}$。
$F(0)=4$。$2\omega=\pi$ で $\omega=\frac{\pi}{2}\approx1.57$。

じ 2 $F(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$。
$F(1)=\frac{1}{1+j}=\frac{1-j}{2}=0.5-0.5j$。
$|F(1)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx0.707$。

じ 3 $\frac{1}{3+j\omega}+\frac{1}{3-j\omega}=\frac{6}{9+\omega^2}$。
$F(0)=\frac{2}{3}\approx0.667$、
$F(3)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}\approx0.333$。

じ 4 $2t^2=\frac{t^2}{2\times0.5^2}$ で $\sigma=0.5$。
$F(\omega)=0.5\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/8}$。
$F(0)\approx1.253$、
$F(2)=1.253\times e^{-0.5}\approx0.760$。

じ 5 ④のパルスを 1 ずらした形。
$F(\omega)=e^{-j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$。$F(\frac{\pi}{2})$
$=e^{-j\pi/2}\times\frac{4}{\pi}=-\frac{4}{\pi}j\approx-1.273j$。

じ 6 $F(\omega)$
$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(e^{-(\omega-20)^2/2}+e^{-(\omega+20)^2/2}\right)$。
$F(20)\approx1.253$、
$F(21)\approx1.253\times0.6065\approx0.760$。

じ 7 $c_{\pm1}=3$（$\omega=\pm50$）、$c_3=-1.5j$、
$c_{-3}=1.5j$（$\omega=\pm150$）。$\omega=\pm50$ に高さ 3、$\omega=\pm150$ に高さ 1.5 の線。

じ 8 $X_2=1-j+1-j+1-j+1-j$
$=4-4j$。$|X_2|=4\sqrt{2}$。250 Hz で振幅 $\frac{2\times4\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}\approx1.41$。

じ 9 $N=8000\times0.5=4000$。きざみ $\frac{8000}{4000}=2$ Hz。振幅 $\frac{2\times1000}{4000}=0.5$。

じ 10 （1）8000 − 6000 = 2000 Hz。
（2）10000 − 8000 = 2000 Hz。
（3）20 000 Hz より大きく。

1 $F(\omega)=\frac{6\sin\omega}{\omega}$。$F(0)=6$。
$F(\frac{\pi}{2})=\frac{6}{\pi/2}=\frac{12}{\pi}\approx3.82$。

2 $F(\omega)=\frac{1}{4+j\omega}$。$|F(0)|=0.25$、
$|F(4)|=\frac{1}{4\sqrt{2}}\approx0.177$。

3 $F(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$。$F(0)=2$、$F(1)=1$、
$F(3)=0.2$。

4 $X_2=2+2+2+2=8$。250 Hz で振幅 $\frac{2\times8}{8}=2$。

5 $N=44\,100$、きざみ 1 Hz、上限 22 050 Hz。振幅 $\frac{2\times22050}{44100}=1$。

6 $\sigma=3$。$F(\omega)=3\sqrt{2\pi}\,e^{-9\omega^2/2}$。
$F(0)\approx7.52$。はばは $\frac{1}{3}$。

7 ④のパルスを 3 ずらした形。
$F(\omega)=e^{-j3\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$。
$F(\frac{\pi}{2})=e^{-j3\pi/2}\times\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}j\approx1.273j$。
大きさ 1.273。

8 $F(\omega)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(e^{-(\omega-5)^2/2}+e^{-(\omega+5)^2/2}\right)$。
$F(5)\approx1.253$（e^{-50} はほぼ 0）。
$F(4)\approx1.253\times e^{-0.5}\approx0.760$。

9 900 Hz は 1000 − 900 = 100 Hz、1100 Hz は 1100 − 1000 = 100 Hz。いちばん高い 1100 Hz の 2 倍の 2200 Hz より大きくする。

9-5

じ 1 （1）$\int_0^b e^{-(s-4)t}\,dt$
$=\frac{1}{s-4}(1-e^{-(s-4)b})\to\frac{1}{s-4}$（$s>4$）。
（2）$4\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{4}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$
$=\frac{4}{s^2}$（$s>0$）。

じ 2 $sT(s)-70=-0.1T(s)+\frac{2}{s}$。
$T(s)=\frac{70}{s+0.1}+\frac{2}{s(s+0.1)}$。
$\frac{2}{s(s+0.1)}=\frac{20}{s}-\frac{20}{s+0.1}$。
$T(s)=\frac{20}{s}+\frac{50}{s+0.1}$、
$T=20+50e^{-0.1t}$。5 分後は
$20+50\times0.6065\approx50.3$ ℃。

じ 3　$sV(s)+V(s)=\frac{5}{s}$。
$V(s)=\frac{5}{s(s+1)}=\frac{5}{s}-\frac{5}{s+1}$。
$V=5-5e^{-t}$。3 秒後は
$5-5\times0.0498\approx4.75$ V。

じ 4　$0.2sI(s)+4I(s)=\frac{12}{s}$。
$I(s)=\frac{60}{s(s+20)}=\frac{3}{s}-\frac{3}{s+20}$。
$i=3-3e^{-20t}$。0.05 秒後は
$3-3\times0.3679\approx1.90$ A。

じ 5　$(s^2X-2s)+5(sX-2)+6X=0$。
$X(s)=\frac{2s+10}{(s+2)(s+3)}$。分母が 0 は
$s=-2$、-3。$\frac{2s+10}{(s+2)(s+3)}=\frac{6}{s+2}-\frac{4}{s+3}$
($s=-2$ で 6、$s=-3$ で $\frac{4}{-1}=-4$)。
$x=6e^{-2t}-4e^{-3t}$。

じ 6　(1) $f'=3e^{3t}$ で $\frac{3}{s-3}$。(2) $F=\frac{1}{s-3}$、
$f(0)=1$ で $\frac{s}{s-3}-1=\frac{3}{s-3}$。同じ。

じ 7　$\frac{5}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s-2}$ ($s>2$ のとき)。

1　$\int_0^b e^{-(s+3)t}\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{s+3}$。$s>-3$ のとき。

2　$5\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{5}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{s^2}$
($s>0$)。

3　$f'=-3e^{-3t}$ で $\frac{-3}{s+3}$。$\frac{s}{s+3}-1=\frac{-3}{s+3}$。
同じ。

4　$\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+4}$。

5　$sT(s)-60=-0.05T(s)+\frac{1}{s}$。
$T(s)=\frac{60}{s+0.05}+\frac{20}{s}-\frac{20}{s+0.05}$
$=\frac{20}{s}+\frac{40}{s+0.05}$。$T=20+40e^{-0.05t}$。
10 分後は約 44.3 ℃。

6　$f'=2e^{2t}$ で $\frac{2}{s-2}$。$\frac{s}{s-2}-1=\frac{2}{s-2}$。
同じ。

7　$\frac{6}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-3}$ ($s>3$ のとき)。

8　$V(s)=\frac{12}{s(s+1)}=\frac{12}{s}-\frac{12}{s+1}$。
$V=12-12e^{-t}$。2 秒後は約 10.4 V。

9　$0.3sI(s)+3I(s)=\frac{6}{s}$。
$I(s)=\frac{20}{s(s+10)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+10}$。
$i=2-2e^{-10t}$。0.1 秒後は
$2-2\times0.3679\approx1.26$ A。

10　$(s^2X-2s)+4(sX-2)+3X=0$。
$X(s)=\frac{2s+8}{(s+1)(s+3)}$。分母が 0 は
$s=-1$、-3。$\frac{3}{s+1}-\frac{1}{s+3}$ ($s=-1$ で
$\frac{6}{2}=3$、$s=-3$ で $\frac{2}{-2}=-1$)。
$x=3e^{-t}-e^{-3t}$。

9-6

じ 1　(1) $\frac{2}{s^3}$。(2) $\frac{5}{s^2+25}$。(3) $\frac{s}{s^2+4}$。

じ 2　$\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}$。

じ 3　(1) $\frac{3}{(s+2)^2+9}=\frac{3}{s^2+4s+13}$。
(2) $\frac{s+2}{s^2+4s+13}$。

じ 4　(1) $\frac{5e^{-3s}}{s}$。(2) $\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$。(3) $2e^{-s}$。

じ 5　$(s^2X-s)+4(sX-1)+13X=0$。
$X(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+13}=\frac{s+4}{(s+2)^2+9}$。

じ 6　$sX+0.5X=4$。$X(s)=\frac{4}{s+0.5}$。
$x=4e^{-0.5t}$。

じ 7　$5H(t-1)-5H(t-3)$。
$\frac{5e^{-s}}{s}-\frac{5e^{-3s}}{s}=\frac{5(e^{-s}-e^{-3s})}{s}$。

じ 8　$F=\frac{1}{s^2+1}=(s^2+1)^{-1}$。
$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=-(s^2+1)^{-2}\times2s$。
$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$。

じ 9　かけた値は $t=0$ で 1、0.1 で 0.7478、
0.2 で 0.5686…。台形の和は約 0.406
(本当の値 0.4037)。

じ 10　積分：$\int_0^t e^{-3t_1}\cdot1\,\mathrm{d}t_1=\frac{1-e^{-3t}}{3}$ ($g=1$
を前の時刻にずらしても 1)。かけ算：
$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+3}$。
$\mathcal{L}[\frac{1-e^{-3t}}{3}]=\frac{1}{3}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3})=\frac{1}{s(s+3)}$。
同じ。

じ 11　$F=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+0.5}=\frac{5}{s(s+0.5)}$。
$sF=\frac{5}{s+0.5}$。$s\to\infty$ で 0、$s\to0$ で
10。はじめ 0 V、最後 10 V。

1 (1) $\frac{24}{s^5}$。(2) $\frac{4}{s^2+16}$。(3) $\frac{s}{s^2+1}$。

2 $\frac{3}{s}-\frac{4}{s^3}+\frac{5}{s^2+1}$。

3 (1) $\frac{1}{(s+3)^2+1}=\frac{1}{s^2+6s+10}$。
(2) $\frac{s+3}{s^2+6s+10}$。
(3) $\frac{4}{(s+2)^2+16}=\frac{4}{s^2+4s+20}$。

4 (1) $\frac{12e^{-3s}}{s}$。(2) $\frac{2e^{-5s}}{s}$。(3) $3e^{-2s}$。

5 $(s^2X-2s)+6(sX-2)+10X=0$。
$X(s)=\frac{2s+12}{s^2+6s+10}$。

6 $sX+3X=2$。$X=\frac{2}{s+3}$。$x=2e^{-3t}$。

7 $F=\frac{5}{s}-\frac{5}{s+4}=\frac{20}{s(s+4)}$。$sF=\frac{20}{s+4}$。
$s\to\infty$ で 0、$s\to 0$ で 5。

8 (1) $4H(t)-4H(t-1)$。$\frac{4(1-e^{-s})}{s}$。
(2) $H(t-2)-H(t-5)$。$\frac{e^{-2s}-e^{-5s}}{s}$。

9 $t\sin 3t$：$F=\frac{3}{s^2+9}$、$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$。
$t\sin 4t$：$F=\frac{4}{s^2+16}$、$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=\frac{8s}{(s^2+16)^2}$。

10 積分：$e^{-t}\int_0^t e^{-2t_1}\,\mathrm{d}t_1=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}$。かけ算：$\frac{1}{(s+1)(s+3)}$。
$\frac{1}{2}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3})=\frac{1}{(s+1)(s+3)}$。同じ。

11 かけた値は $\frac{1}{1+t}e^{-2t}$。$t=0$ で 1、0.1 で 0.7443…。台形の和は約 0.364（$\Delta t=0.01$ で 0.3614）。

9-7

じ 1 (1) $3\times\frac{1}{s+4}$ で $3e^{-4t}$。(2) $2\times\frac{5}{s^2+5^2}$ で $2\sin 5t$。(3) $2\times\frac{s}{s^2+4^2}$ で $2\cos 4t$。

じ 2 $(s^2+5s+6)X=s+5$、
$X=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$。$A=\frac{3}{1}=3$、
$B=\frac{2}{-1}=-2$。$x=3e^{-2t}-2e^{-3t}$。

じ 3 $V=\frac{6}{s(0.5s+1)}=\frac{12}{s(s+2)}=\frac{6}{s}-\frac{6}{s+2}$。
$v=6-6e^{-2t}$。0.5 秒後
$6-6\times 0.3679\approx 3.79$ V。

じ 4 $X=\frac{s+4}{(s+2)^2}$。$s+4=A(s+2)+B$ で
$B=2$、$A=1$。
$x=e^{-2t}+2te^{-2t}=(1+2t)e^{-2t}$。

じ 5 $Y=\frac{0.5}{s^2(10s+1)}$。
$\frac{1}{s^2(10s+1)}=-\frac{10}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{10}{s+0.1}$。
$y=0.5(t-10+10e^{-0.1t})$。おくれ
$0.5t-y=5(1-e^{-0.1t})$、20 秒後 約 4.32℃（やがて 5℃）。

じ 6 $X=\frac{s+6}{s^2+6s+10}$
$=\frac{s+3}{(s+3)^2+1^2}+3\times\frac{1}{(s+3)^2+1^2}$。
$x=e^{-3t}(\cos t+3\sin t)$。

じ 7 $X=\frac{13}{s(s^2+4s+13)}$。$A=1$、
$13=(s^2+4s+13)+(Bs+C)s$ で
$B=-1$、$C=-4$。
$X=\frac{1}{s}-\frac{s+4}{s^2+4s+13}$。
$x=1-e^{-2t}(\cos 3t+\frac{2}{3}\sin 3t)$。

じ 8 $X=\frac{8s}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}$。$s=j$ で
$\frac{8j}{4+4j}=1+j$、$A=1$、$B=1$。
$8s=(s+1)(s^2+4s+5)$
$+(Cs+D)(s^2+1)$ で $C=-1$、
$D=-5$。$\frac{-s-5}{(s+2)^2+1}$ をもどして、x
$=\cos t+\sin t-e^{-2t}(\cos t+3\sin t)$。

じ 9 $X=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$。行 9（$\omega=3$）の $\frac{2\times 3\times s}{(s^2+3^2)^2}$ そのもの。$x=t\sin 3t$。

じ 10 残りは $6-6e^{-2t}$（例題 3 のじぶんでとこう）。$t<1$ で 0、$t\geqq 1$ で
$6-6e^{-2(t-1)}$。1.5 秒後
$6-6\times 0.3679\approx 3.79$。

じ 11 $3s+4=3(s+1)+1$ で
$F=3+\frac{1}{s+1}$。$3\delta(t)+e^{-t}$。

じ 12 (1) $sF=\frac{6}{(s+2)(s+3)}$、分母が 0 になるのは $-2\cdot -3$。$\frac{6}{6}=1$。(2) $sF=\frac{3}{s^2+9}$ の分母が 0 になる $\pm 3j$ は実部が 0 で、落ち着かない。使えない（もどすと $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos 3t$）。

じ 13 $y=0.8-0.2045e^{-2.5874t}$
$-e^{-0.2063t}(0.5954\cos 1.3747t$
$+0.4742\sin 1.3747t)$。$t=0$ で

$0.8-0.2045-0.5954\approx 0$。最後の値 0.8（$\frac{4}{1+4}$）。

1 （1）$4e^{-3t}$。（2）$3\times\frac{4}{s^2+4^2}$ で $3\sin 4t$。（3）$5\cos t$。

2 （1）$X=\frac{s+6}{(s+2)(s+4)}$。$A=\frac{4}{2}=2$、$B=\frac{2}{-2}=-1$。$x=2e^{-2t}-e^{-4t}$。

（2）$(s^2+3s+2)X=2$、$X=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}$。$x=2e^{-t}-2e^{-2t}$。

3 $V=\frac{12}{s(4s+1)}=\frac{3}{s(s+0.25)}=\frac{12}{s}-\frac{12}{s+0.25}$。$v=12-12e^{-t/4}$。4 秒後 $12-12\times 0.3679\approx 7.59\,\mathrm{V}$。

4 $X=\frac{s+6}{(s+3)^2}=\frac{1}{s+3}+\frac{3}{(s+3)^2}$。$x=(1+3t)e^{-3t}$。

5 $X=\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2}$ $=\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$。$x=e^{-t}(\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)$。

6 （1）$\frac{10}{1\times 5}=2$。（2）sF の分母が 0 になる $\pm 5j$ は実部が 0 で、落ち着かない。使えない。

7 $Y=\frac{0.2}{s^2(20s+1)}$。$\frac{1}{s^2(20s+1)}=-\frac{20}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{20}{s+0.05}$。$y=0.2(t-20+20e^{-0.05t})$。おくれ $4(1-e^{-0.05t})$、20 秒後 約 2.53 ℃（やがて 4 ℃）。

8 $4s+9=4(s+2)+1$ で $F=4+\frac{1}{s+2}$。$4\delta(t)+e^{-2t}$。

9 （1）$X=\frac{10}{s(s^2+2s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+10}$。$x=1-e^{-t}(\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)$。

（2）$X=\frac{40s}{(s^2+1)(s^2+4s+13)}$。$s=j$ で $\frac{40j}{12+4j}=1+3j$、$\frac{3s+1}{s^2+1}$。$40s=(3s+1)(s^2+4s+13)$ $+(Cs+D)(s^2+1)$ で $C=-3$、$D=-13$。$\frac{-3s-13}{(s+2)^2+3^2}=-3\times\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$ $-\frac{7}{3}\times\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$。$x=3\cos t+\sin t$ $-e^{-2t}(3\cos 3t+\frac{7}{3}\sin 3t)$。

10 $X=\frac{8s}{(s^2+16)^2}$ は行 9（$\omega=4$）そのもの。$x=t\sin 4t$。

11 $t<3$ で 0、$t\geqq 3$ で $v=10-10e^{-(t-3)/2}$。5 秒後 $10-10\times 0.3679\approx 6.32\,\mathrm{V}$。

12 $y=0.5-0.1667e^{-2t}$ $-e^{-0.5t}(0.3333\cos 0.866t$ $+0.5774\sin 0.866t)$。$t=0$ で $0.5-0.1667-0.3333=0$。最後の値 0.5（$\frac{1}{1+1}$）。

9-8

じ 1 （1）$\frac{2}{30s+1}$、$G(0)=2$。

（2）$(s^2+3s+2)X=U$ で $\frac{1}{s^2+3s+2}$、$G(0)=\frac{1}{2}$。

じ 2 $G=\frac{50\times 0.02}{(0.1s+1)(50s+1)}=\frac{1}{(0.1s+1)(50s+1)}$。$G(0)=1$ で、$1\times 2=2\,\mathrm{cm}$。

じ 3 $\frac{2}{s+1}+\frac{3}{s+2}=\frac{2(s+2)+3(s+1)}{(s+1)(s+2)}$ $=\frac{5s+7}{(s+1)(s+2)}$。

じ 4 $G_1=\frac{1}{0.5s+1}$。$\frac{G_1}{1+G_1}=\frac{1}{0.5s+2}$。$s=-4$、時定数 0.25 s。定常のゲイン $\frac{1}{2}$ で、ずれ 50 %。

じ 5 $\frac{4}{60s+5}$。定常のゲイン 0.8、$y=9\times 0.8=7.2$ ℃で $35-7.2=27.8$ ℃。時定数 $60\div 5=12$ 分。

じ 6 $\det(sI-A)=s^2+2s+5$。逆行列の 2 列めは $\frac{1}{s^2+2s+5}\times(1,\ s)$。$G=\frac{1}{s^2+2s+5}$。

じ 7 （1）$V=\frac{8}{s}-\frac{8}{s+0.05}$、$v=8-8e^{-0.05t}$、20 秒後 約 5.06 m/s。（2）$\frac{1}{30}e^{-t/30}$。

じ 8　（1）分母 $3.5+1.2j$、ゆれ約 0.216 m、おくれ約 18.9°。（2）分母 $-4.5+2j$、ゆれ約 0.162 m、おくれ $180°-24.0°=156.0°$。

じ 9　$\omega\tau=1$、$|G|=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$。1 段 $-10\log_{10}2\approx -3.01$ dB、2 段 −6.02 dB、倍は $\frac{1}{2}$。

じ 10　$K=60\div 60=1$。60 の 63.2 %（読み 57.9 ℃）に着くのは 30 秒で、$\tau=30$ s。$G=\frac{1}{30s+1}$。

1　$(4s+1)Y=2U$ で $G=\frac{2}{4s+1}$。$G(0)=2$。

2　$G=\frac{12}{(s+2)(s+6)}$。$G(0)=\frac{12}{12}=1$。

3　$\frac{(s+3)+2(s+1)}{(s+1)(s+3)}=\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$。

4　$G_1=\frac{100}{0.5s+1}$。$\frac{100}{0.5s+101}$。$s=-202$。定常のゲイン $\frac{100}{101}$ で、ずれ約 1.0 %。

5　$V=\frac{250}{s(1000s+50)}=\frac{5}{s}-\frac{5}{s+0.05}$。$v=5-5e^{-0.05t}$。60 秒後 $5-5\times 0.0498\approx 4.75$ m/s。

6　$K=30\div 2=15$、$\tau=0.2$。$G=\frac{15}{0.2s+1}$。

7　$\frac{19}{60s+20}$。定常のゲイン 0.95、$y=9\times 0.95=8.55$ ℃で $35-8.55=26.45$ ℃。時定数 $60\div 20=3$ 分。

8　$\det(sI-A)=s^2+5s+6$。$G=\frac{1}{s^2+5s+6}$。

9　分母 $-10+2.4j$、$|G|=1\div\sqrt{105.76}\approx 0.0972$、ゆれ約 0.078 m。実部が負で、おくれ $180°-13.5°=166.5°$。

10　直列なので dB はたし算。$3\times(-20.04)\approx -60.1$ dB（約 1000 分の 1）。

9-9

じ 1　（ア）$-2\pm 3j$、ゆれながら落ち着く。（イ）2、−1、どんどん大きくなる。（ウ）−1、−6、ゆれずに落ち着く。（エ）$\pm 5j$、ゆれ続ける。

じ 2　極 $-\frac{1}{4}=-0.25$。時定数 4 s。63.2 % は 4 s、95 % は 12 s。最後の変化は 5。

じ 3　$s=\frac{-4\pm\sqrt{16-64}}{2}=-2\pm 3.464j$。$\omega_n=4$ rad/s、$\zeta=0.5$。行きすぎは $e^{-\pi\times 0.5/0.866}=e^{-1.814}=0.163$ で約 16.3 %。最初の山は $\pi\div 3.464\approx 0.907$ s。

じ 4　極 −3、−1、−6、零点 −2。極がすべて左半分（実部が負）なので安定。

じ 5　$\det(sI-A)=s(s+6)+25$ $=s^2+6s+25$。$s=\frac{-6\pm\sqrt{36-100}}{2}=-3\pm 4j$。安定で、ゆれながら落ち着く。

じ 6　$G_1=\frac{20}{0.5s+1}$、全体 $=\frac{20}{0.5s+21}$。極 −42、時定数 約 0.024 s。最後の速さ $\frac{20}{21}$、ずれ $\frac{1}{21}$ で約 4.8 %。

じ 7　$60\dot{T}=35+494-20T$ より $60\dot{T}+20T=529$。極 $-\frac{1}{3}$（1/分）、時定数 3 分。$T=\frac{529}{20}=26.45$ ℃、ずれ 0.45 ℃。

じ 8　s^2+4s+K。$2\zeta\omega_n=4$、$\zeta=0.5$ より $\omega_n=4$、$K=16$。極は $s=-2\pm\sqrt{4-16}=-2\pm 3.46j$。行きすぎ約 16.3 %。

じ 9　$K=4:6\times 12=72>8+32=40$ で安定。$72>8+8K$ より $0<K<8$。$K=8:(s+2)^3=-64$ より $s+2=-4$、$2\pm 2\sqrt{3}\,j$。極は −6、$\pm 3.46j$。周期 $2\pi\div 3.46\approx 1.81$ 分。

じ 10 極は -3、$-0.5 \pm 1.94j$、-1。すべての実部が負なので安定。

1 （1）-3、-5、ゆれずに落ち着く。
（2）$-2 \pm 5j$、ゆれながら落ち着く。
（3）3、-1、どんどん大きくなる。
（4）$\pm 3j$、ゆれ続ける。

2 極 $-\frac{1}{8} = -0.125$。時定数 8 s。95 % は 24 s。最後の変化は 3。

3 $s = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-144}}{2} = -3 \pm 5.20j$。
$\omega_n = 6\,\mathrm{rad/s}$、$\zeta = 0.5$。行きすぎ約 16.3 %。最初の山は
$\pi \div 5.20 \approx 0.605\,\mathrm{s}$。

4 極 -2、1、-3、零点 -1。極 1 が右半分にあるので不安定。

5 $\det(sI - A) = s(s+4) + 8$
$= s^2 + 4s + 8$。
$s = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = -2 \pm 2j$。安定で、ゆれながら落ち着く。

6 全体 $= \dfrac{4}{0.5s+5}$。極 -10、時定数 0.1 s。最後の速さ $\frac{4}{5}$、ずれ 20 %。

7 $60\dot{T} = 35 + 364 - 15T$ より
$60\dot{T} + 15T = 399$。極 $-\frac{1}{4}$（1/分）、時定数 4 分。$T = \frac{399}{15} = 26.6$ ℃、ずれ 0.6 ℃。

8 $s^2 + 6s + K$。$2\zeta\omega_n = 6$、$\zeta = 0.5$ より
$\omega_n = 6$、$K = 36$。極 $-3 \pm 5.20j$。行きすぎ約 16.3 %。

9 $9 \times 27 = 243 > 27 + K$ より
$0 < K < 216$。$K = 216$：
$(s+3)^3 = -216$ より $s + 3 = -6$、
$3 \pm 3\sqrt{3}\,j$。極 -9、$\pm 5.20j$。周期 $\dfrac{2\pi}{5.20} \approx 1.21$ 分。

10 極は $-0.1 \pm 3.00j$、-2、-1。すべての実部が負なので安定（ただし $-0.1 \pm 3.00j$ はたての軸に近く、ゆれはなかなか消えない）。

9-10

じ 1 $\dot{x}_1 = x_2$、$\dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2 + u$。$A$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-5,\ -2)$。B は $(0,\ 1)$ のたて書き。

じ 2 $\dot{h}_1 = -0.1(h_1 - h_2) + 0.01q$、
$\dot{h}_2 = \frac{10}{300}(h_1 - h_2) = \frac{1}{30}(h_1 - h_2)$。$A$ は 1 行め $(-0.1,\ 0.1)$、2 行め $(\frac{1}{30},\ -\frac{1}{30})$。$B$ は $(0.01,\ 0)$ のたて書き。

じ 3 $\dot{v}_C = \frac{1}{2\times 10^{-4}} i = 5000i$、
$\dot{i} = 2(v - 100i - v_C)$
$= -2v_C - 200i + 2v$。A は 1 行め $(0,\ 5000)$、2 行め $(-2,\ -200)$。B は $(0,\ 2)$ のたて書き。

じ 4 $\frac{g}{\ell} = 2$ なので $\ddot{\theta} = 2\theta + u$。$A$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(2,\ 0)$。B は $(0,\ 1)$ のたて書き。

じ 5 （1）$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$、$\lambda = -2$（重解）。落ち着く。
（2）$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$、$\lambda = 1$、$-3$。正の固有値 1 があるので落ち着かない。

じ 6 特性方程式 $\lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 4)$ を $(\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$ とくらべて、
$k_2 = 6$、$k_1 = 13$。

じ 7 （1）$A - BK$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-9,\ -6)$。A_d は 1 行め $(1,\ 0.1)$、2 行め $(-0.9,\ 0.4)$。
$\mu^2 - 1.4\mu + 0.49 = (\mu - 0.7)^2$ で
$\mu = 0.7$。落ち着く。
（2）$\vec{x}_1 = (0.01,\ -0.009)$、
$\vec{x}_2 = (0.0091,\ -0.0126)$。
（3）$\mu = 1 - 3\Delta t$。$-1 < 1 - 3\Delta t < 1$

より $0 < \Delta t < \frac{2}{3}$。$\frac{2}{3}$ 秒（約 0.67 秒）より小さいとき。

じ 8　$sI - A$ は 1 行め $(s,\ -1)$、2 行め $(5,\ s+2)$、$\det = s^2 + 2s + 5$。$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+2s+5}(1,\ s)$ のたて書き。

(1) 1 行めを取り出して $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$。

(2) 2 行めを取り出して $G(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}$。

1　$\ddot{x} = -2x - 3\dot{x} + 0.5F$。$A$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -3)$（車 A と同じ）。B は $(0,\ 0.5)$ のたて書き。

2　A は 1 行め $(-0.1,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ -0.1)$。両方に $0.01q$ 入るので、B は $(0.01,\ 0.01)$ のたて書き。

3　$\frac{g}{\ell} = 5$。A は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(5,\ 0)$、B は $(0,\ 1)$ のたて書き。$\lambda^2 - 5 = 0$ で $\lambda = \pm\sqrt{5} = \pm 2.24$。正の固有値があるのでたおれる。

4　$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$、$\lambda = -1 \pm 3j$。実部が負なので、ゆれながら落ち着く。

5　$\lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 4)$ を $(\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ とくらべて、$k_2 = 2$、$k_1 = 5$。

6　$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$、$\lambda = -2$、$-3$。どちらも負なので、ゆれずに落ち着く。

7　$\dot{v}_C = 2 \times 10^4 i$、$\dot{i} = 5(v - 40i - v_C)$。$A$ は 1 行め $(0,\ 20\,000)$、2 行め $(-5,\ -200)$、B は $(0,\ 5)$ のたて書き。$\lambda^2 + 200\lambda + 100\,000 = 0$、$\lambda = -100 \pm 300j$。

8　$A - BK$ は 1 行め $(0,\ 1)$、2 行め $(-16,\ -8)$。A_d は 1 行め $(1,\ 0.1)$、2 行め $(-1.6,\ 0.2)$。$\mu^2 - 1.2\mu + 0.36 = (\mu - 0.6)^2$ で $\mu = 0.6$、落ち着く。$\mu = 1 - 4\Delta t$ の大きさが 1 より小さいのは $\Delta t < 0.5$ 秒。

9　$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+3s+2}(1,\ s)$ のたて書き。C で 2 行めが残り、$G(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$（位置の伝達関数に s をかけたもの：微分すると速度）。

10　$sI - A$ は 1 行め $(s+0.1,\ -0.1)$、2 行め $(-0.1,\ s+0.1)$、$\det = (s+0.1)^2 - 0.01 = s^2 + 0.2s$。逆行列は $\frac{1}{s^2+0.2s}$ に、1 行め $(s+0.1,\ 0.1)$、2 行め $(0.1,\ s+0.1)$。B をかけて 1 行めをとると $G(s) = \frac{0.001}{s^2+0.2s} = \frac{0.001}{s(s+0.2)}$。

9-11

じ 1　e^{At} は対角が $e^{-0.5t} \cdot e^{-3t}$、ほかは 0。$\vec{x} = (2e^{-0.5t},\ e^{-3t})$。$t = 2$ で $(2e^{-1},\ e^{-6}) = (0.736,\ 0.00248)$。

じ 2　P は例題 2 と同じ。e^{At} は $\frac{1}{2}$ に、1 行め $(e^{-0.2t} + e^{-0.4t},\ e^{-0.2t} - e^{-0.4t})$、2 行め $(e^{-0.2t} - e^{-0.4t},\ e^{-0.2t} + e^{-0.4t})$。$x_1 = 10e^{-0.2t} + 10e^{-0.4t}$、$x_2 = 10e^{-0.2t} - 10e^{-0.4t}$。5 分後 $(5.03,\ 2.33)$。

じ 3　$\lambda = -1 \pm 3j$、$N = A + I$（1 行め $(1,\ 1)$、2 行め $(-10,\ -1)$）、$N^2 = -9I$。$e^{At} = e^{-t}(\cos 3t\, I + \frac{\sin 3t}{3} N)$。$x = e^{-t}(\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t)$、$x(1) = -0.347$。

じ 4　A は 1 行め $(0,\ 3)$、2 行め $(0,\ 0)$、$A^2 = O$。$e^{At} = I + At$ は 1 行め

$(1,\ 3t)$、2 行め $(0,\ 1)$。

$\vec{x} = (1+6t,\ 2)$、$t=2$ で $(13,\ 2)$。

じ 5 $\gamma = \sqrt{4} = 2$、$Z_0 = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$、$\gamma\ell = 1$。1 行め $(1.543,\ 0.5 \times 1.175) = (1.543,\ 0.588)$、2 行め $(1.175 \div 0.5,\ 1.543) = (2.350,\ 1.543)$。

じ 6 $\det = (s+2)^2$、$(sI-A)^{-1}$ は $\frac{1}{(s+2)^2}$ に 1 行め $(s+4,\ 1)$、2 行め $(-4,\ s)$。$\frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \to (1+2t)e^{-2t}$。$e^{At} = e^{-2t}$ に 1 行め $(1+2t,\ t)$、2 行め $(-4t,\ 1-2t)$。$\theta = 0.01(1+2t)e^{-2t}$、$\theta(1) = 0.00406$（9-10 と同じ）。

じ 7 $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ に 1 行め $(s+4,\ 1)$、2 行め $(-3,\ s)$。1 行め 1 列め $1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$、1 行め 2 列め $0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$、2 行め 1 列め $-1.5e^{-t} + 1.5e^{-3t}$、2 行め 2 列め $-0.5e^{-t} + 1.5e^{-3t}$。

じ 8 $X = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1/6}{s} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1/3}{s+3}$。$x = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$。$x(1) = 0.116$、最後は $\frac{1}{6}$。

じ 9 `[0, 100, 0]` にかえる。1 秒後 $(18.52,\ 29.48,\ 18.52)$ ℃。

じ 10 （1）$-1 \pm 2j$ で落ち着く。

（2）$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ で $\lambda = 1$、-2。1 があるので落ち着かない。

（3）-2、-3 で落ち着く。

1 e^{At} は対角が e^{-4t}・$e^{-0.1t}$、ほかは 0。$\vec{x} = (5e^{-4t},\ 10e^{-0.1t})$。$t=1$ で $(0.0916,\ 9.048)$。

2 $(10 + 10e^{-0.2t},\ 10 - 10e^{-0.2t})$ に $t=5$。$(13.68,\ 6.32)$ cm。

3 e^{At} は 1 行め $(1,\ t)$、2 行め $(0,\ 1)$。$\vec{x} = (1-0.5t,\ -0.5)$。4 秒後 $(-1,\ -0.5)$。

4 $\gamma = 1$、$Z_0 = 1$、$\gamma\ell = 2$。1 行め $(3.762,\ 3.627)$、2 行め $(3.627,\ 3.762)$。

5 （1）$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$、$-1 \pm j$。落ち着く。

（2）$\lambda^2 + 4 = 0$、$\pm 2j$。ゆれ続ける（落ち着かない）。

（3）$\lambda^2 - 1 = 0$、± 1。落ち着かない。

6 $\lambda = -1 \pm j$、$\sigma = -1$、$\omega = 1$。$N = A + I$ は 1 行め $(1,\ 1)$、2 行め $(-2,\ -1)$、$N^2 = -I$。$e^{At} = e^{-t}(\cos t\, I + \sin t\, N)$。$x = e^{-t}(\cos t + \sin t)$、$x(1) = 0.508$。

7 $\det = (s+3)^2$。$(sI-A)^{-1}$ は $\frac{1}{(s+3)^2}$ に 1 行め $(s+6,\ 1)$、2 行め $(-9,\ s)$。$\frac{s+6}{(s+3)^2} = \frac{1}{s+3} + \frac{3}{(s+3)^2}$。$e^{At} = e^{-3t}$ に 1 行め $(1+3t,\ t)$、2 行め $(-9t,\ 1-3t)$。$x = (1+3t)e^{-3t}$、$x(1) = 4e^{-3} = 0.199$。

8 $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$ に 1 行め $(s+6,\ 1)$、2 行め $(-8,\ s)$。1 行め 1 列め $2e^{-2t} - e^{-4t}$、1 行め 2 列め $0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t}$、2 行め 1 列め $-4e^{-2t} + 4e^{-4t}$、2 行め 2 列め $-e^{-2t} + 2e^{-4t}$。

9 $X = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$。$x = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$。$x(1) = 0.400$、最後は 1（例題 8 の 2 倍）。

記号カード

この巻で出てきた記号と、この巻でよく使う前の巻の記号です。

記号	読み方	意味	章
Δ	デルタ	変化の量・きざみ。データをとる時間のきざみ Δt（$f_s = 1/\Delta t$：9-4）、コンピュータの 1 歩の Δt（9-10）	2-3
dB	デシベル	倍率を対数で表す単位。振幅の倍率は $20\log_{10}\lvert G\rvert$。直列につなぐと dB のたし算（9-8）	3-12
ω	オメガ	角周波数〔rad/s〕。周波数の 2π 倍。n 番めの成分は $n\omega_0$（9-1）	4-8
lim	リミット	近づく先。最終値の定理 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$（9-6）	5-3
$\dot{x}$、$\ddot{x}$	エックス・ドット	時間で 1 回・2 回微分。状態方程式の $\dot{\vec{x}}$（9-10）	5-5
$\int_a^b$	インテグラル	ふつうの定積分。a_n・c_n・$F(\omega)$・$\mathcal{L}$ の名前は、これに直して計算する（9-2〜9-5）	5-10
$\sum_{k=1}^{n}$	シグマ	全部たす。フーリエ級数の和（9-1）、データの和・DFT の和（9-2・9-4）	5-10
e	イー	ネイピア数。e^{-st}（9-5）、$e^{-j\omega t}$（9-4）、e^{At}（9-11）	5-14
$n!$	エヌのかいじょう	$\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$（9-6）、$e^{At}$ の $(At)^2/2!$（9-11）	5-17
τ	タウ	時定数〔s〕。1 次おくれ $K/(\tau s+1)$ の極は $-1/\tau$（9-8・9-9）。たたみこみの中の時刻は t_1 と書く（9-6）	6-4
L・C	エル・シー	コイルとコンデンサー。RC・RL・RLC の回路（9-5・9-7・9-10）。$y = C\vec{x}$ の C（はかる行列）とは別	6-4

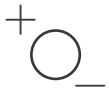
つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
ω_{n}	オメガ・エヌ	固有角振動数（n は立てた字）。2 次おくれの形（9-9）。n 番めの成分 $n\omega_0$ とは別（9-1）	6-6
ζ	ゼータ	減衰比。2 次おくれの行きすぎは ζ だけで決まる（9-9）	6-7
j	ジェイ	虚数単位。$s=\sigma+j\omega$（9-5）、$e^{jn\omega_0 t}$（9-3）。数学・物理の本では i	6-8
$\bar{z}$	ゼット・バー	共役な複素数。$c_{-n}=\overline{c_n}$（9-3）、共役な極の組（9-7・9-9）	6-8
$\arg z$	アーギュメント	偏角。周波数応答 $G(j\omega)$ のおくれの角（9-8）	6-9
$j\omega$	ジェイ・オメガ	$G(s)$ に $s=j\omega$ を入れると周波数応答（9-8）	6-10
s	エス	特性方程式の s と同じもの。ラプラス変換の変数 $s=\sigma+j\omega$（9-5）。極は s の値（9-9）	6-12
ω_{d}	オメガ・ディー	減衰があるときのゆれの角振動数。極 $-\sigma\pm j\omega_{\mathrm{d}}$ の虚部（9-9）	6-12
X	エックス（大文字）	6-13 の複素振幅は $F_0G(j\omega)$（9-8）。大文字は s の世界の $X(s)$ にも使う（9-5）	6-13
$\leftrightarrow$	たいおうする	変換の組。$f(t)\leftrightarrow F(s)$（9-5）	6-15
$A\vec{x}$	エー・エックス	行列×ベクトル。状態方程式 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$（9-10）	7-2
I	アイ	単位行列。$(sI-A)^{-1}$（9-8・9-11）、$I+A\,\Delta t$（9-10）	7-3
$\det A$	デターミナント・エー	行列式。$\det(sI-A)=0$ の解が極（9-9・9-10）	7-4
λ	ラムダ	固有値＝極（9-9〜9-11）。9-1 では変数分離の定数にも使う	7-8
D	ディー	対角行列。$e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}$（9-11）	7-9

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
A^n	エー・エヌじょう	行列を n 回かけたもの。e^{At} の A^2・A^3（9-11）	7-10
$\vec{x}_n$	ベクトル・エックス・エヌ	n 歩めの状態。コンピュータのくり返し $\vec{x}_{k+1} = A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$（9-10）	7-10
a_n・b_n	エー・エヌ、ビー・エヌ	フーリエ係数。$\cos n\omega_0 t$・$\sin n\omega_0 t$ を何倍してたすか。「かけて平均の 2 倍」という操作の名前	9-1
ω_0	オメガ・ゼロ	基本角周波数 $\frac{2\pi}{T}$〔rad/s〕。n 番めの成分は $n\omega_0$。6-12 の ω_{n} とは別	9-1
$(-1)^n$	マイナス・イチの・エヌじょう	-1 を n 回かけた数。n が偶数なら 1、奇数なら -1。$\cos n\pi$ の値	9-2
c_n	シー・エヌ	複素フーリエ係数。1 周期で $e^{-jn\omega_0 t}$ をかけて平均した値。$\frac{a_n - jb_n}{2}$	9-3
$e^{jn\omega_0 t}$	イー・ジェイ・エヌ・オメガ・ゼロ・ティー	n 番めの回る矢印。$n > 0$ は左回り、$n < 0$ は右回り（負の周波数）	9-3
$F(\omega)$	エフ・オメガ	$f(t)$ のフーリエ変換。角周波数 ω の成分。ふつうは複素数で、大きさがスペクトル	9-4
f_{s}	エフ・エス	サンプリング周波数〔Hz〕。1 秒に値をとる回数。$1/\Delta t$	9-4
$\mathcal{L}[f(t)]$	ラプラス・エフ・ティー（エルと読む人もいる）	$f(t)$ に e^{-st} をかけて 0 から ∞ までたしたもの。大文字で $F(s)$ と書く	9-5
$H(t)$	エイチ・ティー（ステップ関数）	$t < 0$ で 0、$t \geqq 0$ で 1。$u(t)$・$1(t)$ とも書く	9-5
$\delta(t)$	デルタ・ティー（デルタ関数）	面積 1 で幅が限りなく細いパルス。たたいた力積。6-7 の δ とは別	9-6
$f * g$	エフ・たたみこみ・ジー（$*$ をスターと読む人もいる）	前の時刻の入力の効き目をたし合わせたもの。変換すると $F(s)G(s)$	9-6
$\mathcal{L}^{-1}[F]$	ラプラス・インバース（逆ラプラス変換）	変換すると $F(s)$ になる時間の関数。-1 は逆向きの印	9-7

つぎのページへつづく

記号	読み方	意味	章
$G(s)$	ジー・エス	伝達関数。はじめの値を 0 にした $Y \div U$。$s = j\omega$ で周波数応答	9-8
	くわえあわせてん	ブロック線図で、矢印をたし引きする所。符号を横に書く	9-8
$\times$	ばつ（極）	s の平面の上の極の印。伝達関数の分母が 0 になる s。かけ算の $\times$ とは別の使い方	9-9
$\circ$	まる（零点）	s の平面の上の零点の印。伝達関数の分子が 0 になる s	9-9
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$	じょうたいほうていしき	状態の変わる速さを、今の状態 $\vec{x}$ と入れるもの u で表す式	9-10
K	ケー	$u = -K\vec{x}$ の、状態の何倍を入れるかを並べた 1 行の行列	9-10
e^{At}	イー・エーティー（行列の指数関数）	$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots$ の名前。はじめの状態にかけると t 秒後の状態が出る。成分ごとの e ではない	9-11
$(sI - A)^{-1}$	エスアイ・マイナス・エーの逆行列	e^{At} をラプラス変換したもの。成分ごとに部分分数に分けて表を逆に引くと e^{At} になる	9-11

記号を書くときのちゅうい

手で書くと、ほかの記号とまぎれやすいものと、読みまちがえやすい書き方です。$\mathcal{L}$・$G(s)$・e^{At} のような記号は、まず「名前」として読みます。

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
j	i、番号の j	虚数単位。数学・物理の本の i と同じもの。$\frac{1}{j} = -j$（$\frac{1}{j} = j$ ではない）（6-8・9-3）

つぎのページへつづく

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
$s = \sigma + j\omega$	ふつうの数の s	s は複素数。変換表の「$s > a$」は「実部が a より大きい」と読む（9-5・9-6）
$\mathcal{L}[f(t)]$	$L \times f(t)$	筆記体の L は操作の名前で、かけ算ではない。定積分か表に直す（9-5）
$X(s)$	$x(s)$	小文字は時間の世界、大文字は s の世界。$sX(s) - x(0)$ のように書き分ける（9-5）
$\mathcal{L}^{-1}$	$\dfrac{1}{\mathcal{L}}$	-1 は「逆向き」の印。部分分数に分けて、表を逆に引く（9-7）
$\mathcal{L}[fg]$	$F(s)\,G(s)$	ふつうのかけ算の行はない。$F(s)G(s)$ になるのはたたみこみ $f * g$（9-5・9-6）
$f * g$	$f \times g$	たたみこみ。$e^{-t} * e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t}$。中の時刻は t_1（専門書の τ）（9-6）
$H(t)$	$u(t)$、$1(t)$	ステップ関数。専門書では $u(t)$・$1(t)$ とも書く。この本の u は入れるもの（9-5・9-6）
$H(t - t_0)$	$H(t) - t_0$	t_0 秒後に 0 から 1 になる。おくれた $f(t - t_0)$ には $H(t - t_0)$ をつける（9-6）
$\delta(t)$	6-7 の δ	デルタ関数（面積が 1 の細いパルス）。6-7 の対数減衰率 δ とは別の使い方（9-6）
$n\omega_0$	ω_n、ω_{n}	n 番めの成分は基本の n 倍。ω_{n}（立てた n）は固有角振動数（9-1）
$\dfrac{a_0}{2}$	a_0	定数の項（平均）は $\frac{a_0}{2}$。a_n の式を $n = 0$ にも使えるようにした形（9-1・9-2）
c_n の $\dfrac{1}{T}$	$\dfrac{2}{T}$	a_n・b_n は $\frac{2}{T}$、c_n は $\frac{1}{T}$。かけるのは $e^{-jn\omega_0 t}$（マイナス）（9-3）
c_{-n}	$-c_n$	実数の波なら $c_{-n} = \overline{c_n}$（共役）（9-3）
$F(\omega)$ の ω	Hz	角周波数〔rad/s〕。Hz にするには 2π でわる（9-4）

つぎのページへつづく

記号	まぎれやすい	書くとき・読むときのコツ
f_{s}	関数の f	サンプリング周波数〔Hz〕。関数 $f(t)$ と同じページでは、添え字をつけるかことばで（9-4）
$\dfrac{2\lvert X_k\rvert}{N}$	$\lvert X_k\rvert$	FFT の答えの大きさを振幅にするには $\frac{2}{N}$ 倍（9-4）
$G(s)$	6-13 の $G(\omega)$	伝達関数。6-13 の $G(\omega)$ は、分母の大きさの 2 乗に付けた名前（9-8）
$\dfrac{G_1}{1+G_1G_2}$	$\dfrac{G_1}{1-G_1G_2}$	引いてもどすフィードバック。もどす箱は G_2（専門書の $H(s)$）（9-8）
$20\log_{10}\lvert G\rvert$	$10\log_{10}\lvert G\rvert$	振幅（電圧・ゆれ）の倍率は 20 倍。電力の比なら 10 倍（3-12・9-8）
$C(sI-A)^{-1}B$	$BC(sI-A)^{-1}$	行列のかける順は変えない（7-3・9-8）
×・○	かけ算・0	s の平面の極（×）と零点（○）（9-9）
σ	標準偏差	$s=\sigma+j\omega$ の σ は実部。9-4 のガウスの形の σ は標準偏差（9-4・9-9）
T	周期と温度	熱の節の T は温度。周期は使わず、棒の長さ L で $\sin\frac{n\pi x}{L}$（9-1）
u	速度	この巻の u は入れるもの（$u(t)$・$U(s)$）。物理力-14 の u は流れの速さ（9-8・9-10）
K	ばね・比例の強さ	$u=-K\vec{x}$ の K は 1 行の行列。6-14 の結合ばね、比例制御の K_{p} とは別（9-10）
A_{d} の固有値	A の固有値	くり返し $\vec{x}_{k+1}=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$ は大きさが 1 より小さいか。$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ は実部が負か（9-10）
e^{At}	成分ごとの e	名前。行列の計算（$Pe^{Dt}P^{-1}$ など）か部分分数に直す（9-11）
$Pe^{Dt}P^{-1}$	$P^{-1}e^{Dt}P$	P は固有ベクトルを並べた行列。左に P、右に P^{-1}（9-11）

ギリシャ文字の読み方

この巻では、時定数 τ、減衰比 ζ、角周波数 ω など、ギリシャ文字がたくさん出てきます。大文字・小文字・読み方と、この巻での意味です（かっこの中は章）。

大	小	読み方	この巻での意味	大	小	読み方	この巻での意味
A	α	アルファ	熱拡散率（9-1・9-3・9-11）	N	ν	ニュー	—
B	β	ベータ	積和の式の角（9-2）	Ξ	ξ	クシー	専門書の周波数 ξ（9-4）
Γ	γ	ガンマ	送電線の $\gamma\ell$、$M^2=\gamma^2 I$（9-11）	O	o	オミクロン	—
Δ	δ	デルタ	$\delta(t)$ はデルタ関数（9-6）。Δt はきざみ（9-4・9-10）	Π	π	パイ	円周率
E	ε	イプシロン	パルスの幅（9-6）、ずれ（9-12）	P	ρ	ロー	—
Z	ζ	ゼータ	減衰比（9-9）	Σ	σ	シグマ	Σ は和。σ は s の実部（9-5・9-9）、ガウスの形のはば（9-4）
H	η	イータ	—	T	τ	タウ	時定数（9-5〜9-9）
Θ	θ	シータ	角、棒のかたむき（9-9・9-10）。$\Theta(t)$ は時間だけの関数（9-1）	Υ	υ	ウプシロン	—
I	ι	イオタ	—	Φ	ϕ	ファイ	専門書の $\Phi(t)$（9-11）
K	κ	カッパ	—	X	χ	カイ	—
Λ	λ	ラムダ	固有値＝極（9-9〜9-11）、変数分離の定数（9-1）	Ψ	ψ	プサイ	—
M	μ	ミュー	1 歩の行列の固有値（9-10）、変数分離の定数（9-1）	Ω	ω	オメガ	角周波数。ω_0（9-1）、ω_n・ω_d（9-9）

大文字が英語のアルファベットと同じ形の文字（A、B、E など）は、記号としてはほとんど使いません。デルタ関数の $\delta(t)$ と 6-7 の対数減衰率 δ は、同じ文字の別の使い方です。時定数の τ とまぎれないように、たたみこみの中の時刻は t_1 と書きます（専門書では τ）。

よく使う定数・単位・公式

1 この巻で使う単位

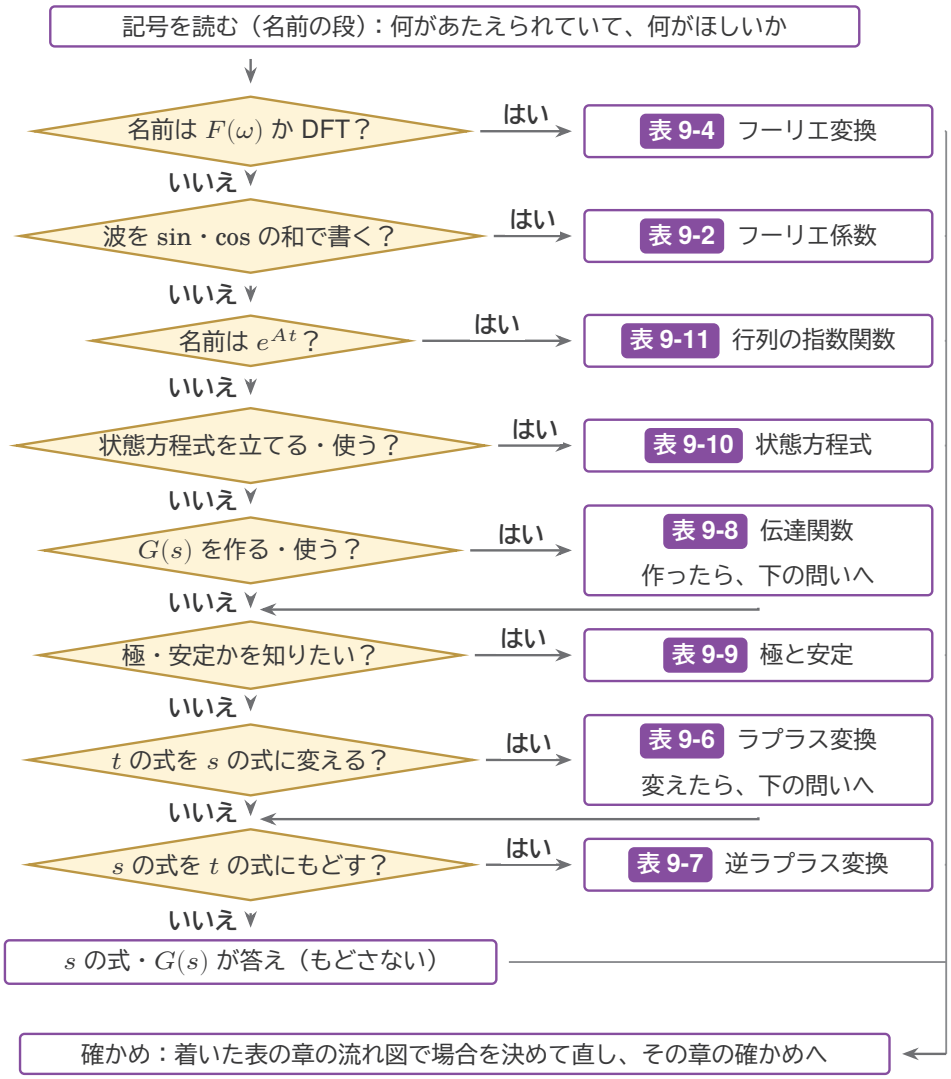
量	単位（読み方）	ほかの単位との関係・この巻の例	章
時間	s、ms、分	1 ms = 0.001 s。冷めるお湯・エアコンは分で数え、そのときの s の単位は 1/分	9-0 9-5
周期	s	周期 $T = 1 \div$（周波数）。50 Hz なら 0.02 s	9-1
周波数	Hz（ヘルツ）、kHz	1 秒にくり返す回数（振動数と同じ）。1 kHz = 1000 Hz	9-0
角周波数	rad/s	$\omega = 2\pi \times$（周波数）。50 Hz なら $100\pi \approx 314$ rad/s	9-1
ラプラス変換の s	1/s（1/分）	st は単位のない数。時間を分で数えると、s の単位は 1/分	9-5
サンプリング周波数	Hz	1 秒に値をとる回数 $f_s = 1/\Delta t$。CD は 44 100 Hz	9-4
倍率の dB	dB（デシベル）	振幅の倍率の $20\log_{10}$。$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍で約 -3.01 dB、$\frac{1}{10}$ 倍で -20 dB	9-8
電圧・電流・抵抗	V、A、Ω（k Ω）	時定数 RC：20 kΩ × 100 μF = 2 s	9-5 9-7
静電容量・インダクタンス	F（μF）、H（mH）	RLC の回路：10 mH・1 μF・20 Ω	9-7 9-9
力・ばね・ダンパー	N、N/m、N·s/m	6-13 のばね：0.5 kg・8 N/m・0.4 N s/m	9-8
回る速さ	rad/s、rpm	10 rad/s ≈ 95.5 rpm（rpm は 1 分に回る回数）	9-8
温度・温度の差	℃、K（ケルビン）	温度の差は 1 K と 1 ℃ が同じ	9-1
熱拡散率	m²/s	8-13 の棒：$\alpha = 1 \times 10^{-4}$ m²/s	9-1 9-3

メモ

2 変換の地図

a_n・c_n・$F(\omega)$・$\mathcal{L}$・$\mathcal{L}^{-1}$・$G(s)$・e^{At} は、どれも操作の**名前**です。この 3 見開きで、①どの表か（流れ図）→②どの場合か（こんなとき）→③どの道具に直すか（札）→④同じ形の例題、の順に引きます。

どの表を見る？



ひし形は問い、四角はすること。表 9-8・表 9-6 の四角のあとは、左の列の次の問いへもどる。表 9-2 には、9-3 の c_n の行もある。表 9-10 の E は表 9-9 の G・表 9-11 の I と、H は表 9-8 の E と同じ場合。

名前と、実際の操作の見分け方

$\mathcal{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$
名前　表を引く

$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$
名前　行列の計算

点線の枠＝名前。まだ数の出ない記号。何に・何をかけて・どこからどこまで・何でわるかを読む。

実線の枠＝実際の操作。4 つの道具：ふつうの定積分（第 5 巻）表を引く（9-6）部分分数（3-8）行列の計算（第 7 巻）

ぬりつぶし＝楽をする　積分しない・対称性・数値。

どの名前も 名前 → 楽をする → 直す → 確かめ

例題の番号は、表のある章の例題。ほかの章の例題は「9-1：2」（9-1 の例題 2）の形で 2 行めに。

表 9-2 フーリエ係数 $a_n,\ b_n$ → ふつうの定積分

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
I	**式がなく、はかった値だけ** → 楽をする $(2/N)\sum f_k \sin n\omega_0 t_k$	9 9-1：5
A	**sin・cos の積や累乗の式（$\sin^3 t$、$\cos^2 t$ など）** → 楽をする 積和・2 倍角の式（4-9）で和に直す	1
G	**平均（直流分）$a_0/2$ だけほしい** → 楽をする 1 周期の面積÷ T	7
E	**棒・弦のように、0 から L だけで決まる形** → 楽をする 半回転して広げ、$b_n = (2/L)\int_0^L f\sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x$	4・5 9-1：6・7
F	**周期 T が 2π でない（50 Hz など）** → 楽をする $\omega_0 = 2\pi/T$ にして D・B・C へ	6 9-1：4
D	**偶関数（たて軸で折り返して重なる）か奇関数（原点で半回転して重なる）** → 楽をする 偶なら $b_n = 0$、奇なら $a_n = 0$。半周期の 2 倍	2・3・6
B	**区間ごとに一定（方形波・パルス）** → ふつうの定積分 区間に分ける。$\cos n\pi = (-1)^n$	2・6 9-1：2・4・6・7
C	**区間ごとに 1 次式（のこぎり波・三角波）** → ふつうの定積分 部分積分（5-16）	3・4・5 9-1：3
H	**区間ごとに sin・cos（整流した波）** → ふつうの定積分 積和の式で和に直して定積分	8

表 9-2（つづき）複素数の係数（9-3 の行） c_n → ふつうの定積分

記号	こんなとき → 手順（例題は 9-3 の番号）	例題
J′	**f が $e^{jn\omega_0 t}$ や $\cos n\omega_0 t$・$\sin n\omega_0 t$ の（定数倍の）和で書いてある** → 楽をする $c_n = (a_n - jb_n)/2$、$c_{-n} = \overline{c_n}$、$c_0 = a_0/2$	1・2・9
A	**sin・cos の積やべき（$\sin^3 t$ など）で書ける** → 楽をする オイラーの公式で展開し、e^{jnt} の前の数を読む	3
G	**平均 c_0（直流分）だけほしい** → 楽をする 1 周期の面積÷ T	4
F	**周期が 2π でない（50 Hz なら $T = 0.02$ s）** → 楽をする $\omega_0 = 2\pi/T$。このあと J へ	7
J	**区間ごとに一定、または区間ごとに 1 次式** → ふつうの定積分 $(1/T)\int_0^T f e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$。$e^{-jn\pi} = (-1)^n$	5・6・7・8

表 9-4 フーリエ変換 $F(\omega)$ → ふつうの定積分 表を引く

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
G	**式がなく、はかった値だけ（録音・測定したとびとびの値）** → 楽をする 積分しない。DFT $X_k = \sum x_m e^{-j2\pi km/N}$ を FFT で。振幅は $2\lvert X_k\rvert/N$	8・9・10
F	**くり返す波（sin・cos の和、方形波など）** → 楽をする 積分しない。9-3 の c_n で、$\pm n\omega_0$ に立つ線のスペクトル	7
E	**知っている形を、ずらした・cos をかけた** → 楽をする 性質の表を引く。もとの形の変換は、下の行（A〜D）で	5・6
A	**0 でない所が有限の区間だけ（パルス）** → ふつうの定積分 その区間のふつうの定積分。$F(0)$ ＝面積	1・5
D	**ガウスの形 $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$** → ふつうの定積分 肩を平方完成し、ガウス積分 $\sqrt{\pi}$（8-6）	4・6
B	**$t \geqq 0$ だけの e^{-at}（だんだん消える）** → ふつうの定積分 $\int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = 1/(a+j\omega)$（5-14 の広義積分）	2
C	**両側の $e^{-a\lvert t\rvert}$** → ふつうの定積分 $t<0$ と $t>0$ に分けて B を 2 回：$2a/(a^2+\omega^2)$	3

表 9-6 ラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ → 表を引く（行は ふつうの定積分 で 1 回作る）

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
A	**表にある形（1、t^n、e^{at}、$\sin\omega t$、$\cos\omega t$、$\delta(t)$）** → 表を引く 表を引く。まだない行は、定義の積分（ふつうの定積分）で 1 回だけ作る	1・2・3・4・7・10・11 9-5：1・7
B	**いくつかの項の和（定数倍は前に出す）** → 楽をする 線形：項ごとに変換して、たす	2・7・11 9-5：7
C	**e^{-at} に、表にある別の関数（sin・cos・t^n など）がかかっている（e^{-at} だけなら A）** → 表を引く e^{-at} をとった形の $F(s)$ を引き、s を $s+a$ に（s のずらし）	3
D	**おくれて始まる（$H(t-t_0)$ がかかっている。$t_0>0$）** → 表を引く おくれをとった形の $F(s)$ を引き、e^{-st_0} をかける（時間のずらし）	4・7
E	**f'・f'' のある式（微分方程式）を変換する** → 表を引く $f' \to sF - f(0)$、$f'' \to s^2F - sf(0) - f'(0)$、$\int_0^t f\,\mathrm{d}t_1 \to F/s$	5・6 9-5：2・3・4・5・6
F	**区間ごとに式が変わる（パルス・階段）** → 楽をする ステップ関数 $H(t-t_0)$ の和に直して、B・D へ	7
G	**t^n 以外の関数（sin・cos など）に t がかかっている（t^n だけなら A）** → 表を引く t をとった形の $F(s)$ を引き、$-\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$	8
H	**表にない形・データだけで、数値で求めたい** → 楽をする 定義の積分を、表計算の台形で（e^{-st} が十分小さくなる t まで）	9
I	**たたみこみ $(f*g)(t)$ を変換する** → 表を引く それぞれを変換して、かけ算 $F(s)\,G(s)$	10

表 9-7 逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ → 部分分数 → 表を引く

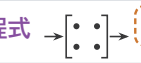
記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
A	**表の形そのもの（定数倍をのぞく）** → 表を引く 定数倍を外に出して、逆に引く	1・9・11
B	**分母が、ちがう 1 次式のかけ算（s だけの因数もふくむ）** → 部分分数 $\sum A/(s-p_i)$（かくす方法） → 表を引く $\sum Ae^{p_i t}$	2・3・10
C	**同じ 1 次式が 2 回以上かかる（重解）** → 部分分数 $A/(s+a)+B/(s+a)^2$ → 表を引く te^{-at} も	4・5
D	**分母が、実数の 1 次式に分けられない 2 次式（判別式が負）1 つだけ（ほかの因数なし）** → 部分分数 平方完成 $(s+a)^2+\omega^2$ → 表を引く $e^{-at}\cos\omega t \cdot e^{-at}\sin\omega t$	6
E	**分けられない 2 次式と、ほかの因数（1 次式・もう 1 つの 2 次式）がまざる** → 部分分数 2 次式の分子は $Bs+C$ → 表を引く B と D の形で	7・8
F	**e^{-st_0} がかかっている** → 楽をする はずしてもどし、t_0 だけ右へずらす	10
G	**分子の次数が、分母の次数と同じか大きい** → 楽をする 先にわり算 (3-8)。定数の項は $\delta(t)$	11
H	**最後の値（落ち着く値）だけほしい** → 楽をする $\lim_{s\to 0} sF(s)$（落ち着くときだけ）	12
I	**3 次以上の分母で、手の計算では 1 次式・2 次式に分けきれない** → 楽をする Python で極と係数を出し、B・D の形で読む	13

表 9-8 伝達関数 → G → $G(s)$ → 表を引く 行列の計算

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
A	**微分方程式があたえられている** → 表を引く はじめの値 0 で $\dot{y} \to sY$。Y/U	1
B	**箱が 1 列につながる（直列）** → 楽をする かけ算 G_1G_2	2・9
C	**同じものが 2 つの箱に入り、出たものをたす（並列）** → 楽をする たし算 G_1+G_2	3
D	**出たものをはかって、入れる側へもどす（フィードバック）** → 楽をする $Y=G_1(R-G_2Y)$ を解いて $G_1/(1+G_1G_2)$	4・5
E	**状態方程式 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$、$y=C\vec{x}$ があたえられている** → 行列の計算 $G=C(sI-A)^{-1}B$	6
F	**インパルス応答・ステップ応答（時間の動き）がほしい** → 部分分数 $G \cdot G/s$ を分けて → 表を引く 表 9-7 でもどす	7
G	**sin を入れたときの倍率とおくれ（周波数応答）がほしい** → 楽をする $s=j\omega$。$\lvert G(j\omega)\rvert$ と角、$20\log_{10}\lvert G\rvert$ dB	8・9
H	**実験のデータしかない（1 次おくれとわかっている）** → 楽をする 最後の値で K、63.2 % の時刻で τ	10

表 9-9 極と安定 → 極 → 解く・判定の式 **行列の計算**

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
A	**分母が 1 次式（$\tau s+1$ など）** → 直す 1 次方程式を解く。$\tau s+1$ なら極は $-1/\tau$。$\tau>0$ なら安定	2・6・7
B	**分母（2 次以上）が、$(s-p)$ や $(s+\sigma)^2+\omega^2$ だけでできている（p・σ は 0 でもよい。s^2+4^2 もふくむ。かけ算してあってもよい）** → 楽をする 解かない。かっこごとに 0 と置いて、極を読む	1・4
C	**分母が 2 次式（分かれていない）** → 直す 解の公式（3-10）。ζ・ω_n も読む。安定かだけなら、係数がすべて正か	3・5・8
D	**分母が 3 次式（分かれていない）** → 楽をする 安定かだけなら 3 次の判定：係数がすべて正で $a_2a_1>a_0$	9
E	**分母が 4 次以上（分かれていない）** → 楽をする Python の `np.roots` で極を出し、実部の符号を見る	10
F	**フィードバックでつないだ全体の極** → 直す 全体 $G_1/(1+G_1G_2)$ を通分して、分母の式を作る。そのあと A〜E	6・7・8・9
G	**状態方程式 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+B\vec{u}$ で書いてある** → 行列の計算 $\det(sI-A)$ を作る（極＝固有値）。そのあと A〜E	5

表 9-10 状態方程式  → $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$ → **行列の計算**

記号	こんなとき → 手順（A〜D は立て方、E〜H は使い方）	例題
A	**2 階の微分の式が 1 つ（ばね・車）** → 行列の計算 位置と速度を状態に（$x_1=x$、$x_2=\dot{x}$）。$\ddot{x}$ について解いて 2 行めに	1・4
B	**1 階の式がいくつか（水そう・部屋の温度）** → 行列の計算 量をそのまま状態にし、右辺の係数を行列に並べる	2
C	**電気回路（コイル・コンデンサー）** → 行列の計算 v_C と i を状態に。$C\dot{v}_C=i$、$L\dot{i}=$（電圧の残り）	3
D	**$\sin\theta$・$\cos\theta$ などが入る（倒立振子・振り子）** → 楽をする $\sin\theta\approx\theta$、$\cos\theta\approx1$（線形化）。そのあと A	4
E	**何も入れないで落ち着くかを知りたい** → 行列の計算 $\det(A-\lambda I)=0$ を解き、固有値の実部がすべて負か	5
F	**落ち着くように、入れ方 u を決めたい** → 行列の計算 $u=-K\vec{x}$。$A-BK$ の特性方程式の係数を、選んだ固有値の式とくらべる	6
G	**コンピュータで Δt ごとにくり返す** → 行列の計算 $I+(A-BK)\Delta t$ の固有値の大きさが、すべて 1 より小さいか	7
H	**伝達関数 $G(s)$ がほしい** → 行列の計算 $C(sI-A)^{-1}B$（逆行列は 7-5）。表 9-8 の E と同じ	8

表 9-11 行列の指数関数 $\begin{bmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{bmatrix}$ e^{At} → 行列の計算 部分分数

記号	こんなとき → 手順（頭の札が、どの道具か）	例題
A	A が対角（式どうしがつながっていない）→ 行列の計算 成分ごとに $e^{\lambda t}$	1
B	固有値がちがう実数 → 行列の計算 対角化 $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$	2・7
C	固有値が複素数 $\sigma \pm j\omega$（ゆれる）→ 行列の計算 $N = A - \sigma I$ とすると $N^2 = -\omega^2 I$。$e^{\sigma t}\{(\cos\omega t)I + (\sin\omega t/\omega)N\}$	3
D	A^2 が O、または単位行列の何倍か → 楽をする $A^2 = O$ なら $I + At$。$M^2 = \gamma^2 I$ なら $(\cosh\gamma t)I + (\sinh\gamma t/\gamma)M$	4・5
E	固有値が重なる（重解）→ 部分分数 $(sI - A)^{-1}$ の成分を部分分数に。$1/(s+a)^2 \to te^{-at}$（表 9-7 の C）	6
F	どの形でも（2 × 2 なら楽）。確かめに → 部分分数 $(sI - A)^{-1}$ を逆行列（7-5）で作り、成分ごとに部分分数で表を逆に引く	7
G	入れるもの u がある → 部分分数 $(sI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + BU)$ を表 9-7 でもどす	8
H	コンピュータの数値でよい（3 × 3 以上など）→ 楽をする `expm`、または $(I + At/n)^n$	9
I	落ち着くかどうかだけ → 楽をする e^{At} を作らない。固有値の実部がすべて負か	10

名前と、実際の操作の対応表

名前（記号）	名前の意味	実際の操作	表
$a_n \cdot b_n \cdot c_n$	1 周期で、cos・sin・$e^{-jn\omega_0 t}$ をかけてたす	ふつうの定積分	9-2
$F(\omega)$	$-\infty$〜∞ で $e^{-j\omega t}$ をかけてたす	ふつうの定積分 表を引く	9-4
$\mathcal{L}[f(t)]$	0〜∞ で e^{-st} をかけてたす	表を引く	9-6
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	ラプラス変換すると $F(s)$ になる $f(t)$	部分分数 表を引く	9-7
$G(s)$	はじめの値を 0 にして、出てくるもの÷入れるもの	表を引く 行列の計算	9-8
極	伝達関数の分母が 0 になる s	解く・行列の計算	9-9
$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$	状態の変わる速さを、今の状態と入れるもので表す	行列の計算	9-10
e^{At}	$I + At + (At)^2/2! + \cdots$	行列の計算 部分分数	9-11

③ 変換表（9-6 の見開きと同じ）

9-5・9-6 で、1 回ずつ自分で作った行の表です。表を引く前に、分子の数と文字の置き方をそろえます（$\frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{s^2+9}$ なので $\frac{1}{3}\sin 3t$）。逆に引くとき（9-7）も、この表を使います。

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f]$	作り方	s の条件
$\delta(t)$	1	細いパルスの先（9-6 ⑦）	どの s も
1（$H(t)$）	$\dfrac{1}{s}$	定義の積分（9-5）	$s > 0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	部分積分（9-5）	$s > 0$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	部分積分のくり返し（9-6 ②）	$s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	定義の積分（9-5）	$s > a$
$t\,e^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s > a$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	オイラーの公式（9-6 ③）	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	オイラーの公式（9-6 ③）	$s > 0$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s > -a$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	s のずらし（9-6 ④）	$s > -a$
$t\sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	t をかける行（9-6 ⑥）	$s > 0$
$t\cos \omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	t をかける行（9-6 ⑥）	$s > 0$
$H(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-st_0}}{s}$	時間のずらし（9-6 ⑤）	$s > 0$
パルス（高さ 1、0 $\sim t_0$）	$\dfrac{1-e^{-st_0}}{s}$	ステップの和（9-6 ⑤）	どの s も

表 17　ラプラス変換の表（関数）。a、ω、t_0 は定数（$\omega > 0$、$t_0 > 0$）。s の条件は、s が複素数なら「実部が」と読む。

性質	時間の世界	s の世界	作り方
線形	$af+bg$	$aF+bG$	積分の性質（9-5 ⑨）
微分	f'	$sF-f(0)$	部分積分（9-5 ⑥）
2 回微分	f''	$s^2F-sf(0)-f'(0)$	微分の行を 2 回（9-5 ⑦）
積分	$\int_0^t f\,\mathrm{d}t_1$	$\frac{F}{s}$	微分の行から（9-6 ⑥）
s のずらし	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	肩のたし算（9-6 ④）
時間のずらし	$f(t-t_0)H(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$	置換積分（9-6 ⑤）
t をかける	$t\,f(t)$	$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$	s で微分（9-6 ⑥）
たたみこみ	$(f*g)(t)$	$F(s)\,G(s)$	積分の順番を入れかえ（9-6 ⑧）
初期値の定理	$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	微分の行から（9-6 ⑨）
最終値の定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$	落ち着くときだけ（9-6 ⑨）

表 18　ラプラス変換の表（性質）。ふつうのかけ算 fg の行はない（FG にはならない）。

4 よく使う数

名前	値	章
2π	6.2832（1 回転の角。角周波数＝ $2\pi\times$ 周波数）	9-1
$\frac{4}{\pi}$	1.2732（高さ 1 の方形波の基本波の大きさ）	9-1 9-3
$\frac{\pi}{4}$	0.7854（$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$。4-9 の 4 項で 0.724）	9-1
$\frac{\pi^2}{8}$	1.2337（$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots$。パーセバルの等式から）	9-2
ギブズの山	高さ 1 の方形波で約 1.179（項をふやしても、とびの約 9 % の行きすぎが残る）	9-1
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.707（折れ点の倍率。−3.01 dB）	9-8
$\sqrt{2\pi}$	2.5066（$e^{-t^2/2}$ のフーリエ変換の $F(0)$）	9-4
e^{-1}	0.3679。時定数 τ で、最後の変化の $1-e^{-1}=63.2\,\%$ に着く	9-5 9-9
1 次おくれの着き方	τ で 63.2 %、2τ で 86.5 %、3τ で 95.0 %、5τ で 99.3 %	9-9
2 次おくれの行きすぎ	$\zeta=0.1$ で 72.9 %、0.3 で 37.2 %、0.5 で 16.3 %、0.7 で 4.6 %、1 で 0	9-9
$\cosh 1$、$\sinh 1$	1.543、1.175（送電線の行列 $e^{M\ell}$）	9-11

この巻でくり返し使う場面と数

同じ場面は、どの章でも同じ数で計算しています。

場面	式と数	章
方形波	4-9 の $\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \cdots$（90° で 4 項 0.724、たし続けると $\frac{\pi}{4}$）。高さ 1 なら $b_n = \frac{4}{n\pi}$（奇数番）、$c_n = \frac{2}{jn\pi}$。ギブズの山 1.179、ひずみ率 48.3 %	9-1 ～9-4
ラの音	440・880・1320 Hz、大きさ 1・0.5・0.25。$f_s = 8000$ Hz で 1 秒とって FFT すると、$\frac{2\lvert X_k\rvert}{N}$ が 1・0.5・0.25	9-0 9-4
8-13 の棒	$L = 0.1$ m、$\alpha = 1 \times 10^{-4}$ m²/s、はじめ 100 ℃・両はし 0 ℃。1 項めは $\frac{400}{\pi} e^{-0.0987t} \sin\frac{\pi x}{L}$。まん中が 50 ℃になるのは 9.47 秒、10 秒で 47.45 ℃	9-1 9-2 9-11
ギターの弦	5 弦（A）：0.65 m、110 Hz、波の速さ $c = 143$ m/s。倍音は 220・330・440 Hz…	9-1 9-2
輪の熱	半径 5 cm、$\alpha = 1 \times 10^{-4}$ m²/s。c_n に $e^{-\alpha n^2 t/R^2}$ をかける（$n = \pm 1$ の項は 1 秒に 0.04 の割合で小さくなり、17.3 秒で半分）	9-3
RC の回路	6-4：10 V・20 kΩ・100 μF、$\tau = 2$ s。$v = 10 - 10e^{-t/2}$、2 秒で 6.321 V、6 秒で 9.502 V。3-12 のローパスは折れ点 100 Hz（$\tau = 1.592$ ms）	9-3 9-5 9-7 9-8
車 A・車 B	車 A $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \to 2e^{-t} - e^{-2t}$（$x(1) = 0.600$）。車 B $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0 \to e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$（$x(1) = 0.014$）。どちらも $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = 0$	9-5 ～9-11
6-13 のばね	0.5 kg・8 N/m・0.4 N s/m、$G = \frac{1}{0.5s^2 + 0.4s + 8}$。0.8 N・$\omega = 2$ でゆすると、ゆれ 0.132 m・おくれ 7.6°	9-8 9-10
RLC の回路	10 mH・1 μF・20 Ω、$\zeta = 0.1$。10 V を入れるとコンデンサーは最大 17.29 V（行きすぎ 72.9 %）	9-7 9-9

つぎのページへつづく

場面	式と数	章
冷めるお湯	6-4：$\tau = 20$ 分、80 ℃・部屋 20 ℃。$T = 20 + 60e^{-0.05t}$、10 分で 56.39 ℃	9-0 9-5
熱電対	$\tau = 30$ s。温度が 1 秒に $\frac{1}{30}$ ℃ずつ上がると、おくれは $1 - e^{-t/30}$ ℃（60 秒で 0.865 ℃）から 1 ℃へ	9-7 9-9
モーター	$\frac{10}{0.5s+1}$（1 V で 10 rad/s）。比例制御 $K_\mathrm{p} = 1$ で、全体の極 -22、ずれ 9.1 %	9-8 9-9
エアコン	外 35 ℃、設定 26 ℃、部屋の $RC = 60$ 分。比例の強さ $RK_\mathrm{p} = 4$ で 27.8 ℃（時定数 12 分）、9 で 26.9 ℃（6 分）	9-8 9-9
サスペンション	1 輪ぶん 250 kg・16 000 N/m・2000 N s/m。$\omega_\mathrm{n} = 8$ rad/s、$\zeta = 0.5$、極 $-4 \pm 6.93j$。5 cm の段差で車体は最大 6.49 cm	9-8 9-9
倒立振子	5-18 の $\ddot{\theta} = 4\theta$（固有値 ± 2。0.01 rad が 2 秒で 0.2731 rad）。$u = -(8\theta + 4\dot{\theta})$ で固有値 $-2 \cdot -2$	9-0 9-10 9-11
水そう	6-14 の 2 つの水そう、はじめ $(20,\ 0)$ cm。10 分後 11.353 cm と 8.647 cm（$10 \pm 10e^{-2}$）	9-7 9-11
行列の指数関数	ばね（$\omega = 1$、$t = 2\pi$）の $(I + At/n)^n$ の対角：$n = 63$ で 1.3656、630 で 1.0318、6283 で 1.0031（7-10）	9-11

5 フーリエ級数・フーリエ変換の公式

係数や変換を、どの道具に直して求めるかは、変換の地図（602 ページ）にまとめました。ここには、よく使う式と結果を集めます。

公式・きまり	式	章
基本角周波数	$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$（周期 T）。n 番めの成分の角周波数は $n\omega_0$	9-1
フーリエ級数	$f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$。とびの所では左右の値の平均	9-1

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
フーリエ係数	$a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$、 $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$（$a_n$ は $n=0$ にも使う。1 周期ならどこからでもよい）	9-1 9-2
直交性	ちがう番号の $\sin n\omega_0 t$・$\cos n\omega_0 t$ は、かけて 1 周期で積分すると 0。同じものどうしは $\dfrac{T}{2}$	9-2
偶関数・奇関数	$f(-t)=f(t)$ なら $b_n=0$、$f(-t)=-f(t)$ なら $a_n=0$。残りは半周期の 2 倍 $\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2}$	9-2
半区間の展開	0 から L だけの形：$b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$	9-2
パーセバルの等式	2 乗の平均$= \left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\sum(a_n^2+b_n^2) = \sum\lvert c_n\rvert^2$ （全体の電力＝成分ごとの電力の和）	9-2 9-3
複素フーリエ級数	$f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$、$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$	9-3
c_n と a_n・b_n	$c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$、$c_{-n} = \overline{c_n}$、$c_0 = \dfrac{a_0}{2}$。振幅は $2\lvert c_n\rvert$	9-3
熱方程式・弦	棒（両はし 0）：$T = \sum b_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}\sin\dfrac{n\pi x}{L}$。弦：$\sin\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi ct}{L}$ の和（周波数 $\dfrac{nc}{2L}$）	9-1 9-2
フーリエ変換	$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$、もどす式 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$	9-4
よく使う変換	パルス（高さ 1、$\lvert t\rvert<1$）$\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$、$e^{-at}$（$t\geqq 0$）$\dfrac{1}{a+j\omega}$、$e^{-a\lvert t\rvert}$ は $\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$、$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ は $\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	9-4
変換の性質	$f(t-t_0)\to e^{-j\omega t_0}F(\omega)$、 $f(t)\cos\omega_c t \to \dfrac{F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)}{2}$、 $f'(t)\to j\omega F(\omega)$	9-4

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
DFT	$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-j2\pi km/N}$。周波数のきざみ $\dfrac{1}{N\Delta t}$、振幅は $\dfrac{2\lvert X_k\rvert}{N}$	9-4
サンプリング定理	いちばん高い周波数の 2 倍より大きい f_s でとる。$\dfrac{f_s}{2}$ より上は、ほかの周波数に化ける（エイリアシング）	9-4

6 ラプラス変換・伝達関数・極の公式

変換の行と性質は、変換表（608 ページ）にあります。

公式・きまり	式	章
ラプラス変換	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$。小文字は時間の世界、大文字は s の世界	9-5
微分の行	$\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$、$\mathcal{L}[f''] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	9-5
微分方程式の解き方	①変換する　② $X(s) =$ の形にわる　③部分分数に分ける　④表を逆に引いて、たす	9-7
2 階の式	$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = u$ なら $(s^2 + a_1s + a_0)X = U(s) + (s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)$	9-7
たたみこみ	$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - t_1)\, g(t_1)\, \mathrm{d}t_1$ を変換すると $F(s)\, G(s)$	9-6
初期値・最終値	$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$、$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$（落ち着くときだけ）	9-6
伝達関数	$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$（はじめの値をすべて 0 にする）。$Y = GU$。$G(0)$ はゆっくり変えたときの倍率	9-8
つなぎ方	直列 G_1G_2、並列 $G_1 + G_2$、引いてもどすフィードバック $\dfrac{G_1}{1 + G_1G_2}$	9-8

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
応答	インパルス応答は $G(s)$ を、ステップ応答は $\dfrac{G(s)}{s}$ をもどしたもの	9-6 9-8
1 次おくれ	$\dfrac{K}{\tau s+1}$：ステップ応答 $K(1-e^{-t/\tau})$、極 $-\dfrac{1}{\tau}$	9-8 9-9
2 次おくれ	$\dfrac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2}$：極 $-\zeta\omega_{\mathrm{n}}\pm j\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$、行きすぎ $e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$	9-9
周波数応答	$s=j\omega$ を入れた $G(j\omega)$。倍率 $\lvert G(j\omega)\rvert$、おくれは角。$20\log_{10}\lvert G(j\omega)\rvert$ dB。直列は dB のたし算	9-8
極・零点	伝達関数の分母 $=0$ の s が極（×）、分子 $=0$ の s が零点（○）。極 p ごとに動きに e^{pt} が入る	9-9
安定	すべての極の実部が負。2 次の分母は係数がすべて正。3 次 $s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ は係数がすべて正で $a_2a_1>a_0$	9-9

7 状態方程式と行列の指数関数の公式

公式・きまり	式	章
状態方程式	$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+Bu$、$y=C\vec{x}$（$\vec{x}$ は状態、u は入れるもの、y ははかるもの）	9-10
落ち着く条件	何も入れないとき、A の固有値（$\det(A-\lambda I)=0$ の解）の実部がすべて負	9-10 9-11
状態フィードバック	$u=-K\vec{x}$ を入れると $\dot{\vec{x}}=(A-BK)\vec{x}$。$A-BK$ の固有値を選ぶ	9-10
コンピュータのくり返し	$\vec{x}_{k+1}=A_{\mathrm{d}}\vec{x}_k$、$A_{\mathrm{d}}=I+(A-BK)\,\Delta t$。固有値の大きさがすべて 1 より小さければ落ち着く	9-10
伝達関数	$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$。極は $\det(sI-A)=0$ の解（$=A$ の固有値）	9-8 9-10

つぎのページへつづく

公式・きまり	式	章
行列の指数関数	$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots = \lim_{n\to\infty}\left(I + A\frac{t}{n}\right)^n$。$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$	9-11
対角化	$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$（P は固有ベクトルを並べた行列、e^{Dt} は対角に $e^{\lambda t}$）	9-11
複素数の固有値	$\sigma \pm j\omega$ なら、$N = A - \sigma I$ として $e^{At} = e^{\sigma t}\left(\cos\omega t\, I + \frac{\sin\omega t}{\omega}N\right)$	9-11
ラプラス変換で	$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$。入れるものがあれば $\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + BU(s))$	9-11
送電線	$M^2 = \gamma^2 I$ なら $e^{M\ell} = \cosh\gamma\ell\, I + \frac{\sinh\gamma\ell}{\gamma}M$（四端子定数）	9-11
指数法則	$e^{A+B} = e^Ae^B$ は $AB = BA$ のときだけ	9-11

8 表計算・Python の使い方

表計算は、A 列が時刻（または点の番号・角）、1 行めが成分の名前（周波数か番号 n）です。上から下へ時間が進みます（2-18・6-2 の型）。

すること	書き方（例）	意味・答え	章
成分をたす	`=B$2*SIN(2*PI()*B$1*$A3/1000)`	A 列は ms、1 行めは Hz、2 行めは大きさ	9-0
角でかく	`=B$2*SIN(B$1*RADIANS($A3))`	SIN はラジアンで受けとる	9-1
かけて平均の 2 倍	`=$B2*SIN(C$1*RADIANS($A2))` `=2*AVERAGE(C2:C37)`	方形波の b_1 は 1.2749（本当は 1.2732）	9-1 9-2

つぎのページへつづく

すること	書き方（例）	意味・答え	章
ラプラス変換を数値で	`=EXP(-2*A2)`、`=B2*C2` `=(D2+D3)/2*0.1`	台形でたす。$s=2$ の $\mathcal{L}[1]$ は 0.50167	9-5 9-6
1 歩ずつ進める（オイラー法）	`=B2+C2*0.1`、`=C2+D2*0.1` `=-3*C2-2*B2`（D 列の加速度）	車 A。表を引いた答えと比べる（6-2 の型）	9-7
FFT（Python）	`X = np.fft.rfft(x)` `freq = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)`	振幅は `2*np.abs(X)/N`	9-0 9-4
8 点の DFT	`np.fft.fft(x)`	複素数のまま出る	9-4
方程式の解（極）	`np.roots([1, 3, 2])`	係数は次数の高い順 答えは `[-2. -1.]`	9-7 9-9
固有値	`np.linalg.eigvals(A)`	複素数の形で出る	9-10 9-11
行列の指数関数	`scipy.linalg.expm(A*t)`	e^{At}	9-11
部分分数・応答	`scipy.signal.residue`、`lsim`	確かめにだけ使う	9-7 9-8

- `$` は、コピーしても動かない印です。`B$1` はいつも 1 行め（成分）を、`$A3` はいつも A 列（時刻）を読みます（9-0）。
- 表計算の `SIN`・`COS` は、角をラジアンで受けとります。度で入れたときは `RADIANS` で直します（6-9・9-1）。
- FFT の答え X_k は、大きさを $\frac{2}{N}$ 倍して振幅にします（0 Hz の成分だけは $\frac{1}{N}$ 倍）。片側だけ見ているので 2 倍、N 個たしたので N でわります（9-4）。
- `np.roots` などの答えは、手で計算したあとの確かめに使います。部分分数の係数や行列の積を、Python に任せて途中の式を省かないようにします（9-7・9-11）。

プログラムのひな形（9-0・9-4・9-11）

上は、ラの音（440・880・1320 Hz、大きさ 1・0.5・0.25）を FFT で分けるプログラム（9-0・9-4）。下は、車 A・車 B の極と、車 A の e^{At}（$t = 1$）を求めるプログラム（9-9・9-11）です。

Python

```
import numpy as np
fs = 8000                          # 1 秒に何回はかるか
t = np.arange(fs) / fs             # 1/8000 秒ごとの 8000 個の時刻
x = (np.sin(2*np.pi*440*t) + 0.5*np.sin(2*np.pi*880*t)
     + 0.25*np.sin(2*np.pi*1320*t))   # 3 つの成分をたした音
X = np.fft.rfft(x)                 # FFT（周波数の世界へ）
freq = np.fft.rfftfreq(len(x), 1/fs)  # 1 つ 1 つの成分の周波数
A = 2*np.abs(X) / len(x)           # 成分の大きさ（振幅）にそろえる
print(freq[A > 0.1])               # 大きさが 0.1 より大きい周波数
print(np.round(A[A > 0.1], 3))     # その大きさ（小数第 3 位まで）
```

実行結果

```
[ 440.  880. 1320.]
[1.   0.5  0.25]
```

Python

```
import numpy as np
from scipy.linalg import expm
print(np.roots([1, 3, 2]))         # 車 A の特性方程式の解（極）
print(np.roots([1, 2, 5]))         # 車 B の特性方程式の解（極）
A = np.array([[0, 1],
              [-2, -3]])           # 車 A の状態の行列（7-8）
np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)  # 小数第 4 位まで
print(expm(A*1.0))                 # t = 1 の行列の指数関数
```

実行結果

```
[-2. -1.]
[-1.+2.j -1.-2.j]
[[ 0.6004  0.2325]
 [-0.4651 -0.0972]]
```

⑨ 専門書の書き方との対応

大学の本では、同じものを別の記号やことばで書きます。9-1〜9-11 の「専門書をのぞいてみよう」で読みかえたものと、委員会で決めたこの本の書き方を集めました。信号処理・制御の本の記号（$X(\omega)$、フィードバックの $H(s)$、ステップの $u(t)$・$1(t)$、ずれの $e(t)$、PID など）は 9-12 の表（552 ページ）に、第 1〜9 巻の記号の訳は 9-13 の⑰（574 ページ）にあります。

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
i（数学・物理の本の虚数単位）	j（電気の本と同じ）	9-3 9-4
$f(t)=a_0+\sum(a_n\cos n\omega_0 t+\cdots)$	定数の項を平均 a_0 とする形。この本の $\frac{a_0}{2}$ が、その本の a_0	9-1
$\hat{f}(n)$、$\int_{-\pi}^{\pi}$、$\sim$	c_n、1 周期のどこからでもよい積分、「この級数を対応させる」	9-3
第 n 調波の実効値 I_n	$\sqrt{2}\,I_n=2\lvert c_n\rvert$（振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$）	9-3
$\mathcal{F}[f]$、$\hat{f}(\xi)$、$e^{-2\pi i x\xi}$	$F(\omega)$。周波数 ξ〔Hz〕で書くと、2π が肩に入り、前の数がつかない	9-4
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を両方の式に	この本は、もどす式だけに $\frac{1}{2\pi}$（電気・制御の本の多数派）	9-4
$F(j\omega)$	$F(\omega)$（ラプラス変換の s に $j\omega$ を入れた形として書く本）	9-4
$\mathcal{L}\{f(t)\}$、$\mathrm{Re}\,s$	$\mathcal{L}[f(t)]$、s の実部 σ	9-5
$u(t-a)$（ステップ関数）	$H(t-t_0)$（この本の u は入れるもの）	9-6
畳み込み $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	たたみこみ。中の時刻 τ は、この本の t_1	9-6
ブロムウィッチ積分、ヘビサイドの展開定理、留数	名前の上の式（この本では使わない）、かくす方法、部分分数の係数	9-7

つぎのページへつづく

専門書の書き方	この本の書き方・意味	章
閉ループ伝達関数 $W(s)$、一巡伝達関数	フィードバックでつないだ全体、1 周の倍率 G_1G_2	9-8
$N(s)/D(s)$、根、左半平面、漸近安定	分子／分母、解、左半分、安定（やがて 0 に近づく）	9-9
フルビッツ（ラウス・フルビッツ）の判別法	係数による安定の判定（3 次は $a_2a_1 > a_0$）	9-9
$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$、$y = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$、$u = -\mathbf{f}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$	$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu$、$y = C\vec{x}$、$u = -K\vec{x}$	9-10
可制御性行列 $[\mathbf{b}\ \ A\mathbf{b}]$、極配置	可制御（2×2 は $\det(B\ \ AB) \neq 0$）、固有値を選ぶ	9-10
z 変換	コンピュータのくり返しの式を変換する方法（名前だけ）	9-10
$\exp(At)$、状態遷移行列 $\Phi(t)$	e^{At}（t 秒進める行列）	9-11

できるようになったことチェック表

各章の「ふりかえり」を集めた表です。章を学び終えたら 1 回め、物理シリーズに進む前に 2 回めのチェックをしよう。できなかった所は、ページにもどって読みなおします。

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
9-1	sin の波をたして方形波に近づくのを表計算で確かめ、スペクトルを読める。	44	☐	☐
	フーリエ級数の形を書き、方形波・のこぎり波の係数を、ふつうの定積分で求められる。	47	☐	☐
	棒の熱と弦のゆれを、変数分離とフーリエ級数で解ける。	56	☐	☐
9-2	ちがう周波数の sin どうしの積を 1 周期でたすと 0 になることを、表計算とグラフで確かめられる。	85	☐	☐
	直交性を使って、係数が「かけて積分し、長さの 2 乗でわる」で取り出せるわけを説明できる。	89	☐	☐
	場合分けの表 9-2 と流れ図で、波の形に合った楽な求め方を選び、係数を計算できる。	93	☐	☐
9-3	反対向きに回る 2 本の矢印をたすと cos の波になることを作図で確かめ、「負の周波数」の意味を言える。	127	☐	☐
	a_n・b_n から複素フーリエ係数 $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ を求め、両側のスペクトルを読める。	130	☐	☐
	場合分けの表を使って c_n を e の定積分で求め、回路に入れた周期の波や、輪の形の針金の熱を計算できる。	137	☐	☐
9-4	口笛・声・手をたたく音のスペクトルのちがいを説明でき、短いパルスほどスペクトルが広がることを言える。	166	☐	☐
	フーリエ変換 $F(\omega)$ の記号を読み、方形パルスの変換をふつうの定積分で求め、表計算の和で確かめられる。	169	☐	☐
	場合分けの表を使って変換を求め、DFT・FFT の結果を読み、サンプリング定理とエイリアシングを説明できる。	175	☐	☐
9-5	「微分→ s をかける」の辞書を使って、冷めるお湯の微分方程式を s の式に書きかえ、表でもどして答えを出せる。	218	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1回め	2回め
	ラプラス変換の記号を「名前」として読み、辞書（変換表）の行を、定義の積分で1回だけ作れる。	223	☐	☐
	微分の行 $sF(s)-f(0)$ を部分積分で導き、場合分けの表9-6（A・B・E）を使って微分方程式を変換できる。	226	☐	☐
9-6	表計算で $f(t)e^{-st}$ を台形でたし、変換表の値と同じになることを確かめられる。	251	☐	☐
	t^n・sin・cos と、e^{-at} がかかった形の変換表の行を、部分積分・オイラーの公式・s のずらしで作れる。	252	☐	☐
	場合分けの表9-6と流れ図を使って、おくれ・パルス・デルタ関数・たたみこみをふくむ関数を変換し、初期値・最終値の定理で確かめられる。	265	☐	☐
9-7	微分方程式を「変換する・わり算で解く・部分分数に分ける・表でもどす」の4つの手順で解く流れを、図とオイラー法の表で説明できる。	295	☐	☐
	分母がちがう1次式のかけ算になる式を、部分分数に分けて、表を逆に引いて時間の関数にもどせる。	301	☐	☐
	場合分けの表9-7を使って、重解・分母が0になる s が複素数の式・入力のある式・おくれて始まる式・最後の値だけの場合も、もどし方を選んで計算できる。	307	☐	☐
9-8	「入れると出てくる」箱を、伝達関数 $G(s)=Y(s)\div U(s)$ で表せることを、ブロック線図と表計算で説明できる。	349	☐	☐
	微分方程式から伝達関数を作り、箱を直列・並列につないだ伝達関数と、ステップ応答・インパルス応答を求められる。	352	☐	☐
	場合分けの表9-8を使って、フィードバック・状態方程式・周波数応答（dB）の場合も、伝達関数を求めて使える。	357	☐	☐
9-9	伝達関数の分母が0になる s（極）を×で打ち、その場所から動き方を当てられる。	394	☐	☐
	1次おくれ・2次おくれの極から、時定数、行きすぎ、最初の山の時刻を求められる。	400	☐	☐
	すべての極の実部が負かどうかで安定を判定し、フィードバックで動く極、3次の判定、残るずれを計算できる。	405	☐	☐

つぎのページへつづく

章	できるようになったこと	ページ	1 回め	2 回め
9-10	手のひらに立てた棒の「かたむき」と「たおれる速さ」を状態として、状態の点の動きの図を読める。	446	☐	☐
	ばね・水そう・回路・倒立振子の式を状態方程式に書き、A の固有値で落ち着くかを判定できる。	449	☐	☐
	状態フィードバックで固有値を選び、コンピュータの中のくり返しで落ち着く条件も判定できる。	462	☐	☐
9-11	オイラー法のくり返しを表計算で計算し、行列の指数関数 e^{At} に近づくのを確かめられる。	495	☐	☐
	対角の行列と対角化で e^{At} を計算し、状態方程式を解ける。	500	☐	☐
	場合分けの表で e^{At} の求め方を選び、固有値で落ち着くかを判定できる。	503	☐	☐
9-12	音楽・写真の圧縮で、周波数の成分に分けて小さな成分をけずっていることを説明できる。	540	☐	☐
	通信・MRI・機械の診断で、FFT と直交性が働いていることを言える。	546	☐	☐
	PID 制御の 3 つの項の役割を、極と最終値の定理のことばで説明できる。	547	☐	☐
9-13	7 本の路線の名前と終点を言い、全 9 巻の路線図でたどれる。	557	☐	☐
	路線が合流した 5 つの所を、式と例で説明できる。	562	☐	☐
	専門書の式を、名前の段で読み、記号を訳し、4 つの道具で計算できる。	573	☐	☐

物理シリーズへ

小学 1 年の「リンゴは何個？」から始まった『物理を理解するための数学』は、この第 9 巻で終わりです。次は物理シリーズ（全 5 巻）で、ここまでの道具を使って、機械・熱・波・電気・原子のしくみを読みといていきます。物理の本の道しるべと「思い出そう」には、この本の章の番号（9-8 など）が書いてあります。忘れたら、その章にもどれば大丈夫です。

物理の「なぜ？」と、この本の章

物理シリーズの章は、身近な「なぜ？」から始まります。その答えにたどり着くまでに使う、この本の章の例です（物理シリーズの構成案から）。

物理の章	なぜ？	この本の章
力-4	ジェットコースターは、最初の山より高く上がれる？	4-12 8-4 8-7 8-10
熱-11	二重窓にすると、なぜ部屋が冷えにくい？	6-4 8-12 8-13 9-1
波-2	洗濯機は、なぜ回り始めにガタガタゆれることがある？	3-12 6-10 6-13 9-8
波-4	エアコンは、どうやって部屋をちょうどよい温度に保つ？	9-6 9-8 9-9 9-10
波-11	動画の車輪が、逆に回って見えることがあるのはなぜ？	3-12 3-17 9-4
電-9	充電器をコンセントからぬいても、ランプがしばらく光っているのはなぜ？	6-4 6-12 9-7
原-5	電子は、原子の中のどこにいる？	6-12 7-8 9-1 9-3
原-12	大昔の木や骨の年代は、どうやってわかる？	3-11 6-4 6-14
原-15	原子炉は、どうやって反応を一定に保つ？	6-2 6-4 8-12 9-9

物理シリーズの各巻でよく使う数学の巻と、第 9 巻の道具を使う物理の章 12 の一覧は、9-13 の⑳「数学の道具を、物理で使う」（578 ページ）にあります。

デルタ

第 1 巻の「リンゴは何個？」から、ここまで来たね。たし算も、微分も、ラプラス変換も、みんな「わからないことを、わかる形に直す」道具だったよ。次は物理シリーズで、その道具を本物の機械や自然に使ってみよう！

物理 第 1 巻 **力学** 動く・回る・ゆがむ・流れる

「なぜ動く？」「なぜ浮かぶ？」に、力で答えよう

使う道具 よく使うのは第 8 巻・第 7 巻。運動方程式とオイラー法（6-2：力-2）、トラス・ロボットの腕の行列（7-5〜7-7：力-5・力-7）、重積分・発散（第 8 巻：力-3・力-6・力-13）。

物理 第 2 巻 **熱学** エネルギーを使いこなす

「なぜ冷える？」「なぜ結露する？」に、熱で答えよう

使う道具 よく使うのは第 8 巻・第 3 巻・第 5 巻。止める量を書いた偏微分（8-3：熱-2・熱-10）、時定数（6-4：熱-11）、熱方程式の変数分離（9-1：熱-11）。

物理 第 3 巻 **波動** ゆれと波を読む

「なぜ空は青い？」「なぜ音が聞こえる？」に、波で答えよう

使う道具 第 9 巻がいちばん活躍する巻。周波数応答（9-8：波-2）、フィードバック制御（9-6・9-8〜9-10：波-4）、弦の固有振動（9-1〜9-3：波-6）、FFT（9-4：波-10・波-11）。

物理 第 4 巻 **電磁気学** 場から回路・機械・電波へ

「なぜモータは回る？」「なぜ電波は届く？」に、電気と磁石で答えよう

使う道具 よく使うのは第 8 巻・第 6 巻。ガウス・ストークスの定理（8-11：電-2・電-6・電-14）、複素数の交流（6-9・6-10：電-10）、過渡現象をラプラス変換で（9-7：電-9）。

物理 第 5 巻 **原子** 量子から半導体・原子力へ

「LED はなぜ光る？」「放射線はどこから出る？」に、原子で答えよう

使う道具 よく使うのは第 6 巻・第 4 巻・第 5 巻。短いパルスほど周波数が広がる（9-4：原-3）、変数分離（9-1・9-3：原-5）、極と安定（9-9：原-15）。

物理シリーズの読み方

① 第 1 巻（力学）から順に読みます。
② 章のはじめの道しるべにある章の番号（6-2 など）が、この本の章です。
③ 記号や公式を忘れたら、このあとの「シリーズ全体のさくいん」で、第 1〜9 巻のどこにあるかを引きます。
④ ★★★★★ の章も「目でわかる」「手でわかる」まで読めば、まず十分です。

さくいん

数字はページです。その語がはじめて出てくるページや、くわしく説明しているページをのせています。

あ

圧縮 540
安定 405
1 次おくれ 397
インパルス応答 260
エイリアシング 192
OFDM 546

か

可制御性 467
過渡現象 322
ギブズ現象 44
逆ラプラス変換 296
行列の指数関数 496
極 394
偶関数・奇関数 98
広義積分 222
高速フーリエ変換（FFT） 188
合流（路線の） 562

さ

最終値の定理 264
サンプリング周波数 184
実際の操作 26
重解 322
周波数 12
周波数応答 371
状態 447
状態フィードバック 462
状態方程式 451
ステップ応答 371
ステップ関数 224
スペクトル 15, 45
線形 231
線形化 455
専門書の読み方 574

た

たたみこみ 263
直交（関数の） 89
デルタ関数 260
伝達関数 350
倒立振子 454

な

2 次おくれ 400
音色 16

は

パーセバルの等式 103
倍音 16, 65
半区間の展開 102
PID 制御 548
フィードバック 361
フーリエ級数 51
フーリエ変換 169
複素フーリエ係数 131
物理シリーズ 578
負の周波数 128

部分分数分解 322
ブロック線図 371
変換表 215
変数分離法 59

ら

ラプラス変換 220
離散コサイン変換 542
離散フーリエ変換（DFT） 185
両側スペクトル 132
零点 395

シリーズ全体のさくいん

第 1 巻から第 9 巻までの、さくいんのことばをまとめました。「第 3 巻 p.12」は、第 3 巻の 12 ページです。同じことばがいくつかの巻に出てくるときは、1 行に並べました。第 1〜3 巻のことばは、ルビと分かち書きの空白をはずして並べました。

あ

RLC 回路……第 6 巻 p.260
圧縮……第 9 巻 p.540
圧力……第 3 巻 p.193
あまり……第 1 巻 p.252
あわせる……第 1 巻 p.68
安定……第 9 巻 p.405
アンペールの法則……第 8 巻 p.462
e（ネイピア数）……第 5 巻 p.340
いくつ分……第 1 巻 p.204
移項……第 2 巻 p.301
以上・以下・未満……第 2 巻 p.42
1 次おくれ……第 9 巻 p.397
1 次関数……第 3 巻 p.135
1 次近似……第 5 巻 p.179
1 次不等式……第 3 巻 p.145
一次変換……第 7 巻 p.77
1 次方程式……第 2 巻 p.341
一のくらい……第 1 巻 p.38
位置ベクトル……第 4 巻 p.386
一般解……第 5 巻 p.454
一般角……第 4 巻 p.272
入れかえても同じ……第 1 巻 p.222
因果関係……第 3 巻 p.459
因数分解……第 3 巻 p.297
$\int$（インテグラル）……第 5 巻 p.242
インパルス応答……第 9 巻 p.260
うずなし流れ……第 8 巻 p.411
うなり……第 4 巻 p.321
運動エネルギー……第 6 巻 p.221
運動方程式……第 6 巻 p.210
エイリアシング……第 9 巻 p.192
SI（国際単位系）……第 2 巻 p.204
x-t グラフ……第 3 巻 p.110
エネルギー……第 5 巻 p.291
円……第 1 巻 p.327
円周角……第 4 巻 p.75
円周率（π）……第 2 巻 p.189
円柱座標……第 4 巻 p.507
円の式……第 4 巻 p.144
円の面積……第 4 巻 p.167、第 5 巻 p.101
オイラー角……第 7 巻 p.285
オイラーの公式……第 6 巻 p.350
オイラーの等式……第 6 巻 p.356
オイラー法……第 5 巻 p.177、第 6 巻 p.71
OFDM……第 9 巻 p.546
おおきいかず……第 1 巻 p.22
オームの法則……第 2 巻 p.320
おもさ……第 1 巻 p.155
おれ線グラフ……第 1 巻 p.307
温度（℃）……第 1 巻 p.188
温度計……第 1 巻 p.187

か

解（方程式の）……第 2 巻 p.338
回帰直線……第 3 巻 p.485
階乗……第 5 巻 p.424
外心……第 4 巻 p.75
外積……第 4 巻 p.475

外接円……第 4 巻 p.239
外挿……第 3 巻 p.113
回転……第 1 巻 p.342
回転（rot）……第 8 巻 p.400
回転行列……第 7 巻 p.243
回転体……第 4 巻 p.175
解の公式……第 3 巻 p.305
ガウスの定理……第 8 巻 p.445
ガウスの法則……第 8 巻 p.451
角……第 1 巻 p.342
角運動量……第 4 巻 p.482
角振動数……第 5 巻 p.378
角速度……第 4 巻 p.286、第 5 巻 p.370
確率……第 3 巻 p.501
かけ算……第 1 巻 p.205
×（かける）……第 1 巻 p.204
過減衰……第 6 巻 p.436
加減法……第 3 巻 p.170
かさ……第 1 巻 p.152
華氏……第 2 巻 p.280
カスティリアーノの定理……第 8 巻 p.96
かずの線……第 1 巻 p.96
可制御性……第 9 巻 p.467
かぞえる……第 1 巻 p.21
かぞえる数……第 2 巻 p.19
加速度……第 5 巻 p.108
片対数グラフ……第 3 巻 p.368
かたむき……第 1 巻 p.310
傾き……第 3 巻 p.131、第 5 巻 p.18
傾きの場……第 6 巻 p.40
カテナリー……第 6 巻 p.402
過渡応答……第 6 巻 p.20
過渡現象……第 9 巻 p.322
加法定理……第 4 巻 p.310
かわった量……第 1 巻 p.84
換算……第 2 巻 p.207
関数……第 3 巻 p.14, 79
刻み幅（Δt）……第 6 巻 p.74
期待値……第 3 巻 p.509
基底……第 7 巻 p.365
ギブズ現象……第 9 巻 p.44
基本ベクトル……第 4 巻 p.446
逆運動学……第 4 巻 p.15, 247、第 7 巻 p.433
逆行列……第 7 巻 p.192
逆数……第 2 巻 p.88
逆ラプラス変換……第 9 巻 p.296
球座標……第 4 巻 p.508
球座標（重積分）……第 8 巻 p.227
Q 値……第 6 巻 p.475
球の体積……第 4 巻 p.173
球の表面積……第 4 巻 p.174
行（表の）……第 1 巻 p.220
境界条件……第 6 巻 p.113
境界値問題……第 6 巻 p.113
共振……第 6 巻 p.464
共振曲線……第 6 巻 p.464
強制振動……第 6 巻 p.461
共分散……第 3 巻 p.452
共役な複素数……第 6 巻 p.290
行列……第 7 巻 p.11, 27
行列式……第 7 巻 p.145
行列の指数関数……第 9 巻 p.496
極……第 9 巻 p.394
極形式……第 6 巻 p.320
極限……第 5 巻 p.62
極座標……第 4 巻 p.79
極大・極小……第 5 巻 p.158
虚数単位……第 6 巻 p.285
虚部……第 6 巻 p.287
キルヒホッフの電圧の法則……第 6 巻 p.539
キログラム（kg）……第 1 巻 p.155
近似（≈）……第 5 巻 p.176

偶関数・奇関数 ..... 第 9 巻 p.98
空間の座標 ..... 第 4 巻 p.438
九九 ..... 第 1 巻 p.207
くらい ..... 第 1 巻 p.38, 56
グラム（g） ..... 第 1 巻 p.155
くり上がり ..... 第 1 巻 p.116
グリーンの定理 ..... 第 8 巻 p.456
くり下がり ..... 第 1 巻 p.117
計算の順番 ..... 第 2 巻 p.234
係数 ..... 第 2 巻 p.260、第 3 巻 p.173
係数を比べる ..... 第 3 巻 p.233
結合法則 ..... 第 7 巻 p.113
原始関数 ..... 第 5 巻 p.268
減衰振動 ..... 第 6 巻 p.257, 445
懸垂線 ..... 第 6 巻 p.402
減衰比 ζ ..... 第 6 巻 p.257
原点 ..... 第 3 巻 p.51
コイル ..... 第 6 巻 p.153
項 ..... 第 2 巻 p.260
交換法則 ..... 第 2 巻 p.239
広義積分 ..... 第 9 巻 p.222
校正 ..... 第 3 巻 p.495
合成（三角関数） ..... 第 4 巻 p.317
合成関数 ..... 第 3 巻 p.88、第 5 巻 p.133
合成関数の微分 ..... 第 5 巻 p.134
高速フーリエ変換（FFT） ..... 第 9 巻 p.188
交点 ..... 第 3 巻 p.165
合同 ..... 第 4 巻 p.30
恒等式 ..... 第 3 巻 p.230
こう配 ..... 第 2 巻 p.118
勾配 ..... 第 8 巻 p.144
公理 ..... 第 4 巻 p.38
交流 ..... 第 5 巻 p.362
合流（路線の） ..... 第 9 巻 p.562
合力 ..... 第 4 巻 p.348
午後 ..... 第 1 巻 p.175
誤差 ..... 第 2 巻 p.130、第 5 巻 p.182
午前 ..... 第 1 巻 p.175
弧度法 ..... 第 4 巻 p.64
こみぐあい ..... 第 2 巻 p.66
固有角振動数 ω_n ..... 第 6 巻 p.211
固有値 ..... 第 7 巻 p.318
固有値問題 ..... 第 6 巻 p.231
固有ベクトル ..... 第 7 巻 p.318
コンデンサー ..... 第 6 巻 p.35, 149

さ

最終値の定理 ..... 第 9 巻 p.264
最小値 ..... 第 5 巻 p.159
最小二乗法 ..... 第 3 巻 p.482
最大値 ..... 第 5 巻 p.159
最大値の原理 ..... 第 8 巻 p.506
最大値・最小値 ..... 第 3 巻 p.272
sin（サイン） ..... 第 4 巻 p.201
sin・cos の微分 ..... 第 5 巻 p.367
錯角 ..... 第 4 巻 p.33
座標 ..... 第 3 巻 p.51
座標の変換 ..... 第 7 巻 p.254
差分法 ..... 第 8 巻 p.555
サラスの方法 ..... 第 7 巻 p.154
三角関数 ..... 第 4 巻 p.274
三角形 ..... 第 1 巻 p.324
三角形の面積 ..... 第 4 巻 p.164
三角比 ..... 第 4 巻 p.201
残差 ..... 第 3 巻 p.477
3 重積分 ..... 第 8 巻 p.225
三相交流 ..... 第 6 巻 p.362
散布図 ..... 第 3 巻 p.445
サンプリング周波数 ..... 第 9 巻 p.184
三平方の定理 ..... 第 4 巻 p.133
三平方の定理の逆 ..... 第 4 巻 p.140
四角形 ..... 第 1 巻 p.324

四角にならべる……第 1 巻 p.205
時間……第 1 巻 p.172
式の値……第 2 巻 p.275
Σ（シグマ）……第 5 巻 p.236
軸を変えて見る……第 7 巻 p.361
次元……第 4 巻 p.437
時こく……第 1 巻 p.172
仕事……第 4 巻 p.411、第 5 巻 p.286
四捨五入……第 2 巻 p.128
指数……第 2 巻 p.152
次数……第 3 巻 p.220、第 5 巻 p.426
指数関数……第 3 巻 p.335
指数関数の微分……第 5 巻 p.343
指数のきまり……第 3 巻 p.345
指数分布……第 6 巻 p.157
自然対数 ln……第 5 巻 p.343
下つき文字……第 3 巻 p.57
実効値……第 5 巻 p.376
実際の操作……第 9 巻 p.26
実部……第 6 巻 p.287
時定数 τ……第 5 巻 p.347
四分位数……第 3 巻 p.401
斜辺……第 4 巻 p.133
重解……第 6 巻 p.445、第 9 巻 p.322
周期……第 4 巻 p.276、第 5 巻 p.139
重心……第 4 巻 p.387
重積分……第 8 巻 p.207
終端速度……第 6 巻 p.181
10 になるくみ……第 1 巻 p.70
十のくらい……第 1 巻 p.38
10 のまとまり……第 1 巻 p.36
10 のわく……第 1 巻 p.23
周波数……第 9 巻 p.12
周波数応答……第 9 巻 p.371
重力加速度 g……第 5 巻 p.112
J（ジュール）……第 4 巻 p.411
16 進数……第 2 巻 p.370
縮尺……第 4 巻 p.101
順運動学……第 4 巻 p.14, 246
循環……第 8 巻 p.398
瞬間の速さ……第 5 巻 p.24
消去法……第 6 巻 p.511
条件分岐……第 2 巻 p.412
小数……第 1 巻 p.268
小数点……第 1 巻 p.268
小数の位……第 2 巻 p.23
状態……第 9 巻 p.447
状態フィードバック……第 9 巻 p.462
状態方程式……第 9 巻 p.451
常用対数……第 3 巻 p.361
初期位相……第 5 巻 p.378
初期条件……第 5 巻 p.313、第 6 巻 p.42
振動モード……第 6 巻 p.509
ジンバルロック……第 7 巻 p.289
振幅……第 5 巻 p.378
吸いこみ……第 8 巻 p.348
すいの体積……第 4 巻 p.172
すうじ……第 1 巻 p.23
数値……第 2 巻 p.20
数値計算……第 6 巻 p.71
数直線……第 1 巻 p.96
スカラー……第 4 巻 p.344
スカラー場……第 8 巻 p.11, 179
ステップ応答……第 9 巻 p.371
ステップ関数……第 9 巻 p.224
ストークスの定理……第 8 巻 p.456
ストップウォッチ……第 1 巻 p.174
スペクトル……第 9 巻 p.15, 45
正規分布……第 3 巻 p.510
正規方程式……第 7 巻 p.213
正弦定理……第 4 巻 p.239
正射影……第 4 巻 p.419

整数……第 2 巻 p.42
正則……第 7 巻 p.194
正の数……第 2 巻 p.40
正の字……第 1 巻 p.286
成分……第 4 巻 p.376
成分（行列の）……第 7 巻 p.28
正方形……第 1 巻 p.326
積の微分……第 5 巻 p.132
積分するだけで解ける形……第 6 巻 p.104
積分定数 C……第 5 巻 p.269
積（行列の）……第 7 巻 p.106
接線……第 4 巻 p.71、第 5 巻 p.64
接線の式……第 5 巻 p.60
絶対値……第 3 巻 p.59
絶対値（複素数の）……第 6 巻 p.317
接頭語……第 2 巻 p.205
接平面……第 8 巻 p.104
切片……第 3 巻 p.136
セル……第 2 巻 p.388
0 でわる……第 1 巻 p.239
1000（せん）……第 1 巻 p.41
漸化式……第 7 巻 p.390
線形……第 5 巻 p.449、第 9 巻 p.231
線形化……第 5 巻 p.431、第 9 巻 p.455
線形写像……第 7 巻 p.77
線積分……第 8 巻 p.256
センチメートル（cm）……第 1 巻 p.134
千のくらい……第 1 巻 p.41
全微分……第 8 巻 p.109
専門書の読み方……第 9 巻 p.574
相関……第 3 巻 p.446
相関係数……第 3 巻 p.455
増加・減少……第 5 巻 p.157
双曲線……第 3 巻 p.198、第 6 巻 p.393
双曲線関数……第 6 巻 p.391
増減表……第 5 巻 p.157
相似……第 4 巻 p.101
相似（式の形）……第 6 巻 p.540
相似比……第 4 巻 p.102
相対速度……第 4 巻 p.358
速度……第 5 巻 p.37, 107
速度を先に進めるオイラー法……第 6 巻 p.87
素数……第 2 巻 p.80

た

対角化……第 7 巻 p.364
対角行列……第 7 巻 p.360
対数……第 3 巻 p.361、第 5 巻 p.334
対数減衰率 δ……第 6 巻 p.255
体積……第 2 巻 p.153
だいたい……第 1 巻 p.189
代入……第 2 巻 p.275
代入法……第 3 巻 p.167
ダイヤグラム……第 3 巻 p.124
多項式……第 5 巻 p.90
たしかめのしき……第 1 巻 p.254
たし算……第 1 巻 p.68
＋（たす）……第 1 巻 p.68
たたみこみ……第 9 巻 p.263
たんい……第 1 巻 p.134
単位……第 2 巻 p.20
単位円……第 4 巻 p.273
単位円（固有値の）……第 7 巻 p.404
単位行列……第 7 巻 p.43, 113
単位のチェック……第 2 巻 p.213
単位ベクトル……第 4 巻 p.385
単振動……第 5 巻 p.371
弾性エネルギー $\frac{1}{2}kx^2$……第 5 巻 p.291
ダンパー……第 6 巻 p.248
断面二次モーメント……第 8 巻 p.240
ちがい……第 1 巻 p.83
力の分解……第 4 巻 p.209, 380

力のモーメント……第 4 巻 p.470
置換積分……第 5 巻 p.397
中央値……第 3 巻 p.398
鳥かん図……第 8 巻 p.34
ちょう点……第 1 巻 p.324
頂点……第 3 巻 p.262
長方形……第 1 巻 p.326
直線……第 1 巻 p.324
直角……第 1 巻 p.325
直角三角形……第 1 巻 p.326
直径……第 1 巻 p.327
直交……第 4 巻 p.418
直交（関数の）……第 9 巻 p.89
直交行列……第 7 巻 p.252
通分……第 2 巻 p.81
次の瞬間を決めるルール……第 6 巻 p.10
底……第 3 巻 p.361
定義……第 4 巻 p.38
抵抗の係数……第 6 巻 p.180
定数……第 3 巻 p.27、第 5 巻 p.87
定積分……第 5 巻 p.242
テイラー展開……第 5 巻 p.425
定理……第 4 巻 p.39
データロガー……第 3 巻 p.125
デシベル……第 3 巻 p.370
デシリットル（dL）……第 1 巻 p.152
Δ（デルタ）……第 2 巻 p.64
デルタ関数……第 9 巻 p.260
展開……第 3 巻 p.222
展開図……第 4 巻 p.174
電気振動（LC 回路）……第 6 巻 p.227
天気予報……第 6 巻 p.13
電磁波……第 8 巻 p.578
伝達関数……第 9 巻 p.350
転置……第 7 巻 p.40
てんびん……第 1 巻 p.154
電力……第 5 巻 p.150
電力量……第 5 巻 p.292
度（°）……第 1 巻 p.343
導関数……第 5 巻 p.67
等高線……第 8 巻 p.34
等式……第 2 巻 p.296
等式の性質……第 2 巻 p.298
同次座標……第 7 巻 p.290
同次変換行列……第 7 巻 p.291
等速直線運動……第 4 巻 p.389
等値面……第 8 巻 p.46
等比級数……第 7 巻 p.400
等比数列……第 7 巻 p.399
倒立振子……第 9 巻 p.454
同類項……第 2 巻 p.260
（～について）解く……第 2 巻 p.300
特異姿勢……第 7 巻 p.160
特殊解……第 5 巻 p.454
特性インピーダンス……第 7 巻 p.441
特性方程式……第 6 巻 p.426、第 7 巻 p.330
度数分布表……第 3 巻 p.394
ド・モアブルの定理……第 6 巻 p.325

な

内積……第 4 巻 p.415
内挿……第 3 巻 p.112
ながさ……第 1 巻 p.134
ナビエ・ストークス方程式……第 8 巻 p.579
ナブラ……第 8 巻 p.153
何十・何百のけいさん……第 1 巻 p.115
なんしゅうとあといくつ……第 1 巻 p.255
2 回微分……第 5 巻 p.90
2 次おくれ……第 9 巻 p.400
2 次関数……第 3 巻 p.269
2 次近似……第 5 巻 p.422
2 次方程式……第 3 巻 p.293

2 乗に比例……第 3 巻 p.259
2 進数……第 2 巻 p.366
2 点の距離……第 4 巻 p.142
2 倍角……第 4 巻 p.313、第 5 巻 p.375
2 つの変数の関数（2 変数関数）……第 8 巻 p.42
ニュートン……第 5 巻 p.76
ニュートンの冷却の法則……第 6 巻 p.34
音色……第 9 巻 p.16
熱方程式……第 8 巻 p.543
熱容量 C_{th}……第 6 巻 p.107
熱容量……第 6 巻 p.145
のこり……第 1 巻 p.82

は

＝（は）……第 1 巻 p.68
パーセバルの等式……第 9 巻 p.103
倍音……第 9 巻 p.16, 65
バイト……第 2 巻 p.369
ハイパボリック・タンジェント（tanh）
第 6 巻 p.392
はかる数……第 2 巻 p.19
掃き出し法……第 7 巻 p.202
箱ひげ図……第 3 巻 p.402
柱の体積……第 4 巻 p.169
波数……第 8 巻 p.551
パスカルの三角形……第 3 巻 p.506
発散……第 8 巻 p.350
波動方程式……第 8 巻 p.548
ばね定数……第 2 巻 p.319、第 5 巻 p.285
速さ……第 2 巻 p.65、第 5 巻 p.9
半区間の展開……第 9 巻 p.102
半径……第 1 巻 p.327
半減期……第 3 巻 p.339、第 5 巻 p.353
番地……第 2 巻 p.388
反比例……第 2 巻 p.321
判別式……第 3 巻 p.306
比……第 2 巻 p.106
非圧縮……第 8 巻 p.369
PID 制御……第 9 巻 p.548
ひき算……第 1 巻 p.82
－（ひく）……第 1 巻 p.82
ヒストグラム……第 3 巻 p.396
ひっ算……第 1 巻 p.116
ビット……第 2 巻 p.368
1 つ分……第 1 巻 p.204
1 目もり……第 1 巻 p.101, 290
ひとり分……第 1 巻 p.236
比の値……第 2 巻 p.106
微分……第 5 巻 p.67
微分係数……第 5 巻 p.66
微分積分学の基本定理……第 5 巻 p.267
微分方程式……第 5 巻 p.14、第 6 巻 p.18, 32
百のくらい……第 1 巻 p.40
百分率……第 2 巻 p.109
表……第 1 巻 p.286
秒……第 1 巻 p.174
表計算ソフト……第 2 巻 p.387
標準偏差……第 3 巻 p.421
標本調査……第 3 巻 p.512
比例……第 2 巻 p.316
フィードバック……第 9 巻 p.361
v-t グラフ……第 2 巻 p.67
フーリエ級数……第 9 巻 p.51
フーリエの法則……第 6 巻 p.112
フーリエ変換……第 9 巻 p.169
フェーザ……第 6 巻 p.360
ふえる……第 1 巻 p.68
複素数……第 6 巻 p.287
複素フーリエ係数……第 9 巻 p.131
複素平面……第 6 巻 p.315
複利……第 5 巻 p.336
符号……第 2 巻 p.47

物質微分 ..... 第 8 巻 p.553
物理シリーズ ..... 第 9 巻 p.578
物理定数 ..... 第 3 巻 p.30
不定積分 ..... 第 5 巻 p.269
不等号 ..... 第 2 巻 p.41
負の数 ..... 第 2 巻 p.40
負の周波数 ..... 第 9 巻 p.128
部分積分 ..... 第 5 巻 p.402
部分分数分解 ..... 第 9 巻 p.322
振り子の周期 .... 第 2 巻 p.173、第 5 巻 p.430
プログラム ..... 第 2 巻 p.406
ブロック線図 .... 第 3 巻 p.101、第 9 巻 p.371
分 ..... 第 1 巻 p.173
分解能 ..... 第 2 巻 p.370
分散 ..... 第 3 巻 p.421
分数 ..... 第 1 巻 p.270、第 2 巻 p.78
分数の指数 ..... 第 3 巻 p.342
分度器 ..... 第 1 巻 p.344
分配法則 ..... 第 2 巻 p.239
分布定数回路 ..... 第 7 巻 p.439
分母 ..... 第 5 巻 p.63
ペア ..... 第 1 巻 p.20
平均 ..... 第 2 巻 p.126
平均の速さ ..... 第 5 巻 p.21
平均変化率 ..... 第 5 巻 p.66
平行移動 ..... 第 4 巻 p.357
平行四辺形の面積 ..... 第 4 巻 p.163
平方完成 ..... 第 3 巻 p.237
平方根 ..... 第 2 巻 p.172
平方センチメートル（cm^2）..... 第 1 巻 p.361
平方メートル（m^2）..... 第 1 巻 p.362
ページランク ..... 第 7 巻 p.443
べき乗法 ..... 第 7 巻 p.325
ベクトル ..... 第 4 巻 p.344
ベクトルの和 ..... 第 4 巻 p.347
ベクトル場 ..... 第 8 巻 p.11, 179
ヘルムホルツの分解 ..... 第 8 巻 p.582
辺 ..... 第 1 巻 p.324
変位 ..... 第 5 巻 p.208
変域 ..... 第 3 巻 p.31, 89
偏角 ..... 第 6 巻 p.318
変化の割合 ..... 第 3 巻 p.136
変化量 ..... 第 2 巻 p.64、第 5 巻 p.20
変換 ..... 第 7 巻 p.72
変換表 ..... 第 9 巻 p.215
偏差 ..... 第 3 巻 p.418
変数 ..... 第 2 巻 p.408、第 3 巻 p.27
変数分離 ..... 第 6 巻 p.140
変数分離法 ..... 第 9 巻 p.59
偏導関数 ..... 第 8 巻 p.78
偏微分 ..... 第 8 巻 p.76
ポアソン分布 ..... 第 6 巻 p.157
ポアソン方程式 ..... 第 8 巻 p.506
ボイルの法則 ..... 第 3 巻 p.202
ぼうグラフ ..... 第 1 巻 p.288
方向微分 ..... 第 8 巻 p.147
方向余弦 ..... 第 4 巻 p.448
法線ベクトル ..... 第 4 巻 p.449
方程式 ..... 第 2 巻 p.338
放物線 ..... 第 3 巻 p.261
放物線の軸 ..... 第 3 巻 p.262
保存力 ..... 第 8 巻 p.269

ま

マクスウェル方程式 ..... 第 8 巻 p.570
マルコフ連鎖 ..... 第 7 巻 p.393
右上がり ..... 第 1 巻 p.309
右手系 ..... 第 4 巻 p.439
道のり ..... 第 5 巻 p.208
ミリメートル（mm）..... 第 1 巻 p.135
ミリリットル（mL）..... 第 1 巻 p.153
無理数 ..... 第 2 巻 p.188

メートル（m）……第 1 巻 p.138
目分量……第 2 巻 p.124
目もり……第 1 巻 p.53, 96, 186
面積……第 1 巻 p.361
面積分……第 8 巻 p.303
面密度……第 8 巻 p.215
文字式……第 2 巻 p.233
ものさし……第 1 巻 p.55

や

約分……第 2 巻 p.80
ヤコビアン……第 8 巻 p.117
ヤコビ行列……第 7 巻 p.84
有効数字……第 2 巻 p.129
有理化……第 3 巻 p.304
有理数……第 2 巻 p.188
余因子展開……第 7 巻 p.156
余弦定理……第 4 巻 p.241
四端子定数……第 7 巻 p.117

ら

ライプニッツ……第 5 巻 p.76
ラジアン……第 4 巻 p.64、第 5 巻 p.363
ラプラシアン……第 8 巻 p.503
ラプラス変換……第 9 巻 p.220
ラプラス方程式……第 8 巻 p.505
力線……第 8 巻 p.181
力率……第 4 巻 p.323
離散コサイン変換……第 9 巻 p.542
離散フーリエ変換（DFT）……第 9 巻 p.185
立体角……第 8 巻 p.320
リットル（L）……第 1 巻 p.152
lim（リミット）……第 5 巻 p.62
流線……第 8 巻 p.181
流束……第 8 巻 p.298
流量……第 5 巻 p.291
両側スペクトル……第 9 巻 p.132
臨界減衰……第 6 巻 p.436
累次積分……第 8 巻 p.214
累乗……第 2 巻 p.152
√（ルート）……第 2 巻 p.172
0（れい）……第 1 巻 p.54
零点……第 9 巻 p.395
列（表の）……第 1 巻 p.220
列ベクトル……第 7 巻 p.29
連鎖律……第 8 巻 p.111
連続の式……第 8 巻 p.369
連立微分方程式……第 6 巻 p.496
連立方程式……第 3 巻 p.165
ロール・ピッチ・ヨー……第 7 巻 p.278
ローレンツ力……第 4 巻 p.483

わ

わき出し……第 8 巻 p.348
割合……第 2 巻 p.108
わり算……第 1 巻 p.236
÷（わる）……第 1 巻 p.236
わる数……第 1 巻 p.253

メモ

メモ

メモ

物理を理解するための数学　第9巻

波と変化を読みとく

編者　「物理を理解するための数学」編集委員会

委員長　小学校長（まとめ役）

委員　数学・電気工学・機械工学・教育学・量子力学・建築工学・
半導体工学の大学教授、幼稚園教諭、塾講師、
特別支援学校教諭、心理士、科学解説者、小学校教諭

デザイン　ユニバーサルデザイン担当委員

挿絵　イラスト担当委員

版　第 1 版（第 15 回編集委員会）　2026 年 10 月

この本の問題の答えは、巻末の「こたえ」にあります。くわしい解き方は、別冊の問題集と指導書にのせます。

第９巻　波と変化を読みとく　フーリエ解析とラプラス変換

この巻で学ぶこと

第 1 部　フーリエ解析　（9-1〜9-4）

第 2 部　ラプラス変換　（9-5〜9-9）

第 3 部　行列と微分方程式　（9-10〜9-12）

全９巻のならび

1　かぞえる・はかる

2　数と量のことば

3　関数とデータ　きまりを見つける

4　形と向き　図形・三角関数・ベクトル

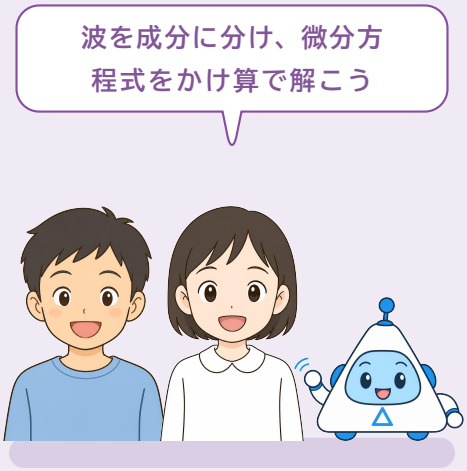
5　変化をつかむ　微分と積分

6　未来を計算する　微分方程式と複素数

7　まとめて計算する　行列

8　空間に広がる量　ベクトル解析

9　波と変化を読みとく　フーリエ解析とラプラス変換



物理を理解するための数学　第 9 巻

「物理を理解するための数学」編集委員会編

ISBN・バーコード
（入稿時に配置）